This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

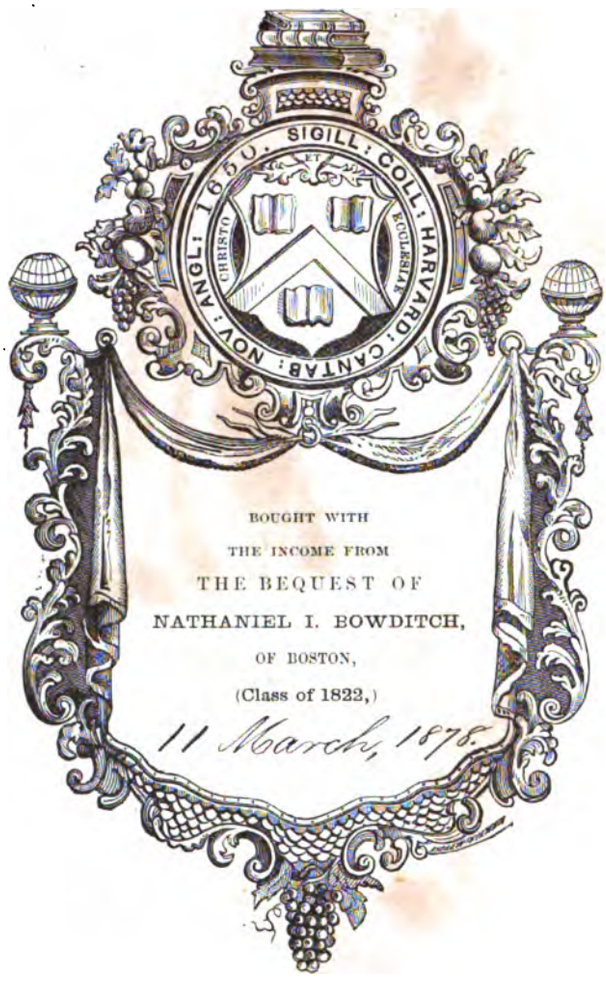
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

A 62.7: 176.2



BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
NATHANIEL I. BOWDITCH,
OF BOSTON,
(Class of 1822,)
11 March, 1878.

ABHANDLUNGEN

VON

FRIEDRICH WILHELM BESSEL.

F. W. BESSEL.

(1839)

ABHANDLUNGEN

FRIEDRICH WILHELM BESSEL.

LEIPZIG,
VERLAG VON WILHELM ENGELMANN.

ABHANDLUNGEN

VON

FRIEDRICH WILHELM BESSEL.

HERAUSGEGEBEN

VON

RUDOLF ENGELMANN,

DR. PHIL.

IN DREI BÄNDEN.

DRITTER BAND:

VI. GEODAESIE. VII. PHYSIK. VIII. VERSCHIEDENES. — LITERATUR.

MIT EINEM BILDNISS BESSEL'S AUS DEM JAHRE 1839, FÜNF LITHOGRAPHIRTEN TAFELN UND DEM FACSIMILE EINES BRIEFES AN ENCKE.

LEIPZIG,

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN.

1876.

VI, 7
Astr. 176.2

18 8, March 11.
Bowditch fund.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

Vorwort.

Mit dem vorliegenden dritten Bande der Bessel'schen Abhandlungen beschliesst der Herausgeber seine Sammlung; war auch eine vollständige Ausgabe nicht erreichbar, aus Gründen, die schon in der Vorrede zum 1. Band Erwähnung fanden, so glaubt er doch nahezu soviel erreicht zu haben, als unter den gegebenen, manche Rücksicht erheischenden Verhältnissen überhaupt möglich war, und im Grossen und Ganzen das vor einem Jahr Beabsichtigte und Versprochene festgehalten und ausgeführt zu haben. In einer Hinsicht und Richtung ist jedenfalls der ursprüngliche Plan noch erweitert zur Ausführung gelangt; es betrifft dies die Abhandlungen der „Astronomischen Untersuchungen". Zwar erschien ein vollständiger Abdruck, mit allem gerade in diesen Aufsätzen umfangreichen Beobachtungsdetail unthunlich, aber die rein theoretischen Untersuchungen, Kern und Wesen der Bessel'schen Methoden, an manchen Stellen auch durch seine numerischen Beispiele erläutert, liessen sich ohne Kürzung bringen, und es wird vielleicht nur an sehr wenigen Stellen der Mangel von Zahlenreihen fühlbar werden. Selbst diese relative Vollständigkeit konnte freilich nur durch eine Ausdehnung des 3. Bandes erlangt werden, welche die ursprünglich gezogenen Grenzen nicht unerheblich überstieg; aber begreiflich und entschuldbar wird diese Abweichung erscheinen, wenn das dafür Gewonnene in Betracht gezogen wird; einige Bogen mehr fallen schliesslich nicht in die Wagschale, wenn damit die Möglichkeit gegeben ist, das Bild der wissenschaftlichen Thätigkeit eines Mannes, selbst in vielen kleinen Zügen, noch klarer und deutlicher auszumalen. In jeder der drei Abtheilungen des Bandes findet sich ein Stück von besonderer Ausdehnung, aber auch von besonderer Wichtigkeit, und eine Seite der Leistungen BESSEL's hätte stets verkümmert oder unvollkommen dargestellt erscheinen müssen, mochte die Gradmessung in Ostpreussen, die Untersuchungen über die Länge des Secundenpendels, oder die Analyse der Finsternisse fehlen. So schien also nach der Ueberzeugung des Herausgebers das einzig Richtige (da ein 4. Band ausgeschlossen war), Alles und speciell die drei genannten grossen Arbeiten zu bringen, mit Ausschluss aber des Zahlendetails, soweit solches nicht für das Verständniss der Arbeit in ihrer allgemeinen Bedeutung, für Erläuterung der Methode und Theorie erforderlich war; dieser Ueberzeugung gemäss hat er gehandelt, gewählt, gekürzt und zusammengezogen; vielleicht nicht stets der Durchschnittsansicht entsprechend, aber sich selbst möglichst getreu und jedenfalls immer kenntlich, seine Zuthaten durch Druck in [ ] vom Original streng unterscheidend.

Was die einzelnen Arbeiten angeht, so waren Auszüge aus der „Gradmessung in Ostpreussen" (Abh. 135) ursprünglich nur in sehr geringem Umfange beabsichtigt; eine genauere Ansicht des Werks ergab indessen mit dem Wunsch auch die Möglichkeit, das Wesentliche der grossen Arbeit BESSEL's und BAEYER's zu bringen, ohne die Einheit des Ganzen und den Zusammenhang seiner Theile zu gefährden. Bekräftigt und unterstützt wurde der Herausgeber in seiner Anschauung durch den von competentester Seite erfolgten Ausspruch, dass in der That möglichst vollständige Auszüge des im Buchhandel fehlenden Werkes sehr wünschenswerth seien. So wurden denn nur die eigentlichen Beobachtungen und numerischen, den speciellen Fall der vorliegenden Gradmessung betreffenden Daten ausgeschlossen; dagegen Alles von allgemeinerem Interesse, Entstehung und Plan der Gradmessung, Untersuchungs- und Beobachtungsmethoden, Rechnungsvorschriften, sowie die Endresultate unverkürzt wiedergegeben. Von den 7 Tafeln des Originals durfte die eine, das Terrain der Basismessung, wegbleiben; die 6 andern konnten, unbeschadet der Deutlichkeit und zum Theil in kleinerem Maassstab, auf 3 reducirt werden; diese Reduction hat der Herausgeber mit möglichster Sorgfalt selbst ausgeführt. Für die Erlaubniss übrigens, das Werk in dieser Gestalt zum Abdruck bringen zu dürfen, fühlt sich derselbe dem

Mitarbeiter BESSEL's, Herrn Generallieutenant Dr. BAEYER Exc., zu besonderem Danke verpflichtet. — Aehnliches wie für die „Gradmessung" gilt auch für die Untersuchung der Länge des Secundenpendels (Abh. 137); die Einheit des Ganzen lief hier noch weniger Gefahr, da BESSEL selbst schon die Beobachtungen vollständig von dem theoretischen Theil getrennt und in den Anhang verwiesen hat; als Beispiel der Beobachtungsmethode ist indessen in vorliegender Sammlung der „erste Versuch" vollständig mitgetheilt; das Uebrige natürlich ohne Kürzung. — Bei der dritten grossen Abhandlung (169) endlich, der Analyse der Finsternisse, glaubte der Herausgeber am zweckentsprechendsten zu verfahren, indem er den Gang der numerischen Rechnung bei dem von BESSEL gewählten Beispiele andeutete, ohne die Zahlen selbst aufzuführen.

Die Folge der Abhandlungen, die in der Geodäsie und Physik, wie in den Abhandlungen des 1. und 2. Bandes eine wesentlich sachliche ist, musste in der letzten Gruppe VIII „Verschiedenes" zu einer mehr chronologischen werden, obschon wo es anging auch hier durch Verbindung der Stücke ähnlichen Inhalts der innere Zusammenhang der Bessel'schen Arbeiten gewahrt wurde. Die Zahl der in dieser Abtheilung enthaltenen, sehr verschiedenen Zweigen der Wissenschaft angehörigen Aufsätze hat aus mehreren Gründen die anfangs dafür bestimmte beträchtlich überstiegen. Die Abhandlungen 167—172 wurden aus dem 2. Band der „Astronomischen Untersuchungen" genommen; zum Theil zwar, wie schon erwähnt, mit Kürzung oder Ausschliessung des numerischen Details, aber es konnte dadurch die Reihe der in diesem Werke niedergelegten Arbeiten bis auf eine einzige (die Beobachtung der Sonnenfinsterniss vom 15. Mai 1836) vollständig wiedergegeben werden, und dies zu unterlassen lag kein zwingender Grund vor. Ferner ergab eine nochmalige Durchsicht sämmtlicher Arbeiten und Schriften BESSEL's, veranlasst durch die Anfertigung des „allgemeinen Verzeichnisses", eine Reihe kleinerer Aufsätze, Bemerkungen, Briefe und Auszüge aus solchen (173—179), die, in irgend einer Hinsicht werthvoll und charakteristisch, zu nachträglicher Aufnahme wohl geeignet erschienen. Die „Erinnerungen an FLEMMING" (180) rühren nur zum kleinsten Theil von BESSEL her; der Aufsatz ist indessen hier unverkürzt abgedruckt, da er, bei geringem Umfang, nicht ohne Interesse für Beurtheilung von Leistungen und Leben des jung verstorbenen Schülers BESSEL's ist. Ueberdies findet er sich an fast unzugänglichem Orte, und die collationirte Abschrift, die der Herausgeber den Bemühungen mehrerer Herren verdankt, war nicht ohne Umstände zu erlangen. In gewissem Grade gilt dies auch von den letzten, BESSEL allein angehörigen Stücken, 181 und 183—185; auch sie sind in Zeitungen enthalten, die — zumal in ihren älteren Jahrgängen — kaum über einen engsten Kreis hinausgedrungen sein möchten, vervollständigen aber das Bild Bessel'scher Thätigkeit nach verschiedener, wenn gleich nicht streng wissenschaftlicher, Richtung so sehr, dass sie schon aus diesem Grunde Berücksichtigung verdienten. Die Lebensskizze WILLIAM HERSCHEL's (181) mag (neben dem bekannten Aufsatz über OLBERS, 182) als Beispiel Bessel'scher Darstellungsweise im Gebiete populärer Biographik gelten; die Arbeit über Uebervölkerung (184) lehrt ihn in Behandlung volkswirthschaftlicher Fragen, das letzte „Schreiben etc." (185) als Menschen und politischen Charakter kennen und schätzen. —

Den Abhandlungen selbst schliessen sich literarische Angaben an, zunächst das „allgemeine Verzeichniss der Schriften BESSEL's". Die Grundlage zu diesem bildete das von BUSCH in den Königsberger Beobachtungen 24. Abth. veröffentlichte Verzeichniss. Eine beiläufige Vergleichung desselben mit den Originalen liess indessen schon eine ziemliche Zahl von Ungenauigkeiten und Irrthümern erkennen und eine nochmalige strenge Collationirung und Durchsicht der Zeitschriften rathsam erscheinen. Es wurden demgemäss sämmtliche auf den Bibliotheken der hiesigen Universität und Sternwarte vorhandenen rein astronomischen, wie mathematisch-naturwissenschaftlichen Zeitschriftfolgen, ohne Rücksicht auf das Busch'sche Verzeichniss, durchgegangen und ausgezogen, und dabei nicht nur die Schriften BESSEL's selbst, im weitesten Sinne des Wortes, sondern auch alle Uebersetzungen und Auszüge Anderer aus seinen Schriften und Abhandlungen in Betracht genommen. Auf diese Art ist das vorliegende, mit BUSCH verglichen, in vielen Titeln verbesserte und vermehrte Verzeichniss entstanden; es wird, wie zu hoffen, einer strengeren Prüfung standhalten, obschon es absolute Vollständigkeit begreiflicherweise nicht beansprucht. Die wenigen Stücke bei denen eine Controle von BUSCH nicht möglich war, z. B. einige Artikel aus der Königsberger Hartung'schen Zeitung, werden wohl nicht mit Fehlern behaftet sein. Das Natürlichste nun, eine neue, streng chronologische Anordnung und fortlaufende Numerirung aller 487 Stücke, konnte leider nicht als maassgebend genommen werden, da bei einer solchen fast alle Verweisungsnummern im Text der drei Bände eine Aenderung erfahren haben würden; es musste vielmehr die Anordnung von BUSCH beibehalten und alles Eingeschaltete durch * bezeichnet werden. Glücklicherweise betreffen diese Ergänzungen

nur in den wenigsten Fällen Arbeiten von BESSEL selbst, sondern meist Auszüge Anderer; und selbst unter diesen wenigen findet sich nur eine Einzige (der Aufsatz 148 über Irrlichter), die in der vorliegenden Sammlung aufgenommen ist. — Ein zweites, selbstverständlich nur kurzes Verzeichniss enthält die Schriften, Aufsätze und Bemerkungen Anderer über BESSEL (25 Nummern); politische Zeitungen blieben auch hier unberücksichtigt. —

Dem Bande steht ein zweites Bild BESSEL's voran, nach dem Jensen'schen Oelgemälde, welches der Besitzer, Herr Prof. ERMAN, freundlichst zur Verfügung stellte, photo-lithographisch hergestellt*). Manchem mag es überflüssig erscheinen; das zum 1. Band gehörige Wolf-Mandel'sche Porträt soll indessen, obschon es BESSEL in nicht viel jüngerer Zeit darstellt (es ist 1834 [1838?] gemalt), nach dem Urtheil Nächststehender doch in mancher Hinsicht so wenig genügen, dass jede Gelegenheit, ein besseres zu erlangen, nur mit Freuden ergriffen werden konnte. Auch in rein äusserlicher Hinsicht, im Abbilde selbst, den grossen Astronomen richtiger und vollständiger zur Anschauung zu bringen, entsprach nur der Absicht des ganzen Werks. — Aus gleichem Grunde steht das (Lichtdruck-)Facsimile eines Briefes an ENCKE, dessen Auswahl unter der grossen Zahl vorhandener Herr Prof. BRUHNS gern gestattete, am Schlusse des Ganzen. —

Mit einem Worte möge der Inhalt vorliegender Sammlung noch einmal zusammengefasst und das in ihr Fehlende erwähnt werden. Es enthält der I. Band nach dem Lebensabriss 23 Abhandlungen über die Bewegungen der Körper im Sonnensysteme, und 28 Abhh. aus der sphärischen Astronomie; der II. Band 26 Abhh. über die Theorie der Instrumente, 31 Abhh. aus der Stellarastronomie und 20 Abhh. über verschiedene mathematische Aufgaben und Probleme; der III. Band endlich 11 Abhh. zur Geodäsie, 17 Abhh. zur Physik und 36 zu verschiedenen Theilen der Astronomie gehörige Abhandlungen und Aufsätze; im Ganzen in 185 Nummern 192 Stücke. Von theoretischen Arbeiten dürfte nur das Folgende fehlen: Beiträge zur Theorie der Finsternisse und Berechnungsmethoden derselben (Astron. Nachr. 7), Ueber die Grundgleichung der Theorie der Finsternisse (Astron. Nachr. 14), die Untersuchungen über das Heliometer (Königsb. Beobb. 15. und 17. Abth.), sowie die Theile in der Abhandlung über den Einfluss der Strahlenbrechung auf Mikrometerbeobachtungen (167), die sich auf andere Messapparate als das Heliometer beziehen. Von diesen finden sich die 3 erstgenannten Abhandlungen, zum Theil vollständiger bearbeitet, in der Analyse der Finsternisse (Abh. 169) und in den beiden Arbeiten über die Theorie des Heliometers und das Königsberger Heliometer im Besondern (Abhh. 70 und 71); der Einfluss der Refraction auf Kreis-, Faden-, Netzmikrometer ist, zwar einfacher und weniger ausführlich, aber für practische Zwecke durchaus hinreichend, in der älteren Abhandlung (31) entwickelt; der Herausgeber glaubte sich daher berechtigt, die genannten Aufsätze von seiner Sammlung auszuschliessen; die angeführten Theile des letzteren um so eher, als die Astron. Untersuchungen noch weit verbreitet und bequem zugänglich sind. Ueberdies hätte der vorliegende letzte Band die schon erheblich erweiterten Grenzen, in wie es schien unstatthafter Weise, überstiegen.

Dass die zahlreichen und werthvollen Recensionen BESSEL's über die Arbeiten Anderer hier keine Berücksichtigung finden konnten, bedauert der Herausgeber aus mehr als einem Grunde; indessen wird der Wunsch sie durch Neudruck allgemeiner Kenntniss und Benutzung wieder zu gewinnen, vielleicht noch späterhin die Möglichkeit dazu herbeiführen. — Der gleiche Wunsch darf an dieser Stelle auch hinsichtlich der noch ungedruckten Sachen BESSEL's ausgesprochen werden. Mag auch von fertigen, in sich abgeschlossenen Arbeiten nichts mehr existiren — die Bemühungen darüber zur Gewissheit zu gelangen, haben zu keinem völlig sichern Ergebniss geführt — so würden selbst kürzere Bemerkungen und gelegentliche Aufzeichnungen, besonders aber Briefe, wahrscheinlich noch viel Werthvolles für die Beurtheilung BESSEL's, wie für die Geschichte der Astronomie in den ersten Jahrzehnten des Jahrhunderts Lehrreiches an das Licht bringen; diese Ueberzeugung hat sich wenigstens dem Herausgeber bei Durchsicht der reichhaltigen Briefe an ENCKE aufgedrängt.

LEIPZIG, 27. September 1876.

Der Herausgeber.

*) Nach einer brieflichen Mittheilung des Herrn Prof. ERMAN, malte JENSEN 1839 BESSEL während dessen Aufenthalt in Altona für die neue Pulkowaer Sternwarte, fertigte gleichzeitig aber eine genaue Copie an, welche nach BESSEL's Tode in den Besitz der Familie kam. Nach diesem dem Original wohl gleichwerthigen Bilde wurde von Herrn C. KARDAETZ in Berlin die vortrefflich gelungene Photographie hergestellt, welche dem Lichtdruck (durch OBERNETTER in München) als Vorlage diente.

Berichtigungen und Nachträge.

Erster Band.

pag. XVII. Spalte 1. Zeile 19 v. u. statt: überzeugen lies: überzeugen
„ XXV. „ 2. „ 11 v. u. „ 1850 lies: 1858
„ XXVI. „ 2. „ 14 v. u. „ 1820 „ 1819
„ XXVIII. „ 1. „ 5 v. o. „ verdient lies: verdiente
„ 307. „ 2. „ 5 v. o. „ $0''{,}020565$ „ $0^s{,}020565$
Zum Beispiel der Abh. 27 vgl. auch die Bemerkungen und Berichtigungen von Lindenau: Mon. Corresp. XXIV, 563 (29* d. a. Verz.).

Zweiter Band.

pag. 25. Spalte 2. Zeile 15 v. o. statt: , nach „Unbekannten“ lies: ;
„ 27. „ 1. „ 19 v. o. „ das lies: dass
„ 93. „ 1. „ 6 v. o. „ Beegung lies: Bewegung
„ 147. „ 2. „ 17 v. u. „ Vereinigspunkt lies: Vereinigungspunkt
„ 203. „ 2. „ 18 v. o. „ (16) lies: (10)
„ 244. „ 2. „ 5 v. o. „ 1805 „ 1815
„ 282. „ 2. „ 16 v. u. „ $7^h\ 20^m\ 44^s$ lies: $7^h\ 20^m\ 34^s$
„ — „ 2. „ 6 v. u. „ 7 57 59 „ 7 58 5
„ 304. „ 2. „ 18 v. u. „ $+3''{,}83$ lies: $+4''{,}83$ (bei Anon. 34; Fehler im Original.)
„ 402. „ 2. „ 14 und 15 v. o. statt: Metho-thoden lies: Metho-den
Zu Abh. 65 Anhang p. 74 ist zu ergänzen: *) [396 d. a. Verz. —]
„ „ 71 p. 157 fl. vgl. Wichmann, Astr. Nachr. **48**, p. 20.
„ „ 79 p. 206 Anm. **) ist zu ergänzen: 388 d. a. Verz. —
„ „ 91 p. 264 ist zu ergänzen: *) [399 d. a. Verz. —]
Zur Plejadenkarte p. 304. — Der Ort von Anon. 23 ist in der Bonner Durchmusterung, auf welcher die Positionen der Karte beruhen, um $1'{,}9$ zu nördlich angegeben; (ebendaselbst ist ferner zu setzen: in Zone $+22°.563$ „h“ statt K, in Zone $+23°.544$ und $+24°.552$ „h“ statt B; bei *9,4, $+23°.506$ ist h zu streichen). Von dem bekanntlich sehr ausgedehnten und verwaschenen Merope-Nebel ist auf der Karte nur beiläufig die Mitte bezeichnet.

Dritter Band.

p. 191. Spalte 2. Zeile 1 v. u. statt:) lies: }
Zu Abh. 129 p. 16 Anm. *) ist zu ergänzen: 389 d. a. Verz.

Inhalt des dritten Bandes.

pag.

VI. Geodäsie . . . . . 1—138

125. Ueber Berechnung geodätischer Vermessungen . . 1
126. Berechnung eines Dreiecks, dessen Seiten geodätische Linien sind 3
127. Ueber die Berechnung der geographischen Längen und Breiten aus geodätischen Vermessungen . . . 5
128. Ueber einen Aufsatz von Ivory im Philosophical Magazine 15
129. Bessel's Methode der Berechnung geodätischer Vermessungen 16
130. Ueber den Einfluss der Unregelmässigkeiten der Figur der Erde auf geodätische Arbeiten und ihre Vergleichung mit den astronomischen Bestimmungen 19
131. Bestimmung der Axen des elliptischen Rotationssphäroids, welches den vorhandenen Messungen von Meridianbögen der Erde am meisten entspricht . 41
132. Neue Berechnung der Beobachtungen der Polhöhen, auf welchen die zweite in Indien ausgeführte Gradmessung beruhet 47
133. Ueber die Polhöhen, welche der Englischen Gradmessung zum Grunde liegen 53
134. Ueber einen Fehler in der Berechnung der französischen Gradmessung und seinen Einfluss auf die Bestimmung der Figur der Erde 55
135. Gradmessung in Ostpreussen etc. . . . . 62—138
Vorwort 62
I. Grundlinie (§§ 1—12) 64
II. Winkelbeobachtungen (§§ 13—33) 84
III. Berechnung des Dreiecksnetzes (§§ 34—42) . 93
IV. Höhen der Dreieckspunkte über der Meeresfläche (§§ 43—50) 100
V. Verbindung der astronomisch bestimmten Punkte mit dem Dreiecksnetze (§§ 51—61) . 106
VI. Astronomische Beobachtungen (§§ 62—73) . 109
VII. Berechnung der astronomischen Beobachtungen (§§ 74—86) 113
VIII. Resultate (§§ 87—90) 127
Literatur der Astr. Nachr. über Geodäsie, Gradmessungen, Längendifferenzen 138

pag.

VII. Physik . . . . . 139—287

136. Ueber den Einfluss der Dichtigkeit der Luft auf den Gang der Uhren 139
137. Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels . . . . . 139—209
I. Bestimmung der Länge des einfachen Secundenpendels für die Königsberger Sternwarte (§§ 1—22) 139
II. Vergleichung der Bestimmung der Pendellänge für Königsberg mit anderen, und Untersuchung verschiedener, bei den Pendelversuchen zu berücksichtigender Umstände (§§ 23—31) . . . 163
1. Beilage. Bewegung eines sich von einem horizontalen Cylinder abwickelnden Pendels . . . 183
2. Beilage. Einfluss der Federkraft des Fadens auf seine Figur und die Schwingungszeit des Pendels 184
3. Beilage. (Tafel für den Werth eines Pendelschlages der Uhr P, in mittlerer Zeit) . . . 192
4. Beilage. Einwirkung der Temperatur auf den Pendelapparat . . . . . —
5. Beilage. Certificat über die Vergleichung der Toise 193
6. Beilage. Bewegung eines Pendels in einer Flüssigkeit 194
7. Beilage. Bestimmung der einzelnen Theile der verschiedenen bei den Versuchen angewandten Pendel, und Berechnung ihrer Zusammensetzung 195
8. Beilage. Untersuchung des Einflusses der Ungleichheiten des Fadens auf die Reduction auf das einfache Pendel 200
9. Beilage. Einfluss der cylindrischen Figur der Schneide, worauf ein Pendel sich bewegt, auf die Schwingungszeit 201
10. Beilage. Einfluss der Unterlage auf die Bewegung eines um eine Schneide schwingenden festen Körpers 204
I. Versuch 205

pag.

138. Ueber den Einfluss eines widerstehenden Mittels auf die Bewegung eines Pendels 210
139. Versuche über die Kraft, mit welcher die Erde Körper von verschiedener Beschaffenheit anzieht . 217
140. Construction eines symmetrisch geformten Pendels mit reciproken Axen 223
141. Methode die Thermometer zu berichtigen 226
142. Tafel zur Reduction der Abwägungen 233
143. Reduction beobachteter Barometerhöhen auf Pariser Maass und die Dichte des Quecksilbers beim Eispunkte 236
144. Bemerkungen über eine angenommene Atmosphäre des Mondes 239
145. Ueber Höhenbestimmungen durch das Barometer . 243
146. Bemerkungen über barometrisches Höhenmessen . 249
147. Ueber das Nordlicht vom 18. October 1836 . . . 266
148. Gibt es Irrlichter? 267
149. Ueber eine bei einer Feuersbrunst beobachtete Lufterscheinung 268
150. Ueber das preussische Längenmaass und die zu seiner Verbreitung durch Copien ergriffenen Massregeln . 269
151. Einfluss der Schwere auf die Figur eines, auf zwei Punkten von gleicher Höhe aufliegenden Stabes . 275
152. Ueber die Grundformeln der Dioptrik 282
Literatur der Astr. Nachr. über: Pendelbewegung, Pendellängen, Maasse; Höhenmessungen, terrestrische Refraction; Wärme; Optik; Verschiedenes 286

VIII. Verschiedenes . . . . . 288—489

153. Ueber die Sichtbarkeit der kleinen Planeten in Fernröhren verschiedener Oeffnung 288
154. Ueber die Figur des Saturns, mit Rücksicht auf die Attraction seiner Ringe . . . . . —
154b. Ueber die Figur des Saturnschattens 294
155. Ueber den Sonnen- und Mond-Durchmesser . . . —
156. Zur Integration der Gleichung für die Fallzeit . . 295
157. Kurze Beschreibung der Königsberger Sternwarte . 296
158. Ueber die Schiefe der Ekliptik 297
159. Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Pothenot'sche Aufgabe 299
160. Reduction von Circummeridianhöhen des Mondes . 300
161. Persönliche Gleichung bei Durchgangsbeobachtungen —
161b. Erster Nachtrag 304
161c. Zweiter Nachtrag . . . . . —
162. Ueber den Einfluss der Veränderungen des Erdkörpers auf die Polhöhen . . . . . —
163. Betrachtungen über die Methode der Vervielfältigung der Beobachtungen 306

pag.

164. Ueber die Bestimmung der Libration des Mondes durch Beobachtungen 317
165. Ueber Sternschnuppen 328
166. Ueber die neuen Himmelskarten des Hauptmann Schwinck 341
167. Einfluss der Strahlenbrechung auf Mikrometerbeobachtungen 342
168. Bestimmung der Masse des Jupiter 348
169. Analyse der Finsternisse . . . . . 369—428
Einleitung 369
I. Abschnitt (§§ 1—4). Grundgleichung der Analyse der Finsternisse 374
II. Abschnitt (§§ 5—32). Analyse der Finsternisse für die Erde im Allgemeinen 378
III. Abschnitt (§§ 33—37). Berechnung der Finsternisse für jeden gegebenen Ort der Erde . . 411
IV. Abschnitt (§§ 38—47). Anwendung der Beobachtungen der Finsternisse 415
170. Ein Hülfsmittel zur Erleichterung der Beobachtungen der Sonnenfinsternisse und Sternbedeckungen . . 428
171. Beobachtung des Durchganges des Mercur durch die Sonne, am 4.—5. Mai 1832 429
172. Neue Berechnungsart für die Methode der Entfernungen des Mondes von anderen Himmelskörpern . 434
173. Ueber die Wahrscheinlichkeit des Auffindens eines Cometen (von Olbers und Bessel) 452
174. Ueber die Parallaxen einiger Fundamentalsterne . 454
175. Zur Verbesserung einer Cometenbahn nach Olbers' Methode 455
176. Correction wegen Fadenneigung beim Meridiankreis 456
177. Reduction von Heliometerbeobachtungen, bei Aenderung der relativen Lage beider Gestirne 457
178. Ueber eine Kritik der Greenwicher Beobachtungen im Philosophical Magazine 460
179. Letter to Prof. Airy at Cambridge (Ueber die Grundlagen von Planetencatalogen) 462
180. Erinnerungen an F. W. Flemming (Astronomen der naturforschenden Gesellschaft in Danzig) 465
181. Sir William Herschel 468
182. Ueber Olbers 479
183. Erman's Reise in Sibirien und Kamtschatka . . . 481
184. Uebervölkerung 483
185. Schreiben an die Redaction (der Königsberger Allgemeinen Zeitung) 486
Literatur der Astr. Nachr. 489

Literatur-Verzeichnisse . . . . . 490—504
1) Allgemeines Verzeichniss der Schriften Bessel's . . 490
2) Literatur über Bessel 504
Berichtigungen und Nachträge VIII

VI. Geodäsie.

125. Ueber Berechnung geodätischer Vermessungen.*)

(Astron. Nachr. **1**, p. 33.)

Ihre Aufforderung, Ihnen meine Ansicht von der Berechnung der Längen und Breiten der Dreieckspunkte mitzutheilen, erfülle ich ohne Bedenken, wenn ich auch sonst vorgezogen haben würde, damit so lange zu warten, bis mehr Musse mir die Gelegenheit gegeben hätte, diese Ansicht weiter zu verfolgen. Sie werden auch selbst am besten beurtheilen, ob etwas davon brauchbar ist, und in diesem Falle das noch Fehlende selbst hinzufügen.

Meine Absicht ist, die sogenannten Abstände vom Meridian und Perpendikel zu vermeiden, ohne deshalb gezwungen zu sein, für jeden Dreieckspunkt die Länge und Breite zu berechnen. Dass jene Abstände nicht sind, was sie sein sollen, fällt in die Augen: sie sind das Resultat der Formeln

$$x = s\sin\alpha - s'\sin(\alpha+a) + s''\sin(\alpha+a+a') - \text{etc.}$$
$$y = s\cos\alpha - s'\cos(\alpha+a) + s''\cos(\alpha+a+a') - \text{etc.}$$

in welchen s, s', $s''\ldots$ die aneinanderstossenden Seiten, α das Azimuth der ersten derselben, und a, a', $a''\ldots$ die Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden bedeuten, stets nach einerlei Richtung gezählt, z. B. wenn der Beobachter gegen Norden gewandt ist, von der Linken nach der Rechten. Um sich von dem, was durch diese Formeln ausgedrückt wird, auch eine geometrische Vorstellung zu machen, darf man sich nur sämmtliche Seiten als Grundlinien sphärischer Dreiecke denken, deren beide übrige Seiten sich zu zwei Quadranten ergänzen und mit den Grundlinien die Winkel

α und $180^0 - \alpha$,

$\alpha + a - 180^0$ und $360^0 - \alpha - a$,

$\alpha + a + a' - 360^0$ und $540^0 - \alpha - a - a'$, etc.

machen; die erste Seite des ersten Dreiecks wird der Meridian sein; die zweite des ersten und die erste des zweiten, die zweite des zweiten und die erste des dritten u. s. w. werden zusammenfallen; x, der sogenannte Abstand vom Meridiane, wird die Summe der den Seiten s, s', $s''\ldots$ gegenüberstehenden Winkel dieser Dreiecke sein; y, der sogenannte Abstand vom Perpendikel, ist die Summe der Unterschiede je zweier zusammenfallender Seiten.

Nimmt man diese Summen für die wahren Abstände vom Meridian und Perpendikel an, so wird es klar genug, dass man dadurch Fehler begeht, welche mit der Ausdehnung des Landes, über welches die Vermessung sich erstreckt, und mit den Umwegen, welche die Dreieckskette macht, wachsen, so dass sie die, sonst in die Operation selbst und ihre Berechnung gelegte Sorgfalt unnütz machen. Man vermeidet diese grossen Fehler, wenn man statt der sogenannten rechtwinkligen Coordinaten, Polarcoordinaten, nämlich die Entfernungen der verschiedenen Punkte vom Anfangspunkte, und die Winkel derselben anwendet; auch lassen sich diese eben so leicht richtig berechnen, als jene unrichtig.

Ich nehme die Erde zuerst als sphärisch an, und die Seiten s, s', $s''\ldots$ in Kreisbögen ausgedrückt. Von jedem Winkelpunkte denke ich mir einen grössten Kreis nach dem Anfangspunkte der Vermessung gelegt und durch S, S', $S''\ldots$ bezeichnet, so dass S die erste Seite selbst ist, S', $S''\ldots$ aber dem zweiten, dritten .... Punkte entsprechen. Die Winkel dieser S, S', $S''\ldots$ mit dem Meridiane des Anfangspunktes bezeichne ich durch α, α', $\alpha''\ldots$ und die Winkel zwischen S' und s', S'' und s'', u. s. w. durch b', b'', $b'''\ldots$, wodurch man also die Winkel zwischen S' und s'', S'' und s''', ... $= a' - b'$, $a'' - b''\ldots$ hat.

Die Aufgabe ist nun $S^{(n)}$ und $\alpha^{(n)}$ zu finden. Man erhält aber alle S und α sehr leicht durch Anwendung der trigonometrischen Formeln, durch deren Entdeckung Gauss gezeigt hat, dass selbst in der sphärischen Trigonometrie noch etwas, und zwar etwas Erhebliches, zu finden war. Man hat nämlich:

$$\sin\tfrac{1}{2}S'\sin\tfrac{1}{2}(b' - \alpha + \alpha') = \sin\tfrac{1}{2}(S - s')\cos\tfrac{1}{2}a$$
$$\sin\tfrac{1}{2}S'\cos\tfrac{1}{2}(b' - \alpha + \alpha') = \sin\tfrac{1}{2}(S + s')\sin\tfrac{1}{2}a$$

*) [148 d. a. Verz. — Brief an Schumacher vom Dec. 1821.]

$$\cos\tfrac{1}{2}S'\sin\tfrac{1}{2}(b'+\alpha-\alpha') = \cos\tfrac{1}{2}(S-s')\cos\tfrac{1}{2}a$$
$$\cos\tfrac{1}{2}S'\cos\tfrac{1}{2}(b'+\alpha-\alpha') = \sin\tfrac{1}{2}(S+s')\sin\tfrac{1}{2}a$$

woraus S', b', α' gefunden werden; dann ist im nächsten Dreiecke:

$$\sin\tfrac{1}{2}S''\sin\tfrac{1}{2}(b''-\alpha'+\alpha'') = \sin\tfrac{1}{2}(S'-s'')\cos\tfrac{1}{2}(a'-b')$$
$$\sin\tfrac{1}{2}S''\cos\tfrac{1}{2}(b''-\alpha'+\alpha'') = \sin\tfrac{1}{2}(S'+s'')\sin\tfrac{1}{2}(a'-b')$$
$$\cos\tfrac{1}{2}S''\sin\tfrac{1}{2}(b''+\alpha'-\alpha'') = \cos\tfrac{1}{2}(S'-s'')\cos\tfrac{1}{2}(a'-b')$$
$$\cos\tfrac{1}{2}S''\cos\tfrac{1}{2}(b''+\alpha'-\alpha'') = \cos\tfrac{1}{2}(S'+s'')\sin\tfrac{1}{2}(a'-b')$$

woraus S'', b'', α'' gefunden werden; auf diese Weise geht die Rechnung von Punkt zu Punkt, durch die ganze Kette der Seiten.

Von der vollkommenen Schärfe dieser Beobachtungen wird man äusserst wenig aufopfern, wenn man den schönen Legendre'schen Satz benutzt, um die Dreiecke als geradlinige zu berechnen. Setzt man die sphärischen Excesse der verschiedenen Dreiecke, in Secunden ausgedrückt:

$$\varepsilon' = \mu s'\, S \sin a$$
$$\varepsilon'' = \mu s''\, S' \sin(a'-b')$$
$$\varepsilon''' = \mu s'''\, S'' \sin(a''-b'') \text{ u. s. w.},$$

so verwandeln sich die genauen Formeln in folgende genäherte:

$$S'\sin\tfrac{1}{2}(b'-\alpha+\alpha') = (S-s')\cos\tfrac{1}{2}(a-\tfrac{1}{3}\varepsilon')$$
$$S'\cos\tfrac{1}{2}(b'-\alpha+\alpha') = (S+s')\sin\tfrac{1}{2}(a-\tfrac{1}{3}\varepsilon')$$
$$\tfrac{1}{2}(b'+\alpha-\alpha') = 90^0 - \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}\varepsilon'$$
$$S''\sin\tfrac{1}{2}(b''-\alpha'+\alpha'') = (S'-s'')\cos\tfrac{1}{2}(a'-b'-\tfrac{1}{3}\varepsilon'')$$
$$S''\cos\tfrac{1}{2}(b''-\alpha'+\alpha'') = (S'+s'')\sin\tfrac{1}{2}(a'-b'-\tfrac{1}{3}\varepsilon'')$$
$$\tfrac{1}{2}(b''+\alpha'-\alpha'') = 90^0 - \tfrac{1}{2}(a'-b') + \tfrac{1}{2}\varepsilon''$$

u. s. w.

wodurch S' b' α', S'' b'' α'', S''' b''' α'''.... der Reihe nach gefunden werden.

Diese letzte Rechnung ist etwa eben so leicht, als die der gewöhnlichen Coordinaten; ihr Fehler wird wohl immer unmerklich sein, allein wenn die Vermessung eine so grosse Ausdehnung erhielte, dass selbst der Legendre'sche Satz nicht mehr zu ihrer Berechnung hinreichte, so würde doch nichts hindern, einige der Dreieckspunkte zu neuen Anfangspunkten zu wählen; hierdurch würde man auch die gar zu grossen S vermeiden können, welche man, aus den gewöhnlichen Logarithmentafeln, vielleicht nicht mehr genau genug finden könnte.

Die vollkommene Genauigkeit, welche man, für die sphärische Erde, durch diese Berechnungsarten erhalten kann, wird durch die Ellipticität ein wenig gestört; freilich ist dieses unbedeutend, auch, soviel ich weiss, bisher nicht berücksichtigt worden; allein wenn man die Lehre von der Berechnung der geodätischen Vermessungen vollständig abhandeln wollte, so dürfte auch dieser Punkt nicht fehlen. Bei weitem den grössten Theil des Fehlers vermeidet man, wenn man die in Toisen ausgedrückten Längen der Seiten s, s', s''.... nicht durch den mittleren Krümmungshalbmesser, sondern durch den wahren:

$$R = \frac{a(1-ee)}{(1-ee+ee\cos\varphi^2\cos\alpha^2)\sqrt{1-ee\sin\varphi^2}},$$

wo φ für die Mitte der Seite genommen werden kann, in Kreisbögen verwandelt, und die gefundenen S', S'', S'''...., mit den diesen Linien zukommenden Krümmungshalbmessern, wieder auf Toisen reducirt.

In aller Strenge genommen, hat man kein Mittel, die Winkel der auf der Erdoberfläche liegenden Dreiecke zu beobachten; die Seiten dieser Dreiecke sind geodätische Linien, und man beobachtet nur die Winkel der verticalen Schnitte des Ellipsoids, von dem Punkte, wo das Instrument steht, durch die beiden andern Dreieckspunkte geführt. Wenn A das beobachtete, von Norden an gerechnete Azimuth eines Punktes bedeutet, dessen Entfernung, in Bogentheilen, $= s$ ist, so finde ich das Azimuth der nach diesem Punkte gezogenen geodätischen Linie:

$$\alpha = A - \frac{ee}{2}\cos\varphi\sin\alpha\left\{\left(1-\frac{s}{\operatorname{tg} s}\right)\cos\varphi\cos\alpha - (2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}s - s)\sin\varphi\right\}.$$

Man müsste nun untersuchen, welche Aenderungen an die hierdurch verbesserten Winkel angebracht werden müssen, um das sphäroidische Dreieck wie ein sphärisches berechnen zu können, so wie man nach dem Legendreschen Satze ein sphärisches wie ein ebenes berechnet. Diese Aufgabe habe ich bis jetzt nicht vorgenommen, theils aus Mangel an Musse, theils weil ich nicht darauf ausgegangen bin, diese Materie zu erschöpfen. — Es lässt sich aber wohl voraussehen, dass die Verbesserungen sehr klein ausfallen werden; die oben für das Azimuth angeführte kann, für eine Seite von 1^0 Länge, noch nicht 0,″03 betragen, für eine Seite von 5^0 noch nicht 1″. — Wie man aus $S^{(n)}$ und $\alpha^{(n)}$ die Länge und Breite findet, glaube ich, um diesen Brief nicht gar zu lang zu machen, übergehen zu dürfen.

126. Berechnung eines Dreiecks, dessen Seiten geodätische Linien sind.*)

(Astron. Nachr. 1, p. 85.)

Die in meinem letzten Briefe [Abh. 125] Ihnen mitgetheilten Grundzüge einer Methode, geodätische Vermessungen zu berechnen, lassen, für die Bequemlichkeit der Anwendung, nichts Wesentliches zu wünschen übrig; allein sie beruhen auf der sphärischen Berechnung der Dreiecke und sind daher noch einer Verbesserung fähig, welche freilich immer sehr klein und gewöhnlich ganz unbedeutend ausfallen wird, deren Kenntniss man aber doch nicht entbehren darf, theils weil Fälle vorkommen werden, wo die Genauigkeit der Rechnung aufs Höchste getrieben werden soll, theils weil man ohne diese Kenntniss nicht beurtheilen kann, wie viel man vernachlässigt. Dass die Voraussetzung der Kugelgestalt der Erdoberfläche in der Berechnung der Dreiecke Fehler erzeugt, welche nur von der Ordnung des Products der Abplattung in den Flächeninhalt der Dreiecke, oder von der Ordnung des Products der Abplattung in den sphärischen Excess sind, wird auch ohne Rechnung klar; aber, wenn die Vermessung sehr weit fortgeht, zum Beispiele wie die jetzt ausgeführte von Greenwich bis Seeberg, so sind diese Fehler nicht geradezu als unwesentlich zu vernachlässigen, zumal wenn die Winkel mit einer solchen Genauigkeit beobachtet sind, wie bei der eben erwähnten Vermessung.

Ich habe daher die in meinem letzten Briefe erwähnte Aufgabe aufgelöset, indem ich genau untersucht habe, wie ein Dreieck berechnet werden muss, dessen Seiten geodätische Linien sind. Gern theilte ich Ihnen die ganze Entwickelung mit, allein für heute kann ich nur das Resultat anzeigen, indem die Entwickelung sich eher für einen eigenen kleinen Aufsatz, als für einen Brief passt [vgl. Abh. 127].

Die Polhöhen der drei Winkelpunkte eines sphäroidischen Dreiecks ABC bezeichne ich durch $\varphi, \varphi', \varphi''$; die Seiten desselben AB, BC, CA durch s, s', s''; die diesen gegenüberstehenden Winkel durch n, n', n''; die Azimuthe der Punkte B, C, A, von A, B, C gesehen, durch α, α', α''; die Azimuthe der Punkte A, B, C, von B, C, A gesehen, durch $\alpha_{,}$, $\alpha'_{,}$, $\alpha''_{,}$. Diese Azimuthe werden von Norden bis wieder nach Norden, stets nach einer Richtung, also von 0 bis 360° gezählt, und man hat

$$n = \alpha'' - \alpha'; \quad n' = \alpha - \alpha''; \quad n'' = \alpha' - \alpha.$$

Ich denke mir ferner auf der Oberfläche einer, mit dem Aequatorialhalbmesser des Ellipsoids beschriebenen Kugel ein Dreieck verzeichnet, dessen Seiten denen des sphäroidischen Dreiecks gleich sind, dessen Winkel also nicht n, n', n'', sondern von diesen verschieden sein werden; ich bezeichne sie durch $n + \delta n$, $n' + \delta n'$, $n'' + \delta n''$. Wenn daher δn, $\delta n'$, $\delta n''$ bekannt sind, so kann man die von den geodätischen Linien gebildeten Winkel auf die des sphärischen Dreiecks reduciren und daher das sphäroidische, mit diesen veränderten Winkeln, als ein sphärisches berechnen.

Den Ausdruck von δn, $\delta n'$, $\delta n''$ habe ich bis zu den Quadraten der Excentricität entwickelt; die vierte und höhern Potenzen sind stets ohne merklichen Einfluss, selbst wenn man die Seiten nicht als kleine Grössen der ersten Ordnung betrachtet. Ich finde:

$$\begin{aligned}\delta n' = \tfrac{1}{4} ee \{ & k \operatorname{cotg} n'' + k \operatorname{cotg} n \\ & - \cos\varphi^2 \left(\sin n' \cdot \frac{\sigma'}{\sin\sigma'} \cdot \sin\sigma \sin\sigma''\right) \\ & - \cos\varphi^2 \left(k \operatorname{cotg} n'' \sin\alpha^2 + k'' \operatorname{cotg} n \sin\alpha''^2\right) \\ & + \cos\varphi^2 \left(\left[1 - \frac{\sigma}{\operatorname{tg}\sigma} - k\cos\sigma\right] \sin\alpha\cos\alpha - \left[1 - \frac{\sigma''}{\operatorname{tg}\sigma''} - k''\cos\sigma''\right] \sin\alpha''\cos\alpha''\right) \\ & + \sin 2\varphi \left(k \sin\sigma \sin\alpha - k'' \sin\sigma'' \sin\alpha''\right)\} \quad \ldots \ldots \quad (a)\end{aligned}$$

wo

$$\sigma, \sigma', \sigma'' = \frac{s}{\alpha}, \quad \frac{s'}{\alpha}, \quad \frac{s''}{\alpha}$$

und

$$k = \frac{\sigma}{\sin\sigma} - \frac{\sigma'}{\sin\sigma'} \cos\sigma''$$

$$k'' = \frac{\sigma''}{\sin\sigma''} - \frac{\sigma'}{\sin\sigma'} \cos\sigma$$

gesetzt sind.

Wenn die Seiten als kleine Grössen der ersten Ordnung angesehen werden, so sind die vier ersten Glieder dieses Ausdrucks von der zweiten, das letzte Glied aber ist von der dritten Ordnung; da diese Glieder in das Quadrat der Excentricität multiplicirt sind, so wird man meistentheils die ganze Berechnung sparen, oder doch mit den grössten Gliedern ausreichen können. Wenn dieses der Fall ist, man also die dritten und

*) [151 d. a. Verz. — Brief an SCHUMACHER vom 28. Dec. 1821.]

höhern Potenzen der Seiten weglässt, so wird der Ausdruck, wie man leicht findet, höchst einfach, nämlich:

$$\delta n' = -\tfrac{1}{3}\Delta ee\cos 2\varphi \quad \ldots\ldots\ldots (b)$$

wo Δ für $\frac{1}{2}\sigma\sigma''\sin n'$, oder für den Flächeninhalt des Dreiecks gesetzt ist. Man darf also die Winkel der geodätischen Linien nur um diese leicht zu berechnende Quantität verändern, um das Dreieck als sphärisches berechnen zu können.

Der Ihnen neulich schon mitgetheilte Ausdruck des Azimuths der geodätischen Linie gibt das Mittel, die Winkel n, n', n'' aus den beobachteten Winkeln zu finden. Diese sind nämlich die Winkel je zweier, an einem Punkte verticaler, durch die beiden anderen Punkte gelegten Ebenen; nennt man sie ν, ν', ν'', so hat man:

$$n' = \nu' - \tfrac{1}{4}ee\cos\varphi^2\left(\left[1-\frac{\sigma}{\operatorname{tg}\sigma}\right]\sin 2\alpha - \left[1-\frac{\sigma''}{\operatorname{tg}\sigma''}\right]\sin\alpha''\right)$$
$$+\tfrac{1}{4}ee\sin 2\varphi\left([2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma-\sigma]\sin\alpha - [2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma''-\sigma'']\sin\alpha''\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

oder, wenn man auch hier nur die niedrigste Ordnung berücksichtigt,

$$n' = \nu' - \tfrac{1}{12}ee\cos\varphi^2(\sigma^2\sin 2\alpha - \sigma''^2\sin 2\alpha'') \quad \ldots (d)$$

Die Winkel ν, ν', ν'' findet man aber nicht durch unmittelbare Beobachtung, sondern dadurch, dass man von den aus dieser hervorgegangenen Winkeln den dritten Theil der Summe der Fehler abzieht; diese ist in dem sphäroidischen Dreiecke stets grösser oder kleiner als in dem sphärischen von gleichen Seiten, je nachdem die Polhöhen kleiner oder grösser als 45° sind; die beobachtete Summe der drei Winkel sollte = der Summe der Winkel in dem erwähnten sphärischen Dreiecke

$$+\tfrac{1}{3}\Delta ee(\cos 2\varphi + \cos 2\varphi' + \cos 2\varphi'') \quad \ldots\ldots (e)$$

sein, woraus auch, wenn man diesen Ausdruck mit der Formel (b) vergleicht, folgt, dass die Summe der Winkel der verticalen Schnitte der Summe der Winkel der geodätischen Linien gleich ist.

Sobald daher die Länge einer Dreiecksseite gegeben ist, hat die richtige Berechnung des ganzen Netzes keine Schwierigkeit mehr: aus der Beobachtung und der Formel (e) findet man ν, ν', ν''; aus diesen Winkeln und (d) die wahren geodätischen Winkel und diese, um (b) verändert, dienen zur Berechnung der übrigen Seiten. Käme es nicht auf die richtige Erfindung der Summe der Fehler der 3 Winkel an, so würde man die Berechnung von (e) und (b) ganz sparen können, ohne dadurch um Grössen von der Ordnung der hier berücksichtigten zu irren; man nähme dann den Ueberschuss der drei beobachteten Winkel über die drei sphärischen, und zöge den dritten Theil desselben von jedem beobachteten und durch die Formel (d) verbesserten Winkel ab. Wenn aber mehrere Dreiecke aneinandergereiht sind, muss man von (b) besonders Rechnung tragen. — Die kleine Schwierigkeit, dass man keine Dreiecksseite als geodätische Linie unmittelbar messen kann, ist leicht zu beseitigen; denn man sieht bei einiger Aufmerksamkeit leicht ein, dass der Unterschied der Entfernungen zweier Punkte, auf der geodätischen Linie und auf dem verticalen Schnitte gemessen, in das Biquadrat der Excentricität und überdies in einen Factor von der 5. Ordnung der Seiten multiplicirt sein muss; die Basis kann daher, ohne weitere Reduction, als geodätische Linie angenommen werden.

Ob es je nothwendig sein wird, ein Dreiecksnetz auf diese Weise zu berechnen, hängt von der Genauigkeit, womit man die Winkel beobachten kann, ab; ich glaube, man wird wohl immer mit der rein sphärischen Rechnung ausreichen. Allein wenn die Vermessung eine sehr grosse Ausdehnung erlangt, und man dann die Entfernungen der verschiedenen Dreieckspunkte von dem Anfangspunkte als geodätische Linien betrachtet, sowie die Azimuthe derselben richtig berechnen will, so wird es schon eher nöthig sein, meine Formeln anzuwenden. Auf jeden Fall gibt das, was ich Ihnen in meinem letzten Briefe und heute mitgetheilt habe, die Mittel zur richtigen Erfindung derjenigen Bestimmungsstücke, auf welche unser trefflicher Tuhne*) und Andere die mit so grosser Schärfe entwickelten Vorschriften zur Berechnung der geographischen Länge und Breite gegründet haben. — Die Rechnung, welche dieses leistet, ist äusserst einfach und scheint mir weit bequemer zu sein, als einige andere gebräuchliche Verfahrungsarten, worunter die Chorden-Methode mir die unangenehmste ist.

*) Tentamen circa trigonometriam sphäroidicam. Hafniae 1815.

127. Ueber die Berechnung der geographischen Längen und Breiten aus geodätischen Vermessungen.*)

(Astron. Nachr. 4, p. 241.)

1.

Die Aufgabe: aus der gegebenen Polhöhe eines Punktes A, aus der auf der geodätischen Linie gemessenen Entfernung eines anderen Punktes B von dem ersteren, und aus dem Winkel dieser Linie mit dem Meridiane von A die Polhöhe und den Mittagsunterschied des zweiten Punktes, sowie den Winkel der geodätischen Linie mit dem Meridiane desselben zu finden, ist von so häufiger Anwendung, dass ich die Mittheilung der von mir zur Erleichterung der Rechnung entworfenen Tafeln nicht für unnütz halte. Wie die Vermessungen so berechnet werden können, dass man die Entfernungen aller Punkte derselben von dem Hauptpunkte, auf geodätischen Linien gemessen, und die Azimuthe dieser Linien erhält, habe ich in Nr. 3 und 6 der Astron. Nachrichten gezeigt [Abhh. 125 und 126].

Meine Tafeln weichen in ihrer Einrichtung von anderen desselben Zweckes wegen bekannt gemachten Tafeln ab, und können auch im Resultate mit der oft angewandten Dusejour'schen Berechnungsart nicht ganz übereinstimmen, indem diese die Entfernungen und Azimuthe nicht auf die geodätischen Linien bezieht. Um dieselben deutlich erklären zu können, werde ich die Entwickelungen, worauf sie beruhen, ganz mittheilen, und dabei mit der Ableitung der Eigenschaften der geodätischen Linien auf dem Rotationssphäroid anfangen, selbst wenn Bekanntes dadurch wiederholt wird. Da das hier Nothwendige sich kurz genug fassen lässt, so darf der Vortheil, alles Hierhergehörige beisammen zu haben, nicht theuer erkauft werden.

2.

Wenn man zwei Punkte A und B auf der Oberfläche eines Rotationssphäroids durch eine nach irgend einem Gesetze gezogene Curve verbindet und in derselben zwei unendlich nahe Punkte annimmt, welchen die Polhöhen φ und $\varphi + d\varphi$ und die vom Meridiane von A gezählten geographischen Längen w und $w + dw$ (östlich positiv, westlich negativ genommen) zugehören; wenn man ferner die Entfernung derselben durch ds, den Winkel, in welchem der von A kommende Theil der Curve den Meridian durchschneidet (von Norden rechts herum von 0 bis 360° gezählt) durch α, den Halbmesser des Parallelkreises durch r, den Krümmungshalbmesser durch R bezeichnet, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} ds.\cos\alpha &= -Rd\varphi = \frac{dr}{\sin\varphi} \\ ds.\sin\alpha &= -r\,dw \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (1)$$

woraus folgt:

$$ds = \sqrt{RR\,d\varphi^2 + rr\,dw^2}$$

oder wenn man, um abzukürzen, p für $\frac{d\varphi}{dw}$ und U für $\sqrt{RRpp + rr}$ schreibt,

$$ds = U dw.$$

Die Entfernung der beiden Punkte A und B, auf der Curve gemessen, ist daher:

$$s = \int U dw,$$

das Integral von A bis B genommen. Soll die Curve die geodätische oder kürzeste Linie sein, so muss ihr Gesetz, oder die Relation zwischen φ und w, so angenommen werden, dass dieses Integral ein Minimum wird; oder wenn man statt derjenigen Relation zwischen φ und w, welche dieses leistet, eine andere setzt, in welcher demselben w nicht φ sondern $\varphi + z$ zugehört, wo z eine willkürliche Function von w ist, welche an den Punkten A und B verschwindet, indem diese Punkte beiden Curven gemeinschaftlich sind, so muss

$$s' = \int U' dw$$

grösser sein als s und zwar für ein unbestimmtes z.

Man erhält aber nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$U' = U + \left(\frac{dU}{d\varphi}\right) z + \left(\frac{dU}{dp}\right)\frac{dz}{dw} + \text{etc.}$$

und daher

$$s' = s + \int\left(\frac{dU}{d\varphi}\right) z\,dw + \int\left(\frac{dU}{dp}\right) dz + \text{etc.}$$

wo die geschriebenen Glieder von der Ordnung von z, die nur angedeuteten aber von höheren Ordnungen sind; es muss also

$$\int\left(\frac{dU}{d\varphi}\right) z\,dw + \int\left(\frac{dU}{dp}\right) dz + \text{etc.}$$

keinen negativen Werth haben, welche Function man auch für z annehmen mag. Da dieses auch für entgegengesetzte Annahmen z und $-z$ gelten muss, und man die Freiheit hat, z so klein anzunehmen, dass die Glieder der ersten Ordnung grösser werden als die

*) [205 d. a. Verz. — Vgl. auch Quart. Journ. of Sciences XXI, p. 138.]

Summe der übrigen, ausser wenn jene verschwinden, so folgt, dass das Minimum nur stattfinden kann, wenn die Glieder der ersten Ordnung verschwinden; man hat also die Bedingung des Minimums:

$$0 = \int \left(\frac{dU}{d\varphi}\right) z\,dw + \int \left(\frac{dU}{dp}\right) dz,$$

und wenn man für das zweite Glied

$$z\left(\frac{dU}{dp}\right) - \int z.d\left(\frac{dU}{dp}\right)$$

setzt und sich erinnert, dass z für beide Grenzen des Integrals verschwindet:

$$0 = \int z\left\{\left(\frac{dU}{d\varphi}\right) dw - d\left(\frac{dU}{dp}\right)\right\}.$$

Da dieses Integral für ein unbestimmtes z verschwinden muss, so ist

$$0 = \left(\frac{dU}{d\varphi}\right) dw - d\left(\frac{dU}{dp}\right)$$

oder durch Multiplication mit $\frac{d\varphi}{dw} = p$:

$$0 = \left(\frac{dU}{d\varphi}\right) d\varphi - p.d\left(\frac{dU}{dp}\right)$$

wovon das Integral

$$\text{Const.} = U - p\left(\frac{dU}{dp}\right)$$

ist. Setzt man für U seinen Ausdruck, nämlich

$$\sqrt{RRpp + rr},$$

so erhält man

$$\text{Const.} = \frac{r}{\sqrt{1 + \frac{RR}{rr}pp}} = r\sin\alpha$$

welches die bekannte charakteristische Eigenschaft der geodätischen Linie ist.

Man hat also, wenn das Azimuth der geodätischen Linie am Punkte A durch α' und die Entfernung dieses Punktes von der Drehungsaxe durch r' bezeichnet werden:

$$r'\sin(\alpha' + 180^0) = r\sin\alpha$$

oder

$$r'\sin\alpha' = -r\sin\alpha \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

3.

Bezeichnet man die grösste Entfernung des Sphäroids von der Rotationsachse durch a, so sind r und r' kleiner oder wenigstens nicht grösser als a und man kann setzen

$$r' = a\cos u'; \quad r = a\cos u,$$

wodurch die Gleichung (2) die Form

$$\cos u'\sin\alpha' = -\cos u\sin\alpha \ldots\ldots\ldots (3)$$

annimmt. Diese Gleichung enthält die Relation zwischen zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks $90^0 - u'$ und $90^0 - u$ und den ihnen gegenüberstehenden Winkeln $360^0 - \alpha$ und α'. Die dritte Seite desselben sphärischen Dreiecks und der ihr gegenüberstehende Winkel, welche ich durch σ und ω bezeichnen werde, geben, wenn man sie in die Rechnung einführt, elegante Ausdrücke für die zusammengehörigen Veränderungen von s, u und w. Man hat nämlich durch die bekannten Differentialformeln der sphärischen Trigonometrie:

$$du = -\cos\alpha.d\sigma$$
$$\cos u\,d\omega = -\sin\alpha.d\sigma$$

und wenn man dieses in die Gleichungen (1) setzt, nachdem man in denselben r durch u ausgedrückt hat:

$$\left.\begin{aligned} ds &= a\frac{\sin u}{\sin\varphi}\cdot d\sigma \\ dw &= \frac{\sin u}{\sin\varphi}\cdot d\omega \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

4.

Die Erdmeridiane werde ich jetzt als elliptisch annehmen und ihre halbe grosse Axe durch a, die halbe kleine Axe durch b, die Excentricität durch e bezeichnen. Differentiirt man die Gleichung der Ellipse für Coordinaten aus dem Mittelpunkte

$$1 = \frac{xx}{aa} + \frac{yy}{bb}$$

und setzt man $-\operatorname{cotg}\varphi$ für $\frac{dy}{dx}$, so erhält man:

$$0 = \frac{x\sin\varphi}{aa} - \frac{y\cos\varphi}{bb}$$

und aus der Verbindung beider Gleichungen:

$$x = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1 - ee\sin\varphi^2}}.$$

Dieses x ist unser r, also $= a\cos u$, woraus man erhält:

$$\cos u = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1 - ee\sin\varphi^2}}; \qquad \cos\varphi = \frac{\cos u\sqrt{1 - ee}}{\sqrt{1 - ee\cos u^2}}$$

$$\sin u = \frac{\sin\varphi\sqrt{1 - ee}}{\sqrt{1 - ee\sin\varphi^2}}; \qquad \sin\varphi = \frac{\sin u}{\sqrt{1 - ee\cos u^2}}$$

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg}\varphi\sqrt{1 - ee}; \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg} u}{\sqrt{1 - ee}}$$

und

$$\frac{\sin u}{\sin\varphi} = \sqrt{1 - ee\cos u^2}.$$

Substituirt man dieses in den Differentialen (4), so erhält man für das elliptische Rotationssphäroid:

$$\left.\begin{aligned} ds &= a\sqrt{1 - ee\cos u^2}.d\sigma \\ dw &= \sqrt{1 - ee\cos u^2}.d\omega \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (5)$$

5.

Um das erste dieser Differentiale zu integriren, werde ich den drei Gleichungen zwischen u', u, α', α und σ,

$$\left.\begin{aligned}\sin u &= \sin u' \cos\sigma + \cos u' \sin\sigma \cos\alpha' \\ \cos u \cos\alpha &= \sin u' \sin\sigma - \cos u' \cos\sigma \cos\alpha' \\ \cos u \sin\alpha &= -\cos u' \sin\alpha'\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (6)$$

durch Einführung der Hülfswinkel m und M, welche ich nach den Formeln

$$\left.\begin{aligned}\sin u' &= \cos m \sin M \\ \cos u' \cos\alpha' &= \cos m \cos M \\ \cos u' \sin\alpha' &= \sin m\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

bestimme, die Form

$$\left.\begin{aligned}\sin u &= \cos m \sin(M+\sigma) \\ \cos u \cos\alpha &= -\cos m \cos(M+\sigma) \\ \cos u \sin\alpha &= -\sin m\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

geben. Dadurch erhält man

$$ds = \tfrac{1}{2} a d\sigma \left\{\sqrt{1 - ee \sin m^2} + \sqrt{1-ee}\right\} \left\{1 - \varepsilon c^{2i(M+\sigma)}\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{1 - \varepsilon c^{-2i(M+\sigma)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

wo c die Grundzahl der natürlichen Logarithmen und i die Quadratwurzel aus -1 bezeichnen, und ε für

$$\frac{\sqrt{1-ee\sin m^2} - \sqrt{1-ee}}{\sqrt{1-ee\sin m^2} + \sqrt{1-ee}}$$

geschrieben ist. Setzt man hier

$$\frac{e\cos m}{\sqrt{1-ee}} = \operatorname{tg} E$$

so wird

$$\varepsilon = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} E^2$$

und

$$ds = a\sqrt{1-ee}\,\frac{\cos\frac{1}{2}E^2}{\cos E}\, d\sigma \sqrt{1-\varepsilon c^{2i(M+\sigma)}} \sqrt{1-\varepsilon c^{-2i(M+\sigma)}}$$

$$\cos u^2 = 1 - \cos m^2 \sin(M+\sigma)^2$$

und

$$ds = a\sqrt{1 - ee + ee\cos m^2 \sin(M+\sigma)^2}\, .\, d\sigma \ldots\ldots (9)$$

Die Integration dieses Differentials hängt von den elliptischen Transcendenten ab und ist von LEGENDRE in den Exercices du calcul intégral gegeben. Allein die Hülfsmittel zur Berechnung dieser Transcendenten scheinen noch nicht eine solche Vollständigkeit oder Geschmeidigkeit erlangt zu haben, dass die Entwickelung in eine Reihe, welche bei der Kleinheit von ee sehr schnell convergirt, nicht bequemer sein sollte. Man erhält dieselbe am leichtesten durch Zerfällung der Grösse unter dem Wurzelzeichen in zwei imaginäre Factoren, nämlich:

Löst man die beiden Factoren unter dem Wurzelzeichen in unendliche Reihen auf und multiplicirt man diese in einander, so erhält man

$$\begin{aligned} ds = a\sqrt{1-ee}\,\frac{\cos\frac{1}{2}E^2}{\cos E} \cdot d\sigma \{ & A - 2B\cos 2(M+\sigma) \\ & - 2C\cos 4(M+\sigma) \\ & - 2D\cos 6(M+\sigma) \\ & - \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\}\end{aligned}$$

wo A, B, C... folgende unendliche Reihen bezeichnen:

$$A = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 + \left(\frac{1.1}{2.4}\right)^2 \varepsilon^4 + \left(\frac{1.1.3}{2.4.6}\right)^2 \varepsilon^6 + \text{etc.}$$

$$B = \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{1}{2}\varepsilon^3 - \frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\frac{1.1}{2.4}\varepsilon^5 - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\cdot\frac{1.1.3}{2.4.6}\varepsilon^7 - \text{etc.}$$

$$C = \frac{1.1}{2.4}\varepsilon^2 - \frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\frac{1}{2}\varepsilon^4 - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\cdot\frac{1.1}{2.4}\varepsilon^6 - \frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10}\cdot\frac{1.1.3}{2.4.6}\varepsilon^8 - \text{etc.}$$

u. s. w.

Das Integral dieses Differentials, von $\sigma = 0$ an gerechnet, ist daher:

$$\begin{aligned} s = b\frac{\cos\frac{1}{2}E^2}{\cos E}\{ & A\sigma - 2B\cos(2M+\sigma)\sin\sigma \\ & - \tfrac{1}{2}C\cos(4M+2\sigma)\sin 2\sigma \\ & - \tfrac{1}{3}D\cos(6M+3\sigma)\sin 3\sigma - \text{etc.}\}\ (10)\end{aligned}$$

6.

Diese Reihe gibt die Entfernung s der Punkte A und B, durch u', α' und σ ausgedrückt; sind dagegen s und α' durch die Vermessung und u' durch die Polhöhe des Punktes A bekannt, so findet man σ durch Auflösung der eben gegebenen transcendenten Gleichung; die Polhöhe des Punktes B und das Azimuth der geodätischen Linie an demselben finden sich dann nach (8). Die Auflösung der transcendenten Gleichung kann man entweder durch Umkehrung der Reihe (10) oder durch successive Annäherungen erhalten; — der letzte Weg ist aber der bequemste, wenn man ihn durch die Tafeln erleichtert, welche ich hier mittheile.

Ich setze nämlich

$$\begin{aligned}\sigma = \frac{\alpha}{b}s &+ \beta\cos(2M+\sigma)\sin\sigma \\ &+ \gamma\cos(4M+2\sigma)\sin 2\sigma + \text{etc.} \ldots\ldots (11)\end{aligned}$$

wo

$$\alpha = \frac{648000}{\pi}\cdot\frac{\cos E}{\cos\frac{1}{2}E^2}\cdot\frac{1}{A}$$

$$\beta = \frac{648000}{\pi}\cdot\frac{2.B}{A}$$

$$\gamma = \frac{648000}{\pi}\cdot\frac{C}{A}$$

$$\delta = \frac{648000}{\pi}\cdot\frac{2.D}{3.A}$$

u. s. w.

Die Tafeln enthalten die Logarithmen von α, β, γ und sind so eingerichtet, dass ihr Argument

$$= \log \frac{e \cos m}{\sqrt{1-ee}}$$

ist. Durch diese Einrichtung erlangt man den Vortheil, dass die Zahlen in der Tafel für $\log \beta$ immer sehr nahe um die doppelte Differenz des Arguments und in der Tafel für $\log \gamma$ um die vierfache Differenz des Arguments wachsen, wodurch der Gebrauch der Tafeln sehr erleichtert wird.

Man nimmt $\frac{\alpha s}{b}$ als den ersten Näherungswerth von σ an, substituirt denselben im zweiten Gliede und erhält dadurch einen zweiten Näherungswerth, mit welchem man das zweite Glied neu berechnet und das dritte hinzufügt. Die Convergenz der Reihe ist so gross, dass, wenn man das Argument auch $= 9{,}1$ annimmt (welchen Werth es nur bei einer Abplattung $> \frac{1}{128}$ erlangen kann), die Näherung nie weiter getrieben zu werden braucht, ohne σ um 0,″001 fehlerhaft zu geben. Das von δ abhängige Glied beträgt für diesen Werth des Arguments nur 0,″0001.

7.

Die Tafel für $\log \alpha$ hat 8 Decimalen; ein Fehler einer halben Einheit der letzten Decimale erzeugt erst für $\sigma = 12^0\,4'$, oder für etwa 700000 Toisen Entfernung, einen Fehler von 0,″0005, welcher 0,008 Toise entspricht. Für denselben Werth von σ rechnet man, mit der Tafel für $\log \beta$, wenn man alle Decimalen benutzt, welche sie enthält, bis auf eine noch kleinere Grösse genau; da eine grössere Genauigkeit kein Interesse zu haben scheint, indem die Genauigkeit der Tafeln die Sicherheit der Vermessungen schon weit überschreitet so dass es unnütz sein würde, mit mehr als 8 Decimalen zu rechnen, so habe ich der Tafel für $\log \beta$ zwar am Ende 6 Decimalen gegeben, allein früher davon so viele weggelassen, als geschehen konnte, ohne das Resultat 0,″0005 zweifelhaft zu machen. Das dritte Glied ist, für den angegebenen Werth von σ, selbst am Ende der Tafel nie grösser als 0,″17, weshalb ich der Tafel für $\log \gamma$ nur 3 Decimalen gegeben habe. — Die Tafeln werden also, wenn die Entfernungen nicht grösser sind als 700000 Toisen, die Annäherung eines Tausendtheils einer Secunde geben, und selbst wenn die Entfernung einen Erdquadranten betrüge, so würden die Tafeln ein Hunderttheil einer Secunde nicht zweifelhaft lassen.

8.

Um den Gebrauch der Tafeln durch ein Beispiel zu erläutern, werde ich die Lage von Dünkirchen gegen Seeberg so annehmen, wie sie Herr Generallieutenant VON MÜFFLING im 27. Stücke der Astronomischen Nachrichten aus seiner grossen Vermessung gefolgert hat; nämlich

$$\log s = 5{,}47830314$$
$$\alpha' = 274^0\,21'\,3{,}''18$$

ferner nehme ich die Polhöhe der Seeberger Sternwarte $\varphi = 50^0\,56'\,6{,}''7$, $\log b = 6{,}51335464$, $\log e = 8{,}9054355$.

Aus der Formel $\operatorname{tg} u' = \sqrt{1-ee}\operatorname{tg}\varphi'$ findet man:

$$\log \operatorname{tg} \varphi' = 0{,}09062665$$
$$\log \sqrt{1-ee} = 9{,}99859060$$
$$\log \operatorname{tg} u' = 0{,}08921725; \quad u' = 50^0\,50'\,39{,}''057$$

Aus u' und α' erhält man M, $\cos m$ und $\sin m$:

$$\log \sin u' = 9{,}88954351$$
$$\log \cos u' = 9{,}80032627$$
$$\log \cos \alpha' = 8{,}88003733$$
$$\log \sin \alpha' = 9{,}99874662\,n$$
$$\log \cos m \sin M = 9{,}88954351$$
$$\log \cos m \cos M = 8{,}68036360$$
$$\log \sin M = 9{,}79907289\,n$$
$$M = 86^0\,27'\,53{,}''949; \quad 2M = 172^0\,55'\,47{,}''9$$
$$\log \cos m = 9{,}89037063 \qquad 4M = 345\ 51\ 36$$

Das Argument der Tafeln ist $\log \frac{e}{\sqrt{1-ee}} \cos m$:

$$\log \frac{e}{\sqrt{1-ee}} = 8{,}906845$$
$$\log \cos m = 9{,}890371$$
$$\text{Argument} = 8{,}797216$$

Hiermit erhält man aus den Tafeln $\log \alpha$, wodurch $\frac{\alpha}{b} s$ berechnet wird:

$$\log \alpha = 5{,}31399893$$
$$\text{Cpl.} \log b = 3{,}48664536$$
$$\log s = 5{,}47830314$$
$$\log \frac{\alpha}{b} s = 4{,}27894743; \quad \frac{\alpha}{b} s = 5^0\,16'\,48{,}''482$$

Dieses als erste Annäherung an den Werth von σ angenommen, findet sich die zweite, durch Hinzufügung des ersten Gliedes der Reihe (11):

$$\log \beta = 2{,}30595$$
$$\log \cos (2M + \sigma) = 9{,}99979\,n$$
$$\log \sin \sigma = 9{,}96391$$
$$1{,}26965\,n = -\,18{,}''60$$

Die genauere Berechnung dieses Gliedes mit der zweiten

Annäherung von $\sigma = 5^0\,16'\,29,''9$, sowie die des dritten, ergibt:

$$\log\beta = 2{,}30595$$
$$\log\cos(2M+\sigma) = 9{,}99979n$$
$$\log\sin\sigma = 8{,}96348$$
$$1{,}26922n = -18,''587$$
$$\log\gamma = 8{,}395$$
$$\log\cos(4M+2\sigma) = 9{,}999$$
$$\log\sin 2\sigma = 9{,}263$$
$$7{,}657 = +0,''004$$

Man hat also $\sigma = 5^0\,16'\,29,''899$, und endlich α, u und φ aus den Formeln (8):

$$M+\sigma = 91^0\,44'\,23,''848$$
$$\log\sin(M+\sigma) = 9{,}99979971$$
$$-\log\cos(M+\sigma) = 8{,}48234932$$
$$\log\cos m \ \ldots = 9{,}89037063$$
$$-\log\sin m \ \ldots = 9{,}79907289$$
$$\log\sin u \ldots = 9{,}89017034$$
$$\log\cos u\cos\alpha = 8{,}37271995$$
$$\log\cos u\sin\alpha = 9{,}79907289$$
$$\alpha = 87^0\,51'\,15,''523$$
$$\log\cos u = 9{,}79937750$$
$$\log\mathrm{tg}\, u = 0{,}09079284$$
$$\mathrm{Cpl.}\log\sqrt{1-ee} = 0{,}00140940$$
$$\log\mathrm{tg}\,\varphi = 0{,}09220224; \quad \varphi = 51^0\,2'\,12,''719$$

In diesem Beispiele habe ich die trigonometrische Rechnung mit 8 Decimalen geführt, weil selbst bei dieser Annäherung α und φ noch nicht die Sicherheit erhalten, welche die Tafeln für $\log\alpha$, β, γ gewähren. Will man nur die gewöhnlichen Logarithmentafeln mit 7 Decimalstellen anwenden, so kann man auch in den Tafeln für $\log\alpha$, β, γ die letzte Decimale vernachlässigen.

9.

Es ist nun noch der Mittagsunterschied w durch die Integration des Differentials (5)

$$dw = \sqrt{1-ee\cos u^2}\, d\omega$$

zu finden. Dieses Integral enthält aber zwei getrennte Constanten m und e, welche sich nicht vereinigen lassen, sodass man die streng richtige Auflösung dieser Aufgabe nicht auf Tafeln zurückführen kann, welche für alle Werthe von e gültig sind. Man darf aber, um dieses zu erreichen, von der strengen Richtigkeit nur so wenig aufopfern, dass es für die Anwendung von keinem Belange ist.

Setzt man

$$dw = d\omega - (1-\sqrt{1-ee\cos u^2})\, d\omega$$

und schreibt man für $d\omega$ im zweiten Gliede

$$\frac{\sin\alpha'\cos u'}{\cos u^2}\, d\sigma,$$

so erhält man, nach der Integration,

$$w = \omega - \sin\alpha'\cos u' \int \frac{1-\sqrt{1-ee\cos u^2}}{\cos u^2}\, d\sigma.$$

Setzt man ferner

$$\frac{1-\sqrt{1-ee\cos u^2}}{\cos u^2} = \frac{ee}{2}(1+eep\cos u^2)^q(1+y)$$

so erhält man

$$1+y = \frac{2(1-\sqrt{1-ee\cos u^2})}{ee\cos u^2(1+eep\cos u^2)^q} = \frac{1+\frac{1}{4}ee\cos u^2+\frac{1}{8}e^4\cos u^4+\frac{5}{64}e^6\cos u^6+\ldots}{1+qpee\cos u^2+\frac{q.q-1}{1.2}ppe^4\cos u^4+\frac{q.q-1.q-2}{1.2.3}p^3e^6\cos u^6+\ldots}$$

Im Nenner dieses Ausdrucks werden die drei ersten Glieder den drei ersten Gliedern im Zähler gleich, wenn man

$$p = -\tfrac{3}{4}, \quad q = -\tfrac{1}{3}$$

annimmt; man erhält dadurch

$$1+y = \frac{1+\frac{1}{4}ee\cos u^2+\frac{1}{8}e^4\cos u^4+\frac{5}{64}e^6\cos u^6+\ldots}{1+\frac{1}{4}ee\cos u^2+\frac{1}{8}e^4\cos u^4+\frac{7}{96}e^6\cos u^6+\ldots}$$
$$= 1+\tfrac{1}{192}e^6\cos u^6 + \text{etc.}\ldots$$

woraus also hervorgeht, dass man durch die Vernachlässigung von y nur einen Fehler von der Ordnung von e^8 begeht; das Maximum des Einflusses dieses Fehlers auf w ist $= \frac{1}{384}e^8\sigma$ und daher selbst dann unmerklich, wenn man auch sehr weit ausgedehnte Vermessungen mit Logarithmentafeln von 10 Decimalen berechnen wollte.

Man kann also für die Anwendung $y = 0$ setzen und dann das Integral auf Tafeln reduciren, welche für jeden Werth von e gelten.

10.

Dieser Bemerkung zufolge ist

$$w = \omega - \frac{ee}{2}\sin m \int \frac{d\sigma}{\sqrt[3]{1-\frac{3}{4}ee\cos u^2}}$$
$$= \omega - \frac{ee}{2}\sin m \int \frac{d\sigma}{\sqrt[3]{1-\frac{3}{4}ee+\frac{3}{4}ee\cos m^2\sin(M+\sigma)^2}}$$

Wenn man

$$\mathrm{tg}\, E' = \frac{e\sqrt{\frac{3}{4}}.\cos m}{\sqrt{1-\frac{3}{4}ee}}$$

und

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}E'^2 = \varepsilon'$$

setzt, so verwandelt sich das Integral im zweiten Gliede in

$$\int \frac{d\sigma}{\sqrt[3]{1-\frac{3}{4}ee}\sqrt[3]{1+\operatorname{tg} E'^2 \sin(M+\sigma)^2}}$$

und durch Zerlegung in zwei imaginäre Factoren in

$$\int \frac{\sqrt[3]{(1-\varepsilon')^2}}{\sqrt[3]{1-\frac{3}{4}ee}} \cdot \left\{1-\varepsilon' \cdot e^{2i(M+\sigma)}\right\}^{-\frac{1}{3}} \left\{1-\varepsilon' \cdot e^{-2i(M+\sigma)}\right\}^{-\frac{1}{3}} d\sigma$$

Löst man die imaginären Factoren in unendliche Reihen auf, so gibt das Product derselben

$$\frac{2}{\sqrt[3]{1-\frac{3}{4}ee}} \int \left(\alpha' + 2\beta' \cos 2(M+\sigma) + 2\gamma' \cos 4(M+\sigma) + \ldots\right) d\sigma$$

wo

$$\alpha' = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{(1-\varepsilon')^2}\left\{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \varepsilon' + \left(\frac{1.4}{3.6}\right)^2 \cdot \varepsilon'^4 + \ldots\right\}$$

$$\beta' = \sqrt[3]{(1-\varepsilon')^2}\left\{\tfrac{1}{3}\varepsilon' + \frac{1.4}{3.6}\cdot\frac{1}{3}\varepsilon'^3 + \frac{1.4.7}{3.6.9}\cdot\frac{1.4}{3.6}\varepsilon'^5 + \ldots.\right\}$$

$$\gamma' = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{(1-\varepsilon')^2}\left\{\frac{1.4}{3.6}\varepsilon' + \frac{1.4.7}{3\,6.9}\cdot\frac{1}{3}\varepsilon'^4 + \frac{1.4.7.10}{3.6.9\,12}\cdot\frac{1.4}{3.6}\varepsilon'^7 + \ldots\right\}$$

u. s. w.

sind. Das Integral, von $\sigma = 0$ an gerechnet, gibt daher

$$w = \omega - \frac{ee \sin m}{\sqrt[3]{1-\frac{3}{4}ee}}\left\{\alpha'\sigma + \beta' \cos(2M+\sigma)\sin\sigma + \gamma' \cos(4M+2\sigma)\sin 2\sigma + \ldots\right\} \quad (12)$$

11.

Die beiden ersten Coefficienten dieser Reihe sind in der 4. und 5. Columne der Tafel enthalten; das Argument derselben ist

$$\log \alpha' = 9{,}698757$$
$$-\log \sin m = 9{,}799073$$
$$\log \frac{ee}{\sqrt[3]{1-\frac{3}{4}ee}} = 7{,}811575$$
$$\log \sigma = 4{,}278523$$
$$1{,}587928$$
$$+\ 38''{,}719$$

$$\log \beta' = 1{,}703$$
$$-\log \sin m = 9{,}799$$
$$\log \frac{ee}{\sqrt[3]{1-\frac{3}{4}ee}} = 7{,}812$$
$$\log \cos(2M+\sigma)\sin\sigma = 8{,}963n$$
$$8{,}277n$$
$$-\ 0''{,}019$$

also die Summe beider Glieder $= +\ 38''{,}700$, und der gesuchte Längenunterschied

$$w = -\ 8^0\,21'\,19''{,}041.$$

12.

Die Erklärung, welche ich von diesen Tafeln gegeben habe, zeigt, dass bei dem Gebrauche derselben nicht etwa höhere Potenzen der Excentricität vernachlässigt werden, sondern dass sie das Resultat so genau geben, als die Anzahl ihrer Decimalstellen erlaubt. Die

$$\log \frac{e\sqrt[3]{\frac{3}{4}}}{\sqrt[3]{1-\frac{3}{4}ee}} \cdot \cos m.$$

Die Annäherung ist der der drei früheren Columnen der Tafel angemessen. Man berechnet daher ω nach einer dem sphärischen Dreiecke (§ 3) zugehörigen Formel, entweder

$$\sin\omega = \frac{\sin\sigma\sin\alpha'}{\cos u} = \frac{-\sin\sigma\sin\alpha}{\cos u'} = \frac{\sin\sigma\sin m}{\cos u\cos u'}$$

oder

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\omega = \frac{\sin\frac{1}{2}(u'-u)}{\cos\frac{1}{2}(u'+u)}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha'+\alpha) = \frac{\cos\frac{1}{2}(u'-u)}{\sin\frac{1}{2}(u'+u)}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha)$$

und die Reduction auf w mit Hülfe der Tafel.

Nach dieser Vorschrift werde ich das im 8. Art. berechnete Beispiel fortsetzen, um auch den Mittagsunterschied zwischen Dünkirchen und Seeberg zu bestimmen.

$$\log\sin\sigma = 8{,}96348383$$
$$-\log\sin\alpha = 9{,}99969539n$$
$$\text{Cpl. } \log\cos u' = 0{,}19967373$$
$$\log\sin\omega = 9{,}16285295n; \quad \omega = -\ 8^0\,21'\,57''{,}741$$

Das Argument der beiden letzten Columnen der Tafel ist $\log\frac{e\sqrt[3]{\frac{3}{4}}}{\sqrt[3]{1-\frac{3}{4}ee}}\cos m$,

$$\log\frac{e\sqrt[3]{\frac{3}{4}}}{\sqrt[3]{1-\frac{3}{4}ee}} = 8{,}844022$$
$$\log\cos m = 9{,}890371$$
$$\text{Argument} = 8{,}734393$$

Rechnung, welche dieses leistet, ist meistentheils dieselbe, welche man führen muss, wenn man die Erde als sphärisch annimmt, und es ist dieser sphärischen Rechnung, durch die Berücksichtigung der Ellipticität der Erde, nur die Auflösung der Gleichung (11) und die Berechnung der Reihe (12) hinzugekommen. — Da diese Rechnung, selbst für den häufigen Gebrauch, bequem genug ist, so scheint es mir unnöthig, Näherungen anzuwenden, welche auf der Bedingung beruhen, dass die Vermessung eine geringe Ausdehnung besitzt.

Tafeln zur Berechnung der geodätischen Vermessungen.

Arg.	Log α	Diff.	Log β	Diff.	Log γ	Diff.	Log α'	Diff.	Log β'	Diff.
6,400	5,314 42513	1	7,5124	2000			9,698970	0	7,035	200
6,500	5,314 42512	0	7,7124	2000			9,698970	0	7,235	200
6,600	5,314 42512	1	7,9124	2000			9,698970	0	7,435	200
6,700	5,314 42511	2	8,1124	2000			9,698970	0	7,635	200
6,800	5,314 42509	3	8,3124	2000			9,698970	0	7,835	200
6,900	5,314 42506	4	8,5124	2000			9,698970	0	8,035	200
7,000	5,314 42502	6	8,7124	2000			9,698970	0	8,235	200
7,100	5,314 42496	10	8,9124	2000			9,698970	0	8,435	200
7,200	5,314 42486	16	9,1124	2000			9,698970	0	8,635	200
7,300	5,314 42470	25	9,3124	2000			9,698970	0	8,835	200
7,400	5,314 42445	40	9,5124	2000			9,698970	1	9,035	200
7,500	5,314 42405	5	9,7124	200			9,698969	0	9,235	20
7,510	5,314 42400	6	9,7324	200			9,698969	0	9,255	20
7,520	5,314 42394	5	9,7524	200			9,698969	0	9,275	20
7,530	5,314 42389	6	9,7724	200			9,698969	0	9,295	20
7,540	5,314 42383	6	9,7924	200			9,698969	0	9,315	20
7,550	5,314 42377	7	9,8124	200			9,698969	0	9,335	20
7,560	5,314 42370	7	9,8324	200			9,698969	0	9,355	20
7,570	5,314 42363	7	9,8524	200			9,698969	0	9,375	20
7,580	5,314 42356	7	9,8724	200			9,698969	0	9,395	20
7,590	5,314 42349	8	9,8924	200			9,698969	0	9,415	20
7,600	5,314 42341	8	9,9124	200			9,698969	0	9,435	20
7,610	5,314 42333	8	9,9324	200			9,698969	0	9,455	20
7,620	5,314 42325	9	9,9524	200			9,698969	0	9,475	20
7,630	5,314 42316	10	9,9724	200			9,698969	0	9,495	20
7,640	5,314 42306	9	9,9924	200			9,698969	0	9,515	20
7,650	5,314 42297	11	0,0124	200			9,698969	1	9,535	20
7,660	5,314 42286	10	0,0324	200			9,698968	0	9,555	20
7,670	5,314 42276	11	0,0524	200			9,698968	0	9,575	20
7,680	5,314 42265	12	0,0724	200			9,698968	0	9,595	20
7,690	5,314 42253	12	0,0924	200			9,698968	0	9,615	20
7,700	5,314 42241	13	0,1124	200			9,698968	0	9,635	20
7,710	5,314 42228	14	0,1324	200			9,698968	0	9,655	20
7,720	5,314 42214	14	0,1524	200			9,698968	0	9,675	20
7,730	5,314 42200	15	0,1724	200			9,698968	0	9,695	20
7,740	5,314 42185	15	0,1924	200			9,698968	0	9,715	20
7,750	5,314 42170	16	0,2124	200			9,698968	0	9,735	20
7,760	5,314 42154	17	0,2324	200			9,698968	1	9,755	20
7,770	5,314 42137	18	0,2524	200			9,698967	0	9,775	20
7,780	5,314 42119	18	0,2724	200			9,698967	0	9,795	20
7,790	5,314 42101	20	0,2924	200			9,698967	0	9,815	20
7,800	5,314 42081	20	0,3124	200			9,698967	0	9,835	20
7,810	5,314 42061	22	0,3324	200			9,698967	0	9,855	20
7,820	5,314 42039	22	0,3524	200			9,698967	0	9,875	20
7,830	5,314 42017	23	0,3724	200			9,698967	0	9,895	20
7,840	5,314 41994	25	0,3924	200			9,698967	1	9,915	20
7,850	5,314 41969	25	0,4124	200			9,698966	0	9,935	20
7,860	5,314 41944	27	0,4324	200			9,698966	0	9,955	20
7,870	5,314 41917	28	0,4524	200			9,698966	0	9,975	20
7,880	5,314 41889	30	0,4724	200			9,698966	0	9,995	20
7,890	5,314 41859		0,4924				9,698966		0,015	

Arg.	Log α	Diff.	Log β	Diff.	Log γ	Diff.	Log α'	Diff.	Log β'	Diff.
7,900	5,314 41828	32	0,51235	2000			9,698965	0	0,035	20
7,910	5,314 41796	34	0,53235	2000			9,698965	0	0,055	20
7,920	5,314 41762	35	0,55235	2000			9,698965	0	0,075	20
7,930	5,314 41727	37	0,57235	2000			9,698965	0	0,095	20
7,940	5,314 41690	39	0,59235	2000			9,698965	1	0,115	20
7,950	5,314 41651	41	0,61235	2000			9,698964	0	0,135	20
7,960	5,314 41610	42	0,63235	2000			9,698964	0	0,155	20
7,970	5,314 41568	45	0,65235	2000			9,698964	1	0,175	20
7,980	5,314 41523	47	0,67235	1999			9,698963	0	0,195	20
7,990	5,314 41476	48	0,69234	2000			9,698963	0	0,215	20
8,000	5,314 41428	52	0,71234	2000			9,698963	1	0,235	20
8,010	5,314 41376	53	0,73234	2000			9,698962	0	0,255	20
8,020	5,314 41323	56	0,75234	2000			9,698962	0	0,275	20
8,030	5,314 41267	59	0,77234	2000			9,698962	1	0,295	20
8,040	5,314 41208	61	0,79234	2000			9,698961	0	0,315	20
8,050	5,314 41147	65	0,81234	2000			9,698961	1	0,335	20
8,060	5,314 41082	67	0,83234	2000			9,698960	0	0,355	20
8,070	5,314 41015	71	0,85234	1999			9,698960	0	0,375	20
8,080	5,314 40944	74	0,87233	2000			9,698960	1	0,395	20
8,090	5,314 40870	77	0,89233	2000			9,698959	0	0,415	20
8,100	5,314 40793	81	0,91233	2000			9,698959	1	0,435	20
8,110	5,314 40712	85	0,93233	2000			9,698958	1	0,455	20
8,120	5,314 40627	89	0,95233	2000			9,698957	0	0,475	20
8,130	5,314 40538	93	0,97233	1999			9,698957	1	0,495	20
8,140	5,314 40445	98	0,99232	2000			9,698956	0	0,515	20
8,150	5,314 40347	102	1,01232	2000			9,698956	1	0,535	20
8,160	5,314 40245	107	1,03232	2000			9,698955	1	0,555	20
8,170	5,314 40138	112	1,05232	2000			9,698954	1	0,575	20
8,180	5,314 40026	117	1,07232	1999			9,698953	0	0,595	20
8,190	5,314 39909	123	1,09231	2000			9,698953	1	0,615	20
8,200	5,314 39786	128	1,11231	2000			9,698952	1	0,635	20
8,210	5,314 39658	135	1,13231	2000			9,698951	1	0,655	20
8,220	5,314 39523	141	1,15231	1999			9,698950	1	0,675	20
8,230	5,314 39382	147	1,17230	2000			9,698949	1	0,695	20
8,240	5,314 39235	155	1,19230	2000			9,698948	1	0,715	20
8,250	5,314 39080	162	1,21230	1999	6,207	40	9,698947	1	0,735	20
8,260	5,314 38918	169	1,23229	2000	6,247	40	9,698946	1	0,755	20
8,270	5,314 38749	177	1,25229	2000	6,287	40	9,698945	1	0,775	20
8,280	5,314 38572	186	1,27229	1999	6,327	40	9,698944	2	0,795	20
8,290	5,314 38386	195	1,29228	2000	6,367	40	9,698942	1	0,815	20
8,300	5 314 38191	203	1,31228	1999	6,407	40	9,698941	1	0,835	20
8,310	5.314 37988	213	1,33227	2000	6,447	40	9,698940	2	0,855	20
8,320	5,314 37775	224	1,35227	2000	6,487	40	9,698938	1	0,875	20
8,330	5,314 37551	234	1,37227	1999	6,527	40	9,698937	2	0,895	20
8,340	5,314 37317	244	1,39226	2000	6,567	40	9,698935	1	0,915	20
8,350	5,314 37073	257	1,41226	1999	6,607	40	9,698934	2	0,935	20
8,360	5,314 36816	268	1,43225	2000	6,647	40	9,698932	2	0,955	20
8,370	5,314 36548	281	1,45225	1999	6,687	40	9,698930	2	0,975	20
8,380	5,314 36267	295	1,47224	1999	6,727	40	9,698928	2	0,995	20
8,390	5,314 35972	308	1,49223	2000	6,767	40	9,698926	2	1,015	20

Arg.	Log α	Diff.	Log β	Diff.	Log γ	Diff.	Log α'	Diff.	Log β'	Diff.
8,400	5,314 35664	323	1,51223	1999	6,807	40	9,698924	2	1,035	20
8,410	5,314 35341	338	1,53222	1999	6,847	40	9,698922	2	1,055	20
8,420	5,314 35003	353	1,55221	2000	6,887	40	9,698920	2	1,075	20
8,430	5,314 34650	371	1,57221	1999	6,927	40	9,698918	3	1,095	20
8,440	5,314 34279	388	1,59220	1999	6,967	40	9,698915	2	1,115	20
8,450	5,314 33891	406	1,61219	1999	7,007	40	9,698913	3	1,135	20
8,460	5,314 33485	425	1,63218	2000	7,047	40	9,698910	3	1,155	20
8,470	5,314 33060	446	1,65218	1999	7,087	40	9,698907	3	1,175	20
8,480	5,314 32614	466	1,67217	1999	7,127	40	9,698904	3	1,195	20
8,490	5,314 32148	489	1,69216	1999	7,167	40	9,698901	3	1,215	20
8,500	5,314 31659	511	1,71215	1999	7,207	40	9,698898	4	1,235	20
8,510	5,314 31148	535	1,73214	1999	7,247	40	9,698894	3	1,255	20
8,520	5,314 30613	561	1,75213	1999	7,287	40	9,698891	4	1,275	20
8,530	5,314 30052	587	1,77212	1998	7,327	40	9,698887	4	1,295	20
8,540	5,314 29465	615	1,79210	1999	7,367	40	9,698883	4	1,315	20
8,550	5,314 28850	644	1,81209	1999	7,407	40	9,698879	4	1,335	20
8,560	5,314 28206	674	1,83208	1999	7,447	40	9,698875	5	1,355	20
8,570	5,314 27532	705	1,85207	1998	7,487	40	9,698870	5	1,375	20
8,580	5,314 26827	739	1,87205	1999	7,527	40	9,698865	5	1,395	20
8,590	5,314 26088	774	1,89204	1998	7,567	40	9,698860	5	1,415	20
8,600	5,314 25314	810	1,91202	1999	7,607	40	9,698855	5	1,435	20
8,610	5,314 24504	848	1,93201	1998	7,647	39	9,698850	6	1,455	20
8,620	5,314 23656	889	1,95199	1998	7,686	40	9,698844	6	1,475	20
8,630	5,314 22767	930	1,97197	1998	7,726	40	9,698838	6	1,495	20
8,640	5,314 21837	973	1,99195	1998	7,766	40	9,698832	6	1,515	20
8,650	5,314 20864	1020	2,01193	1998	7,806	40	9,698826	7	1,535	20
8,660	5,314 19844	1068	2,03191	1998	7,846	40	9,698819	7	1,555	20
8,670	5,314 18776	1118	2,05189	1998	7,886	40	9,698812	8	1,575	20
8,680	5,314 17658	1170	2,07187	1998	7,926	40	9,698804	7	1,595	20
8,690	5,314 16488	1226	2,09185	1997	7,966	40	9,698797	9	1,615	20
8,700	5,314 15262	1283	2,11182	1998	8,006	40	9,698788	8	1,635	19
8,710	5,314 13979	1344	2,13180	1997	8,046	40	9,698780	9	1,654	20
8,720	5,314 12635	1406	2,15177	1997	8,086	40	9,698771	10	1,674	20
8,730	5,314 11229	1473	2,17174	1997	8,126	40	9,698761	9	1,694	20
8,740	5,314 09756	1543	2,19171	1997	8,166	40	9,698752	11	1,714	20
8,750	5,314 08213	1615	2,21168	1997	8,206	40	9,698741	10	1,734	20
8,760	5,314 06598	1690	2,23165	1996	8,246	40	9,698731	12	1,754	20
8,770	5,314 04908	1771	2,25161	1997	8,286	40	9,698719	11	1,774	20
8,780	5,314 03137	1853	2,27158	1996	8,326	40	9,698708	13	1,794	20
8,790	5,314 01284	1941	2,29154	1996	8,366	40	9,698695	13	1,814	20
8,800	5,313 99343	1004	2,31150	998	8,406	19	9,698682	6	1,834	10
8,805	5,313 98339	1028	2,32148	998	8,425	20	9,698676	7	1,844	10
8,810	5,313 97311	1051	2,33146	998	8,445	20	9,698669	7	1,854	10
8,815	5,313 96260	1076	2,34144	998	8,465	20	9,698662	7	1,864	10
8,820	5,313 95184	1101	2,35142	998	8,485	20	9,698655	8	1,874	10
8,825	5,313 94083	1127	2,36140	998	8,505	20	9,698647	7	1,884	10
8,830	5,313 92956	1152	2,37138	997	8,525	20	9,698640	8	1,894	10
8,835	5,313 91804	1180	2,38135	998	8,545	20	9,698632	8	1,904	10
8,840	5,313 90624	1207	2,39133	998	8,565	20	9,698624	8	1,914	10
8,845	5,313 89417	1234	2,40131	997	8,585	20	9,698616	8	1,924	10

Arg.	Log α	Diff.	Log β	Diff.	Log γ	Diff.	Log α'	Diff.	Log β'	Diff.
8,850	5,313 88183	1264	2,411280	9975	8,605	20	9,698608	9	1,934	10
8,855	5,313 86919	1293	2,421255	9974	8,625	20	9,698599	8	1,944	10
8,860	5,313 85626	1323	2,431229	9974	8,645	20	9,698591	9	1,954	10
8,865	5,313 84303	1353	2,441203	9973	8,665	20	9,698582	9	1,964	10
8,870	5,313 82950	1385	2,451176	9972	8,685	20	9,698573	9	1,974	10
8,875	5,313 81565	1417	2,461148	9972	8,705	20	9,698564	10	1,984	10
8,880	5,313 80148	1450	2,471120	9971	8,725	20	9,698554	9	1,994	10
8,885	5,313 78698	1484	2,481091	9971	8,745	20	9,698545	10	2,004	10
8,890	5,313 77214	1518	2,491062	9969	8,765	20	9,698535	10	2,014	9
8,895	5,313 75696	1553	2,501031	9970	8,785	19	9,698525	11	2,023	10
8,900	5,313 74143	1590	2,511001	9968	8,804	20	9,698514	10	2,033	10
8,905	5,313 72553	1626	2,520969	9968	8,824	20	9,698504	11	2,043	10
8,910	5,313 70927	1664	2,530937	9966	8,844	20	9,698493	11	2,053	10
8,915	5,313 69263	1702	2,540903	9966	8,864	20	9,698482	12	2,063	10
8,920	5,313 67561	1742	2,550869	9965	8,884	20	9,698470	11	2,073	10
8,925	5,313 65819	1783	2,560834	9965	8,904	20	9,698459	12	2,083	10
8,930	5,313 64036	1824	2,570799	9964	8,924	20	9,698447	12	2,093	10
8,935	5,313 62212	1866	2,580763	9963	8,944	20	9,698435	13	2,103	10
8,940	5,313 60346	1909	2,590726	9962	8,964	20	9,698422	12	2,113	10
8,945	5,313 58437	1953	2,600688	9961	8,984	20	9,698410	13	2,123	10
8,950	5,313 56484	1999	2,610649	9960	9,004	20	9,698397	14	2,133	10
8,955	5,313 54485	2045	2,620609	9960	9,024	20	9,698383	13	2,143	10
8,960	5,313 52440	2093	2,630569	9958	9,044	20	9,698370	14	2,153	10
8,965	5,313 50347	2141	2,640527	9957	9,064	19	9,698356	14	2,163	10
8,970	5,313 48206	2191	2,650484	9957	9,083	20	9,698342	15	2,173	10
8,975	5,313 46015	2241	2,660441	9955	9,103	20	9,698327	15	2,183	10
8,980	5,313 43774	2293	2,670396	9955	9,123	20	9,698312	15	2,193	10
8,985	5,313 41481	2347	2,680351	9953	9,143	20	9,698297	16	2,203	9
8,990	5,313 39134	2400	2,690304	9952	9,163	20	9,698281	16	2,212	10
8,995	5,313 36734	2457	2,700256	9952	9,183	20	9,698265	16	2,222	10
9,000	5,313 34277	2513	2,710208	9950	9,203	20	9,698249	17	2,232	10
9,005	5,313 31764	2571	2,720158	9949	9,223	20	9,698232	17	2,242	10
9,010	5,313 29193	2631	2,730107	9947	9,243	20	9,698215	18	2,252	10
9,015	5,313 26562	2691	2,740054	9947	9,263	20	9,698197	18	2,262	10
9,020	5,313 23871	2754	2,750001	9945	9,283	19	9,698179	18	2,272	10
9,025	5,313 21117	2818	2,759946	9944	9,302	20	9,698161	19	2,282	10
9,030	5,313 18299	2883	2,769890	9943	9,322	20	9,698142	19	2,292	10
9,035	5,313 15416	2949	2,779833	9941	9,342	20	9,698123	20	2,302	10
9,040	5,313 12467	3018	2,789774	9941	9,362	20	9,698103	20	2,312	10
9,045	5,313 09449	3087	2,799715	9939	9,382	20	9,698083	20	2,322	10
9,050	5,313 06362	3159	2,809654	9937	9,402	20	9,698063	21	2,332	10
9,055	5,313 03203	3232	2,819591	9936	9,422	19	9,698042	22	2,342	9
9,060	5,312 99971	3306	2,829527	9934	9,441	20	9,698020	22	2,351	10
9,065	5,312 96665	3383	2,839461	9933	9,461	20	9,697998	22	2,361	10
9,070	5,312 93282	3460	2,849394	9931	9,481	20	9,697976	23	2,371	10
9,075	5,312 89822	3541	2,859325	9930	9,501	20	9,697953	24	2,381	10
9,080	5,312 86281	3623	2,869255	9929	9,521	20	9,697929	24	2,391	10
9,085	5,312 82658	3706	2,879184	9926	9,541	20	9,697905	25	2,401	10
9,090	5,312 78952	3791	2,889110	9925	9,561	20	9,697880	25	2,411	10
9,095	5,312 75161	3879	2,899035	9923	9,581	19	9,697855	26	2,421	10
9,100	5,312 71282		2,909058		9,600		9,697829		2,431	

128. Ueber einen Aufsatz von Ivory im Philosophical Magazine.*)

(Astr. Nachr. 5, p. 177.)

Ich bin Ihnen sehr verbunden für die Mittheilung der beiden Hefte des Philosophical Magazine für April und Mai 1826. Der Aufsatz des Herrn Ivory ist mir sehr auffallend gewesen, weil derselbe die Beschuldigung nicht undeutlich ausspricht, dass ich die Analyse der Aufgabe, die geodätischen Vermessungen zu berechnen, aus dem Juli-Hefte 1824 des Philosoph. Magazine mir zugeeignet haben sollte.

Herr Ivory hätte bedenken sollen, dass man eine so niedrige Beschuldigung nicht einmal andeuten darf, wenn man sie nicht beweisen kann! Ich hoffe daher, dass Niemand von mir fordern wird, dass ich mich gegen einen nicht begründeten Angriff dieser Art vertheidige.

Ich habe über diese Materie bis jetzt drei Aufsätze, in Ihren Astronomischen Nachrichten, drucken lassen: nämlich (Nr. 3. Dec. 1821 [Abh. 125]) eine Methode, die Dreiecksmessungen auf der Oberfläche der Erde so zu berechnen, dass die grossen Fehler vermieden werden, welche man begehen kann, wenn man die Lage der Dreieckspunkte, wie es fast allgemein üblich war, durch Entfernungen vom Meridian und Perpendikel angibt; ferner (Nr. 6. Januar 1822 [Abh. 126]) eine Methode, die Dreiecke auf der Oberfläche der Erde mit Rücksicht auf die Ellipticität der Meridiane zu berechnen, und also die Azimuthe und Entfernungen der geodätischen Linien, welche die verschiedenen Punkte einer Vermessung mit einander verbinden, richtig zu erhalten; endlich (Nr. 86. October 1825 [Abh. 127]) eine Methode, geographische Längen und Breiten aus geodätischen Vermessungen zu berechnen.

Ich habe Herrn Ivory's Abhandlung vom Juli 1824 weder gesehen, noch die Existenz derselben gekannt; dasselbe ist der Fall mit der 41. Nummer des Quarterly Journal of the Royal Institution. Ich weiss daher nicht, wovon eigentlich die Rede ist, ob das Quarterly Journal eine Uebersetzung oder einen Auszug meiner drei Aufsätze enthält, oder den letzten allein; ebensowenig weiss ich, ob Herr Ivory (Juli 1824) die ganze Materie oder nur einen Theil derselben behandelt hat.

In dem ersten Falle werden die oben angeführten Zeiten des Drucks meiner drei Aufsätze zeigen, dass wenigstens der Inhalt der beiden ersten mein unbestreitbares Eigenthum ist. Was den letzten anbelangt, so bin ich, wenn er wirklich im Wesentlichen dasselbe enthält, was Herr Ivory vor der Bekanntmachung desselben hat drucken lassen, sehr bereitwillig, Herrn Ivory die Priorität zuzugestehen, denn ich bin immer der Meinung gewesen, dass das Datum des Drucks allein über das Eigenthumsrecht wissenschaftlicher Ansichten oder Erfindungen entscheidet.

Doch da nicht sowohl hiervon die Rede ist, als von der Zurechtweisung einer ungerechten Beschuldigung, so erlaube ich mir Einiges anzuführen, was beweisen wird, dass ich lange vor Juli 1824 im Besitze der Resultate gewesen bin, welche mein dritter Aufsatz enthält. Ich habe nämlich bereits im Winter 1821—22 in an der hiesigen Universität gehaltenen öffentlichen Vorlesungen alles das, was in meinen drei Aufsätzen enthalten ist, vorgetragen, und bin daher im Stande, mich auf das Zeugniss meiner Zuhörer zu berufen, von denen ich die, bereits durch astronomische Arbeiten bekannt gewordenen, die Herren Argelander, Rosenberger, Scherk, Strehlke und Klupsz hier nenne. Ferner glaube ich, dass jeder aufmerksame Leser aus der Form meines zweiten Aufsatzes erkennen wird, dass ich damals schon im Besitze der Materie des dritten gewesen bin. — Ich halte dieses für hinreichend; allein Herrn Ivory's Aufsatz (Mai 1826) enthält einige Aeusserungen, über welche ich noch etwas sagen muss, da sie nicht mich persönlich, sondern die abgehandelte Materie betreffen.

Der Zweck meines dritten Aufsatzes war, eine Methode zu geben, durch welche die Längen und Breiten nicht bis auf die 2. oder 4. Potenz der Excentricität genähert, sondern so genau sollten berechnet werden können, als die trigonometrischen Tafeln, mit welchen man rechnen will, erlauben. Dieses sollte nicht blos bei Vermessungen von geringer Ausdehnung stattfinden, sondern allgemein für jede Ausdehnung derselben. Ich glaube dieses durch eine Rechnung erreicht zu haben, welche nicht erheblich mühsamer ist, als sie für die sphärische Figur der Erde sein würde. Diese Rechnung setzt eine Hülfstafel voraus, welche 4 Octavseiten anfüllt, und welche dieselben Coefficienten ein für alle Mal berechnet enthält, welche man, ohne die Hülfe der Tafel, in jedem einzelnen Falle berechnen müsste.

*) [216 d. a. Verz. — Schreiben an Schumacher vom 14. August 1826.]

Mit welchem Rechte Herr IVORY diese Tafel „bulky tables“ nennt, und ob seine Aeusserung, dass mein Ausdruck des Bogens der geodätischen Linie „the calculation of many subsidiary arcs“ erfordere, gegründet ist, wird jeder Leser, der meinen Aufsatz versteht, selbst entscheiden. Die Wahrheit ist, dass meine Tafeln die Berechnung keines einzigen Hülfsbogens erfordern, sondern nur die Formation zweier Argumente, welche man erhält, indem man zu dem, auch sonst in der Rechnung nothwendigen, log cos m zwei Logarithmen addirt, welche allein von der Excentricität abhängen, also für ein und dasselbe Sphäroid constant sind. Wer nach Herrn IVORY's Formeln ein Beispiel mit derselben Genauigkeit berechnen will, welche meine Tafeln ergeben, wird leicht sehen, wo der Vortheil liegt. — Herr IVORY scheint daher auch S. 252 zu weit gegangen zu sein, wenn er meine Rechnung „complicated“ nennt; ich glaube vielmehr, selbst nachdem ich Herrn IVORY's Aufsätze (April und Mai 1826) gelesen habe, dass nichts Ueberflüssiges darin ist, vorausgesetzt dass man, weder bei kleinen noch bei sehr grossen Entfernungen, nichts von der Genauigkeit aufopfern will.

---

129. Bessel's Methode der Berechnung geodätischer Vermessungen.*)

(Astr. Nachr. **6**, p. 1.)

... Ist φ eine Function der m Veränderlichen $x, y, z, r, s, \ldots$, zwischen welchen n Gleichungen $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ ... vorhanden sind, so ergeben diese letztern eben so viele Gleichungen zwischen den Veränderungen von x, y, z ..., welche durch a, b, c bezeichnet werden sollen, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{du}{dx}\right)a + \left(\frac{du}{dy}\right)b + \left(\frac{du}{dz}\right)c + \ldots \\ 0 &= \left(\frac{dv}{dx}\right)a + \left(\frac{dv}{dy}\right)b + \left(\frac{dv}{dz}\right)c + \ldots \\ 0 &= \left(\frac{dw}{dx}\right)a + \left(\frac{dw}{dy}\right)b + \left(\frac{dw}{dz}\right)c + \ldots \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \end{aligned}\right\} \ldots (1)$$

Vermittelst dieser Gleichungen kann man n Veränderungen a, b, c ... durch die übrigen ausdrücken, und wenn man diese Ausdrücke in die Variation von φ

$$\Delta\varphi = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)a + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)b + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)c + \ldots \quad \ldots (2)$$

substituirt, so ist die Bedingung des Minimums bekanntlich, dass das, was in jede der übrig bleibenden Veränderungen multiplicirt ist, für sich verschwindet. Man erhält auf diese Weise $m - n$ Gleichungen, welche mit den n Gleichungen (1) verbunden, zur Bestimmung aller Veränderlichen hinreichen.

Die Elimination so vieler Veränderungen a, b, c ..., als Gleichungen (1) vorhanden sind, aus dem Ausdruck der Variation von φ kann man aber auch bewirken, indem man jede der n Gleichungen (1) nach der Reihe mit den Factoren f, g, h ... multiplicirt, welche Factoren man so bestimmt, dass in der Summe dieser Producte und der Gleichung (2) n Coefficienten der Veränderungen a, b, c ... verschwinden. Da nun wegen der Bedingung des Minimums auch die Coefficienten der übrig gebliebenen Veränderungen gleich Null gesetzt werden müssen, so erhält man zur Bestimmung der Factoren f, g, h ... und der unbekannten Grössen x, y, z ... die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dx}\right)f + \left(\frac{dv}{dx}\right)g + \left(\frac{dw}{dx}\right)h + \ldots \\ 0 &= \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) + \left(\frac{du}{dy}\right)f + \left(\frac{dv}{dy}\right)g + \left(\frac{dw}{dy}\right)h + \ldots \\ 0 &= \left(\frac{d\varphi}{dz}\right) + \left(\frac{du}{dz}\right)f + \left(\frac{dv}{dz}\right)g + \left(\frac{dw}{dz}\right)h + \ldots \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \end{aligned}\right\} . (3)$$

Die Anzahl dieser Gleichungen ist m; sie enthalten $m + n$ unbekannte Grössen und diese werden bestimmt, wenn man die n Gleichungen $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ ... dazu nimmt.

Dieses Verfahren wird man mit Vortheil bei der Berechnung geodätischer Vermessungen nach der Methode der kleinsten Quadrate anwenden, da in diesem Falle die m Grössen x, y, z ... sehr leicht vermittelst der Gleichungen (3) durch f, g, h ... bestimmt werden können. Setzt man nun die so gefundenen Ausdrücke von x, y, z ... in die n Gleichungen $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ ..., so werden diese nur die unbekannten Grössen f, g, h ... enthalten, welche also durch die Auflösung dieser Gleichungen bekannt werden. Die Substitution der Werthe von f, g, h ... in die aus (3) ge-

*) [Mitgetheilt von ROSENBERGER in dessen Aufsatz: „Ueber die, auf Veranstaltung der französischen Akademie, während der Jahre 1736 und 1737 in Schweden vorgenommene Gradmessung“.]

zogenen Ausdrücke von x, y, z ... gibt endlich die wahrscheinlichsten Werthe dieser Grössen.

Um dies im Einzelnen zu verfolgen, denke man sich in irgend einem Dreiecksnetz sämmtliche Winkel, unter gewissen, der Wahrheit nahe kommenden, Voraussetzungen über die gegenseitige Lage der Dreieckspunkte, berechnet. Ich bezeichne die Dreiecke durch fortlaufende Zahlen 1, 2, 3 ...; die Winkel in denselben, wie sie unter den gemachten Voraussetzungen gefunden worden sind, durch a^1, b^1, c^1; a^2, b^2, c^2 etc., die diesen gegenüberstehenden Seiten durch A^1, B^1, C^1; A^2, B^2, C^2 etc. Diesen hypothetischen Werthen der Winkel setze ich die wahrscheinlichsten Verbesserungen x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 etc. hinzu, so dass die wahrscheinlichsten Winkel durch a^1+x_1, b^1+y_1, c^1+z_1; a^2+x_2 ... bezeichnet werden. Nennt man noch die beobachteten Winkel α^1, β^1, γ^1; α^2, β^2, etc., so sind die Differenzen, deren Quadratsumme ein Minimum sein soll, insofern keine andere Winkel beobachtet sind:

$$\alpha^1-a^1-x_1;\ \beta^1-b^1-y_1;\ \gamma^1-c^1-z_1;\ \alpha^2-a^2-x_2 \text{ u. s. f.}$$

Kommen aber noch andere Beobachtungen hinzu, d. h. wenn Combinationen dieser Winkel beobachtet sind, so geben auch diese ähnliche Unterschiede. Zum Beispiel wenn die Summen mehrerer Winkel μ^1, μ^2, μ^3 ... direct beobachtet wären, so würde man für jede haben $\mu^1-m^1-s_1$, $\mu^2-m^2-s_2$ etc., wo s_1, s_2 ... die wahrscheinlichsten Verbesserungen der hypothetischen Winkel m^1, m^2 ... bezeichnen, und die Summe der Quadrate von allen diesen Unterschieden $= 2\varphi$ soll ein Minimum sein. Man hat also:

$$\begin{aligned}\text{Min.} = 2\varphi = {} & (\alpha^1-a^1-x_1)^2+(\beta^1-b^1-y_1)^2+(\gamma^1-c^1-z_1)^2 \\ & +(\alpha^2-a^2-x_2)^2+(\beta^2-b^2-y_2)^2+(\gamma^2-c^2-z_2)^2 \\ & \quad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots \\ & +(\mu^1-m^1-s_1)^2+(\mu^2-m^2-s_2)^2 \ldots\end{aligned}$$

Bezeichnet man der grösseren Kürze wegen $a^1-\alpha^1, b^1-\beta^1$, $c^1-\gamma^1$ ... durch a_1, b_1, c_1 ..., sowie $m^1-\mu^1$ durch m_1 u. s. f., so wird:

$$\begin{aligned}2\varphi = {} & (a_1+x_1)^2+(b_1+y_1)^2+(c_1+z_1)^2 \\ & +(a_2+x_2)^2+(b_2+y_2)^2+(c_2+z_2)^2 \\ & \quad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots \\ & +(m_1+s_1)^2+(m_2+s_2)^2 \ldots\end{aligned}$$

und

$$\left(\frac{d\varphi}{dx_k}\right) = a_k+x_k;\quad \left(\frac{d\varphi}{dy_k}\right) = b_k+y_k;$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dz_k}\right) = c_k+z_k;\quad \left(\frac{d\varphi}{ds_k}\right) = m_k+s_k.$$

Zwischen x_1, y_1, z_1 ..., s_1, s_2 ... sind aber Bedingungen vorhanden, so dass sie eins von dem andern abhängen. Auf diese verschiedenen Bedingungen muss nunmehr auf die oben angezeigte Weise Rücksicht genommen werden.

1. Diejenigen dieser Bedingungen, welche die einzelnen Dreiecke ergeben, sind:

$$a^1+b^1+c^1+x_1+y_1+z_1 = 180^0$$
$$a^2+b^2+c^2+x_2+y_2+z_2 = 180^0 \text{ etc.},$$

oder auch:

$$x_1+y_1+z_1 = 0 = u_1$$
$$x_2+y_2+z_2 = 0 = u_2 \text{ etc.}$$
$$\left(\frac{du_k}{dx_k}\right) = \left(\frac{du_k}{dy_k}\right) = \left(\frac{du_k}{dz_k}\right) = 1.$$

Multiplicirt man die Differentialquotienten dieser Gleichungen mit den unbestimmten Factoren f_1, f_2 etc., so erhält man nach dem Vorigen:

$$0 = a_1+x_1+f_1 \ldots$$
$$0 = b_1+y_1+f_1 \ldots$$
$$0 = c_1+z_1+f_1 \ldots$$
$$0 = a_2+x_2+f_2 \ldots$$
$$0 = b_2+y_2+f_2 \ldots$$
$$0 = c_2+z_2+f_2 \ldots \text{ u. s. f.}$$

Ausser diesen sind noch folgende Bedingungen zu berücksichtigen.

2. Die aus den Summen m hervorgehenden, welche s_1, s_2 ... gleich Aggregaten x_1, y_1, z_1 ... geben. Zum Beispiel es wären a^1, a^2, b^4 zusammenliegende Winkel und $a^1+a^2+b^4$ direct beobachtet, so gäbe dieses:

$$a^1+a^2+b^4+x_1+x_2+y_4 = m^1+s_1$$

oder
$$x_1+x_2+y_4-s_1 = 0 = v_1.$$

Nennt man hier die Factoren g_1, g_2, g_3 ..., so kommt den Gleichungen für x_1, x_2, y_4 noch $+g_1$, der Gleichung für s_1 aber noch $-g_1$ hinzu. Ebenso mit den übrigen Bedingungsgleichungen dieser Art.

3. Die ganz um den Horizont herum gemessenen, also sich zu 360^0 ergänzenden Winkel. Für diese nenne ich die Factoren h_1, h_2 ... und setze also dem Ausdrucke eines Winkels, der in einem solchen gyro horizontis vorkommt, noch $+h_1$, oder, wenn er im zweiten gyro vorkommt, $+h_2$ u. s. f. hinzu.

4. Die Bedingungen, welche die Seiten ergeben. Man hat für jedes Dreieck, wenn δA^1, δB^1, δC^1 .... die Correctionen der in der Hypothese der Winkel a^1, b^1, c^1 .... berechneten Seiten bedeuten:

$$\frac{\delta A}{A} - x\operatorname{cotg} a = \frac{\delta B}{B} - y\operatorname{cotg} b = \frac{\delta C}{C} - z\operatorname{cotg} c.$$

Von den Seiten ist aber keine gemessen ausser der Basis, für welche z. B. $\delta A^1 = 0$ gesetzt werden muss.

Man kann also aus diesen Gleichungen alle Variationen der Seiten eliminiren und erhält dadurch eben so viele Bedingungsgleichungen, als doppelt oder mehrfach bestimmte Seiten vorhanden sind.

Die Factoren dieser Bedingungsgleichungen bezeichne ich durch $p_1, p_2 \ldots$, und setze also dem Ausdrucke eines in derselben Bedingungsgleichung vorkommenden Winkels (allgemein ψ) die Grösse $\pm \operatorname{cotg} \psi . p$ hinzu, wo das Zeichen so genommen wird, wie die Variation von ψ in der Bedingungsgleichung vorkommt.

Man bemerkt übrigens leicht, dass die vorläufige Berechnung des ganzen Netzes nicht gerade nothwendig ist, im Gegentheil braucht die Summe der Winkel jedes Dreiecks nicht einmal zu 2 Rechten ausgeglichen zu werden. Geschieht es aber, so erlangt man den Vortheil, dass die ersten Glieder der Gleichungen, welche die Unbekannten $x_1, y_1, z_1 \ldots$ nicht enthalten, sämmtlich verschwinden. Hat man keine solche Rechnung angestellt, so muss man bei einer jeden der Gleichungen, welche die Seiten ergeben, immer zu derselben Seite zurückkehren, von welcher man ausgegangen ist, deren Werth man also $= \frac{\sin a^m \sin a^n \sin b^o \ldots}{\sin b^m \sin c^n \sin c^o \ldots}$ erhält, wo $a^m, b^m, a^n, c^n \ldots$ die beiden in Betracht kommenden Winkel jedes Dreiecks in der zurückführenden Reihe bezeichnen. Da dieser Werth $= 1$ sein muss, so erhält man die gesuchte Gleichung, indem man $a^m, b^m \ldots$ variirt, also:

$$0 = \left\{ \frac{\sin a^m \sin a^n \sin b^o \ldots}{\sin b^m \sin c^n \sin c^o \ldots} - 1 \right\} + x^m \operatorname{cotg} a^m - y^m \operatorname{cotg} b^m \ldots$$

Ich [ROSENBERGER] habe aber bei der grossen Anzahl von Bedingungsgleichungen, auf welche man bei der Untersuchung des Maupertuis'schen Netzes zu sehen hat, die vorläufige hypothetische Rechnung für bequemer gehalten.

Nachdem auf diese Art der Ausdruck jedes Winkels durch die Factoren f, g, h, p gefunden ist, fängt man an, die eingeführten unbestimmten Factoren zu eliminiren. Man eliminirt eine gewisse Zahl davon, um die Anzahl der unbekannten Grössen in den am Ende übrig bleibenden Gleichungen zu vermindern; wie gross aber diese Zahl ist, bleibt der Willkür überlassen und es wird hierbei allein auf die grösste Leichtigkeit der Rechnung ankommen. In jedem Falle möchte es aber zweckmässig sein, die Factoren f zu eliminiren. Man hat z. B., wenn die drei ersten Gleichungen vollständig

$$0 = a_1 + x_1 + f_1 + P$$
$$0 = b_1 + y_1 + f_1 + Q$$
$$0 = c_1 + z_1 + f_1 + R$$

sind (wo also P, Q, R das bezeichnet, was die Bedingungsgleichungen ausser f den Ausdrücken von x_1, y_1, z_1 hinzufügen):

$$x_1 + y_1 + z_1 = 0$$
$$f_1 = -\tfrac{1}{3}(a_1 + b_1 + c_1) - \tfrac{1}{3}P - \tfrac{1}{3}Q - \tfrac{1}{3}R$$

und folglich statt der obigen drei Gleichungen:

$$0 = \tfrac{1}{3}(2a - b - c) + \tfrac{1}{3}(2P - Q - R) + x_1$$
$$0 = \tfrac{1}{3}(2b - a - c) + \tfrac{1}{3}(2Q - P - R) + y_1$$
$$0 = \tfrac{1}{3}(2c - a - b) + \tfrac{1}{3}(2R - P - Q) + z_1$$

Ebenso wird man, wenn es bequemer scheint, auch alle oder einige g, sowie alle oder einige h eliminiren können: auf jeden Fall aber erhält man alle Correctionen der Winkel durch eine gewisse Zahl der unbekannten Grössen f, g, h ausgedrückt, und wenn man diese Ausdrücke in die Gleichungen $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ etc. setzt, die nothwendigen Gleichungen zur Bestimmung der in der Rechnung gelassenen Grössen g, h, p. Es ist klar, dass man auf diese Weise so viele Gleichungen aufzulösen erhält, als Bedingungen, exclusive der durch die Summe der drei Winkel gegebenen und der sonst eliminirten, vorhanden sind, und damit ist die Aufgabe vollständig gelöst. Ist aber die Zahl der Bedingungsgleichungen sehr gross, wie es oft der Fall sein wird, so ist auch dieses Verfahren nicht mehr ausführbar, wegen der gar zu grossen Zahl der unbekannten Grössen. Dennoch aber wird man auch in diesem Falle das beabsichtigte Ziel erreichen, wenn man sich successive der Wahrheit zu nähern sucht, indem man nämlich nähere und entferntere Bedingungen trennt, anfangs nur die erstern allein in Rechnung nimmt, die so corrigirten Winkel alsdann mit Rücksicht auf die weiter entfernten Bedingungen verbessert, dann wieder auf die gleich anfangs berücksichtigten von Neuem zurückgeht u. s. f....

[Soweit die Bessel'sche Methode.]

130. Ueber den Einfluss der Unregelmässigkeiten der Figur der Erde auf geodätische Arbeiten und ihre Vergleichung mit den astronomischen Bestimmungen.*)

(Astron. Nachr. **14**, p. 269.)

Die vorhandenen Messungen von Meridianbögen lassen, indem sie mit der Annahme, dass die Figur der Erde ein elliptisches Rotationssphäroid sei, nicht innerhalb der Grenzen ihrer eigenen Sicherheit vereinigt werden können, keinen Zweifel über die Verschiedenheit beider Figuren; sie scheinen aber, übereinstimmend mit anderen Gründen, zu zeigen, dass ein Sphäroid dieser Art gefunden werden kann, von welchem sich die Oberfläche der Erde nicht so bedeutend entfernt, dass die Winkel zwischen den Normalen an beide Oberflächen nicht als kleine Grössen betrachtet werden könnten, deren Quadrate als unerheblich angesehen werden können. Ich beabsichtige gegenwärtig, die Verbindungen zu entwickeln, in welchen diese kleinen Abweichungen beider Oberflächen von einander, welche ich Unregelmässigkeiten der Erdfigur nennen werde, mit den Resultaten stehen, welche man aus geodätischen Arbeiten und ihrer Vergleichung mit astronomischen Bestimmungen ziehen kann.

Es ist ein wesentlicher Unterschied zwischen der physischen und der geometrischen Figur der Erde. Jene wird unmittelbar durch die Oberfläche des Festen und des Flüssigen auf der Erde angegeben und ist den kleinen periodischen Aenderungen unterworfen, welche aus der Flut und Ebbe des Meeres entstehen, sowie auch den Aenderungen, welche das Feste, durch mehr oder weniger ausgedehnte, in kürzerer oder längerer Zeit sich ereignende Erhebungen seiner Oberfläche erfahren kann. Diese dagegen ist eine Oberfläche, welche die Richtungen der Kräfte senkrecht durchschneidet, die aus allen, von den einzelnen Theilchen der Erde ausgehenden Anziehungen, verbunden mit der, ihrer Umdrehungsgeschwindigkeit entsprechenden Centrifugalkraft, zusammengesetzt sind. Diese Bedingung reicht aber nur zur Bestimmung irgend einer der Oberflächen hin, welche durch eine im Gleichgewichte befindliche Flüssigkeit bedeckt werden könnten; es muss noch bestimmt werden, welche von diesen Oberflächen die geometrische Oberfläche der Erde sein soll. Ihre Wahl würde in der That, wenn man sie nicht durch eine fremde Bedingung beschränken will, willkürlich bleiben, wenn die Erde nur ein fester Körper, ohne das Meer, wäre; da dieses aber vorhanden ist, so ist es der Natur angemessen, diejenige der eben angegebenen Oberflächen für die Oberfläche der Erde anzunehmen, von welcher die Oberfläche des Meeres ein Theil ist. Denkt man sich also die Erde mit einem Netze von Kanälen überzogen, welche mit dem Meere in Verbindung sind und durch dieses gefüllt werden, so fällt die Oberfläche des ruhigen Wassers in denselben mit der geometrischen Oberfläche der Erde zusammen.

Die sichtbaren Ungleichheiten der physischen Oberfläche der Erde gehören also keinesweges zu der geometrischen; aber indem sie auch Ungleichheiten der Vertheilung der Masse sind, haben sie einen mittelbaren Einfluss auf dieselbe, dadurch dass sie Anziehungen erzeugen, welche ohne ihr Vorhandensein fehlen würden. Unregelmässigkeiten der Massenvertheilung im Inneren der Erde erzeugen gleichfalls Unregelmässigkeiten der geometrischen Figur. Alle Anziehungen zusammengenommen, verbunden mit der Centrifugalkraft, erzeugen diejenige Oberfläche, welcher die geodätischen Arbeiten folgen. GAUSS hat, in seiner Schrift über den Breitenunterschied der Sternwarten von Göttingen und Altona, nicht nur den richtigen Begriff, den man von der Figur der Erde fassen muss, klar ausgesprochen, sondern auch bemerkt, dass das was wir schon an dem Aeusseren der Erde sehen und bis zu einer gewissen Tiefe fortgesetzt annehmen können, nämlich Unregelmässigkeiten ihrer Gestalt und Dichtigkeit, die durch die geodätischen Arbeiten unzweifelhaft gewordenen Unregelmässigkeiten der geometrischen Oberfläche der Erde, nicht nur nicht befremdend erscheinen, sondern vielmehr bewundern lassen, dass sie nicht noch grösser sind.

Wenn das Innere der Erde flüssig ist und die Theile der Flüssigkeit, mit der Zeit, ihre Anordnung verändern, so müssen dadurch Aenderungen der geometrischen Oberfläche der Erde entstehen, selbst wenn die physische ungeändert bleibt. Diese Aenderungen würden sich in den Polhöhen der Sternwarten, sowie auch in der Höhe des Meerwassers an den Küsten verrathen, und man würde, wenn eins von beiden sich veränderlich, das andere unveränderlich zeigte, auch unzweideutig auf Veränderungen der physischen Oberfläche der Erde schliessen können; welcher Schluss übrigens, in geeigneten Fällen, auch durch die Betrachtung dieser Oberfläche allein gerechtfertigt werden kann.

*) [305 d. a. Verz. — Br. m. O. II. 414 ff.]

Was den Unterschied zwischen der physischen und der geometrischen Oberfläche der Erde vielleicht am anschaulichsten macht, ist die Verfolgung des Falles, in welchem die Erde als eine feste und homogene Kugel betrachtet wird. In diesem Falle würde die Anziehung, an allen Punkten, nach dem Mittelpunkte der Erde gerichtet sein; die aus ihr und der Centrifugalkraft zusammengesetzte Kraft würde aber die Polhöhe φ eines Punktes der Erdoberfläche, wenn α die Centrifugalkraft unter dem Aequator bezeichnet, in $\varphi_1 = \varphi + \alpha \cos\varphi \sin\varphi$ verwandeln, woraus leicht gefolgert werden kann, dass Messungen der Grade des Meridians, auf der Oberfläche der festen Kugel selbst vorgenommen, diese als ein elliptisches Rotationssphäroid, dessen Abplattung $= \frac{3}{2}\alpha = \frac{1}{231}$ ist, darstellen würden; gingen diese Messungen von dem Pole aus und folgten sie nicht der physischen, sondern der geometrischen Oberfläche, so würden sie die kugelförmige Erde als ein elliptisches Sphäroid, dessen Abplattung $= \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{576}$ ist, erscheinen lassen. Fehler dieser Art können aber in der Bestimmung der Figur der Erde nicht stattfinden, wenn man für ihre Oberfläche diejenige annimmt, auf welcher mit dem Meere verbundenes Wasser in Gleichgewicht kommen kann.

Ueber die Natur der Unregelmässigkeiten der geometrischen Oberfläche der Erde ist bis jetzt nur bekannt, dass sie die Winkel zwischen den Richtungen der Normalen, bei dem Uebergange von einem Endpunkte einer Gradmessung zu dem anderen, oder zu gleichfalls astronomisch bestimmten Zwischenpunkten, oft mehrere Secunden von den Winkeln verschieden machen, welche dieselben Uebergänge auf der Oberfläche des elliptischen Sphäroids hervorgebracht haben würden. Dieses hat sich durch die Beobachtungen, sowohl der Polhöhen als auch der Azimuthe ergeben; allein wenn auch nur die erste dieser beiden Vergleichungsarten darauf geführt hätte, so würde man doch nicht bezweifeln können, dass die Unregelmässigkeiten sich sowohl in der Krümmung der Meridiane, als in der Krümmung der Parallelen zeigen. Man muss sie als gesetzlos über die Oberfläche der Erde vertheilt betrachten, als kleine Erhöhungen über, oder kleine Vertiefungen unter der Oberfläche des ihr, im Ganzen, am meisten gleichenden elliptischen Rotationssphäroids. Ueber die Ausdehnung dieser wellenförmigen Unregelmässigkeiten wird man zwar nicht eher ein bestimmteres Urtheil erhalten, als bis man seine Erlangung zum besonderen Zwecke einer Messung macht; allein der schnelle Wechsel des Einflusses, welchen diese Unregelmässigkeiten auf mehrere der vorhandenen Messungen von Meridianbögen geäussert haben, reicht hin zu zeigen, dass die Ausdehnung der Wellen oft klein genug sein muss, um in Entfernungen von weniger als einem Grade eine Veränderung der Neigung ihrer Oberfläche gegen die Oberfläche des elliptischen Sphäroids hervorzubringen, welche die möglichen Fehler unserer gegenwärtigen astronomischen Beobachtungen weit überschreitet. Ich glaube zwar nicht, dass es ein beträchtliches Interesse hat, diese Ausdehnung in einem besonderen Falle kennen zu lernen, indem derselbe keinen Schluss auf das Allgemeine begründen kann; dennoch aber würde ich einer Untersuchung mit Theilnahme folgen, welche den Zweck hätte, an einem Theile der Erdoberfläche, an welchem eine schon gemachte Gradmessung das Vorhandensein merklicher Unregelmässigkeiten gezeigt hat, durch Beobachtungen der Polhöhen und der Richtungen der Meridiane, an möglichst vielen zwischenliegenden Punkten, den Gang dieser Unregelmässigkeiten zu erforschen.

Wenn man auch nicht erwarten kann, in den Unregelmässigkeiten der Erdoberfläche etwas Gesetzmässiges zu entdecken, oder, mit anderen Worten, ihnen den Charakter der Unregelmässigkeit zu rauben, so wird doch jede neue geodätische, mit astronomischen Bestimmungen verbundene Arbeit ihr Vorhandensein aufs Neue darthun, oder wenigstens darthun können. Was sie an den Tag legt, ist die Wirkung der Unregelmässigkeiten auf die Resultate der Arbeit. Diese kann nicht hervortreten, ohne das Bedürfniss fühlbar zu machen, ihre Ursache mit ihr in Verbindung gesetzt zu sehen. Ich hoffe, dass das Folgende zur Befriedigung dieses Bedürfnisses beitragen wird. Auch wird es zeigen, welche Bedeutung die aus geodätisch-astronomischen Arbeiten zu ziehenden Resultate besitzen, und inwiefern sie entweder zu der Bestimmung des der Erde im Ganzen sich nähernden elliptischen Rotationssphäroids, oder zur Erkenntniss der Krümmung ihrer Oberfläche an einem bestimmten Punkte, führen können.

1.

Ich werde zuerst die unendlich kleinen Veränderungen der Polhöhe φ und der geographischen Länge w eines Punktes aufsuchen, welche einer unendlich kleinen Entfernung ds desselben von seinem Orte, in einer durch das Azimuth α gegebenen Richtung zugehören. Die Oberfläche soll durch die Gleichung $u = 0$, zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z, angegeben werden.

Die Ebene des ersten Meridians, auf welche die Coordinate x sich bezieht, geht, den Normalen aller Punkte, deren geographische Länge $= 0$ ist, parallel

durch die Drehungsaxe der Erde; die zweite Ebene, die der y, geht, senkrecht auf die erste, gleichfalls durch die Drehungsaxe; die dritte, die der z, ist senkrecht auf beiden vorigen. Die Richtungen der Axen dieser drei Ebenen bezeichne ich durch x, y, z; durch dieselben Buchstaben, durch welche die diesen Richtungen parallelen Coordinaten angedeutet werden.

Die Bedingung, dass zwei, durch die Coordinaten x, y, z und $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ bestimmte Punkte, in der Oberfläche, deren Gleichung $u=0$ ist, liegen, ist:

$$0=\frac{du}{dx}.dx+\frac{du}{dy}.dy+\frac{du}{dz}.dz \quad \ldots\ldots (1)$$

und auch, wenn Z die Richtung des Scheitelpunktes bezeichnet:

$$0=\cos xZ.dx+\cos yZ.dy+\cos zZ.dz \quad \ldots (2)$$

Aus der Vergleichung beider Gleichungen folgt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dx}&=\Delta\cos xZ=\Delta\cos\varphi\sin w\\ \frac{du}{dy}&=\Delta\cos yZ=\Delta\cos\varphi\cos w\\ \frac{du}{dz}&=\Delta\cos zZ=\Delta\sin\varphi\end{aligned}\right\}\ldots\ldots (3)$$

wo Δ für

$$\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2+\left(\frac{du}{dz}\right)^2}$$

und auch die Ausdrücke von $\cos xZ$, $\cos yZ$, $\cos zZ$ durch φ und w für diese Cosinusse geschrieben sind.

Durch Differentiirung dieser Formeln erhält man, wenn man die in der tangirenden Ebene nach Norden und nach Osten genommenen Richtungen durch N und O bezeichnet:

$$d\Delta\cos xZ+\Delta d\varphi.\cos xN+\Delta\cos\varphi dw.\cos xO=d\frac{du}{dx}$$

$$d\Delta\cos yZ+\Delta d\varphi.\cos yN+\Delta\cos\varphi dw.\cos yO=d\frac{du}{dy}$$

$$d\Delta\cos zZ+\Delta d\varphi.\cos zN+\Delta\cos\varphi dw.\cos zO=d\frac{du}{dz}$$

und hieraus ferner:

$$\left.\begin{aligned}\Delta d\varphi&=d\frac{du}{dx}\cos xN+d\frac{du}{dy}\cos yN+d\frac{du}{dz}\cos zN\\ \Delta\cos\varphi dw&=d\frac{du}{dx}\cos xO+d\frac{du}{dy}\cos yO+d\frac{du}{dz}\cos zO\end{aligned}\right\}(4)$$

Wenn man die Richtung von dem ersten Punkte nach dem zweiten durch λ bezeichnet, also

$$dx=ds\cos x\lambda;\quad dy=ds\cos y\lambda;\quad dz=ds\cos z\lambda$$

setzt, hat man:

$$d\frac{du}{dx}=\left\{\frac{d^2u}{dx^2}\cos x\lambda+\frac{d^2u}{dxdy}\cos y\lambda+\frac{d^2u}{dxdz}\cos z\lambda\right\}ds$$

$$d\frac{du}{dy}=\left\{\frac{d^2u}{dxdy}\cos x\lambda+\frac{d^2u}{dy^2}\cos y\lambda+\frac{d^2u}{dydz}\cos z\lambda\right\}ds$$

$$d\frac{du}{dz}=\left\{\frac{d^2u}{dxdz}\cos x\lambda+\frac{d^2u}{dydz}\cos y\lambda+\frac{d^2u}{dz^2}\cos z\lambda\right\}ds$$

und

$$\cos x\lambda=\cos xN\cos\lambda N+\cos xO\cos\lambda O+\cos xZ\cos\lambda Z$$
$$\cos y\lambda=\cos yN\cos\lambda N+\cos yO\cos\lambda O+\cos yZ\cos\lambda Z$$
$$\cos z\lambda=\cos zN\cos\lambda N+\cos zO\cos\lambda O+\cos zZ\cos\lambda Z$$

Da $\lambda N=\alpha$, $\lambda O=\alpha-90^0$, $\lambda Z=90^0$ ist, verwandeln diese Formeln sich in:

$$\cos x\lambda=\cos xN\cos\alpha+\cos xO\sin\alpha$$
$$\cos y\lambda=\cos yN\cos\alpha+\cos yO\sin\alpha$$
$$\cos z\lambda=\cos zN\cos\alpha+\cos zO\sin\alpha$$

und man erhält, wenn man, um abzukürzen

$$\cos xN=a \qquad \cos xO=a'$$
$$\cos yN=b \qquad \cos yO=b'$$
$$\cos zN=c \qquad \cos zO=c'$$

schreibt,

$$d\frac{du}{dx}=ds\cos\alpha\left\{\frac{d^2u}{dx^2}a+\frac{d^2u}{dxdy}b+\frac{d^2u}{dxdz}c\right\}+ds\sin\alpha\left\{\frac{d^2u}{dx^2}a'+\frac{d^2u}{dxdy}b'+\frac{d^2u}{dxdz}c'\right\}$$

$$d\frac{du}{dy}=ds\cos\alpha\left\{\frac{d^2u}{dxdy}a+\frac{d^2u}{dy^2}b+\frac{d^2u}{dydz}c\right\}+ds\sin\alpha\left\{\frac{d^2u}{dxdy}a'+\frac{d^2u}{dy^2}b'+\frac{d^2u}{dydz}c'\right\}$$

$$d\frac{du}{dz}=ds\cos\alpha\left\{\frac{d^2u}{dxdz}a+\frac{d^2u}{dydz}b+\frac{d^2u}{dz^2}c\right\}+ds\sin\alpha\left\{\frac{d^2u}{dxdz}a'+\frac{d^2u}{dydz}b'+\frac{d^2u}{dz^2}c'\right\}$$

und wenn man diese Ausdrücke in (4) setzt:

$$\Delta d\varphi=\left\{\frac{d^2u}{dx^2}aa+\frac{d^2u}{dy^2}bb+\frac{d^2u}{dz^2}cc+\frac{d^2u}{dxdy}2ab+\frac{d^2u}{dxdz}2ac+\frac{d^2u}{dydz}2bc\right\}\cos\alpha\,ds$$
$$+\left\{\frac{d^2u}{dx^2}aa'+\frac{d^2u}{dy^2}bb'+\frac{d^2u}{dz^2}cc'+\frac{d^2u}{dxdy}(ab'+a'b)+\frac{d^2u}{dxdz}(ac'+a'c)+\frac{d^2u}{dydz}(bc'+b'c)\right\}\sin\alpha\,ds$$

$$\Delta\cos\varphi dw=\left\{\frac{d^2u}{dx^2}aa'+\frac{d^2u}{dy^2}bb'+\frac{d^2u}{dz^2}cc'+\frac{d^2u}{dxdy}(ab'+a'b)+\frac{d^2u}{dxdz}(ac'+a'c)+\frac{d^2u}{dydz}(bc'+b'c)\right\}\cos\alpha\,ds$$
$$+\left\{\frac{d^2u}{dx^2}a'a'+\frac{d^2u}{dy^2}b'b'+\frac{d^2u}{dz^2}c'c'+\frac{d^2u}{dxdy}2a'b'+\frac{d^2u}{dxdz}2a'c'+\frac{d^2u}{dydz}2b'c'\right\}\sin\alpha\,ds$$

Man hat aber

$$\begin{aligned} a &= -\sin\varphi\sin w & a' &= \cos w \\ b &= -\sin\varphi\cos w & b' &= -\sin w \\ c &= \cos\varphi & c' &= 0 \end{aligned}$$

und endlich, indem man, um abzukürzen,

$$P = \frac{d^2u}{dx^2}\sin\varphi^2\sin w^2 + \frac{d^2u}{dy^2}\sin\varphi^2\cos w^2 + \frac{d^2u}{dz^2}\cos\varphi^2$$
$$+2\frac{d^2u}{dxdy}\sin\varphi^2\sin w\cos w - 2\frac{d^2u}{dxdz}\sin\varphi\cos\varphi\sin w - 2\frac{d^2u}{dydz}\sin\varphi\cos\varphi\cos w$$

$$Q = -\frac{d^2u}{dx^2}\sin\varphi\sin w\cos w + \frac{d^2u}{dy^2}\sin\varphi\sin w\cos w$$
$$+\frac{d^2u}{dxdy}\sin\varphi(\sin w^2 - \cos w^2) + \frac{d^2u}{dxdz}\cos\varphi\cos w - \frac{d^2u}{dydz}\cos\varphi\sin w$$

$$R = \frac{d^2u}{dx^2}\cos w^2 + \frac{d^2u}{dy^2}\sin w^2 - 2\frac{d^2u}{dxdy}\cos w\sin w$$

schreibt,

$$\left.\begin{aligned} \Delta d\varphi &= (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)\,ds \\ \Delta\cos\varphi dw &= (Q\cos\alpha + R\sin\alpha)\,ds \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (5)$$

Man kann diesen Ausdrücken noch eine andere Form geben, indem man andere Coordinaten einführt. Macht man den Punkt, dessen Coordinaten x, y, z sind, zu ihrem Mittelpunkte und legt man die Axen der ξ und η in den Horizont, die erste nach Norden, die zweite nach Osten, die Axe der ζ nach dem Scheitelpunkte, so ist

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{d\xi}\cos xN + \frac{du}{d\eta}\cos xO + \frac{du}{d\zeta}\cos xZ$$
$$\frac{du}{dy} = \frac{du}{d\xi}\cos yN + \frac{du}{d\eta}\cos yO + \frac{du}{d\zeta}\cos yZ$$
$$\frac{du}{dz} = \frac{du}{d\xi}\cos zN + \frac{du}{d\eta}\cos zO + \frac{du}{d\zeta}\cos zZ$$

oder

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{du}{dx}\cos xN + \frac{du}{dy}\cos yN + \frac{du}{dz}\cos zN$$
$$\frac{du}{d\eta} = \frac{du}{dx}\cos xO + \frac{du}{dy}\cos yO + \frac{du}{dz}\cos zO$$

Man hat also, durch die Vergleichung dieser Formeln mit (4):

$$\Delta d\varphi = d\frac{du}{d\xi} = \frac{d^2u}{d\xi^2}d\xi + \frac{d^2u}{d\xi d\eta}d\eta$$
$$\Delta\cos\varphi dw = d\frac{du}{d\eta} = \frac{d^2u}{d\xi d\eta}d\xi + \frac{d^2u}{d\eta^2}d\eta$$

und da

$$d\xi = ds\cos\alpha; \quad d\eta = ds\sin\alpha$$

ist,

$$\left.\begin{aligned} \Delta d\varphi &= \left\{\frac{d^2u}{d\xi^2}\cos\alpha + \frac{d^2u}{d\xi d\eta}\sin\alpha\right\}ds \\ \Delta\cos\varphi dw &= \left\{\frac{d^2u}{d\xi d\eta}\cos\alpha + \frac{d^2u}{d\eta^2}\sin\alpha\right\}ds \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (6)$$

2.

Die einen oder die anderen dieser Ausdrücke [(5) und (6)] werden, wenn man x, y, z durch die Verbindung von $u = 0$ mit (3) eliminirt, zwei Gleichungen zwischen $d\varphi, dw, ds, \varphi, w$ und α. Um sie integriren zu können, ist noch eine Gleichung nöthig, welche entweder $d\alpha$ mit den übrigen veränderlichen Grössen in Verbindung setzt, oder zur Elimination von α hinreicht. Diese Gleichung spricht das Gesetz aus, nach welchem die krumme Linie, von welcher ds ein Element ist, auf der gegebenen Oberfläche gezogen werden soll.

Ich werde zunächst die geodätische Linie betrachten, also den Zug untersuchen, welchen diese Linie verfolgt, indem sie von einem gegebenen Punkte der Oberfläche, in einer gegebenen Richtung ausgeht. Die Form, welche GAUSS den Gleichungen der geodätischen Linie, in seiner Abhandlung über die krummen Oberflächen, gegeben hat, ist, in unseren Zeichen ausgedrückt:

$$\varrho d\cos x\lambda = -\cos xZ\,ds$$
$$\varrho d\cos y\lambda = -\cos yZ\,ds$$
$$\varrho d\cos z\lambda = -\cos zZ\,ds$$

wo ϱ den Krümmungshalbmesser der Oberfläche in dem Azimuthe α bedeutet, und wo ich die zweiten Glieder negativ gesetzt habe, weil Z und ϱ in entgegengesetzten Richtungen liegen.

Da man hat:

$$\begin{aligned} \cos x\lambda &= \cos w\sin\alpha - \sin w\cos\alpha\sin\varphi; & \cos xZ &= \sin w\cos\varphi \\ \cos y\lambda &= -\sin w\sin\alpha - \cos w\cos\alpha\sin\varphi; & \cos yZ &= \cos w\cos\varphi \\ \cos z\lambda &= \cos\alpha\cos\varphi & \cos zZ &= \sin\varphi \end{aligned}$$

so erhält man, durch die Ausführung der angedeuteten Differentiationen,

$$\sin w \cos\varphi \frac{ds}{\varrho} = \sin w \cos\varphi \cos\alpha d\varphi + (\sin w \sin\alpha + \cos w \cos\alpha \sin\varphi) dw - (\cos w \cos\alpha + \sin w \sin\alpha \sin\varphi) d\alpha$$

$$\cos w \cos\varphi \frac{ds}{\varrho} = \cos w \cos\varphi \cos\alpha d\varphi + (\cos w \sin\alpha - \sin w \sin\alpha \sin\varphi) dw + (\sin w \cos\alpha - \cos w \sin\alpha \sin\varphi) d\alpha$$

$$\sin\varphi \frac{ds}{\varrho} = \sin\varphi \cos\alpha d\varphi + \sin\alpha \cos\varphi d\alpha$$

und durch die Multiplication dieser Gleichungen mit

$$\begin{array}{r|l} \sin w \cos\varphi & -\cos w : \cos\alpha \\ \cos w \cos\varphi & +\sin w : \cos\alpha \\ \sin\varphi & \end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{ds}{\varrho} &= \cos\alpha d\varphi + \sin\alpha \cos\varphi dw \\ 0 &= \sin\varphi dw - d\alpha \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (7)$$

wodurch also die fehlende Gleichung für $d\alpha$, unter der Voraussetzung, dass die Linie auf der Oberfläche die geodätische sei, und überdies der Ausdruck des Krümmungshalbmessers ϱ, erlangt sind.

Setzt man die Ausdrücke (5) in den ersten der jetzt gefundenen, so wird er:

$$\frac{ds}{\varrho} = \frac{ds}{\Delta}\left\{P \cos\alpha^2 + 2Q \cos\alpha \sin\alpha + R \sin\alpha^2\right\}$$

und schreibt man dafür

$$\frac{ds}{\varrho} = ds\left\{\frac{\cos(\alpha - N)^2}{r} + \frac{\sin(\alpha - N)^2}{r'}\right\}$$

wo r und r' die beiden Hauptkrümmungshalbmesser und N das Azimuth der Ebene, in welcher die von einem derselben gemessene Krümmung liegt, bedeuten, so erhält man, durch die Vergleichung beider Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} &= \frac{P+R}{\Delta} \\ \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) \cos 2N &= \frac{P-R}{\Delta} \\ \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) \sin 2N &= \frac{2Q}{\Delta} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (8)$$

wodurch also der Zusammenhang von r, r', N mit P, Q, R, Δ gegeben ist.

3.

Um die erlangten 3 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \Delta d\varphi &= ds\{P \cos\alpha + Q \sin\alpha\} \\ \Delta \cos\varphi dw &= ds\{Q \cos\alpha + R \sin\alpha\} \\ d\alpha &= dw . \sin\varphi \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (9)$$

zu integriren, werde ich die Figur der Erde sehr wenig verschieden von der Figur eines elliptischen Rotationssphäroids, dessen halbe Axen $= a$ und $b = a\sqrt{1-ee}$ sind, annehmen. Die Normale der Erdoberfläche, an dem Punkte, dessen Coordinaten x, y, z sind, trifft die Oberfläche dieses Sphäroids an einem Punkte, dessen Coordinaten $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, resp.

$$x - n\cos xZ; \quad y - n\cos yZ; \quad z - n\cos zZ$$

sind, wo n die Entfernung beider Oberflächen, auf der Normale der ersteren gemessen und positiv genommen, wenn diese sich über die andere erhebt, bezeichnet. Diese n ist eine mit x, y, z, oder mit w und φ, veränderliche Grösse, welche im Laufe der ferneren Untersuchung unbestimmt bleiben, aber so klein angenommen werden soll, dass man ihre Potenzen und auch ihr Product in das Quadrat der Excentricität der Erdmeridiane vernachlässigen kann.

Setzt man die Ausdrücke von $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ in die Gleichung des elliptischen Rotationssphäroids, nämlich in

$$0 = \frac{x,x, + y,y,}{aa} + \frac{z,z,}{bb} - 1,$$

so erhält man die Gleichung der Oberfläche der Erde:

$$u = 0 = \frac{xx+yy}{aa} + \frac{zz}{bb} - 2n\left\{\frac{x}{aa}\cos xZ + \frac{y}{aa}\cos yZ + \frac{z}{bb}\cos zZ\right\} - 1$$

oder da, bis auf Grössen von der Ordnung von n,

$$R\cos xZ = \frac{x}{aa}$$

$$R\cos yZ = \frac{y}{aa}$$

$$R\cos zZ = \frac{z}{bb}$$

ist, wo

$$R = \sqrt{\frac{xx+yy}{a^4} + \frac{zz}{b^4}},$$

so ist diese Gleichung

$$u = 0 = \frac{xx+yy}{aa} + \frac{zz}{bb} - 2Rn - 1$$

oder auch, da R nur um Grössen von der Ordnung von ee von $\frac{1}{a}$ verschieden ist und das Product nee vernachlässigt werden soll,

$$u = 0 = \frac{xx+yy}{aa} + \frac{zz}{bb} - 1 - \frac{2n}{a} \ldots\ldots (10)$$

Dieser Gleichung der Oberfläche gemäss müssen die in den zu integrirenden Gleichungen (9) vorkommenden Δ, P, Q, R bestimmt werden. Die Differentiationen von (10), in Beziehung auf jede der Coordinaten ergeben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \Delta \sin w \cos\varphi = 2\left\{\frac{x}{aa} - \frac{dn}{adx}\right\} \\ \frac{du}{dy} &= \Delta \cos w \cos\varphi = 2\left\{\frac{y}{aa} - \frac{dn}{ady}\right\} \\ \frac{du}{dz} &= \Delta \sin\varphi = 2\left\{\frac{z}{bb} - \frac{dn}{adz}\right\} \end{aligned}\right.$$

und wenn man durch a, a, b multiplicirt und die Quadrate der Producte addirt:

$$\Delta\Delta\{aa\cos\varphi^2+bb\sin\varphi^2\}$$
$$=4\left\{1+\frac{2n}{a}-\frac{2}{a}\left(x\frac{dn}{dx}+y\frac{dn}{dy}+z\frac{dn}{dz}\right)\right\}$$

Der zweite Theil dieses Ausdruckes kann vereinfacht werden. Wenn man nämlich statt der Differentialquotienten von n in Beziehung auf x, y, z die Differentialquotienten derselben Grösse in Beziehung auf ξ und η einführt, hat man:

$$x\frac{dn}{dx}+y\frac{dn}{dy}+z\frac{dn}{dz}=\frac{dn}{d\xi}\left\{x\cos xN+y\cos yN+z\cos zN\right\}$$
$$+\frac{dn}{d\eta}\left\{x\cos xO+y\cos yO+z\cos zO\right\};$$

die in den Klammern befindlichen Grössen sind von der Ordnung von ee, indem x, y, z bis auf Grössen dieser Ordnung, resp. $\cos xZ$, $\cos yZ$, $\cos zZ$ proportional sind. Das letzte Glied des Ausdruckes ist daher ausser der Grenze der hier gesuchten Annäherung, innerhalb welcher also

$$\Delta=\frac{2}{a}\cdot\frac{1+\frac{n}{a}}{\sqrt{1-ee\sin\varphi^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

ist.

Den von n unabhängigen Theil von P, Q, R findet man durch die Formeln (5):

für P ..... $\frac{2}{aa(1-ee)}(1-ee\sin\varphi^2)$

für Q 0

für R ..... $\frac{2}{aa}$

den von n abhängigen aber ergeben die Formeln (6) unmittelbar in seiner verständlichsten Form, nämlich:

für P ..... $-\frac{2}{a}\frac{d^2n}{d\xi^2}$

für Q ..... $-\frac{2}{a}\frac{d^2n}{d\xi\,d\eta}$

für R ..... $-\frac{2}{a}\frac{d^2n}{d\eta^2}$.

Man hat also:

$$d\varphi=ds\left\{\frac{\sqrt{(1-ee\sin\varphi^2)^3}}{a(1-ee)}\cos\alpha-\left(\frac{d^2n}{d\xi^2}+\frac{n}{aa}\right)\cos\alpha-\frac{d^2n}{d\xi\,d\eta}\sin\alpha\right\}$$
$$\cos\varphi\,dw=ds\left\{\frac{\sqrt{(1-ee\sin\varphi^2)}}{a}\sin\alpha-\left(\frac{d^2n}{d\eta^2}+\frac{n}{aa}\right)\sin\alpha-\frac{d^2n}{d\xi\,d\eta}\cos\alpha\right\}$$
$$d\alpha=\sin\varphi\,dw;$$

allein da

$$ds\cos\alpha=d\xi; \quad ds\sin\alpha=d\eta$$

ist, kann man dafür schreiben:

$$\left.\begin{aligned} d\varphi&=ds\cdot\frac{\sqrt{(1-ee\sin\varphi^2)^3}}{a(1-ee)}\cos\alpha-d\frac{dn}{d\xi}-\frac{n}{aa}d\xi\\ \cos\varphi\,dw&=ds\cdot\frac{\sqrt{(1-ee\sin\varphi^2)}}{a}\sin\alpha-d\frac{dn}{d\eta}-\frac{n}{aa}d\eta\\ d\alpha&=\sin\varphi\,dw\end{aligned}\right\}\ldots(12)$$

4.

Bezeichnet man die Werthe, welche φ, w, α durch die Integration der ersten, von der Unregelmässigkeit der Oberfläche der Erde unabhängigen Theile dieser Differentialgleichungen, für ein gegebenes s erhalten, durch $\varphi_,$, $w_,$, $\alpha_,$ und setzt man

$$\varphi=\varphi_,+\delta\varphi$$
$$w=w_,+\delta w$$
$$\alpha=\alpha_,+\delta\alpha$$

so werden $\delta\varphi$, δw, $\delta\alpha$ die unbekannten Grössen der Aufgabe, denn die Erfindung von $\varphi_,$, $w_,$, $\alpha_,$ hat keine Schwierigkeit und ist vielfältig abgehandelt, z. B. Astr. Nachr. Nr. 86 [Abh. 127].

Die Elimination von dw aus den beiden letzten der Gleichungen (12) ergibt:

$$\cos\varphi\,d\alpha=\frac{ds}{a}\sqrt{1-ee\sin\varphi^2}\sin\alpha\sin\varphi-\left\{d\frac{dn}{d\eta}+\frac{n}{aa}d\eta\right\}\sin\varphi$$

Führt man in die erste derselben und in diese Gleichung die Grössen $\delta\varphi$ und $\delta\alpha$ ein, so verwandeln sie sich in:

$$d\delta\varphi=-\frac{ds}{a}\sin\alpha\,\delta\alpha-d\frac{dn}{d\xi}-\frac{n}{aa}d\xi$$
$$-\frac{d\alpha\,\delta\varphi}{\sin\varphi}+\cos\varphi\,d\delta\alpha=\frac{ds}{a}\cos\alpha\sin\varphi\delta\alpha-\left(d\frac{dn}{d\eta}+\frac{n}{aa}d\eta\right)\sin\varphi$$

und, wenn man

$$\frac{ds}{a}\sin\alpha=\cos\varphi\,dw; \quad \frac{ds}{a}\cos\alpha=d\varphi$$

setzt, was bei dem beabsichtigten Grade der Approximation erlaubt ist, in

$$\cos\varphi\,\delta\alpha.dw+d\delta\varphi=-d\frac{dn}{d\xi}-\frac{n}{aa}d\xi$$
$$-\delta\varphi.dw+d(\cos\varphi\,\delta\alpha)=-\left(d\frac{dn}{d\eta}+\frac{n}{aa}d\eta\right)\sin\varphi$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit

$\cos\alpha$	$\sin\varphi\sin\alpha$
$\sin\varphi\sin\alpha$	$-\cos\alpha$

und bemerkt man, dass

$$d.\cos\alpha=-\sin\varphi\sin\alpha\,dw$$
$$d.\sin\varphi\sin\alpha=\cos\alpha\,dw$$

ist, so findet man links von den Gleichheitszeichen vollständige Differentiale und damit die Integrale:

$$\cos\alpha\,\delta\varphi + \sin\varphi\sin\alpha\cos\varphi\delta\alpha = -\int\left\{\cos\alpha\,.\,d\frac{dn}{d\xi} + \sin\alpha\sin\varphi^2\,.\,d\frac{dn}{d\eta} + (\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2\sin\varphi^2)\frac{n}{aa}\,ds\right\}$$

$$\sin\varphi\sin\alpha\,\delta\varphi - \cos\alpha\cos\varphi\delta\alpha = -\int\left\{\sin\alpha\sin\varphi\,.\,d\frac{dn}{d\xi} - \cos\alpha\sin\varphi\,.\,d\frac{dn}{d\eta}\right\}$$

Da man, bis auf Grössen von der Ordnung von ee,

$$\sin\alpha\cos\varphi = \sin\alpha'\cos\varphi'$$

hat, wo φ' und α' sich auf den Anfangspunkt der geodätischen Linie beziehen, und unter α das Azimuth verstanden wird, in welchem diese Linie über jeden ihrer Punkte hinaus fortgeht, so hat man, indem man $\sin m$ für $\sin\alpha'\cos\varphi'$ schreibt:

$$\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2\sin\varphi^2 = \cos m^2,$$

und damit erhält man aus diesen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\cos m^2\,\delta\varphi = {} & -\cos\alpha\int\left\{\cos\alpha\,.\,d\frac{dn}{d\xi} + \sin\alpha\sin\varphi^2\,.\,d\frac{dn}{d\eta}\right\} \\
& -\sin\alpha\sin\varphi\int\left\{\sin\alpha\sin\varphi\,.\,d\frac{dn}{d\xi} - \cos\alpha\sin\varphi\,.\,d\frac{dn}{d\eta}\right\} - \cos m^2\cos\alpha\int\frac{n}{aa}\,ds \\
\cos m^2\cos\varphi\delta\alpha = {} & -\sin\alpha\sin\varphi\int\left\{\cos\alpha\,.\,d\frac{dn}{d\xi} + \sin\alpha\sin\varphi^2\,.\,d\frac{dn}{d\eta}\right\} \\
& +\cos\alpha\int\left\{\sin\alpha\sin\varphi\,.\,d\frac{dn}{d\xi} - \cos\alpha\sin\varphi\,.\,d\frac{dn}{d\eta}\right\} - \cos m^2\sin\alpha\sin\varphi\int\frac{n}{aa}\,ds
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (13^a)$$

Die Erfindung von δw erfordert die Integration von

$$d\delta w = \frac{d\delta\alpha}{\sin\varphi} - \frac{\cos\varphi\,d\alpha}{\sin\varphi^2}\delta\varphi;$$

die theilweise Integration des ersten Gliedes verwandelt diese Formel in

$$\delta w = \frac{\delta\alpha}{\sin\varphi} - \int\frac{\delta\varphi\,.\cos\varphi\delta\alpha - \cos\varphi\delta\alpha\,.\,d\varphi}{\sin\varphi^2}$$

und wenn man die gefundenen Ausdrücke von $\delta\varphi$ und $\cos\varphi\,\delta\alpha$ substituirt, und dabei bemerkt, dass

$$\cos\varphi\cos\alpha\,d\alpha - \sin\varphi\sin\alpha\,d\varphi = d(\cos\varphi\sin\alpha) = 0$$

$$\operatorname{cotg}\varphi\sin\alpha\,d\alpha + \frac{\cos\alpha}{\sin\varphi^2}d\varphi = -d(\operatorname{cotg}\varphi\cos\alpha)$$

ist, erhält man daraus:

$$\delta w = \frac{\delta\alpha}{\sin\varphi} - \frac{1}{\cos m^2}\int d(\operatorname{cotg}\varphi\cos\alpha)\int\left\{\sin\alpha\sin\varphi\,.\,d\frac{dn}{d\xi} - \cos\alpha\sin\varphi\,.\,d\frac{dn}{d\eta}\right\}$$

oder

$$\begin{aligned}
\delta w = {} & \frac{\delta\alpha}{\sin\varphi} - \frac{\cos\alpha\operatorname{cotg}\varphi}{\cos m^2}\int\left\{\sin\alpha\sin\varphi\,.\,d\frac{dn}{d\xi} - \cos\alpha\sin\varphi\,.\,d\frac{dn}{d\eta}\right\} \\
& + \frac{1}{\cos m^2}\int\left\{\cos\alpha\sin\alpha\cos\varphi\,.\,d\frac{dn}{d\xi} - \cos\alpha^2\cos\varphi\,.\,d\frac{dn}{d\eta}\right\}
\end{aligned}$$

Setzt man auch im ersten Gliede den Ausdruck von $\delta\alpha$ und multiplicirt man mit $\cos m^2\cos\varphi$, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}
\cos m^2\cos\varphi\,\delta w = {} & -\sin\alpha\int\left\{\cos\alpha\,.\,d\frac{dn}{d\xi} + \sin\alpha\sin\varphi^2\,.\,d\frac{dn}{d\eta}\right\} \\
& +\cos\alpha\sin\varphi\int\left\{\sin\alpha\sin\varphi\,.\,d\frac{dn}{d\xi} - \cos\alpha\sin\varphi\,.\,d\frac{dn}{d\eta}\right\} \\
& +\cos\varphi\int\left\{\cos\alpha\sin\alpha\cos\varphi\,.\,d\frac{dn}{d\xi} - \cos\alpha^2\cos\varphi\,.\,d\frac{dn}{d\eta}\right\} \\
& -\cos m^2\sin\alpha\int\frac{n}{aa}\,ds
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (13^b)$$

Diesen Formeln kann man eine leichter zu übersehende Gestalt geben, wenn man, statt der Differentialquotienten von n, in Beziehung auf ξ und η genommen, die Differentialquotienten derselben Grösse, in der Richtung von ds und senkrecht auf dieselben genommen, einführt, nämlich:

$$p = \frac{dn}{d\xi}\cos\alpha + \frac{dn}{d\eta}\sin\alpha$$

$$q = -\frac{dn}{d\xi}\sin\alpha + \frac{dn}{d\eta}\cos\alpha;$$

oder wenn man setzt,

$$\frac{dn}{d\xi} = p\cos\alpha - q\sin\alpha$$

$$\frac{dn}{d\eta} = p\sin\alpha + q\cos\alpha$$

also:

$$d\frac{dn}{d\xi} = (dp - q\,d\alpha)\cos\alpha - (dq + p\,d\alpha)\sin\alpha$$

$$d\frac{dn}{d\eta} = (dp - q\,d\alpha)\sin\alpha + (dq + p\,d\alpha)\cos\alpha$$

Schreibt man, um abzukürzen, $d\lambda$ und $d\mu$ für $dp - qd\alpha$ und $dq + pd\alpha$, so verwandeln die Formeln (13) sich zunächst in:

$$\cos m^2\,\delta\varphi = \cos\alpha \sin m \int \cos\alpha\cos\varphi\, d\mu + \sin\alpha \sin\varphi \int \sin\varphi d\mu - \cos m^2 \cos\alpha \int \left\{\frac{n}{a\,a} ds + d\lambda\right\}$$

$$\cos m^2 \cos\varphi\,\delta\alpha = \sin\alpha \sin\varphi \sin m \int \cos\alpha\cos\varphi\, d\mu - \cos\alpha \int \sin\varphi\, d\mu - \cos m^2 \sin\alpha \sin\varphi \int \left\{\frac{n}{a\,a} ds + d\lambda\right\}$$

$$\cos m^2 \cos\varphi\,\delta w = -\cos\alpha^2 \cos\varphi \int \cos\alpha\cos\varphi d\mu - \cos\alpha \sin\varphi \int \sin\varphi\, d\mu - \cos m^2 \sin\alpha \int \left\{\frac{n}{a\,a} ds + d\lambda\right\}$$

allein sie nehmen ihre einfachste Gestalt an, wenn man die dritte Seite (σ) des sphärischen Dreiecks einführt, dessen beide andere Seiten $90^0 - \varphi'$ und $90^0 - \varphi$ sind und dessen der ersteren derselben anliegender Winkel α' ist, oder wenn man setzt:

$$\begin{aligned}\cos\varphi\sin\alpha &= \cos\varphi'\sin\alpha'\\ \cos\varphi\cos\alpha &= -\sin\varphi'\sin\sigma + \cos\alpha'\cos\varphi'\cos\sigma\\ \sin\varphi &= \sin\varphi'\cos\sigma + \cos\alpha'\cos\varphi'\sin\sigma\end{aligned}$$

Dadurch findet man, nachdem man dem Resultate dieser Substitution, durch fernere Anwendung derselben Formeln, seine einfachste Gestalt gegeben hat:

$$\left.\begin{aligned}\delta\varphi &= \sin\alpha\left\{\cos\sigma\int\cos\sigma\, d\mu + \sin\sigma\int\sin\sigma\, d\mu\right\} - \cos\alpha\int\left\{\frac{n}{a\,a}ds + d\lambda\right\}\\ \cos\varphi\,\delta w &= -\cos\alpha\left\{\cos\sigma\int\cos\sigma\, d\mu + \sin\sigma\int\sin\sigma\, d\mu\right\} - \sin\alpha\int\left\{\frac{n}{a\,a}ds + d\lambda\right\}\\ \cos\varphi\,\delta\alpha &= -\cos\alpha\sin\varphi\left\{\cos\sigma\int\cos\sigma\, d\mu + \sin\sigma\int\sin\sigma\, d\mu\right\} + \cos\varphi\left\{\sin\sigma\int\cos\sigma\, d\mu - \cos\sigma\int\sin\sigma\, d\mu\right\}\\ &\quad - \sin\alpha\sin\varphi\int\left\{\frac{n}{a\,a}ds + d\lambda\right\}\end{aligned}\right\} \ldots (14)$$

Will man, statt dieser Formeln, eine Näherung an dieselben, welche in Grössen von der Ordnung von $\frac{dn}{ds}\cdot\frac{s}{a}$ richtig und daher für kleinere Werthe von s brauchbar ist, so kann man setzen:

$$\cos\sigma\int\cos\sigma\, d\mu + \sin\sigma\int\sin\sigma d\mu = \mu - \mu'$$

$$\sin\sigma\int\cos\sigma\, d\mu - \cos\sigma\int\sin\sigma d\mu = \int\mu d\sigma$$

wo μ' sich auf den Anfangspunkt der geodätischen Linie bezieht. Man erhält dadurch:

$$\begin{aligned}\delta\varphi &= -\frac{dn}{d\xi} + \frac{dn'}{d\xi'}\cos(\alpha-\alpha') - \frac{dn'}{d\eta'}\sin(\alpha-\alpha') - \cos\alpha\int\frac{n}{a\,a}ds + \sin\alpha\int p d\alpha + \cos\alpha\int q d\alpha\\ \cos\varphi\,\delta w &= -\frac{dn}{d\eta} + \frac{dn'}{d\eta'}\cos(\alpha-\alpha') + \frac{dn'}{d\xi'}\sin(\alpha-\alpha') - \sin\alpha\int\frac{n}{a\,a}ds - \cos\alpha\int p d\alpha + \sin\alpha\int q d\alpha\\ \cos\varphi\,\delta\alpha &= \left\{-\frac{dn}{d\eta} + \frac{dn'}{d\eta'}\cos(\alpha-\alpha') + \frac{dn'}{d\xi'}\sin(\alpha-\alpha') - \sin\alpha\int\frac{n}{a\,a}ds - \cos\alpha\int p d\alpha + \sin\alpha\int q d\alpha\right\}\sin\varphi\\ &\quad + \cos\varphi\int\left\{q + \int p d\alpha\right\}\frac{ds}{a}\end{aligned}$$

Allein innerhalb der festgesetzten Grenze der Annäherung ist

$$\cos(\alpha-\alpha') = 1;\quad \sin(\alpha-\alpha') = \frac{s}{a}\operatorname{tg}\varphi\sin\alpha$$

$$\int p d\alpha = (p-p')\frac{s}{a}\operatorname{tg}\varphi\sin\alpha$$

$$\int q d\alpha = (q-q')\frac{s}{a}\operatorname{tg}\varphi\sin\alpha$$

$$\int q\frac{ds}{a} = (q-q')\frac{s}{a}$$

$$\int\frac{ds}{a}\int p d\alpha = 0$$

anzunehmen, wodurch man erhält:

$$\left.\begin{aligned}\delta\varphi &= -\frac{dn'}{d\xi'} - \frac{dn}{d\xi} - \left(2\frac{dn'}{d\eta'} - \frac{dn}{d\eta}\right)\frac{s}{a}\operatorname{tg}\varphi\sin\alpha - \cos\alpha\int\frac{n}{a\,a}ds\\ \cos\varphi\,\delta w &= \frac{dn'}{d\eta'} - \frac{dn}{d\eta} + \left(2\frac{dn'}{d\xi'} - \frac{dn}{d\xi}\right)\frac{s}{a}\operatorname{tg}\varphi\sin\alpha - \sin\alpha\int\frac{n}{a\,a}ds\\ \cos\varphi\,\delta\alpha &= \left\{\frac{dn'}{d\eta'} - \frac{dn}{d\eta} + \left(2\frac{dn'}{d\xi'} - \frac{dn}{d\xi}\right)\frac{s}{a}\operatorname{tg}\varphi\sin\alpha - \sin\alpha\int\frac{n}{a\,a}ds\right\}\sin\varphi\\ &\quad + \left\{\left(\frac{dn'}{d\xi'} - \frac{dn}{d\xi}\right)\sin\alpha - \left(\frac{dn'}{d\eta'} - \frac{dn}{d\eta}\right)\cos\alpha\right\}\frac{s}{a}\cos\varphi\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (15)$$

5.

Diese Entwickelung des Einflusses der Unregelmässigkeiten der Erdoberfläche kann nur brauchbar werden, nachdem das, was sie voraussetzt, erlangt ist, nämlich die Kenntniss, sowohl der Entfernung zweier Punkte, auf der sie verbindenden geodätischen Linie gemessen, als auch die Richtung der Tangente an den Anfangspunkt dieser Linie. Beide Bestimmungen können nur aus einer Dreieckskette hervorgehen. Es muss gezeigt werden, wie die unmittelbaren Beobachtungen berechnet werden müssen, damit sie für die Seiten der Dreiecke die geodätischen, jedes Paar der Punkte verbindenden Linien, und für ihre Winkel die Winkel zwischen den Tangenten an die geodätischen Linien ergeben.

Man hat kein Mittel, die kürzeste Entfernung zweier Punkte auf der Oberfläche der Erde unmittelbar zu messen; aber man kann ihre Entfernung messen, indem man der Curve folgt, welche durch den Schnitt der Oberfläche durch eine an dem einen Punkte verticale und durch den andern gelegte Ebene erzeugt wird. Diese Entfernung ist offenbar nur sehr wenig grösser als die kleinste. Wenn die Erde als ein elliptisches Rotationssphäroid, dessen halbe grosse Axe $= a$ und dessen Excentricität $= e$ ist, angenommen wird, so wird das niedrigste Glied des Unterschiedes beider Entfernungen

$$= \tfrac{1}{10}\, e^4 \frac{s^5}{a^4} \cos\varphi^4 \cos\alpha^2 \sin\alpha^2,$$

und daher viel zu klein, um bei der Berechnung der Messung einer Grundlinie in Betracht zu kommen. Die Unregelmässigkeiten der Erdoberfläche zwischen beiden Endpunkten setzen diesem Unterschiede nur Grössen von der Ordnung nn hinzu, welche ausser der Grenze der hier gesuchten Annäherung liegen. Man kann also die im verticalen Schnitte gemessene Länge der Grundlinie geradezu als die gesuchte betrachten.

Eben so wenig hat man ein Mittel die Winkel eines Dreieckes, dessen Seiten geodätische Linien sind, unmittelbar zu beobachten. Die Beobachtung ergibt an jedem Dreieckspunkte den Winkel, in welchem sich zwei daselbst verticale und durch die beiden anderen Punkte gehende Ebenen durchschneiden. Ich werde aufsuchen, wie dieser Winkel und der Winkel zwischen den geodätischen Linien sich zu einander verhalten.

Ich werde zwei Punkte A und B auf der Oberfläche der Erde annehmen und den Unterschied des Azimuthes der Richtung AB, sowohl im verticalen Schnitte, als der geodätischen Linie folgend genommen, aufsuchen. Zu den früher angewandten Bezeichnungen kommt jetzt noch A', das Azimuth des in A verticalen, durch B gelegten Schnittes. Bezeichnet man die Gleichung der schneidenden Ebene durch

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta,$$

so hat man, durch die Bedingung, dass sie durch beide Punkte, deren Coordinaten resp. x', y', z' und x, y, z sind, gehe:

$$\alpha x' + \beta y' + \gamma z' = \delta$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta;$$

durch die Bedingung, dass jeder in der Lothlinie von A liegende Punkt ihr entspreche:

$$0 = \alpha \cos xZ' + \beta \cos yZ' + \gamma \cos zZ',$$

und durch die Bedingung, dass ihr jeder, im Horizonte von A und im Azimuthe von A' liegende Punkt gleichfalls entspreche:

$$0 = \alpha \cos xA' + \beta \cos yA' + \gamma \cos zA'.$$

Da man für den ersten, unter dem ersten Meridiane angenommenen Punkt

$$\cos xZ' = 0 \qquad \cos xA' = \sin A'$$
$$\cos yZ' = \cos\varphi' \qquad \cos yA' = -\cos A' \sin\varphi'$$
$$\cos zZ' = \sin\varphi' \qquad \cos zA' = \cos A' \cos\varphi'$$

hat, so kann man aus den beiden letzten Gleichungen folgern, dass α, β, γ resp. proportional

$$\cos A',\ \sin A' \sin\varphi',\ -\sin A' \cos\varphi'$$

sind, wodurch die beiden ersten, nach der Elimination von δ, die Gleichung der Ebene:

$$0 = (x-x')\cos A' + (y-y')\sin A' \sin\varphi' - (z-z')\sin A' \cos\varphi'$$

ergeben.

Wenn man die Coordinaten der beiden Punkte durch ihre Polhöhen und ihren Längenunterschied ausdrückt, erhält man hieraus die Gleichung zwischen diesen Grössen und A'. Man hat (§ 3):

$$\frac{du}{dx} = \Delta \cos\varphi \sin w = \frac{2x}{aa} - \frac{2}{a}\frac{dn}{dx}$$
$$\frac{du}{dy} = \Delta \cos\varphi \cos w = \frac{2y}{aa} - \frac{2}{a}\frac{dn}{dy}$$
$$\frac{du}{dz} = \Delta \sin\varphi \qquad = \frac{2z}{bb} - \frac{2}{a}\frac{dn}{dz}$$

und

$$\Delta = \frac{2}{a}\,\frac{1+\frac{n}{a}}{\sqrt{1-ee\sin\varphi^2}}$$

also für den Punkt B:

$$x = \frac{a+n}{\sqrt{1-ee\sin\varphi^2}} \cos\varphi \sin w + a\frac{dn}{dx}$$
$$y = \frac{a+n}{\sqrt{1-ee\sin\varphi^2}} \cos\varphi \cos w + a\frac{dn}{dy}$$
$$z = \frac{a(1-ee)+n}{\sqrt{1-ee\sin\varphi^2}} \sin\varphi \qquad + a\frac{dn}{dz}$$

und für den Punkt A:

$$x' = \ldots\ldots\ldots\ldots + a\frac{dn'}{dx'}$$

$$y' = \frac{u+n'}{\sqrt{1-ee\sin\varphi'^2}}\cos\varphi' + a\frac{dn'}{dy'}$$

$$z' = \frac{a(1-ee)+n'}{\sqrt{1-ee\sin\varphi'^2}}\sin\varphi' + a\frac{dn'}{dz'}$$

Wenn man, wie vorher, Grössen von der Ordnung von nee weglässt, so ergibt die Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichung der Ebene:

$$\left.\begin{aligned} 0 = \cos\varphi\sin w\cos A' + \left\{\left(\cos\varphi\cos w - \cos\varphi'\sqrt{\frac{1-ee\sin\varphi^2}{1-ee\sin\varphi'^2}}\right)\sin\varphi' - (1-ee)\cos\varphi'\left(\sin\varphi - \sin\varphi'\sqrt{\frac{1-ee\sin\varphi^2}{1-ee\sin\varphi'^2}}\right)\right\}\sin A' \\ + \left(\frac{dn}{dx} - \frac{dn'}{dx'}\right)\cos A' + \left(\frac{dn}{dy} - \frac{dn'}{dy'}\right)\sin A'\sin\varphi' - \left(\frac{dn}{dz} - \frac{dn'}{dz'}\right)\sin A'\cos\varphi' \end{aligned}\right\} (16)$$

Der von n und n' abhängige Theil dieser Gleichung kann kürzer ausgedrückt werden. Man hat nämlich (§ 1):

$$\frac{dn}{dx} = \frac{dn}{d\xi}\cos xN + \frac{dn}{d\eta}\cos xO = -\frac{dn}{d\xi}\sin\varphi\sin w + \frac{dn}{d\eta}\cos w$$

$$\frac{dn}{dy} = \frac{dn}{d\xi}\cos yN + \frac{dn}{d\eta}\cos yO = -\frac{dn}{d\xi}\sin\varphi\cos w - \frac{dn}{d\eta}\sin w$$

$$\frac{dn}{dz} = \frac{dn}{d\xi}\cos zN + \frac{dn}{d\eta}\cos zO = \frac{dn}{d\xi}\cos\varphi$$

wodurch man, unter Berücksichtigung der Relationen der sphärischen Trigonometrie:

$$\frac{dn}{dx}\cos A' + \frac{dn}{dy}\sin A'\sin\varphi' - \frac{dn}{dz}\sin A'\cos\varphi' = -\frac{dn}{d\xi}\sin\alpha + \frac{dn}{d\eta}\cos\alpha$$

$$\frac{dn'}{dx'}\cos A' + \frac{dn'}{dy'}\sin A'\sin\varphi' - \frac{dn'}{dz'}\sin A'\cos\varphi' = -\frac{dn'}{d\xi'}\sin\alpha' + \frac{dn'}{d\eta'}\cos\alpha'$$

erhält. Führt man überdies u und u' statt φ und φ' ein, welche durch die Formeln

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg}\varphi\sqrt{1-ee}; \quad \operatorname{tg} u' = \operatorname{tg}\varphi'\sqrt{1-ee}$$

bestimmt werden, so verwandelt die Gleichung (16) sich in:

$$\left.\begin{aligned} 0 = \cos A'\cos u\sin w\sqrt{1-ee\cos u'^2} - \sin A'\{\sin u\cos u' - \cos u\sin u'\cos w - ee\cos u'(\sin u - \sin u')\} \\ - \frac{dn}{d\xi}\sin\alpha + \frac{dn}{d\eta}\cos\alpha + \frac{dn'}{d\xi'}\sin\alpha' - \frac{dn'}{d\eta'}\cos\alpha' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (17)$$

Durch die eine oder durch die andere dieser Gleichungen ist das Azimuth A' bestimmt, in welchem der verticale Schnitt geführt werden muss, damit er durch einen Punkt gehe, dessen Polhöhe $= \varphi$ und Längenunterschied $= w$ ist. Das Azimuth α', in welchem das erste Element der geodätischen, durch denselben Punkt gehenden Linie liegt, ist dem Azimuthe gleich, in welchem eine solche Linie, auf der Oberfläche des reinelliptischen Rotationssphäroids, von einem Punkte ausgeht, dessen Polhöhe $= \varphi'$ ist, um nach einem anderen, durch die Polhöhe $\varphi - \delta\varphi$ und den Längenunterschied $w - \delta w$ bestimmten, zu gelangen. Die zu der Bestimmung desselben nothwendige Gleichung erhält man daher durch die Relationen, welche zwischen den Polhöhen und Längenunterschieden von Punkten stattfinden, die auf einer, auf dem elliptischen Rotationssphäroide, in dem Azimuthe α' gezogenen geodätischen Linie liegen. Diese Relationen habe ich (Astr. Nachr. Nr. 86 [Abh. 127]) einfach ausgedrückt, indem ich das sphärische Dreieck zu Hülfe genommen habe, an dessen Seiten $90^0 - u'$ und $90^0 - u$ dieselben Winkel anliegen, in welchen die geodätische Linie die Meridiane der Punkte durchschneidet, deren Polhöhen die zu u' und u gehörigen φ' und φ sind; die dritte Seite dieses Dreiecks habe ich dort durch σ, den dritten Winkel durch ω bezeichnet und werde dieselben Bezeichnungen auch hier anwenden. Man hat also:

$$\cos\sigma = \sin u'\sin u, + \cos u'\cos u, \cos\omega,$$

$$\sin\sigma\cos\alpha' = \cos u'\sin u, - \sin u'\cos u, \cos\omega,$$

$$\sin\sigma\sin\alpha' = \cos u, \sin\omega,$$

wo u, und ω, der Polhöhe φ, $= \varphi - \delta\varphi$ und dem Längenunterschiede w, $= w - \delta w$ entsprechen. Wenn man $u - \delta\varphi$ für u, und $\omega - \delta w$ für ω, schreibt, was erlaubt ist, da Grössen von der Ordnung von nee vernachlässigt werden, so erhält man:

$$\sin\sigma\cos\alpha' = \cos u'\sin u - \sin u'\cos u\cos\omega - (\cos u'\cos u + \sin u'\sin\omega\cos\omega)\delta\varphi - \sin u'\cos u\sin\omega . \delta w$$

$$\sin\sigma\sin\alpha' = \cos u\sin\omega + \sin u\sin\omega . \delta\varphi - \cos u\cos\omega . \delta w$$

Setzt man diese Ausdrücke in (17) und betrachtet man zuerst nur den von den Unregelmässigkeiten der Erdoberfläche abhängigen Theil dieser Gleichung, so erhält man, nach einer leichten Reduction:

$$\sin\sigma(\alpha'-A') = \sin\alpha.\delta\varphi - \cos\alpha\cos\varphi.\delta w + \frac{dn}{d\xi}\sin\alpha - \frac{dn}{d\eta}\cos\alpha - \frac{dn'}{d\xi'}\sin\alpha' + \frac{dn'}{d\eta'}\cos\alpha'$$

und, wenn man für $\delta\varphi$ und $\cos\varphi\delta w$ ihre Ausdrücke (14) setzt:

$$\sin\sigma(\alpha'-A') = \cos\sigma\int\cos\sigma\,d\mu + \sin\sigma\int\sin\sigma\,d\mu + \frac{dn}{d\xi}\sin\alpha - \frac{dn}{d\eta}\cos\alpha - \frac{dn'}{d\xi'}\sin\alpha' + \frac{dn'}{d\eta'}\cos\alpha'\Big\} \ldots\ldots (18)$$

Um die Bedeutung dieser Formel anschaulicher zu machen, werde ich die Grenze aufsuchen, welcher sie sich, in dem Falle kleiner Entfernungen, nähert. Für solche Entfernungen sind ihre beiden ersten Glieder $= \mu - \mu' = q - q' + \int p\,d\alpha$, und da ihre vier letzten Glieder nichts anderes sind als $-q+q'$, so reducirt der Ausdruck ihrer Grenze sich auf $\int p\,d\alpha$ oder, näherungsweise, auf

$$(p-p')\frac{s}{a}\operatorname{tg}\varphi\sin\alpha,$$

und, indem man für p und p' ihre Ausdrücke schreibt, auf

$$\left\{\frac{dn}{d\xi}\cos\alpha + \frac{dn}{d\eta}\sin\alpha - \frac{dn'}{d\xi'}\cos\alpha' - \frac{dn'}{d\eta'}\sin\alpha'\right\}\frac{s}{a}\operatorname{tg}\varphi\sin\alpha.$$

Die Reduction von A' auf α' ist also, in dem Falle kleiner Entfernungen,

$$= \left\{\frac{dn}{d\xi}\cos\alpha + \frac{dn}{d\eta}\sin\alpha - \frac{dn'}{d\xi'}\cos\alpha' - \frac{dn'}{d\eta'}\sin\alpha'\right\}\operatorname{tg}\varphi\sin\alpha$$

und daher nur dann als eine Grösse von höherer Ordnung als $\frac{dn}{d\xi}$ und $\frac{dn}{d\eta}$ zu betrachten, wenn die Aenderungen dieser Differentialquotienten, von dem einen Endpunkte der geodätischen Linie, zu dem anderen, selbst als Grössen höherer Ordnung angesehen werden. Dieses darf aber nicht geschehen, indem die Annahme, dass sie in dieser Ausdehnung, vergleichungsweise mit ihrer eigenen Grösse, nicht beträchtlich geändert werden können, ohne Grund sein würde. Man bemerkt, auch ohne nähere Entwickelung der Wirkung der Unregelmässigkeiten auf den Zug der geodätischen Linie, dass sie, indem sie diese Unregelmässigkeiten auf dem kürzesten Wege überschreitet, zu mehr oder weniger beträchtlichen Abweichungen aus der Ebene zweier aufeinanderfolgenden Normalen gezwungen wird, je kleineren Umfang die einzelnen Wellen der Unregelmässigkeiten besitzen.

Um indessen den Ausdruck von $\alpha'-A'$ zu vervollständigen, muss ich noch den von den Unregelmässigkeiten der Oberfläche unabhängigen Theil der Gleichung (17) entwickeln. Nimmt man also

$$\sin\sigma\cos\alpha' = \cos u'\sin u - \sin u'\cos u\cos\omega$$
$$\sin\sigma\sin\alpha' = \cos u\sin\omega$$

an und drückt man ω durch w aus, nämlich durch die Formel (Astr. Nachr. Nr. 86 S. 251 [p. 10])

$$w = \omega - \tfrac{1}{2}ee\cos u\sin\alpha.\sigma + \text{etc.}$$
$$= \omega - \tfrac{1}{2}ee\cos u'\sin\alpha'.\sigma + \text{etc.}$$

so wird die Gleichung (17), indem man die Annäherung nicht über ee hinaustreibt:

$$\sin\sigma(\alpha'-A') = \tfrac{1}{2}ee\cos u'\{\cos u'\cos\alpha'\cos u\sin\omega - 2\sin\alpha'(\sin u - \sin u')\}$$
$$+ \tfrac{1}{2}ee\cos u'\sin\alpha'\cos u\sigma\{\cos\alpha'\cos\omega - \sin\alpha'\sin\omega\sin u'\}$$

Setzt man darin

$$\sin u = \sin u'\cos\sigma + \cos u'\sin\sigma\cos\alpha'$$
$$\cos u\cos\omega = \cos u'\cos\sigma - \sin u'\sin\sigma\cos\alpha'$$
$$\cos u\sin\omega = \sin\sigma\sin\alpha'$$

so erhält man:

$$\alpha'-A' = -\tfrac{1}{2}ee\cos u'\sin\alpha'\left\{\left(1-\frac{\sigma}{\operatorname{tg}\sigma}\right)\cos u'\cos\alpha' - (2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma - \sigma)\sin u'\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

welche Formel ich schon Astron. Nachr. Nr. 3 S. 36 [Abh. 125 p. 2] gegeben habe, mit dem Unterschiede, dass dort φ für u' geschrieben ist, was für die gesuchte Annäherung gleichgültig ist.

Beide Theile (18) und (19) zusammen, sind das, was dem beobachteten Azimuthe des verticalen Schnittes hinzugefügt werden muss, um daraus das Azimuth des ersten Elementes der geodätischen Linie zu erhalten. Da aber der erste Theil, wegen der Unbekanntschaft mit den Unregelmässigkeiten der Oberfläche der Erde, welche die geodätische Linie auf ihrem Zuge von A nach B trifft, wie ich schon bemerkt habe, nicht einmal näherungsweise berechnet werden kann, so bleibt nichts übrig, als auf die Reduction der Richtungen der verticalen Schnitte auf die Richtungen der geodätischen Linien Verzicht zu leisten. Man kann also nicht zu der Kenntniss eines, der wahren, d. h. unregelmässigen Figur der Erde folgenden Dreiecksnetzes gelangen.

6.

Man wird aber diese Schwierigkeit vermeiden, wenn man statt des Dreiecksnetzes, welches durch die geodätischen, auf der unregelmässigen Oberfläche der Erde liegenden Linien gebildet wird, ein anderes berechnen kann, dessen Seiten auf einer regelmässigen Oberfläche liegen, und zu dessen Construction man durch die Beobachtungen gelangen kann. Ich finde, dass man das Dreiecksnetz zwischen den normalen Projectionen der Dreieckspunkte, auf die Oberfläche eines der Oberfläche der Erde nahe kommenden elliptischen Rotationssphäroids, wenigstens näherungsweise, aus den Beobachtungen ableiten kann.

Um dieses letztere Dreiecksnetz wirklich construiren zu können, muss man eine seiner Seiten aus einer Messung derselben, und seine Winkel aus den beobachteten Winkeln der verticalen Schnitte finden können. Ich werde die Formeln aufsuchen, welche Beides miteinander in Verbindung setzen.

Die Messung einer Entfernung von AB kann nur in der Ebene eines verticalen Schnittes, auf der unregelmässigen Oberfläche der Erde, vorgenommen werden. Hat sie $AB = S$ ergeben, und wird die Entfernung der Projectionen $A_,$ und $B_,$ beider Endpunkte, auf der sie verbindenden geodätischen Linie gemessen, durch s bezeichnet, so ist $S - s$ durch die Unregelmässigkeiten n der Oberfläche der Erde auszudrücken. Da ich aber schon bemerkt habe, dass die kürzeste Entfernung zwischen $A,$ und $B,$ von der im verticalen Schnitte stattfindenden ganz unbedeutend verschieden ist, so darf der Unterschied der Entfernungen von AB und $A_,B_,$ die erste in der die Oberfläche der Erde schneidenden Verticalebene, die andere in dem Durchschnitte der Oberfläche des Rotationsellipsoides und derselben Ebene gemessen, mit $S - s$ verwechselt werden.

Wenn man die Coordinaten der Punkte der Oberfläche der Erde, welche in dem in A verticalen Schnitte liegen, durch $x,$ $y,$ z bezeichnet, die Coordinaten der in derselben Ebene liegenden Punkte des Rotationssphäroids durch $x_,$, $y_,$, $z_,$, so hat man:

$$S = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

$$s = \int \sqrt{dx_,^2 + dy_,^2 + dz_,^2}$$

und wenn

$$x = x_, + \delta x, \quad y = y_, + \delta y, \quad z = z_, + \delta z$$

gesetzt und nur Grössen der ersten Ordnung betrachtet werden:

$$S - s = \int \left\{ \frac{dx_,}{ds_,} d\delta x + \frac{dy_,}{ds_,} d\delta y + \frac{dz_,}{ds_,} d\delta z \right\}$$

Man hat aber

$$\delta x = n \cos xZ; \quad \delta y = n \cos yZ; \quad \delta z = n \cos zZ,$$

und mit hinreichender Annäherung:

$$\delta x = n \frac{x_,}{a}; \quad \delta y = n \frac{y_,}{a}; \quad \delta z = n \frac{z_,}{a}$$

folglich:

$$S - s = \int \left\{ n \frac{ds_,}{a} + (x_, dx_, + y_, dy_, + z_, dz_,) \frac{dn}{a\, ds} \right\}$$

Indem $x_,dx_, + y_,dy_, + z_,dz_,$ von der Ordnung von ee ist und das Product nee vernachlässigt wird, erhält man:

$$s = S - \int n \frac{ds}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

Das Verhalten des beobachteten Azimuths A' des, in A verticalen, durch B gelegten Schnittes, zu dem Azimuthe α' des ersten Elementes der von $A,$ nach $B,$ gezogenen geodätischen Linie, findet man durch die Vergleichung der beide bestimmenden Gleichungen. Wenn die Polhöhen von A und B und ihr Längenunterschied, wie vorher, durch φ', φ, w bezeichnet werden, und wenn u' und $u,$ auf die im 5. § angezeigte Art, von φ' und φ abhängen, so hat man die Gleichung (17) zur Bestimmung von A'. Zur Bestimmung von α', hat man die auch schon angewandten Gleichungen:

$$\sin\sigma \cos\alpha'_, = \cos u'_, \sin u, - \sin u'_, \cos u, \cos\omega,$$

$$\sin\sigma \sin\alpha'_, = \cos u, \sin\omega,$$

in welchen $u'_,$ und $u,$ den Polhöhen $\varphi'_,$ und $\varphi,$ von $A,$ und $B,$ zugehören, und σ und $\omega,$ die dritte Seite und der dritte Winkel des sphärischen Dreiecks sind, dessen beiden ersten Seiten $90^0 - u'_,$ und $90^0 - u,$ dieselben Winkel anliegen, in welchen die geodätische Linie die Meridiane von $A,$ und $B,$ durchschneidet. Um beide vergleichbar zu machen, muss man, in den letzten Gleichungen, $u'_,$, $u,$, $\omega,$ durch u', u, w ausdrücken.

Da die Gleichung der Oberfläche, auf welcher $A,$ und $B,$ liegen,

$$u' = 0 = \frac{x_,x_, + y_,y_,}{aa} + \frac{z_,z_,}{bb} - 1$$

ist, so ist

$$\frac{du'}{dx_,} = \Delta_, \cos\varphi_, \sin w_, = \frac{2x_,}{aa} = \frac{2(x - n\cos xZ)}{aa}$$

$$\frac{du'}{dy_,} = \Delta_, \cos\varphi_, \cos w_, = \frac{2y_,}{aa} = \frac{2(y - n\cos yZ)}{aa}$$

$$\frac{du'}{dz_,} = \Delta_, \sin\varphi_, \qquad = \frac{2z_,}{bb} = \frac{2(z - n\cos zZ)}{bb}$$

Ferner ist

$$\frac{2x}{aa} = \Delta \cos\varphi \sin w + \frac{2}{a}\frac{dn}{dx}$$

$$\frac{2y}{aa} = \Delta \cos\varphi \cos w + \frac{2}{a}\frac{dn}{dy}$$

$$\frac{2z}{bb} = \Delta \sin\varphi \qquad + \frac{2}{a}\frac{dn}{dz};$$

schafft man x, y, z, durch die Substitution dieser Ausdrücke in die vorigen, aus der Rechnung, und vernachlässigt man, wie immer, nee, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\Delta_{,}\cos\varphi_{,}\sin w_{,} &= \Delta\cos\varphi\sin w + \frac{2}{a}\frac{dn}{dx} - \frac{2n}{aa}\cos xZ\\
\Delta_{,}\cos\varphi_{,}\cos w_{,} &= \Delta\cos\varphi\cos w + \frac{2}{a}\frac{dn}{dy} - \frac{2n}{aa}\cos yZ\\
\Delta_{,}\sin\varphi_{,} &= \Delta\sin\varphi + \frac{2}{a}\frac{dn}{dz} - \frac{2a}{aa}\cos zZ
\end{aligned}$$

Indem man, statt der in Beziehung auf x, y, z genommenen Differentialquotienten von n, die in Beziehung auf ξ, η genommenen setzt und statt der drei Cosinusse ihre Ausdrücke durch φ und w einführt, erhält man hieraus:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta_{,} &= \Delta - \frac{2n}{aa}\\
\varphi_{,} - \varphi &= \frac{dn}{d\xi}\\
\cos\varphi\,(w_{,} - w) &= \frac{dn}{d\eta}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (21)$$

Der Ausdruck von $w_{,}$ durch ω, ist vorher schon angeführt, nämlich:

$$w_{,} = \omega_{,} - \tfrac{1}{2}ee\cos u_{,}\sin\alpha_{,}\sigma + \text{etc.} \ldots$$

Wenn man indessen den Meridian von A für den ersten nimmt, so wie die Gleichung (17) es verlangt, so ist:

$$\omega_{,} = w + \tfrac{1}{2}ee\cos u_{,}'\sin\alpha_{,}'\sigma + \frac{dn}{\cos\varphi\,d\eta} - \frac{dn'}{\cos\varphi'\,d\eta'}$$

oder man hat, innerhalb der festgesetzten Grenze der Annäherung richtig,

$$\begin{aligned}
u_{,}' &= u' + \frac{dn'}{d\xi'}\\
u' &= u + \frac{dn}{d\xi}\\
\omega_{,} &= w + \tfrac{1}{2}ee\cos u'\sin\alpha'\sigma + \frac{dn}{\cos u\,d\eta} - \frac{dn'}{\cos u'\,d\eta'}
\end{aligned}$$

Hierdurch kann man $u_{,}'$, $u_{,}$, $\omega_{,}$ aus den Gleichungen für $\alpha_{,}'$ schaffen und dagegen u', u, w einführen. Betrachtet man zuerst nur den von den Unregelmässigkeiten der Oberfläche der Erde abhängigen Theil, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\sin\sigma\cos\alpha_{,}' &= \cos u'\sin u - \sin u'\cos u\cos w - (\sin u'\sin u + \cos u'\cos u\cos w)\frac{dn'}{d\xi'}\\
&\quad + (\cos u'\cos u + \sin u'\sin u\cos w)\frac{dn}{d\xi}\\
&\quad + \sin u'\cos u\sin w\left(\frac{dn}{\cos u\,d\eta} - \frac{dn'}{\cos u'\,d\eta'}\right)\\
\sin\sigma\sin\alpha_{,}' &= \cos u\sin w - \sin u\cos w\frac{dn}{d\xi} + \cos u\cos w\left(\frac{dn}{\cos u\,d\eta} - \frac{dn'}{\cos u'\,d\eta'}\right)
\end{aligned}$$

Die Substitution dieser Ausdrücke in (17) ergibt, nach einer leichten Reduction:

$$\alpha_{,}' - A' = -\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma\sin\alpha'\frac{dn'}{d\xi'} - \frac{(\cos u\cos\alpha - \cos u'\cos\alpha')}{\sin\sigma}\frac{dn'}{\cos u'\,d\eta'}$$

und da

$$\cos u\cos\alpha = -\sin u'\sin\sigma + \cos u'\cos\sigma\cos\alpha'$$

ist,

$$\alpha_{,}' - A' = \operatorname{tg} u'\frac{dn'}{d\eta'} - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma\left\{\sin\alpha'\frac{dn'}{d\xi'} - \cos\alpha'\frac{dn'}{d\eta'}\right\}. \quad (22)$$

Der von den Unregelmässigkeiten der Oberfläche der Erde unabhängige Theil von $\alpha_{,}' - A'$ ist oben (19) schon entwickelt worden. Beide Theile zusammen ergeben:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{,}' = A' &- \tfrac{1}{2}ee\cos u'\sin\alpha'\left\{\left(1 - \frac{\sigma}{\operatorname{tg}\sigma}\right)\cos u'\cos\alpha' - (2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma - \sigma)\sin u'\right\}\\
&+ \operatorname{tg} u'\frac{dn'}{d\eta'} - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma\left\{\sin\alpha'\frac{dn'}{d\xi'} - \cos\alpha'\frac{dn'}{d\eta'}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (23)$$

7.

Aus den Formeln (20) und (23) geht hervor, inwiefern man zur Kenntniss des Dreiecksnetzes, welches durch die Projection der Dreieckspunkte auf die Oberfläche des Rotationsellipsoides entsteht, gelangen kann, ohne die Unregelmässigkeiten der Oberfläche der Erde zu kennen. Aus dem Ausdrucke des Winkels, welchen die Projectionen zweier Punkte an der Projection eines dritten einschliessen, verschwindet der erste, grössere Theil des Einflusses der an diesem Punkte vorhandenen Unregelmässigkeit der Oberfläche der Erde; der kleinere, in $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\sigma$ multiplicirte Theil bleibt nur in demselben, und indem man, wegen der Unbekanntschaft mit den Werthen von $\frac{dn'}{d\xi'}$ und $\frac{dn'}{d\eta'}$, gezwungen ist, ihn zu vernachlässigen, vernachlässigt man nur eine Grösse, welche desto kleiner ist, je kleiner die Entfernung ist; eine Grösse, welche wahrscheinlich selten einige Hundertel einer Secunde beträgt. Indem man also die Winkel des projicirten Dreiecksnetzes, durch alleinige Hinzufügung der von der ellipsoidischen Figur der Erde abhängigen Verbesserung der unmittelbaren Beobachtung, beinahe richtig erhält, erfordert die nahe richtige Construction dieses Netzes nur noch die Kenntniss einer Seite derselben. Diese aber kann, wie die

Formel (20) zeigt, durch die unmittelbare, auf der Oberfläche der Erde vorgenommene, oder auf dieselbe reducirte Messung, nur in dem Falle des Verschwindens des Integrals $\int n \frac{ds}{a}$ erlangt werden; im Allgemeinen liegt die gemessene Länge S einer Grundlinie nicht auf der Oberfläche des, der Erde im Ganzen am meisten entsprechenden Rotationsellipsoids, sondern auf einer derselben parallelen, um den mittleren Werth von n, an den Punkten, über welche die Grundlinie hinweggeht, davon entfernten Oberfläche. Wenn man also das Dreiecksnetz berechnet, ohne etwas anderes zu vernachlässigen, als das, was man, wegen Unbekanntschaft mit den Unregelmässigkeiten der Oberfläche, nothwendig vernachlässigen muss, so erhält man, als letztes Resultat, sehr nahe die Projectionen der Dreieckspunkte auf die eben angegebene Oberfläche. Wie weit diese von der Oberfläche des Rotationsellipsoids, welches sich der Figur der Erde im Ganzen am meisten nähert, entfernt ist, bleibt so lange unbekannt, als man nicht Mittel finden wird, die Grössen der Unregelmässigkeiten zu erkennen.

Die Summe der Winkel eines Dreiecks kann Unregelmässigkeiten der Figur der Erde nur durch eine Grösse verrathen, welche in $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\sigma$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\sigma'$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\sigma''$, oder in die Verhältnisse des Durchmessers der Erde zu den Längen der Seiten, multiplicirt und daher immer sehr klein ist. Allein wenn $\frac{dn}{d\xi}$ und $\frac{dn}{d\eta}$ für die 3 Punkte eines Dreiecks gleich wären, so würde die Summe der Winkel nicht einmal in Grössen dieser Ordnung von dem Werthe verschieden sein, welchen sie im Falle der Regelmässigkeit der Oberfläche besitzt. Man leitet dieses sehr leicht aus dem Ausdrucke der auf diese Oberfläche reducirten Winkel ab, indem man darin die Quadrate von $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\sigma$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\sigma'$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\sigma''$ vernachlässigt. Wenn man die Dreieckspunkte durch A, B, C bezeichnet, die Azimuthe der Richtungen

$$\begin{aligned} AB &= \alpha & BA &= a \\ BC &= \alpha' & CB &= a' \\ CA &= \alpha'' & AC &= a'' \end{aligned}$$

die Winkel des Dreiecks $\alpha - a'' = n'$, $\alpha' - a = n''$, $\alpha'' - a' = n$, und die ihnen gegenüberstehenden Seiten $= a\sigma'$, $a\sigma''$, $a\sigma$ setzt, so hat man die Summe der Reductionen aller drei Winkel des Dreiecks = der Hälfte von

$$\begin{aligned} &(-\sigma \sin\alpha + \sigma'' \sin a'') \frac{dn}{d\xi} + (\sigma \cos\alpha - \sigma'' \cos a'') \frac{dn}{d\eta} \\ &+ (-\sigma' \sin\alpha' + \sigma \sin a) \frac{dn}{d\xi} + (\sigma' \cos\alpha' - \sigma \cos a) \frac{dn}{d\eta} \\ &+ (-\sigma'' \sin\alpha'' + \sigma' \sin a') \frac{dn}{d\xi} + (\sigma'' \cos\alpha'' - \sigma' \cos a') \frac{dn}{d\eta} \end{aligned}$$

Setzt man darin

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha & a &= \alpha + 180^0 \\ \alpha' &= \alpha + n'' + 180^0 & a' &= \alpha + n'' \\ \alpha'' &= \alpha - n' + 180^0 & a'' &= \alpha - n' \end{aligned}$$

was bis auf Grössen von der Ordnung σ, σ', σ'' richtig ist, so erhält man die Summe:

$$\begin{aligned} &= \left\{ -\sigma \sin\alpha + \sigma' \sin(\alpha + n'') + \sigma'' \sin(\alpha - n') \right\} \frac{dn}{d\xi} \\ &- \left\{ -\sigma \cos\alpha + \sigma' \cos(\alpha + n'') + \sigma'' \cos(\alpha - n') \right\} \frac{dn}{d\eta} \end{aligned}$$

Der erste Theil derselben kann

$$\begin{aligned} &\sin\alpha \left\{ -\sigma + \sigma' \cos n'' + \sigma'' \cos n' \right\} \frac{dn}{d\xi} \\ &+ \cos\alpha \left\{ \sigma' \sin n'' - \sigma'' \sin n' \right\} \frac{dn}{d\xi} \end{aligned}$$

geschrieben werden und verschwindet also, wenn man das Dreieck als ein ebenes betrachtet; der zweite Theil verhält sich eben so, da der in der zweiten Klammer enthaltene Factor aus dem in der ersten enthaltenen entsteht, wenn man α in $\alpha + 90^0$ verwandelt. Unter der Voraussetzung gleicher Werthe von $\frac{dn}{d\xi}$ und $\frac{dn}{d\eta}$ für alle drei Dreieckspunkte ist daher die Summe der Winkel, in Grössen von der hier betrachteten Ordnung, von der Unregelmässigkeit der Oberfläche unabhängig.

Was die Berechnung des Dreiecksnetzes anlangt, welches durch die geodätischen Linien gebildet wird, welche die Projectionen der Dreieckspunkte auf die, der Oberfläche des Rotationsellipsoides parallele, oben näher bestimmte Oberfläche, mit einander verbinden, so sind dafür zwei Vorschriften vorhanden. Die, der Zeit ihrer Bekanntmachung nach, erste habe ich in den Astr. Nachr. Nr. 6 [Abh. 126] gegeben; die zweite verdanken wir GAUSS, welcher sie in seiner Abhandlung über die krummen Oberflächen vollständig entwickelt hat. Diese ist weit vollkommener als jene, indem sie für jede Oberfläche gilt, während die andere sich nur auf das wenig excentrische Rotationssphäroid der Erde bezieht. Für ein solches Sphäroid habe ich indessen Formeln entwickeln können, welche die Dreiecksseiten nicht als kleine Grössen voraussetzen, also auf Dreiecke von jeder beliebigen Grösse anwendbar sind.

8.

Nachdem ich gezeigt habe, dass das Resultat, welches man aus der Messung einer Grundlinie und der Beobachtung der Winkel eines Dreiecksnetzes, ohne dabei auf Unregelmässigkeiten der Oberfläche der Erde Rücksicht zu nehmen, berechnet, wenig verschieden ist

von dem Dreiecksnetze zwischen den normalen Projectionen der Dreieckspunkte auf eine Oberfläche, welche der Oberfläche des Rotationsellipsoids, in der mittleren Erhöhung der Grundlinie über ihr, parallel gelegt wird, ist noch erforderlich, dass die Vergleichung dieses Resultats mit astronomischen Bestimmungen verfolgt werde.

Ich nehme zwei, durch das Dreiecksnetz mit einander verbundene Punkte A und B an und bezeichne ihre Polhöhen durch φ' und φ, ihren Längenunterschied durch w. Das Dreiecksnetz setzt nicht die Punkte A und B selbst, sondern ihre Projectionen $A_,$ und $B_,$ in Verbindung, also Punkte, deren Polhöhen (21)

$$\left.\begin{aligned}\varphi_,' &= \varphi' + \frac{dn'}{d\xi'}\\ \varphi_, &= \varphi + \frac{dn}{\delta\xi}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (24^a)$$

sind, und deren Längenunterschied,

$$w_, = w + \frac{dn}{\cos\varphi\, d\eta} - \frac{dn'}{\cos\varphi'\, d\eta'} \quad \ldots\ldots (24^b)$$

ist. Hat man an jedem der Punkte die Richtung des Meridians beobachtet, und durch das Dreiecksnetz gefunden, dass die Verbindungslinie der beiden Punkte $A_,B_,$ an dem ersten das Azimuth α', an dem anderen das Azimuth α hat, und nimmt man dieses Resultat als frei von dem Einflusse des kleineren, in $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\sigma$ multiplicirten Gliedes der Formel (23) an, welches man auch in jedem Winkel der Dreiecke hat vernachlässigen müssen, so überträgt das Dreiecksnetz nicht die Azimuthe α' und α, sondern

$$\left.\begin{aligned}\alpha_,' &= \alpha' + \operatorname{tg}\varphi' \frac{dn'}{d\eta'}\\ \alpha_, &= \alpha + \operatorname{tg}\varphi \frac{dn}{d\eta}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (24^c)$$

auf einander. Was man also durch die Vergleichung einer, von A nach B geführten Dreieckskette, mit der astronomischen Bestimmung beider Polhöhen und entweder des Längenunterschiedes, oder beider Azimuthe, erlangt, sind zwei Gleichungen zwischen den beiden Axen des Rotationsellipsoides, auf dessen Oberfläche die Dreieckspunkte projicirt worden sind, und den vier Quantitäten $\frac{dn'}{d\xi'}$, $\frac{dn'}{d\eta'}$, $\frac{dn}{d\xi}$ und $\frac{dn}{d\eta}$. Ich werde diese Gleichungen jetzt aufsuchen.

Wenn man von einem Punkte auf der Oberfläche eines elliptischen Rotationssphäroids, dessen Polhöhe φ' ist, eine geodätische Linie in dem Azimuthe α' bis zu der Entfernung s zieht, so kann man daraus, unter der Annahme bestimmter Werthe von a und e, die Polhöhe (φ) und den Längenunterschied (w) des Endpunktes derselben, so wie auch das daselbst stattfindende Azimuth (α) berechnen. Dieses letztere beziehe ich, so wie es überall in dieser Abhandlung geschehen ist, auf die Fortsetzung der geodätischen Linie über ihren Endpunkt hinaus, so dass das Azimuth, in welchem sie zu diesem Punkte gelangt $= 180^0 + (\alpha)$ ist. Aendert man a und e um δa und δe, so werden dadurch die berechneten Werthe von (φ), (w) und (α) um Grössen geändert, welche ich durch $\delta\varphi$, δw, $\delta\alpha$ bezeichne. Legt man der Rechnung die Polhöhe $\varphi_,'$ und das Azimuth $\alpha_,'$, statt φ' und α', zum Grunde, so entstehen auch hieraus Aenderungen, welche ich durch $\delta'\varphi$, $\delta' w$, $\delta'\alpha$ andeute. Die vollständigen Ausdrücke der drei Quantitäten müssen die, vorher durch $\varphi_,$, $w_,$, $\alpha_,$ bezeichneten und durch die Resultate, welche man durch astronomische Beobachtungen erhalten kann, ausgedrückten Werthe haben. Insofern diese Beobachtungen also wirklich gemacht sind, hat man die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\varphi_, &= \varphi + \frac{dn}{d\xi} &&= (\varphi) + \delta\varphi + \delta'\varphi\\ w_, &= w + \frac{dn}{\cos\varphi\, d\eta} - \frac{dn'}{\cos\varphi'\, d\eta'} &&= (w) + \delta w + \delta' w\\ \alpha_, &= \alpha + \operatorname{tg}\varphi \frac{dn}{d\eta} &&= (\alpha) + \delta\alpha + \delta'\alpha\end{aligned}\right\} (25)$$

zu erfüllen, welche jetzt weiter entwickelt werden sollen.

In Nr. 86 der Astr. Nachr. [Abh. 127] habe ich gezeigt, dass, wenn man

$$\operatorname{tg} u' = \sqrt{1-ee}\,\operatorname{tg}\varphi'$$

und

$$\begin{aligned}\sin u &= \sin u' \cos\sigma + \cos u' \cos\alpha' \sin\sigma\\ \cos u \cos\alpha &= -\sin u' \sin\sigma + \cos u' \cos\alpha' \cos\sigma\\ \cos u \sin\alpha &= \cos u' \sin\alpha'\end{aligned}$$

setzt, wo σ der Gleichung

$$s = a\int \sqrt{1-ee\cos u^2}\, d\sigma$$

Genüge leistet, α das gegenwärtig durch (α) bezeichnete Azimuth und

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{\operatorname{tg} u}{\sqrt{1-ee}}$$

ist; ferner, wenn man ω aus den Formeln

$$\begin{aligned}\cos u \cos\omega &= \cos u' \cos\sigma - \sin u' \cos\alpha' \sin\sigma\\ \cos u \sin\omega &= \sin\alpha' \sin\sigma\end{aligned}$$

bestimmt, dass

$$(w) = \int \sqrt{1-ee\cos u^2}\, d\omega$$

ist. Die beiden Integrale habe ich dort entwickelt, und ihre Berechnung, sowie auch die Auflösung der durch das erstere gegebenen Gleichung, durch eine Tafel erleichtert (p. 11 fl.).

Die Differentiirung dieser Formeln in Beziehung auf a und e gibt, wenn man um abzukürzen r für $\sqrt{1-ee\cos u^2}$ schreibt:

$$\left.\begin{aligned}
\delta u' &= -\frac{e\delta e}{1-ee}\sin u'\cos u' \\
\delta u &= \delta u'\cos\omega + \delta\sigma\cos\alpha \\
\cos u\,\delta\alpha &= \delta u'\sin\omega + \delta\sigma\sin\alpha\sin u \\
\cos u\,\delta\omega &= \delta u'\sin\omega\sin u + \delta\sigma\sin\alpha \\
0 &= \frac{s}{a}\delta a + aee\,\delta u'\int\frac{\cos u\sin u\cos\omega}{r}d\sigma - ae\delta e\int\frac{\cos u^2}{r}d\sigma + ar\,\delta\sigma \\
\delta w &= ee\,\delta u'\int\frac{\cos u\sin u\cos\omega}{r}d\omega - e\delta e\int\frac{\cos u^2}{r}d\omega + r\delta\omega \\
\delta\varphi &= \frac{\sqrt{1-ee}}{rr}\delta u + \frac{\sin u\cos u}{\sqrt{1-ee}\,rr}e\delta e
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (26)$$

Man erhält daraus den Einfluss von δa und δe auf

$$\left.\begin{aligned}
\delta\varphi &= -\frac{\sqrt{1-ee}}{r^2}\frac{s}{a}\cos\alpha\ \frac{\delta a}{a} + \frac{e\delta e}{\sqrt{1-ee}}\frac{1}{rr}\left\{\sin\sigma(\cos u'\cos u\cos\alpha' - \sin u'\sin u\cos\alpha) + \frac{\cos\alpha}{r}P\right\} \\
\cos\varphi\,\delta w &= -\frac{\sqrt{1-ee}}{rr}\frac{s}{a}\sin\alpha\ \frac{\delta a}{a} + \frac{e\delta e}{\sqrt{1-ee}}\sin\alpha\left\{-\sin\sigma\sin u'\sin u + \frac{1}{r}(P-P')\right\} \\
\cos\varphi\,\delta\alpha &= -\frac{\sqrt{1-ee}}{rr}\frac{s}{a}\sin\alpha\sin u\frac{\delta a}{a} + \frac{e\delta e}{\sqrt{1-ee}}\frac{\sin\alpha}{r}\left\{-\sin\sigma\sin u' + \frac{\sin u}{r}P\right\}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots (27)$$

wo P und P' zur Abkürzung geschrieben sind, nämlich:

$$P = (1-ee)\int\frac{\cos u^2}{r}d\sigma + ee\cos u'\sin u'\int\frac{\cos u\sin u\cos\omega}{r}d\sigma$$

$$P' = (1-ee)\cos u^2\int\frac{d\sigma}{r} + ee\cos u'\sin u'\cos u^2\int\frac{\sin u\cos\omega}{r\cos u}d\sigma$$

Die drei ersten der hier vorkommenden Integrale sind elliptische Transcendenten der 1. und 2. Gattung; das letzte ist eine solche Transcendente der 3. Gattung. Indem aber $\frac{\delta a}{a}$ und $e\delta e$ als kleine Grössen angesehen werden, so wird es nicht nöthig sein, ihre Coefficienten mit der grössten Genauigkeit zu berechnen; man wird eine hinreichende Genauigkeit erhalten, wenn man $\frac{1}{r}$ unter den Integralzeichen weglässt und dagegen die halbe Summe seiner Werthe für die beiden Grenzen der Integrale, welche ich durch ρ bezeichnen werde, vor dieselben schreibt. Die nun noch zu suchenden Integrale sind:

Erstens: $\int\cos u^2\,d\sigma = \sigma - \int\sin u^2\,d\sigma$

$$= \sigma - \int\{\sin u'\cos\sigma + \cos u'\sin\sigma\cos\alpha'\}^2 d\sigma$$

Wenn man darin, wie schon früher, $\sin m$ für $\cos u\sin\alpha = \cos u'\sin\alpha'$ setzt, wird es:

$$\sigma - \tfrac{1}{2}\cos m^2\sigma + \tfrac{1}{2}\{\cos u'^2\cos\alpha'^2 - \sin u'^2\}\cos\sigma\sin\sigma - \sin u'\cos u'\cos\alpha'\sin\sigma^2$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\sigma - \tfrac{1}{2}\cos m^2\sigma + \tfrac{1}{2}\{\cos u'\cos\alpha'\cos u\cos\alpha - \sin u'\sin u\}\sin\sigma$$

Da aber zwischen den in seinem letzten Gliede vorkommenden Grössen die Gleichung

$$\cos u'\cos\alpha'\cos u\cos\alpha + \sin u'\sin u = \cos m^2\cos\sigma$$

vorhanden ist, so kann man das Product der vier Cosinusse aus der Rechnung schaffen und das Integral

$$\int\cos u^2 d\sigma = \sigma - \sin u'\sin u\sin\sigma - \tfrac{1}{2}\cos m^2(\sigma - \sin\sigma\cos\sigma)$$

schreiben.

Zweitens: $\cos u'\sin u'\int\cos u\sin u\cos\omega\,d\sigma$

$$= \sin u'\int\sin u\cos u'\cos u\cos\omega\,d\sigma$$

Da man

$$\cos\sigma = \sin u'\sin u + \cos u'\cos u\cos\omega$$

hat, so kann man das Integral schreiben:

$$\sin u'\int\sin u\cos\sigma\,d\sigma - \sin u'^2\int\sin u^2 d\sigma;$$

setzt man, in dem ersten Gliede, den Ausdruck von $\sin u$ durch u', α', σ, so erhält man dieses Glied:

$$= \tfrac{1}{2}\sin u'\{(\sigma + \sin\sigma\cos\sigma)\sin u' + \sin\sigma^2\cos u'\cos\alpha'\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\sin u'\{\sigma\sin u' + \sin\sigma\sin u\}$$

Das zweite Glied ist das vorher gefundene Integral; beide vereinigt ergeben:

$$\sin u'\cos u'\int\sin u\cos u\cos\omega\,d\sigma = \sin u'^2\cdot\tfrac{1}{2}\sigma + \tfrac{1}{2}\cos 2u'\sin u'\sin u\sin\sigma - \tfrac{1}{2}\sin u'^2\cos m^2(\sigma - \sin\sigma\cos\sigma)$$

Das dritte Integral liegt am Tage; das vierte, nämlich:

$$\int\frac{\sin u\cos\omega}{\cos u}d\sigma = \int\frac{\sin u\cos u\cos\omega}{\cos u^2}d\sigma$$

verwandelt sich, durch Einführung des Ausdruckes von $\cos u\cos\omega$ durch u', α', σ, in

$$\int \frac{\sin u}{\cos u^2}\Big\{\cos u' \cos\sigma - \sin u' \cos\alpha' \sin\sigma\Big\} d\sigma;$$

indem man aber hat:

$$\sin u\, d\sigma = \{\ \sin u' \cos\sigma + \cos u' \cos\alpha' \sin\sigma\}\, d\sigma$$
$$\cos u\, du = \{-\sin u' \sin\sigma + \cos u' \cos\alpha' \cos\sigma\}\, d\sigma$$

erhält man durch die Verbindung dieser beiden Ausdrücke:

$$\cos m^2 \cos\sigma\, d\sigma = \cos u' \cos\alpha' \cos u\, du + \sin u' \sin u\, d\sigma$$
$$\cos m^2 \sin\sigma\, d\sigma = -\sin u' \cos u\, du + \cos u' \cos\alpha' \sin u\, d\sigma$$

und ferner das Integral

$$= \frac{\cos\alpha'}{\cos m^2}\int \operatorname{tg} u\, du + \frac{\sin u' \sin\alpha' \sin m}{\cos m^2}\int \frac{\sin u^2}{\cos u^2} d\sigma$$

oder

$$= -\frac{\cos\alpha'}{\cos m^2}\log(\cos u) - \frac{\sin u' \sin\alpha' \sin m}{\cos m^2}\sigma + \frac{\sin u' \sin\alpha' \sin m}{\cos m^2}\int \frac{d\sigma}{\cos u^2}$$

Allein man hat:

$$d\omega = \frac{\sin\alpha}{\cos u} d\sigma = \frac{\cos u \sin\alpha}{\cos u^2} d\sigma = \frac{\sin m}{\cos u^2} d\sigma$$

also das gesuchte Integral, von $\sigma = 0$ an gezählt:

$$\int \frac{\sin u \cos\omega}{\cos u} d\sigma = \frac{\cos\alpha'}{\cos m^2}\log\frac{\cos u'}{\cos u} + \frac{\sin u' \sin\alpha'}{\cos m^2}\Big\{\omega - \sigma \sin m\Big\}$$

Der Fehler, welcher von der unterlassenen Berücksichtigung von r, unter den Integralzeichen, herrührt, ist von der Ordnung $ee\sigma^3$, weshalb auch andere Glieder von dieser Ordnung weggelassen werden können. Dadurch werden die Ausdrücke von P und $P - P'$:

$$\left.\begin{aligned} P &= \varrho\Big\{\sigma - \sin u' \sin u \sin\sigma - \tfrac{1}{2}\cos m^2(\sigma - \sin\sigma\cos\sigma)\Big\} - ee\varrho\,\sigma(1 - \sin u' \sin u)^2 \\ P - P' &= \varrho\Big\{\sigma \sin u^2 - \sin u' \sin u \sin\sigma - \tfrac{1}{2}\cos m^2(\sigma - \sin\sigma\cos\sigma)\Big\} + ee\varrho\frac{\sin u'^2 \cos u^2}{\cos m^2}\Big\{\sigma - \omega\sin m\Big\} \\ &\quad - ee\varrho\frac{\sin u' \cos u' \cos\alpha' \cos u^2}{\cos m^2}\log\frac{\cos u'}{\cos u}\end{aligned}\right\} \quad . . (28)$$

Die Formeln (27) und (28) ergeben also die Coefficienten der folgenden:

$$\left.\begin{aligned} \delta\varphi &= \alpha\ \frac{\delta a}{a} + \beta\ e\delta e \\ \cos\varphi\,\delta w &= \alpha'\frac{\delta a}{a} + \beta' e\delta e \\ \cos\varphi\,\delta\alpha &= \alpha''\frac{\delta a}{a} + \beta'' e\delta e\end{aligned}\right\} \quad . . . . . (29)$$

Um auch $\delta'\varphi$, $\delta' w$, $\delta'\alpha$ kennen zu lernen, muss man die Ausdrücke von u, ω, α in Beziehung auf u', α', σ differentiiren, dann

$$du' = \frac{r'r'}{\sqrt{1-ee}} d\varphi' = \frac{r'r'}{\sqrt{1-ee}}\frac{dn'}{d\xi'}$$
$$d\alpha' = \operatorname{tg}\varphi' \frac{dn'}{d\eta'}$$

und für $d\sigma$ den Ausdruck setzen, welcher sich aus der fünften der Gleichungen (26) ergibt, wenn man darin nur das von $\delta u'$ abhängige Glied berücksichtigt; also bis auf e^4 excl. richtig,

$$d\sigma = -ee\frac{dn'}{d\xi'}\int \cos u \sin u \cos\omega \,.\, d\sigma$$

oder, nach der vorher gegebenen Entwickelung dieses Integrals, sehr nahe:

$$d\sigma = -ee\frac{dn'}{d\xi'}\cdot\frac{\sigma}{2}\sin(u' + u).$$

Um von den hierdurch gefundenen Ausdrücken von du, $d\omega$, $d\alpha$ zu den verlangten von $\delta'\varphi$, $\delta' w$, $\delta'\alpha$ überzugehen, hat man

$$\delta'\varphi = \frac{\sqrt{1-ee}}{rr} du$$
$$\delta'\alpha = d\alpha$$

und für $\delta' w$ den Ausdruck zu nehmen, welchen die sechste der Gleichungen (26) ergibt, wenn man darin das $e\delta e$ enthaltende Glied weglässt; also:

$$\delta' w = ee\, du' \int \frac{\cos u \sin u \cos\omega}{r} d\omega + r\, d\omega$$

oder mit hinreichender Annäherung:

$$\delta' w = ee\frac{dn'}{d\xi'}\sin m \int \frac{\sin u \cos\omega}{\cos u} d\sigma + r\, d\omega$$

und nach der obigen Entwickelung des Integrals:

$$\delta' w = ee\frac{dn'}{d\xi'}\frac{\sin m}{\cos m^2}\Big\{\cos\alpha' \log\frac{\cos u'}{\cos u} + \sin u' \sin\alpha'(\omega - \sigma\sin m)\Big\} + r\, d\omega$$

Die Differentiirung ergibt:

$$du = du' \cos\omega \quad - d\alpha' \cos u' \sin\omega + d\sigma \cos\alpha$$
$$\cos u\, d\omega = du' \sin\omega \sin u + d\alpha' \sin\sigma \cos\alpha - d\sigma \sin\alpha \sin u$$
$$\cos u\, d\alpha = du' \sin\omega \quad + d\alpha' \cos u' \cos\omega - d\sigma \sin\alpha$$

und man erhält daraus, durch die angedeuteten Substitutionen:

$$\left.\begin{aligned} \delta'\varphi &= \gamma\,.\,\frac{dn'}{d\xi'} + \delta\,.\,\frac{dn'}{d\eta'} \\ \cos\varphi\,\delta' w &= \gamma'.\frac{dn'}{d\xi'} + \delta'.\frac{dn'}{d\eta'} \\ \cos\varphi\,\delta'\alpha &= \gamma''.\frac{dn'}{d\xi'} + \delta''.\frac{dn'}{d\eta'}\end{aligned}\right\} \quad . . . . . (30)$$

in welchen Formeln

$$\gamma = \frac{r'r'}{rr}\cos\omega \qquad - ee\frac{\sigma}{2}\sin(u'+u)\cos\alpha$$

$$\gamma' = r'r'\sin\omega\sin u + ee\frac{\sigma}{2}\sin(u'+u)\sin\alpha\sin u + ee\frac{\sin m\cos u}{\cos m^2}\left\{\cos\alpha'\log\frac{\cos u'}{\cos u} + \sin\alpha'\sin u'(\omega-\sigma\sin m)\right\}$$

$$\gamma'' = \frac{r'r'}{r}\sin\omega \qquad + ee\frac{\sigma}{2}\sin(u'+u)\sin\alpha$$

$$\delta = -\frac{1}{rr}\sin\omega\sin u'$$

$$\delta' = \sin\sigma\,\mathrm{tg}\,u'\cos\alpha$$

$$\delta'' = \frac{1}{r}\cos\omega\sin u'$$

sind. Die ganz entwickelten Gleichungen (25) sind also:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi-(\varphi) &= \alpha\cdot\frac{\delta a}{a}+\beta\cdot e\delta e+\gamma\cdot\frac{dn'}{d\xi'}+\delta\frac{dn'}{d\eta'}-\frac{dn}{d\xi}\\
\cos\varphi\,[w-(w)] &= \alpha'\cdot\frac{\delta a}{a}+\beta'\cdot e\delta e+\gamma'\cdot\frac{dn'}{d\xi'}+\left(\delta'+\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'}\right)\frac{dn'}{d\eta'}-\frac{dn}{d\eta}\\
\cos\varphi\,[\alpha-(\alpha)] &= \alpha''\cdot\frac{\delta a}{a}+\beta''\cdot e\delta e+\gamma''\cdot\frac{dn'}{d\xi'}+\delta''\frac{dn'}{d\eta'}-\sin\varphi\frac{dn}{d\eta}
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(31)$$

Wenn man daraus die von δa und δe abhängigen Glieder weglässt, so werden dadurch die Differentialquotienten, welche die übrigen Glieder enthalten, auf das elliptische Rotationssphäroid bezogen, welches man der Berechnung von (φ), (w), (α) zum Grunde gelegt hat; es wird dabei vorausgesetzt, dass die Entfernung der wahren Oberfläche der Erde von der Oberfläche dieses Sphäroids in dem Umfange der Messung so klein ist, dass ihr Quadrat vernachlässigt werden kann. Uebrigens darf man nicht übersehen, dass $a+\delta a$ nicht die halbe grosse Axe des der Oberfläche der Erde im Ganzen am nächsten kommenden elliptischen Rotationssphäroids ist, sondern die halbe grosse Axe des ähnlichen Sphäroids, auf dessen Oberfläche die gemessene Grundlinie sich bezieht. Wenn man also δa auf das erstere beziehen will, so muss ihm noch $\frac{1}{s}\int n\,ds$ hinzugefügt werden, welches Integral über die Länge der Grundlinie ausgedehnt angenommen wird.

9.

Wenn alles was man, an beiden Endpunkten A und B der Messung, astronomisch beobachten kann, wirklich beobachtet ist, so hat man diese drei Gleichungen zwischen den sechs, als unbekannt anzunehmenden Grössen: δa, δe, $\frac{dn'}{d\xi'}$, $\frac{dn'}{d\eta'}$, $\frac{dn}{d\xi}$, $\frac{dn}{d\eta}$. Allein wenn man die Unterschiede und die Summen der vier letzten dieser Grössen, als Unbekannte, in die Gleichungen einführt, so erscheinen die Summen in Factoren multiplicirt, welche von der Ordnung von σ oder ω, und daher für wenig ausgedehnte Messungen klein sind. Die Uebereinstimmung der astronomischen und der geodätischen Bestimmungen wird daher von ihnen wenig beeinträchtigt, und die, durch die Vergleichung beider erlangten drei Gleichungen können beinahe als Gleichungen zwischen den vier unbekannten Grössen:

$$\delta a,\quad \delta e,\quad \frac{dn}{d\xi}-\frac{dn'}{d\xi'},\quad \frac{dn}{d\eta}-\frac{dn'}{d\eta'},$$

deren beide letztere ich jetzt abgekürzt durch p und q bezeichnen werde, angesehen werden. Die beiden letzten dieser Gleichungen können aber keine Trennung dieser unbekannten Grössen bewirken, welche durch eine derselben nicht auch bewirkt würde; denn die rechts von den Gleichheitszeichen stehenden Glieder beider Gleichungen sind nahe, d. h. excl. der Grössen von der Ordnung von σ oder ω, einander proportional; die der dritten sind, näherungsweise, Producte der entsprechenden Glieder der zweiten Gleichung in $\sin u$. Diese beiden Gleichungen geben also nur zwei verschiedene Mittel, zur Kenntniss einer und derselben Combination zwischen den vier unbekannten Grössen zu gelangen; nämlich durch die astronomische Beobachtung, entweder des Längenunterschiedes beider Endpunkte des gemessenen Bogens oder der Azimuthe an demselben. Man kann also die drei Gleichungen nur als zwei von einander verschiedene betrachten und durch den Besitz der beiden letzten nur eine Controle für die Richtigkeit der Beobachtungen, welche auf die eine oder die andere derselben geführt haben, erlangen. Die Beobachtung des Längenunterschiedes lehrt also nichts anderes, als was man auch durch die Beobachtung der Azimuthe hätte kennen lernen können: trotz der Unregelmässigkeiten der Oberfläche der Erde verhalten sich, wenn die Beobachtungen sowohl des Längenunterschiedes als auch der Azimuthe richtig sind, die Unterschiede, welche

man zwischen ihnen und ihren aus der geodätischen Operation abgeleiteten Werthen findet, nahe wie 1 zu dem Sinusse der Polhöhe. In theoretischer Hinsicht ist es also gleichgültig, ob man das Eine oder das Andere zum Gegenstande der Beobachtung macht; in practischer wird man der Beobachtung des Längenunterschiedes den Vorzug geben, wenn man die Zeit an beiden Endpunkten und ihre Uebertragung von dem einen zu dem anderen, mit einem mittleren Fehler erlangen kann, welcher kleiner ist, als der durch den Sinus der Polhöhe dividirte mittlere Fehler der Bestimmung und Uebertragung des Azimuths; in dem entgegengesetzten Falle verdienen die Azimuthe den Vorzug.

Offenbar kann man nicht allgemein aussprechen, ob es vortheilhafter ist, den Längenunterschied, oder die Azimuthe, zum Gegenstande der Beobachtung zu machen. Die bisherigen Erfahrungen, vorzüglich die in Frankreich und dem nördlichen Italien gemachten, scheinen der Sicherheit der Zeitbestimmungen nicht sehr günstig zu sein; und in der That wird man, nach den Bemerkungen, welche MASKELYNE und ich über den Unterschied zwischen den, von verschiedenen Beobachtern bestimmten absoluten Zeiten*) gemacht haben, nicht eher auf zuverlässige Resultate rechnen können, als bis die Beobachter selbst und ihr Apparat abwechselnd, an beiden Endpunkten, in Thätigkeit gesetzt werden. Dagegen scheint die Sicherheit, welche man in der Bestimmung der Azimuthe gegenwärtig erlangen kann, wenig zu wünschen übrig zu lassen, und ich zweifle nicht, dass der darauf gegründeten Gleichung, insofern ihr Gewicht als von der Sicherheit der astronomischen Bestimmung allein abhängig betrachtet wird, ein grösseres gegeben werden kann, als der auf die Zeitbestimmungen gegründeten. Allein die Erfindung der ersten bekannten Glieder dieser Gleichungen fordert, ausser den astronomischen Beobachtungen, noch ihre Uebertragung von dem einen Endpunkte zu dem anderen, und das Gewicht der Gleichungen hängt auch von der Sicherheit dieser Uebertragung ab. Für die Uebertragung der Zeit sind Mittel vorhanden, welche in grossen und kleinen Entfernungen gleich sichere Resultate verheissen, z. B. Sternbedeckungen durch den Mond und Culminationen desselben, auch Mittel, welche zwar in kleineren Entfernungen sicherer, jedoch in allen, auch grösseren, wenn sie nur in wenigen Tagen zurückgelegt werden können, so sicher sind, dass sie auch dann nichts Erhebliches zu wünschen übrig lassen; diese sind die Chronometer in ihrer gegenwärtigen Vollendung, von welchen SCHUMACHER zuerst gezeigt hat, dass die wiederholte Uebertragung einer grossen Anzahl derselben Resultate von früher nicht erwarteter Sicherheit gewährt. Die Uebertragung des Azimuths in grosse Entfernung kann aber nur durch die Beobachtung der Winkel erlangt werden, in welchen die verschiedenen Theile einer gebrochenen, beide Endpunkte verbindenden Linie, deren Längen man durch ein Dreiecksnetz erfährt, zusammenstossen; sie wird also in demselben Verhältnisse unsicherer, in welchem die Quadratwurzel aus der Anzahl der zwischenliegenden Punkte wächst. Hieraus geht hervor, dass, wenn auch die Azimuthe, wenigstens unter Polhöhen wie die in Europa vorkommenden, in dem Falle, in welchem man durch zwei oder drei Zwischenpunkte von dem einen Endpunkte zu dem anderen gelangen kann, den Vorzug verdienen, dieser Vorzug sich jedoch mit der wachsenden Zahl der Zwischenpunkte vermindert und später in Nachtheil übergeht. Wenn man daher ausser der ersten, auf die Beobachtung der Polhöhen gegründeten Gleichung, noch eine zweite verlangt, so muss die Wahl des dazu anzuwendenden Mittels auf die Untersuchung der jedem Falle eigenthümlichen Verhältnisse gegründet werden. Für Entfernungen von einigen Graden, zumal in einem Lande, welches beträchtliche Erhöhungen besitzt und daher weite Aussichten darbietet, wird der Vorzug indessen gegenwärtig den Azimuthen gebühren.

*) [Vgl. die Abh. über die persönliche Gleichung BESSEL's unter „Verschiedenes".]

10.

Eine einzelne Gradmessung kann, unabhängig von anderen, nichts anderes ergeben, als zwei Gleichungen zwischen δa, δe, $p = \frac{dn}{d\xi} - \frac{dn'}{d\xi'}$ und $q = \frac{dn}{d\eta} - \frac{dn'}{d\eta'}$. Ist sie in der Richtung des Meridians geführt, so verschwinden die, die beiden ersten dieser unbekannten Grössen enthaltenden Glieder der zweiten Gleichung, indem sie in den Sinus des Azimuths multiplicirt sind; die Beobachtung der Azimuthe oder des Längenunterschiedes dient dann nur zur Bestimmung von q, und die Gradmessung trägt, zur Bestimmung von δa und δe, nur eine, jedoch die unbekannte Grösse p noch enthaltende Gleichung bei, weshalb es auch, wenn man nur einen Beitrag zur Bestimmung der Figur der Erde im Ganzen erlangen will, hinreicht, das Azimuth mit untergeordneter Genauigkeit zu bestimmen. Ist die Messung senkrecht auf den Meridian geführt, so verschwinden die δa und δe enthaltenden und in den Cosinus des Azimuths multiplicirten Glieder aus der ersten Gleichung, weshalb diese nur p bestimmt; die zweite

Gleichung allein trägt dann zur Bestimmung von δa und δe bei, aber der Beitrag ist nicht frei von q. Ist die Gradmessung weder in der Richtung des Meridians, noch in der darauf senkrechten, sondern in irgend einer anderen geführt, so liefert sie zwei Beiträge zu der Bestimmung von δa und δe, deren einer mit p, der andere mit q behaftet ist, und welche etwa gleiches Gewicht erlangen, wenn der gemessene Bogen den Meridian in einem Winkel von 45° durchschneidet.

Wenn man die beiden zuerst angeführten besonderen Fälle ausnimmt, so bestimmt die Messung eines Bogens auf der Erde, verbunden mit astronomischen Beobachtungen an seinen Endpunkten, sowohl δa als auch δe, beide jedoch abhängig von den Unregelmässigkeiten der Oberfläche der Erde an diesen Punkten. Man erhält diese Bestimmung durch die Auflösung der beiden vorhandenen der drei Gleichungen (28); sie würde, wenn p und q bekannt wären, die Bestimmung des Rotationsellipsoids sein, auf dessen Oberfläche diese Grössen sich beziehen; wenn aber die unbekannten p und $q = 0$ gesetzt werden, so gehört sie zu dem elliptischen Rotationssphäroid, dessen Axe der Drehungsaxe der Erde parallel ist, und dessen Oberfläche die, beide Endpunkte der Messung berührenden Ebenen, in diesen Punkten berührt. Dass kein Grund vorhanden ist, dieses Sphäroid für das die Oberfläche der Erde osculirende zu halten, liegt am Tage; ob es diese Oberfläche, in der Richtung und in der ganzen Ausdehnung der Messung, mehr oder weniger vollkommen berührt, hängt von der grösseren oder geringeren Gleichförmigkeit der Veränderung der Differentialquotienten $\frac{dn}{d\xi}$ und $\frac{dn}{d\eta}$, zwischen dem Anfangspunkte und dem Endpunkte des gemessenen Bogens ab.

Es würde ohne Zweifel ein Interesse haben, die Krümmung der Oberfläche der Erde, für gegebene Punkte derselben, vollständig zu bestimmen. Durch diese Bestimmung würde die Genauigkeit, mit welcher man geodätische Arbeiten und die mit ihnen zu vergleichenden astronomischen Beobachtungen auszuführen sucht, ein bestimmtes Ziel erhalten; während man die Erlangung der Kenntniss der Länge eines Bogens der Oberfläche, welche von unbekannten, sich auf seine Endpunkte beziehenden Grössen nicht frei ist, so lange als einen zweifelhaften Lohn für ergriffene Maassregeln und angewandten Fleiss ansehen muss, als man die Ueberzeugung entbehrt, dass die Kleinheit dieser Grössen sie der dadurch beabsichtigten Verkleinerung der Fehlergrenze noch unterordnet. Man ist aber weit entfernt, diese Ueberzeugung haben zu können; vielmehr zeigen die Abweichungen der Polhöhen von den auf einem Rotationssphäroide stattfindenden, welche die vorhandenen Messungen der Meridiangrade unzweifelhaft verrathen, dass die Aenderungen der Differentialquotienten $\frac{dn}{d\xi}$ oft, in geringen Entfernungen, weit beträchtlicher sind, als die Unvollkommenheiten der Beobachtungen.

Der Schluss von einer Gradmessung auf die Krümmung der Oberfläche, auf welcher sie gemacht ist, ist der Schluss von dem Durchschnittswinkel der horizontalen Ebenen beider Endpunkte auf die Krümmung des diese Punkte verbindenden Bogens; also ein Schluss von einem endlichen Bogen auf einen unendlich kleinen. Dass er durch die bisherigen Erfahrungen gerechtfertigt wäre, kann nicht behauptet werden; denn diese Erfahrungen zeigen nicht, dass der Differentialquotient $\frac{dn}{d\xi}$ sich so gleichförmig ändere, dass man von seinen Werthen für zwei, einige Grade von einander entfernten Punkten, auf seinen Werth für einen zwischen ihnen liegenden Punkt schliessen könnte. Nichtsdestoweniger muss dieser Schluss gemacht werden, wenn nicht auf die Bestimmung der Krümmung der Erde an einem gegebenen Punkte Verzicht geleistet werden soll. Seine Sicherheit nimmt aber zu, so wie der gemessene Bogen abnimmt; bei weniger ausgedehnten Messungen ist er eher erlaubt als bei mehr ausgedehnten; er ist also gerade in dem Falle am erlaubtesten, welchen man zu vermeiden trachtet, um den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern nicht einen grossen Einfluss zu verstatten. Wenn man die Bestimmung der Krümmung der Oberfläche der Erde für einen gewissen Punkt derselben zu erlangen beabsichtigt, so ist also die Verfeinerung der Beobachtungen an ihrem rechten Orte, weil dadurch die Ausdehnung der Messung eingeschränkt werden kann. Für die kleinste Grenze dieser Ausdehnung ist die Voraussetzung der Gleichförmigkeit der Veränderungen der Differentialquotienten von n nach allen Richtungen unvermeidlich. Folgt man ihr, so kann man diese Differentialquotienten, für alle innerhalb dieser Grenze liegenden Punkte der Oberfläche, durch drei unbekannte Grössen, nämlich durch die als beständig angenommenen Werthe der drei zweiten Differentialquotienten von n, ausdrücken und nun darauf ausgehen, diese und damit die gesuchte vollständige Bestimmung der Krümmung der Erde an dem gegebenen Punkte durch Beobachtungen kennen zu lernen. Da jeder gemessene und mit astronomischen Beobachtungen verglichene Bogen zwei Gleichungen gibt, so müssen zwei verschiedene, am

besten sich in dem gegebenen Punkte rechtwinkelig durchschneidende Bögen gemessen werden, welche, vorausgesetzt dass durch die astronomischen Beobachtungen, an beiden Endpunkten eines jeden derselben, sowohl die Polhöhe als auch das Azimuth bestimmt worden sind, vier Gleichungen ergeben, also auch eine Controle für die Richtigkeit der gemachten Voraussetzung der gleichförmigen Aenderung der Differentialquotienten gewähren. Ich werde dieses weiter verfolgen und dabei den Ausdruck des Werthes von n, welcher zu einem Punkte der Oberfläche gehört, dessen Entfernung von dem Anfangspunkte $s = a\sigma$ ist und der in dem Azimuthe α' liegt:

$$n = n' + 2a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\sigma \{f \cos\alpha' + g \sin\alpha'\}$$
$$+ 2a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\sigma^2 \{h \cos\alpha'^2 + 2i \cos\alpha' \sin\alpha' + k \sin\alpha'^2\}$$

zum Grunde legen.

Hieraus folgt für den Anfangspunkt:

$$f = \frac{dn'}{d\xi'}, \quad g = \frac{dn'}{d\eta'},$$

und für den Endpunkt, an welchem die Verbindungslinie beider Punkte den Meridian im Winkel α durchschneidet:

$$\frac{dn}{d\xi} = \frac{dn}{a d\sigma} \cos\alpha - \frac{dn}{d\alpha'} \cdot \frac{\sin\alpha}{a \sin\sigma}$$
$$\frac{dn}{d\eta} = \frac{dn}{a d\sigma} \sin\alpha + \frac{dn}{d\alpha'} \cdot \frac{\cos\alpha}{a \sin\sigma}$$

und durch Ausführung dieser Differentiirungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dn}{d\xi} \cos\tfrac{1}{2}\sigma^2 = \frac{dn'}{d\xi'} \cos(\alpha-\alpha') - \frac{dn}{d\eta'} \sin(\alpha-\alpha') + 2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma \cos(\alpha-\alpha')\{h\cos\alpha' + i\sin\alpha'\} \\ - 2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma \sin(\alpha-\alpha')\{i\cos\alpha' + k\sin\alpha'\} \\ \frac{dn}{d\eta} \cos\tfrac{1}{2}\sigma^2 = \frac{dn'}{d\xi'} \sin(\alpha-\alpha') + \frac{dn'}{d\eta'} \cos(\alpha-\alpha') + 2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma \sin(\alpha-\alpha')\{h\cos\alpha' + i\sin\alpha'\} \\ + 2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma \cos(\alpha-\alpha')\{i\cos\alpha' + k\sin\alpha'\} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (32)$$

Wenn man diese Ausdrücke in die Gleichungen (31) setzt, in denselben aber die δa und δe enthaltenden Glieder nach der Bemerkung am Ende des 8. §'s weglässt, so enthalten diese Gleichungen die fünf unbekannten Grössen $\frac{dn'}{d\xi'}$, $\frac{dn'}{d\eta'}$, h, i, k; allein die beiden ersten derselben sind, wie ich schon erinnert habe, in sehr kleine Coefficienten multiplicirt, weshalb diese Gleichungen als nur drei unbekannte Grössen enthaltend zu betrachten sind. Indem der Besitz von zwei Messungen in verschiedenen Richtungen vorausgesetzt worden ist, und jede derselben zwei Gleichungen ergibt, besitzt man also vier Gleichungen zwischen den drei unbekannten Grössen h, i, k, welche die Bestimmung derselben und die erwähnte Controle herbeiführen. Da der Ausdruck, welchen ich für n angenommen habe, innerhalb einer gewissen Grenze von s, für jede krumme Oberfläche wahr ist, so folgt, dass die Nichterfüllung der Controle immer beweiset, dass diese Grenze überschritten worden ist; oder dass die Oberfläche der Erde, in dem Umfange der Messungen, nicht mehr durch eine Oberfläche der zweiten Ordnung (welcher die angenommene Form von n entspricht) vollständig berührt werden kann. Man gelangt also, durch die Verbindung der beiden Messungen, entweder zu einer Bestimmung von h, i, k, deren Rechtmässigkeit durch eine erfüllte Controle wahrscheinlicher wird, oder zu der Erkenntniss, dass die Unregelmässigkeiten der Oberfläche der Erde, selbst in dem Umfange der Messungen, nicht mehr dem vorausgesetzten Ausdrucke entsprechen.

Wenn h, i, k bestimmt worden sind, so ist damit die Krümmung der Erde, an dem zum Anfangspunkte gewählten Punkte, vollständig bestimmt. Da diese Grössen nämlich:

$$h = \frac{d^2n}{a d\xi^2}; \quad i = \frac{d^2n}{a d\xi d\eta}; \quad k = \frac{d^2n}{a d\eta^2}$$

sind, und da man, dem 3. § zufolge, hat:

$$P = \frac{2}{aa}\left\{\frac{(1-ee\sin\varphi^2)}{1-ee} - h\right\}$$
$$Q = -\frac{2}{aa} i$$
$$R = \frac{2}{aa}(1-k)$$

wo a und e zu dem elliptischen Rotationssphäroide gehören, auf dessen Vergleichung mit den Messungen die Gleichungen, welche h, i, k ergeben haben, gegründet worden sind, so hat man das, was nöthig ist, um r, r' und N durch die Formeln (8) zu berechnen. Die in Δ und daher auch in diesen Formeln vorkommende Grösse n, deren Werth hier für den Anfangspunkt zu verstehen ist, ist zwar unbekannt; allein ihr Einfluss besteht in einer Veränderung von Δ, in dem Verhältnisse $a : a + n$, wogegen der gemessene Bogen nicht auf der Oberfläche des elliptischen Rotationssphäroids liegt, dessen halbe grosse Axe $= a$ ist, sondern auf einer ähnlichen, welcher der Werth derselben $a + \frac{1}{s}\int n ds$ zugehört (§ 6 und 8). Wenn daher der Werth von n für den Anfangspunkt dem mittleren Werthe desselben für die gemessene Grundlinie gleich wäre, so würde die eine Vernachlässigung die andere unschädlich machen.

11.

Zum Schlusse werde ich noch zeigen, wie die Entfernung zweier Parallelen der Erde aus einer, gegen die Meridiane geneigten Messung von der einen zu der anderen gefunden werden kann. Aller Strenge nach führt jede auf die Bestimmung eines Meridianbogens abzweckende Messung die Nothwendigkeit der Auflösung dieser Aufgabe herbei, wenigstens kann auf den Zufall, dass beide Punkte, deren Polhöhen beobachtet werden, genau unter einem Meridiane liegen, nicht gerechnet werden. Allein die Neigung des Bogens gegen den Meridian ist dann so klein, dass man, auch ohne Auflösung der allgemeiner ausgesprochenen Aufgabe, nicht in Verlegenheit geräth. Wird aber die Neigung grösser, so kann man sie nicht mehr entbehren, falls man nämlich nicht mit den im 8. § entwickelten Bedingungsgleichungen, welche immer das wahre Resultat einer Messung sind, zufrieden sein, sondern sich der bei den Messungen der Meridianbögen gebräuchlichen Form anschliessen will.

Indem die aus der Messung folgende Entfernung zweier Punkte als die Entfernung der Projectionen derselben auf die Oberfläche eines elliptischen Rotationssphäroids angesehen werden kann, welches von dem ähnlichen, der Erde im Ganzen am nächsten kommenden Sphäroide sehr wenig verschieden ist, so kann die gemessene Entfernung zwischen beiden Punkten, als zwischen den Parallelen ihrer beiden Projectionen gemessen angesehen werden. Diese Parallelen sind Kreise, und die auf der Oberfläche des elliptischen Sphäroids genommene Entfernung derselben ist die gesuchte.

Wenn man die Bezeichnungen des § 8 anwendet, hat man den Ausdruck der Entfernung der beiden Projectionen:

$$s = a\int \sqrt{1 - ee\cos u^2}\, d\sigma,$$

wo

$$\sin u = \sin u'_, \cos\sigma + \cos u'_, \cos\alpha'_, \sin\sigma,$$

und das Integral von $\sigma = 0$ bis zu dem Werthe desselben zu nehmen ist, welcher $u = u_,$ macht. Der Ausdruck der Entfernung der Parallelen S ist derselbe; allein u ist $= u'_, + \sigma$ und das Integral ist von $\sigma = 0$ bis $\sigma = u_, - u'_,$ zu nehmen.

Weil beide Integrale zwischen denselben Grenzen von u zu nehmen sind und ihre sonstige Abhängigkeit von u nur in einem, in ee multiplicirten Gliede stattfindet, so sind sie sehr nahe in dem Verhältnisse $\sigma : u_, - u'_,$, von welchem das ihrige nur um Grössen von der Ordnung von $\sigma^2 ee$ verschieden sein kann. Wirklich findet man durch eine Entwickelung der Integrale, in welcher man Grössen dieser Ordnung beibehält und höhere vernachlässigt:

$$\frac{S}{s} = \frac{u_, - u'_,}{\sigma}\left\{1 - \tfrac{1}{12} ee\,\sigma^2 \sin u' \sin u \sin\alpha' \sin\alpha\right\}.$$

Zwischen σ, $u_, - u'_,$, $\alpha'_,$ und $\alpha_,$ sind aber die Relationen, welche das sphärische Dreieck darbietet, dessen beiden Seiten $90^0 - u'_,$ und $90^0 - u_,$ die Winkel $\alpha'_,$ und $180^0 - \alpha$ anliegen und dessen dritte Seite σ ist. Man hat also

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(u_, - u'_,) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_, + \alpha'_,)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha_, - \alpha'_,)}$$

oder, wenn man diese Formel entwickelt und, um abzukürzen, k für das Verhältniss der beiden Cosinusse schreibt:

$$\frac{u_, - u'_,}{\sigma} = k\left\{1 + \frac{\sigma^2}{12}(1 - kk) + \frac{\sigma^4}{240}(1 - kk)(2 - 3kk) + \cdots\right\}$$

Drückt man, auf der rechten Seite, σ durch s aus, oder setzt man, mit hinreichender Annäherung

$$\sigma = \frac{s}{a}\frac{1}{\sqrt{1 - ee\cos u' \cos u}} = \frac{s}{a}\varrho$$

so wird:

$$\frac{u_, - u'_,}{\sigma} = k\left\{1 + \frac{1}{12}\left(\frac{s\varrho}{a}\right)^2 (1 - kk) + \frac{1}{240}\left(\frac{s\varrho}{a}\right)^4 (1 - kk)(2 - 3kk) + \ldots\right\}$$

Wenn man diese Formel mit der vorigen verbindet, nachdem man in der letzteren, mit hinreichender Annäherung

$$\sin\alpha' \sin\alpha = 1 - kk$$

gesetzt und überdies, gleichfalls mit hinreichender Annäherung,

$$\varrho'\varrho' = \varrho\varrho - ee \sin u' \sin u = 1 + ee\cos(u' + u)$$

eingeführt hat, so erhält man:

$$S = s\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_, + \alpha'_,)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha_, - \alpha'_,)}\left\{1 + \frac{1}{12}\left(\frac{s\varrho'}{a}\right)^2 \frac{\sin\alpha'_, \sin\alpha_,}{\cos\frac{1}{2}(\alpha_, - \alpha'_,)^2} + \frac{1}{240}\left(\frac{s\varrho'}{a}\right)^4 \frac{\sin\alpha'_, \sin\alpha_,}{\cos\frac{1}{2}(\alpha_, - \alpha'_,)^2}(2 - 3kk) + \ldots\right\}$$

Für Entfernungen wie sie bei den Gradmessungen vorzukommen pflegen, werden die auf das erste folgenden Glieder so klein, dass ihre Abhängigkeit von a und e keine merkliche Unsicherheit erzeugen kann. Allein $\alpha'_,$ und $\alpha_,$ sind nicht bekannt und statt ihrer muss man die beobachteten Azimuthe anwenden. Hieraus entsteht ein Einfluss der Unregelmässigkeiten der Oberfläche der Erde auf den Werth von S, welcher sich also mit dem unmittelbaren Einfluss derselben Ursache auf die Polhöhen vereinigt. Jener wird desto kleiner, je weniger

gegen den Meridian geneigt die Messung ist, und verschwindet, wenn sie mit dem Meridiane zusammenfällt. Er verursacht im Allgemeinen, dass, wenn mehrere Punkte A, B, C ... vorhanden und die gegenseitigen Azimuthe an ihnen beobachtet sind, die Entfernungen ihrer Parallelen nicht genau übereinstimmend gefunden werden, wenn man sie aus der unmittelbaren Verbindung zweier Punkte, und aus den Theilen, in welche man sie zerlegen kann, ableitet; z. B. die Entfernung der Parallelen von A und C wird, im Allgemeinen, nicht mit der Summe der Entfernungen der Parallele von A und B und von B und C übereinstimmen. Um die hieraus entstehende Willkür in den Resultaten zu vermeiden, muss man sie so unter einander ausgleichen, dass die Summe der Quadrate der, den verschiedenen Punkten zugehörigen Werthe von $\frac{dn}{d\eta}$, von welchen der Unterschied der beobachteten Azimuthe von denen, die der Rechnung zum Grunde gelegt werden sollten, abhängt (24), ein Minimum wird.

131. Bestimmung der Axen des elliptischen Rotationssphäroids, welches den vorhandenen Messungen von Meridianbögen der Erde am meisten entspricht.*)

(Astron. Nachr. **14**, p. 333.)

Die beobachteten Polhöhen von Punkten auf der Erde sind mit den Entfernungen der Parallelen derselben in einem Zusammenhange, welcher durch die Kenntniss der Figur der Erde gegeben wird; wenn man die Gleichung ihrer Oberfläche kennte, so würde man die darin vorkommenden Constanten so bestimmen können, dass sie die gemessenen Entfernungen der Parallelen mit den diese bestimmenden Polhöhen, innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler, in Uebereinstimmung brächte. Allein man kennt die Figur der Erde nicht; man weiss vielmehr, dass sie unregelmässig ist. Jedoch ist ein elliptisches Rotationssphäroid vorhanden, von dessen Oberfläche sich die Oberfläche der Erde an keinem ihrer Punkte weit entfernt; ob diese Entfernung, an allen Punkten der Oberfläche, als eine, auch vergleichungsweise mit der Abplattung des Sphäroids kleine Grösse angesehen werden kann, weiss man noch nicht, sondern wird es erst durch die Verbindung mehrerer Gradmessungen mit einander erfahren können. Indessen kann man darauf ausgehen, die Axen dieses Sphäroids so zu bestimmen, dass die vorhandenen Gradmessungen dadurch so gut als möglich dargestellt werden. Indem man die Abweichungen der Oberfläche der Erde von der Oberfläche dieses Sphäroids als gesetzlos betrachtet, vereinigt sich ihr Einfluss auf die Polhöhen mit den Beobachtungsfehlern derselben, und man muss, der Methode der kleinsten Quadrate zufolge, dasjenige Sphäroid als das gesuchte betrachten, welches die gemessenen Entfernungen der Parallelen mit Polhöhen in Uebereinstimmung bringt, deren Unterschiede von den beobachteten der Bedingung dieser Methode entsprechen.

Von diesem richtigen Gesichtspunkte ist zuerst Walbeck ausgegangen; allein er hat nur auf den südlichsten und den nördlichsten Punkt jeder Gradmessung Rücksicht genommen und die zwischen beiden liegenden, ebenfalls astronomisch bestimmten Punkte, nicht in seine Rechnung gezogen. Herr Schmidt hat die frühere Rechnung vervollständigt, indem er nicht nur allen beobachteten Polhöhen gleiches Recht eingeräumt, sondern auch Gradmessungen berücksichtigt hat, welche in der Zwischenzeit bekannt geworden waren.*) Ich komme auf denselben Gegenstand zurück, theils weil Schmidt mehrere Angaben angewandt hat, welche mir unrichtig zu sein scheinen; theils weil ich zu der Kenntniss von noch drei Gradmessungen gelangt bin. Die erste verdanke ich der brieflichen Mittheilung des Herrn Generals v. Tenner Exc., welcher eine eigene Unternehmung dieser Art ausgeführt und an die nördlichere des Herrn Etatsraths v. Struve Exc. angeschlossen hat, so dass, durch beide zusammen, ein Bogen des Meridians von $8^0\,2'\,29''$ gemessen worden ist. Die zweite verdanke ich der brieflichen Mittheilung des Herrn Etatsraths Schumacher, dessen Messung $1^0\,31'\,53''$ umfasst. Die dritte, sich über $1^0\,30'\,29''$ ausdehnende, ist von mir, gemeinschaftlich mit Herrn Major Baeyer, in der Gegend von Königsberg ausgeführt. Da hier zum ersten Male öffentlich davon die Rede ist, so bemerke ich darüber, dass sie zunächst den Zweck hatte, die im Süden und Westen von Europa vorgenommenen Gradmessungen mit denen in ununterbrochene Verbindung

*) [306 d. a. Verz. — Vgl. auch Abh. 134. Auszug in Poggendorff's Annalen XLII p. 622. — Br. m. O. II. 415.]

*) [Astr. Nachr. **7**, p. 329; **9**, pp. 315, 371.]

zu setzen, welche im Norden und Osten ausgeführt worden sind und noch ausgeführt werden, damit man durch zusammenhängende, und die vorzüglichsten Sternwarten von Europa berührende Dreiecksketten von Formentera bis nach Finland gelangen könne. Mit diesem näheren Zwecke wurde die Ausführung einer Gradmessung vereinigt, indem die Polhöhen unseres südlichsten und unseres nördlichsten Dreieckspunktes mit der Polhöhe der Königsberger Sternwarte verglichen wurden.

1.

Ich werde zuerst die Data angeben, welche ich der folgenden Rechnung zum Grunde gelegt habe, so wie auch die Quellen, aus welchen ich sie gezogen habe.

1. Peruanische Gradmessung.

	Polhöhe.	Amplitude.	Entfernung der Parallelen.
Tarqui	— 3°4′ 32,″068		
Cotchesqui . .	+ 0 2 31,387	3° 7′ 3,″455	176875,T5

Diese Angaben beruhen auf den neuen Reductionen der Beobachtungen, welche DELAMBRE und v. ZACH vorgenommen haben. Der erstere gibt nämlich (Base du Syst. métr. III. p. 133) die Polhöhen:

$$-3^\circ\,4'\,31,''9 \quad \text{und} \quad +0^\circ\,2'\,31,''22,$$

also die Amplitude $= 3^\circ\,7'\,3,''12$ an. Der letztere findet (Mon. Corresp. XXVI. S. 52) die Amplitude $= 3^\circ\,7'\,3,''79$. Ich habe das Mittel aus beiden Angaben der Amplitude genommen, an den von DELAMBRE berechneten Polhöhen aber nur so viel geändert, als nöthig war, um sie mit jenem Mittel in Uebereinstimmung zu bringen. Die Entfernung der Parallelen beider Punkte findet DELAMBRE $= 176877^T$; v. ZACH $= 176874^T$. Herr SCHMIDT wendet beträchtlich verschiedene Zahlen an; nämlich eine 5,″205 grössere Amplitude und eine $9^T,33$ kleinere Entfernung.

2. Erste Ostindische Gradmessung.

Trivandeporum	11° 44′ 52,″590		
Paudree	13 19 49,018	1° 34′ 56,″428	$89813^T,01$

Der Bericht über diese Messung findet sich Asiatic Researches Vol. VIII. p. 137. Die Entfernung wird von LAMBTON selbst $=$ 95721,32 Fathoms angegeben. KATER's Prüfung der ihrer Messung zum Grunde liegenden Scale hat aber ergeben, dass eine Verbesserung von — 0,000018 angebracht werden muss, um sie auf wahres englisches Maass zu reduciren (Phil. Transact. 1821). Hierdurch wird die Entfernung $=$ 95719,60 Fathoms, welche, im Verhältnisse 1,06576542 : 1, die angeführte Anzahl Toisen ergeben.

3. Zweite Ostindische Gradmessung.

Punnae	8° 9′ 31,″132		
Putchapolliam	10 59 42,276	2°50′ 11,″144	$160944^T,20$
Dodagoontah .	12 59 52,165	4 50 21,033	274694,30
Namthabad .	15 5 53,562	6 56 22,430	393828,09
Daumeragidda	18 3 16,245	9 53 45,113	561690,06
Takal K'hera .	21 5 51,532	12 56 20,400	734570,43
Kullianpoor .	24 7 11,860	15 57 40,728	906171,67

Ein Theil dieser grossen Unternehmung ist in den Asiatic Researches Vol. X, XII, XIII beschrieben, ein anderer Theil in Herrn EVEREST's Account of the measurement of an arc of the meridian. London 1830. Ich habe für nöthig gehalten, die mit dem Zenithsector zur Bestimmung der Polhöhen gemachten Beobachtungen einer neuen Rechnung zu unterwerfen, welche ich in einem eigenen Aufsatze bekannt machen werde [Abh. 132]. Aus dieser Rechnung sind die angeführten Bestimmungen hervorgegangen. Die Originalbeobachtungen finden sich, für Punnae Asiat. Res. XII. p. 68; für Putchapolliam XII. p. 61; für Dodagoontah X. p. 356; für Namthabad XII. p. 339; für Daumeragidda XIII. p. 83 und für Takal K'hera und Kullianpoor in EVEREST's Account etc. p. 287 und 306. In dem letzteren Werke finden sich (p. 112 u. 114) sämmtliche Entfernungen der Parallelen der astronomisch bestimmten Punkte, woraus ich abgeleitet habe:

Punnae	0,0
Putchapolliam .	171528,76 Fathoms
Dodagoontah .	292759,68 „
Namthabad . .	419728,36 „
Daumeragidda .	598629,84 „
Takal K'hera .	782879,76 „
Kullianpoor . .	965766,43 „

Das Verhältniss der Toise zum Fathom, durch welche diese Zahlen in dem ersteren Maasse ausgedrückt worden sind, ist bei der Gradmessung (2) schon angeführt.

4. Französische Gradmessung.

Formentera . .	38°39′ 56,″11		
Montjouy . . .	41 21 44,96	2°41′ 48,″85	$153605^T,77$
Barcelona . .	41 22 47,90	2 42 51,79	154548,9
Carcassonne .	43 12 54,30	4 32 58,19	259104,8
Evaux	46 10 42,54	7 30 46,43	427951,5
Panthéon . . .	48 50 49,37	10 10 53,26	580244,6
Dünkirchen . .	51 2 8,85	12 22 12,74	705189,4

Die Entfernungen der Parallelen der verschiedenen Punkte von dem südlichsten, mit Ausnahme von Barcelona, finden sich Base du Syst. métr. III. p. 549; der Punkt in Barcelona, wo die astronomischen Beobachtungen gemacht wurden, ist $943^T,13$ nördlich von Montjouy (II. p. 565). Die Polhöhen von Formentera, Carcassonne, Evaux und Panthéon finden sich III. p. 549

und III. p. 89; an dem letzten Orte ist auch die Polhöhe von Montjouy angegeben; die von Barcelona ist (II. p. 565 u. 615) = 41° 21′ 48″,37 + 59″,53. Für Dünkirchen habe ich die Angabe III. p. 548 angenommen. Perpignan habe ich, nach DELAMBRE'S Beispiele, ausgelassen, weil die dortigen Polhöhenbeobachtungen weniger sicher zu sein scheinen, als die übrigen. Herr SCHMIDT hat die Polhöhen von Montjouy + 0″,49, Barcelona — 0″,74, Carcassonne + 0″,01, Evaux — 0″,35, Panthéon — 0″,43, Dünkirchen — 0″,11 von den oben verzeichneten verschieden. Die Parallele von Barcelona setzt er 5T,9 nördlicher als oben.

5. Englische Gradmessung.

Dunnose . . .	50°37′ 7″,633	0	
Greenwich . .	51 28 39,000	0°51′ 31″,367	49059T,89
Blenheim . . .	51 50 27,632	1 13 19,999	69829,19
Arburyhill . .	52 13 28,031	1 36 20,398	91696,39
Clifton	53 27 31,130	2 50 23,497	162075,93

Die Polhöhen sind von den in den Phil. Transact. 1803 angegebenen verschieden; sie sind aus einer neuen Combination der von MUDGE gemachten Reductionen seiner Beobachtungen hervorgegangen. Das Nähere hierüber und die Ursache, weshalb ich mir habe erlauben müssen, an MUDGE'S eigenen Angaben etwas zu ändern, wird man in einem besonderen Aufsatze kennen lernen [Abh. 133]. Die von Dunnose an gerechneten Entfernungen der verschiedenen Parallelen sind ursprünglich (Ph. Tr. 1803. p. 441 u. 487):

Greenwich . . .	52282,67	Fathoms
Blenheim . . .	74416,33	„
Arburyhill . . .	97720,00	„
Clifton	172722,83	„

müssen aber, nach KATER'S Prüfung der zur Messung angewandten Scale, um 0,00007 vergrössert werden, resp. um

3,66; 5,21; 6,84; 12,09.

Die in Toisen angegebenen Entfernungen stimmen mit den so vergrösserten überein.

6. Hannoversche Gradmessung.

Göttingen . .	51°31′ 47″,85		
Altona	53 32 45,27	2° 0′ 57″,42	115163T,725

Aus GAUSS' Breitenunterschied etc. S. 71 genommen.

7. Dänische Gradmessung.

Lauenburg . .	53°22′ 17″,046		
Lysabbel . . .	54 54 10,352	1°31′ 53″,306	87436T,538

Diese Resultate sind mir von Herrn Etatsrath SCHUMACHER mitgetheilt. Sie würden sich mit denen der vorigen Gradmessung verbinden lassen, wenn die Polhöhenbestimmungen beider Gradmessungen nicht auf verschiedenen Sternen beruhten, wodurch ihre Verbindung von den Bestimmungen der Declinationen dieser Sterne abhängig werden würde. Die Gefahr, Unternehmungen von so ausgezeichneter Genauigkeit, wie diese beiden, durch die Einmischung eines fremden Elementes zu entstellen, glaube ich vermeiden zu müssen, desto mehr, da das 9860T,46 südlich von Altona liegende Lauenburg auch 21031T,51 östlich liegt, also in einem Winkel mit dem Meridiane von fast 65° erscheint, und daher die Entfernung seines Parallels von dem Parallel von Altona nicht mit derselben Sicherheit gefunden werden kann, welche, bei geringeren Neigungen gegen den Meridian, erreichbar ist.

8. Preussische Gradmessung.

Trunz	54°13′ 11″,466		
Königsberg . .	54 42 50,500	0°29′ 39″,034	28211T,629
Memel	55 43 40,446	1 30 28,980	86176,975

Ein besonderes Werk über diese Gradmessung ist jetzt unter der Presse [vgl. Abh. 135].

9. Russische Gradmessung.

Belin	52° 2′ 40″,864		
Nemesch . . .	54 39 4,519	2°36′ 23″,655	148811T,418
Jacobstadt . .	56 30 4,562	4 27 23,698	254543,454
Bristen	56 34 51,550	4 32 10,686	259110,085
Dorpat	58 22 47,280	6 20 6,416	361824,461
Hochland . . .	60 5 9,771	8 2 28,907	459363,008

Diese Zahlen hat mir Herr General VON TENNER mitgetheilt. Die sich auf die Struve'sche Gradmessung beziehenden für Jacobstadt, Dorpat und Hochland stimmen mit denen überein, welche sich in dem Werke über die Breitengradmessung in den Ostseeprovinzen Russlands I. S. 312 u. 338 angegeben finden.

10. Schwedische Gradmessung.

Malörn	65°31′ 30″,265		
Pahtawara . .	67 8 49,830	1°37′ 19″,565	92777T,981

Dieses sind die Angaben von SVANBERG, p. 157 seines Werkes. Herr SCHMIDT hat die Amplitude 0″,785 grösser, die Entfernung der Parallelen 17T,251 kleiner angenommen. Diese Unterschiede sind aus zwei Anmerkungen hervorgegangen, welche Herr SVANBERG zu seiner Reduction der Beobachtungen macht. Die eine derselben gibt an, wie die Polhöhen ausgefallen sein würden, wenn man die Dichtigkeit der Luft, und damit die Strahlenbrechung, nicht auf die gewöhnliche Art von den Thermometerständen abhängig, sondern in einem zusammengesetzteren Verhältnisse zu denselben hätte annehmen wollen, welches gewisse Versuche von PRONY anzudeuten schienen. Die andere zeigt, welche Entfernung man aus der Messung berechnet haben würde,

wenn man von der Annahme ausgegangen wäre, das von Paris gesandte Doppelmeter habe seine wahre Länge bei der Normaltemperatur der Toise $= 13^0$ R. Da die Zweifel, durch welche diese beiden Anmerkungen veranlasst worden sind, als völlig beseitigt angesehen werden können, so hätte Herr SCHMIDT keine Rücksicht darauf nehmen sollen.

2.

Die Theorie, mit welcher die angeführten 10 Gradmessungen verglichen werden sollen, ist folgende. Wenn die beiden halben Axen eines elliptischen Rotationssphäroids durch a und b bezeichnet werden, und wenn

$$\frac{a-b}{a+b} = n$$

gesetzt wird, so ist die Länge des Bogens des Meridians zwischen dem Aequator und der Polhöhe φ, das Integral:

$$s = a(1-ee)\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-ee\sin\varphi^2)^3}}$$

oder die Entwickelung desselben:

$$s = a(1-n)^2(1+n)\,N\left\{\varphi - \alpha\sin 2\varphi + \tfrac{1}{2}\alpha'\sin 4\varphi - \tfrac{1}{3}\alpha''\sin 6\varphi + \ldots\right\}$$

worin

$$N = 1+\left(\frac{3}{2}\right)^2 n^2+\left(\frac{3.5}{2.4}\right)^2 n^4+\ldots$$

$$N\alpha = \frac{3}{2}n+\frac{3.5}{2.4}\cdot\frac{3}{2}n^3+\frac{3.5.7}{2.4.6}\cdot\frac{3.5}{2.4}n^5+\ldots$$

$$N\alpha' = \frac{3.5}{2.4}n^2+\frac{3.5.7}{2.4.6}\cdot\frac{3}{2}n^4+\ldots$$

$$N\alpha'' = \frac{3.5.7}{2.4.6}n^3+\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\cdot\frac{3}{2}n^5+\ldots$$

u. s. w.

gesetzt worden sind. Will man diesen Ausdruck, statt von der halben grossen Axe, von der Länge des mittleren Meridiangrades (g) abhängig machen, so hat man $\varphi = 180^0$ zu setzen, wodurch man

$$180\,g = a(1-n)^2(1+n)\,N\pi$$

also

$$s = \frac{180\,g}{\pi}\left\{\varphi - \alpha\sin 2\varphi + \tfrac{1}{2}\alpha'\sin 4\varphi - \tfrac{1}{3}\alpha''\sin 6\varphi + \ldots\right\}$$

erhält.

Hieraus folgt der Ausdruck der Entfernung der den Polhöhen φ und φ' entsprechenden Parallelkreise:

$$s'-s = \frac{180\,g}{\pi}\left\{\varphi'-\varphi-2\alpha\sin(\varphi'-\varphi)\cos(\varphi'+\varphi) + \tfrac{2}{3}\alpha'\sin 2(\varphi'-\varphi)\cos 2(\varphi'+\varphi)\right\}$$

Wenn man, zur Abkürzung, l für die Amplitude $\varphi'-\varphi$ und $2L$ für die Summe der Polhöhen $\varphi'+\varphi$ schreibt, unter ω die Zahl $\frac{648000}{\pi} = 206264''8$ versteht und l in Secunden ausdrückt, so erhält man daraus:

$$\frac{3600}{g}(s'-s) = l - 2\omega\alpha\sin l\cos 2L + \omega\alpha'\sin 2l\cos 4L - \tfrac{2}{3}\omega\alpha''\sin 3l\cos 6L + \ldots$$

Die Aufgabe fordert, dass an die beobachteten Polhöhen φ, φ', φ'' ..., um sie den gemessenen Entfernungen der Parallelen entsprechend zu machen, Aenderungen x, x', x'' ... angebracht werden, deren Summe der Quadrate

$$xx + x'x' + x''x'' + \ldots$$

ein Minimum wird: die Werthe von g und α, α', α'' ... welche diese Bedingung erfüllen, gehören dann zu dem gesuchten elliptischen Rotationssphäroide. Schreibt man $\varphi + x$ und $\varphi' + x'$ für φ und φ' und vernachlässigt man den Einfluss dieser Aenderungen auf L, sowie auch die Quadrate und Producte von x und x', so verwandelt der gefundene Ausdruck sich in:

$$\frac{3600}{g}(s'-s) = l - 2\omega\alpha\sin l\cos 2L + \omega\alpha'\sin 2l\cos 4L - \ldots + (x'-x)\varrho$$

wo ϱ für

$$1 - 2\alpha\cos l\cos 2L + 2\alpha'\cos 2l\cos 4L - \ldots$$

geschrieben ist; man hat also

$$x'-x = \frac{1}{\varrho}\left\{\frac{3600}{g}(s'-s) - (l - 2\omega\alpha\sin l\cos 2L + \omega\alpha'\sin 2l\cos 4L \ldots\right\}$$

und muss nun g und die Abplattung der Erde so bestimmen, dass sie die Erfüllung der gemachten Bedingung herbeiführen.

Nimmt man g, und α, als Näherungswerthe von g und α an, setzt man

$$g = \frac{g_,}{1+i}; \qquad \alpha = \alpha_,(1+k),$$

und vernachlässigt man die Quadrate und Producte von i und k, so verwandelt der Ausdruck von $x'-x$ sich in:

$$\frac{1}{\varrho}\left\{\frac{3600}{g}(s'-s) - l\right\} + \frac{\omega}{\varrho}(2\alpha_,\sin l\cos 2L - \alpha'_,\sin 2l\cos 4L + \ldots) + \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{3600}{g}(s'-s)\,i + \frac{\omega}{\varrho}\left(2\alpha_,\sin l\cos 2L - \alpha_,\frac{d\alpha'_,}{d\alpha_,}\sin 2l\cos 4L + \ldots\right)k$$

die Ausdrücke der darin vorkommenden $\alpha'_,$ und $\alpha_,\frac{d\alpha'_,}{d\alpha_,}$ durch $\alpha_,$ sind resp.

$$\frac{5}{6}\alpha_,^2 + \frac{25}{162}\alpha_,^4 \quad \text{und} \quad \frac{5}{3}\alpha_,^2 + \frac{50}{81}\alpha_,^4.$$

Setzt man also

$$m = \frac{1}{\varrho}\left\{\frac{3600}{g_{,}}(s'-s) - l\right\} + \frac{\omega}{\varrho}\left\{2\alpha_{,}\sin l \sin 2L - \left(\frac{5}{6}\alpha_{,}^2 + \frac{25}{162}\alpha_{,}^4\right)\sin 2l \cos 4L\right\}$$

$$a = \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{3600}{g_{,}}(s'-s)$$

$$b = \frac{\omega}{\varrho}\left\{2\alpha_{,}\sin l \cos 2L - \left(\frac{5}{3}\alpha_{,}^2 + \frac{50}{81}\alpha_{,}^4\right)\sin 2l \cos 4L\right\}$$

so hat man

$$x' - x = m + ai + bk,$$

und eine ähnliche Gleichung für die Verbindung des südlichsten Punktes einer Gradmessung mit jedem nördlicheren Punkte derselben.

Die Summe der Quadrate der an alle Polhöhen einer Gradmessung anzubringenden Veränderungen ist also:

$xx + (m+ai+bk+x)^2 + (m'+a'i+b'k+x)^2 +$ etc....

für andere Gradmessungen sind diese Summen:

$x_{,}x_{,} + (m_{,}+a_{,}i+b_{,}k+x_{,})^2 + (m'_{,}+a'_{,}i+b'_{,}k+x_{,})^2 +$ etc.

$x_2x_2 + (m_2+a_2i+b_2k+x_2)^2 + (m'_2+a'_2i+b'_2k+x_2)^2 +$ etc.

u. s. w.

Jede derselben gibt also zur Bestimmung des ihr zukommenden Werthes von x die Gleichung:

$$0 = \mu x + (m) + (a)i + (b)k,$$

in welcher μ die Anzahl der beobachteten Polhöhen und (m), (a), (b) die gewöhnlichen Gauss'schen Bezeichnungen sind. Sie liefert ferner, zur Bestimmung von i und k, welche auf alle vorhandenen Gradmessungen gegründet werden soll, die Beiträge:

$$(am) + (a)x + (aa)i + (ab)k$$

und

$$(bm) + (b)x + (ab)i + (bb)k$$

welche sich, durch die Elimination von x, in

$$(am) - \frac{(a)(m)}{\mu} + \left\{(aa) - \frac{(a)(a)}{\mu}\right\}i + \left\{(ab) - \frac{(a)(b)}{\mu}\right\}k$$

und

$$(bm) - \frac{(b)(m)}{\mu} + \left\{(ab) - \frac{(a)(b)}{\mu}\right\}i + \left\{(bb) - \frac{(b)(b)}{\mu}\right\}k$$

verwandeln. Die Summen sowohl des ersten als des zweiten dieser Beiträge, welche aus allen vorhandenen Gradmessungen hervorgehen, werden $= 0$ gesetzt und ergeben dadurch die beiden, zur Bestimmung von i und k erforderlichen Gleichungen.

3.

Ich werde die einzelnen Bedingungsgleichungen hier mittheilen, welche ich aus jeder der zehn der Untersuchung zum Grunde gelegten Gradmessungen abgeleitet habe. Ich beabsichtige dadurch die Erlangung des Vortheils, etwanige spätere Aenderungen der als beobachtet angenommenen Resultate zur Verbesserung der Rechnung benutzen zu können, ohne diese ganz wiederholen zu dürfen. Um unnöthig vielziffrige Zahlen zu vermeiden, werde ich nicht i und k, sondern

$$10000\,i = p \quad \text{und} \quad 10\,k = q$$

als die unbekannten Grössen annehmen. Ich bin von den Annahmen

$$g = \frac{57008^{\mathrm{T}}}{1+i} \qquad \alpha = \frac{1+k}{400}$$

ausgegangen.

1. Peruanische Gradmessung.

$$x_1^1 - x_1 = +1{,}''966 + 1{,}1225\,p + 5{,}6059\,q$$

2. Erste Ostindische Gradmessung.

$$x_2^1 - x_2 = +0{,}''937 + 0{,}5697\,p + 2{,}5835\,q$$

3. Zweite Ostindische Gradmessung.

$$x_3^1 - x_3 = +0{,}''455 + 1{,}0212\,p + 4{,}8270\,q$$
$$x_3^2 - x_3 = +6{,}681 + 1{,}7428\,p + 8{,}1250\,q$$
$$x_3^3 - x_3 = +1{,}745 + 2{,}4983\,p + 11{,}4652\,q$$
$$x_3^4 - x_3 = +3{,}878 + 3{,}5624\,p + 15{,}9264\,q$$
$$x_3^5 - x_3 = +8{,}272 + 4{,}6585\,p + 20{,}1840\,q$$
$$x_3^6 - x_3 = +2{,}677 + 5{,}7458\,p + 24{,}0262\,q$$

4. Französische Gradmessung.

$$x_4^1 - x_4 = -0{,}''297 + 0{,}9709\,p + 0{,}8601\,q$$
$$x_4^2 - x_4 = -3{,}641 + 0{,}9768\,p + 0{,}8642\,q$$
$$x_4^3 - x_4 = -4{,}259 + 1{,}6374\,p + 1{,}1889\,q$$
$$x_4^4 - x_4 = -9{,}319 + 2{,}7037\,p + 1{,}2671\,q$$
$$x_4^5 - x_4 = -3{,}092 + 3{,}6651\,p + 0{,}8659\,q$$
$$x_4^6 - x_4 = +0{,}889 + 4{,}4533\,p + 0{,}2051\,q$$

5. Englische Gradmessung.

$$x_5^1 - x_5 = +3{,}''504 + 0{,}3095\,p - 0{,}3178\,q$$
$$x_5^2 - x_5 = +4{,}937 + 0{,}4405\,p - 0{,}4658\,q$$
$$x_5^3 - x_5 = +3{,}758 + 0{,}5784\,p - 0{,}6308\,q$$
$$x_5^4 - x_5 = -0{,}892 + 1{,}0223\,p - 1{,}2226\,q$$

6. Hannoversche Gradmessung.

$$x_6^1 - x_6 = +5{,}''679 + 0{,}7263\,p - 0{,}9294\,q$$

7. Dänische Gradmessung.

$$x_7^1 - x_7 = -0{,}''369 + 0{,}5513\,p - 0{,}8537\,q$$

8. Preussische Gradmessung.

$$x_8^1 - x_8 = -0''{,}368 + 0{,}1779\,p - 0{,}2852\,q$$
$$x_8^2 - x_8 = +3{,}790 + 0{,}5433\,p - 0{,}9157\,q$$

9. Russische Gradmessung.

$$x_9^1 - x_9 = +0''{,}248 + 0{,}9384\,p - 1{,}3293\,q$$
$$x_9^2 - x_9 = +5{,}110 + 1{,}6049\,p - 2{,}5184\,q$$
$$x_9^3 - x_9 = +5{,}939 + 1{,}6337\,p - 2{,}5741\,q$$
$$x_9^4 - x_9 = +2{,}909 + 2{,}2809\,p - 3{,}9289\,q$$
$$x_9^5 - x_9 = +5{,}276 + 2{,}8953\,p - 5{,}3824\,q$$

10. Schwedische Gradmessung.

$$x_{10}^1 - x_{10} = -0''{,}507 + 0{,}5839\,p - 1{,}9711\,q$$

Aus diesen Bedingungsgleichungen folgen zur Bestimmung von p und q die Final-Gleichungen:*)

$$0 = +29{,}5073 + 47{,}6205\,p + 96{,}8900\,q$$
$$0 = +61{,}9681 + 96{,}8900\,p + 480{,}0273\,q$$

aus deren Auflösung sich

$$p = -0{,}60574; \qquad \text{Gewicht} = 28{,}064$$
$$q = -0{,}0068280 \ldots\ldots\ldots = 282{,}892$$

ergibt.

4.

Vergleicht man die einzelnen beobachteten Polhöhen mit dieser Bestimmung von p und q, so erhält man die Aenderungen, welche man ihnen beilegen muss, um sie mit dem elliptischen Rotationssphäroide, dem die gefundenen Werthe dieser Grössen zugehören, übereinstimmend zu machen:

$$\begin{cases} x_1 = -0''{,}624 \\ x_1^1 = +0{,}624 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4^4 = -6''{,}897 \\ x_4^5 = -1{,}249 \\ x_4^6 = +2{,}259 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -0{,}287 \\ x_2^1 = +0{,}287 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_5 = -1{,}980 \\ x_5^1 = +1{,}338 \\ x_5^2 = +2{,}793 \\ x_5^3 = +1{,}432 \\ x_5^4 = -3{,}483 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = -1{,}640 \\ x_3^1 = -1{,}837 \\ x_3^2 = +3{,}929 \\ x_3^3 = -1{,}487 \\ x_3^4 = -0{,}029 \\ x_3^5 = +3{,}672 \\ x_3^6 = -2{,}608 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_6 = -2{,}623 \\ x_6^1 = +2{,}623 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_7 = +0{,}349 \\ x_7^1 = -0{,}349 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = +4{,}069 \\ x_4^1 = +3{,}178 \\ x_4^2 = -0{,}170 \\ x_4^3 = -1{,}190 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_8 = -0{,}998 \\ x_8^1 = -1{,}472 \\ x_8^2 = +2{,}469 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_9 = -2''{,}321 \\ x_9^1 = -2{,}632 \\ x_9^2 = +1{,}834 \\ x_9^3 = +2{,}646 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_9^4 = -0{,}766 \\ x_9^5 = +1{,}238 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{10} = +0{,}424 \\ x_{10}^1 = -0{,}424 \end{cases}$$

Die Summe der Quadrate dieser Aenderungen ist $= 203{,}391$, und der mittlere Werth jeder derselben

$$= \sqrt{\frac{203{,}391}{38-10}} = \pm 2''{,}695.^*)$$

Aus dieser Bestimmung und den oben angegebenen Gewichten der Bestimmungen von p und q folgen die mittleren Fehler dieser Grössen:

$$= \pm 0{,}5087 \quad \text{und} \quad = \pm 0{,}1602$$
$$[\text{richtig} = \pm 0{,}5278 \quad \text{und} \quad = \pm 0{,}1662]$$

oder die mittleren Fehler

$$\text{von } i = \pm 0{,}00005087 \quad [\text{richtig} \ldots 5278]$$
$$\text{von } k = \pm 0{,}01602 \quad [\text{„} \quad \ldots 1662]$$

Man hat also

		M. Fehler.
$g = \frac{57008}{1-0{,}000060574}$	$= 57011^{T}{,}453$	$\pm 2^{T}{,}900$
	[richtig	$\pm 3{,}009]$
$\alpha = \frac{1-0{,}0006828}{400}$	$= 0{,}002498293$	$\pm 0{,}00004002$
	[richtig	$\pm 0{,}00004152]$.

5.

Ich habe nur noch die beiden Axen des elliptischen Rotationssphäroids aufzusuchen und die sich darauf beziehenden Zahlenwerthe einiger Formeln, welche man anzuwenden häufig Veranlassung findet, zu entwickeln.

Die Umkehrung der Reihe (§ 2)

$$\alpha = \frac{\frac{3}{2}n + \frac{45}{16}n^3 + \frac{525}{128}n^5 + \ldots}{1 + \frac{9}{4}n^2 + \frac{225}{64}n^4 + \ldots}$$

gibt den Ausdruck von n durch α, nämlich:

$$n = \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{9}\alpha^3 + \frac{23}{486}\alpha^5 + \ldots$$

und, durch die Substitution des gefundenen Werthes von α:

$$n = \frac{a-b}{a+b} = 0{,}0016655304.$$

Hieraus erhält man das Axenverhältniss des elliptischen Rotationssphäroids, welches den in die Untersuchung gezogenen Gradmessungen am nächsten entspricht:

$$\frac{1}{2n} + \frac{1}{2} : \frac{1}{2n} - \frac{1}{2} = 300{,}7047 : 299{,}7047; \quad \text{M. F.} = \pm 4{,}81 \text{ Einh.}$$
$$[\text{richtig} = \pm 4{,}99 \text{ „ }]$$

*) [Die Summen (m), (a), (b) ... $(am,)$, $(aa,)$ ... für die einzelnen Gradmessungen weggelassen.]

*) [Richtig (vgl. Abh. 134, p. 61) $\sqrt{\frac{203{,}391}{38-12}} = \pm 2''{,}796.$]

Ferner erhält man die Axen selbst, nach den im 2. § gegebenen Formeln:

$$a = \frac{180g}{\pi(1-n)^2(1+n)N}$$

$$b = \frac{180g}{\pi(1+n)^2(1-n)N}$$

in Zahlen ausgedrückt:

$a = 3271953^{T},854$ $\log a = 6{,}5148071699$

$b = 3261072{,}900$ $\log b = 6{,}5133605073$

Die Länge des Erdquadranten, welche nach der anfänglichen Absicht 10000000 Meter sein sollte, ist dieser Bestimmung zufolge:

$$90 \cdot g \cdot \frac{864}{443{,}296} = 10000565^{m},278$$

ihre mittlere Unsicherheit ist $= 508^{m},7$ [richtig 527,7], also fast so gross wie ihre Abweichung von der runden Zahl. Man sieht hieraus, wie unsicher das Meter selbst jetzt, wo die Zahl der Gradmessungen sich beträchtlich vermehrt hat, noch sein würde, wenn es seine ursprüngliche Erklärung, dass es der 10000000te Theil des Erdquadranten sein solle, behalten hätte. Noch immer würde seine Unsicherheit wenigstens $0^{L},0225$ betragen, eine Grösse, welche nur bei sehr rohen Maassangaben unbedeutend erscheinen könnte.

Die Formeln, deren Zahlenentwickelung ich mittheilen wollte, sind folgende:

1. Länge eines Meridiangrades, dessen mittlere Polhöhe $= \varphi$:

$$m = 57011^{T},453 - 284^{T},851\cos 2\varphi + 0^{T},593\cos 4\varphi - 0{,}001\cos 6\varphi.$$

2. Länge eines Grades des Parallels:

$$p = 57153^{T},885\cos\varphi - 47^{T},576\cos 3\varphi + 0^{T},059\cos 5\varphi$$

oder, wenn

$$\sin\psi = e\sin\varphi, \ldots (\log e = 8{,}9110835),$$

so ist

$$\log p = 4{,}7566845{,}4 + \log\cos\varphi - \log\cos\psi.$$

3. Halbmesser der Krümmung im Meridiane $= r'$, in der darauf senkrechten Richtung $= r''$, in dem Azimuthe $\alpha = r$:

$$\frac{\omega}{r'} = 0'',06314600 + 0'',00031552\cos 2\varphi + 0{,}00000013\cos 4\varphi$$

$$\frac{\omega}{r''} = 0{,}06293548 + 0{,}00010482\cos 2\varphi - 0{,}00000004\cos 4\varphi$$

oder

$$\log\frac{\omega}{r'} = 8{,}8025112.9 + 3\log\cos\psi$$

$$\log\frac{\omega}{r''} = 8{,}7996179.6 + \log\cos\psi$$

und

$$\frac{\omega}{r} = \lambda + \lambda'\cos 2\alpha,$$

wo

$$\lambda = 0'',06304074 + 0'',00021017\cos 2\varphi + 0{,}00000004\cos 4\varphi$$

$$\lambda' = 0{,}00010526 + 0{,}00010535\cos 2\varphi + 0{,}00000009\cos 4\varphi.$$

4. Entfernung vom Mittelpunkte der Erde $= \varrho$ und sogenannte verbesserte Breite $= \varphi'$:

$$\log\varrho\cos\varphi' = \log\cos\varphi - \log\cos\psi$$

$$\log\varrho\sin\varphi' = \log\sin\varphi - \log\cos\psi - 0{,}0028933.3.$$

---

132. Neue Berechnung der Beobachtungen der Polhöhen, auf welchen die zweite in Indien ausgeführte Gradmessung beruhet.*)

(Astron. Nachr. **14**, p. 349.)

Als ich mich mit der Aufsuchung desjenigen elliptischen Rotationssphäroids beschäftigte [Abh. 131], welches den vorhandenen Messungen der Meridianbögen der Erde am meisten entspricht, wurde ich veranlasst, die Polhöhen neu zu berechnen, welche, wegen der in Indien ausgeführten grossen Gradmessung, von LAMBTON und EVEREST bestimmt worden sind. Beide haben es zwar eben so wenig an sorgfältiger Berechnung, als an sorgfältiger Ausführung der Beobachtungen fehlen lassen, und der letztere hat, in seinem schönen Werke über diese Gradmessung, auch einen Theil der Lambton'schen Beobachtungen in Punnae, dem südlichsten Endpunkte, sowie alle in Daumeragidda, dem nördlichsten Punkte des Lambton'schen Antheils an dieser Unternehmung gemachten, neu berechnet; allein theils scheint es mir nothwendig, alle Beobachtungen nach genau gleichen Elementen zu reduciren; theils muss, meines Erachtens, geprüft werden, ob der Bogen des Zenithsectors dem Halbmesser desselben genau entspricht; endlich scheint mir die angewandte Art, die Beobachtungen an den ver-

*) [Auszug aus 307 d. a. Verz.]

schiedenen Stationen der Gradmessung miteinander in Verbindung zu setzen, einer Verbesserung zu bedürfen.

Der Grund, welcher mich veranlasst, eine neue Reduction der einzelnen Beobachtungen für nöthig zu halten, beruhet zum Theil auf der Vermehrung unserer Kenntniss der eigenen Bewegungen der Fixsterne. LAMBTON war, zur Zeit des Anfanges seiner Arbeit (1805), noch gezwungen, sehr fehlerhafte Bestimmungen der Declinationen der Sterne und ihrer Veränderungen anzuwenden; hierdurch ist die von ihm gemachte Reduction seiner, bis zum Jahre 1815 fortgehenden Beobachtungen, auf den Anfang von 1805, in einigen Fällen beträchtlich fehlerhaft geworden, z. B. in dem Falle des Sterns γ Serpentis, dessen eigene Bewegung, von 1″,25 jährlich, ihm unbekannt war. Allein auch in anderer Hinsicht sind die Hülfsmittel zur Reduction von Beobachtungen seit jener Zeit so beträchtlich verbessert worden, dass man, auch unabhängig von der eigenen Bewegung, auf merklich verschiedene Resultate rechnen konnte. Was die Richtigkeit der Theilung des Zenithsectors anbelangt, so ist zwar von dem Fleisse, welchen RAMSDEN auf die Bestimmung der Endpunkte der Bögen seiner Instrumente dieser Art verwandt hat, zu erwarten, dass ihr Fehler nicht sehr beträchtlich sein könne; allein zu der Ueberzeugung von dem Nichtvorhandensein eines solchen Fehlers, oder zu der Bestimmung seiner Grösse, im Falle er vorhanden ist, kann man nur durch eine Untersuchung der mit dem Instrumente gemachten Beobachtungen gelangen. Man kann diese desto weniger entbehren, als sich auch ein Einfluss der Schwere auf den Körper des Instruments mit dem ursprünglichen Theilungsfehler vereinigt, und die merklichere oder unmerklichere Grösse der vereinigten Wirkungen beider Ursachen nur durch die Beobachtungen selbst mit Sicherheit erkannt werden kann. Die Gradmessung umfasst bekanntlich gegenwärtig 16 Grade des Meridians; wenn man darauf ausgeht, diese ganze Amplitude mit einiger Sicherheit aus den Beobachtungen abzuleiten, so muss man das Verhältniss eines auf dem Bogen des Sectors angegebenen Grades zu einem wahren Grade sehr genau zu erkennen suchen. Aus Herrn EVEREST'S neuen Rechnungen über LAMBTON'S Beobachtungen in Daumeragidda und die seinigen in Takal K'hera ist schon etwas hervorgegangen, was auf einen Fehler der Voraussetzung, dass die Theilung des Bogens des Sectors die Neigungen der Absehenslinie des Fernrohrs gegen die Lothlinie genau messe, deutet: indem er nämlich die Polhöhen beider Punkte, durch Vergleichung aller, an beiden beobachteten Zenithdistanzen, mit dem Pond'schen Verzeichnisse von 1112 Sternen für 1830, bestimmte, fand er den Unterschied derselben mehr als man den Fehlern der Beobachtungen wahrscheinlich zuschreiben kann, nämlich 1″,615 grösser, als die Sterne, welche an beiden Punkten gemeinschaftlich beobachtet sind, ihn ergaben. Hierdurch wird der Zusammenhang der einzelnen Theile der Gradmessung gestört; der Versuch, ihn wieder herzustellen, beabsichtigt also die richtigere Erfindung der Amplituden, sowohl der einzelnen Theile, als des gemessenen Bogens.

Ich werde die Elemente, welche ich bei meiner Rechnung angewandt habe, vollständig anführen, damit man sowohl meine Resultate prüfen, als auch die zu hoffende Fortsetzung der Gradmessung genau gleichförmig berechnen könne. Die beobachteten Zenithdistanzen habe ich jedesmal auf den Anfang des Jahres reducirt, in welchem sie beobachtet worden sind; hierzu habe ich die Hülfsmittel angewandt, welche die Tabb. Regiom. gewähren; die eigene Bewegung der Sterne habe ich, ausser bei denen, für welche die eben genannten Tafeln sie schon enthalten, nur dann angewandt, wenn sie in der geringen Zwischenzeit zwischen dem Anfange des Jahres und der Beobachtungszeit einigermassen merklich ist, auch ausser der Grenze der kleinen Unsicherheit der Cataloge liegt, durch deren Vergleichung man sie bestimmen muss. In diesem Falle habe ich sie aus ARGELANDER'S vortrefflichen Untersuchungen*) folgendermassen entlehnt:

o Leonis	— 0″,041
μ „	— 0,080
γ „	— 0,136
δ „	— 0,137
ε Virginis	+ 0,028
γ Serpentis	— 1,252

Die Strahlenbrechung habe ich aus den Tabulis Regiomontanis genommen. LAMBTON hat zwar den Stand des Barometers nie beobachtet, allein man kann ihn, mit einiger Annäherung, aus den Höhen der Beobachtungspunkte über der Meeresfläche, welche er trigonometrisch bestimmt hat, ableiten, und diese Annäherung scheint hinreichend, da, der Natur des Zenithsectors gemäss, immer nur kleine Zenithdistanzen beobachtet sind, und da der Barometerstand zwischen den Wendekreisen der Erde nur kleinen Aenderungen unterworfen ist. Vergleicht man die 5 südlicheren Punkte der Vermessung mit den beiden nördlicheren, an welchen Herr EVEREST die Barometerhöhe immer ange-

*) DLX Stellarum fixarum positiones mediae ineunte anno 1830. Helsingfors. 1835.

geben, auch in mittlere Resultate zusammengezogen hat, nämlich:*)

	Barometer.		Temp. d. Luft.	Höhe über d. Meere.	
Takal K'hera	$28^{z},883$	$74^{0},38$	$74^{0},35$	$1260^{F},7$	Account p. 118
Kullianpoor	28,223	67,79	68,32	1931,7	„ „ 329

welche Angabe auf die Dichte des Quecksilbers bei der Temperatur des schmelzenden Eises und auf die Länge der Scala bei ihrer Normaltemperatur reducirt, $28^{z},774$ und $28^{z},132$ ergeben, so erhält man für dieselbe Temperatur:

	Höhe über dem Meere.				Mittl. Temp.	Barom.
Punnae.....	$55^{F},0$	Asiat. Res.	XII	p. 101	$81^{0},83$	$30^{z},015$
Putchapolliam	1010,4	„ „	X	p. 383	84,10	29,036
Dodagoontah..	3037,9	„ „	X	p. 383	72,74	27,050
Namthabad...	1253,0	„ „	XII	p. 353	83,64	28,793
Daumeragidda	2015,0	„ „	XIII	p. 119	67,29	28,035

Indessen hat Herr EVEREST, bei seinen Rechnungen für Punnae, einen etwas niedrigeren Barometerstand angewandt, welchen er aus einer Vergleichung des Barometerstandes in Madras erhalten hat, nämlich $29^{z},96$, oder nach der Reduction auf die Dichte des Quecksilbers bei der Temperatur des schmelzenden Eises u. s. w., $29^{z},827$; er gibt diesem Stande den Vorzug, weil die Beobachtungen in Punnae in einer andern Jahreszeit gemacht sind, als in Takal K'hera und Kullianpoor. Ich bin seiner Wahl auch bei meinen Rechnungen gefolgt.

Die Beobachtungen selbst fordern zwei Verbesserungen, zu deren Berechnung LAMBTON's Beobachtungen die nöthigen Angaben enthalten. Er fand nämlich die Mikrometerschraube der Theilung des Bogens des Sectors nicht genau entsprechend, sondern einen Grad der letzteren = 3604 Theilen der ersteren; wenn daher die Zenithdistanz z auf einen Punkt des Bogens z' bezogen ist, so muss ihr $\frac{z-z'}{901}$ hinzugefügt werden. Ferner gibt er die Temperatur am Mittelpunkte des Sectors und am Bogen an; bezeichnet man die erstere durch t, die letztere durch t', die Veränderung der Ausdehnung des Messings des Instruments für jeden Grad der Aenderung des Thermometers durch α, so ist die Länge des Radius

$$= R\left(1+\alpha\frac{t'+t}{2}\right),$$

die Länge des Bogens $= s(1+\alpha t')$, und die der Angabe s des Bogens entsprechende Zenithdistanz

$$= \frac{s}{R}\left(1+\alpha\frac{t'-t}{2}\right);$$

oder wenn die abgelesene Zenithdistanz $\frac{s}{R} = z$, in Graden und ihren Theilen ausgedrückt, und $\alpha = 0{,}0000099$ gesetzt wird, erfordert eine Beobachtung die Verbesserung:

$$+ 0'',01782 . z(t'-t).$$

Diese Verbesserung ist fast immer sehr klein, da $t'-t$ gewöhnlich nur einen kleinen Bruch eines Grades beträgt. Bei Herrn EVEREST's Beobachtungen kann man sie nicht in Rechnung bringen, indem er nur eine Temperatur, nicht beide, angibt. Ebensowenig hat die von der Mikrometerschraube herrührende, gewöhnlich etwas grössere und zuweilen auf $\pm 0'',2$ steigende Verbesserung, bei diesen Beobachtungen angebracht werden können, weil Herr EVEREST nur z, nicht z' angibt, und man daher nicht wissen kann, ob das erstere durch den vorhergehenden oder den folgenden Punkt des Bogens des Instruments bestimmt worden ist. Da Herrn EVEREST ohne Zweifel bekannt war, dass sein Vorgänger diese Verbesserung angebracht hatte, so ist zu vermuthen, dass er sie nicht ohne Grund weggelassen hat; vielleicht hat er an dem Instrumente etwas ändern lassen, oder sich durch spätere Untersuchung überzeugt, dass eine Aenderung, ohne die Absicht sie hervorzubringen, eingetreten ist.

Um die auf diese Art aus den Beobachtungen an einer der Stationen, für den Anfang des Beobachtungsjahres, berechneten Zenithdistanzen der verschiedenen Sterne, mit den an einer anderen Station für ein anderes Jahr berechneten vergleichbar zu machen, muss man alle auf eine gleiche Epoche reduciren. Ich habe hierzu das Jahr 1830 angenommen, für welches das Pond'sche Verzeichniss von 1112 Sternen gilt. Dieses Verzeichniss enthält alle in Indien beobachteten Sterne, und gewährt also, ausser seiner Genauigkeit, auch den Vortheil, alle Reductionen nach gleichen Elementen zu ergeben. Wenn die Declination für 1755, so wie ich sie in den Fundamentis Astronomiae bestimmt habe, durch δ, ihre jährlichen Aenderungen für 1755 und für 1800 durch p und p' bezeichnet werden, die Pond'sche Declination für 1830 durch δ', so ist die Reduction von dem Anfange des Jahrs $1800+t$ auf 1830 (Fund. Astr. p. 139):

$$\frac{30-t}{75}(\delta'-\delta)+\frac{(45+t)(30-t)}{90}(p'-p).$$

Nach dieser Formel habe ich die Reductionen berechnet und die, durch ihre Hinzufügung, auf 1830 bezogenen Zenithdistanzen mit den Pond'schen Declinationen verglichen, um dadurch Werthe der Polhöhen zu erhal-

*) Account of the measurement of an arc of the Meridian. London 1830, p. 118.

ten, welche als richtig angenommen werden müssen, wenn die angenommenen Declinationen und ihre Reductionen und die Theilung des Sectors als richtig vorausgesetzt werden. Bezeichnet man aber den wahren Werth eines Grades des Bogens des Sectors durch $3600 + y$, so kommen den Polhöhen von y abhängige Verbesserungen hinzu, welche ich ihnen beigeschrieben habe.

[Es folgen nun die Werthe der Polhöhen für die 7 Stationen aus den einzelnen (9 — 24) Sternen.]

Die Bestimmung des allgemeinen Theilungsfehlers des Zenithsectors, aus diesen Rechnungen, muss auf die Annahme gegründet werden, dass die aus den Catalogen für 1755 und 1830 berechneten Declinationen für den Anfang jedes Beobachtungsjahres keinen allgemeinen, sich den Declinationsunterschieden proportional ändernden Fehler besitzen; der constante Theil dieses Fehlers vereinigt sich mit den zu bestimmenden Polhöhen selbst und hat also keinen Einfluss auf die Amplituden, auf welche es, bei einer Messung von Meridianbögen, vorzüglich ankömmt. Wir sind aber jetzt durch die Arbeiten, welche von verschiedenen Astronomen zur Bestimmung der Declinationen der Sterne unternommen worden sind, sicher, dass der allgemeine Fehler derselben innerhalb der Zone, in welcher die in Indien beobachteten Sterne liegen, sich für jeden Grad des Declinationsunterschiedes nicht mehr als höchstens 0,″03 ändern kann; wir können daher den allgemeinen Fehler der Theilung des Zenithsectors, wenigstens mit dieser Annäherung, bestimmen. Setzt man die Polhöhen von

Punnae	=	8°	19′	31″ + x
Putchapolliam .	=	10	59	41 + x_1
Dodagoontah . .	=	12	59	52 + x_2
Namthabad . . .	=	15	5	53 + x_3
Daumeragidda .	=	18	3	15 + x_4
Takal K'hera. .	=	21	5	51 + x_5
Kullianpoor . .	=	24	7	11 + x_6

so erhält man aus jedem, aus m Beobachtungen eines Sterns gezogenen Resultate für die Polhöhe, eine Gleichung von der Form:

$$0 = n - x + ay \ldots . \text{Gewicht} = m;$$

z. B. für Daumeragidda:

o Leonis . . . . . $0 = -0,''707 - x_4 + 7,33\,y \ldots 17$

δ Serpentis . . . $0 = +1,572 - x_4 + 6,89\,y \ldots 16$

ε Virginis . . . . $0 = -0,991 - x_4 + 6,10\,y \ldots 16$

u. s. w.

Diese Gleichungen, nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt, ergeben:

$$0 = -176,''15 + 235\,x + 889,89\,y$$
$$0 = -235,27 + 173\,x_1 + 88,86\,y$$
$$0 = +10,81 + 98\,x_2 - 165,68\,y$$
$$0 = -88,53 + 170\,x_3 - 42,62\,y$$
$$0 = -180,93 + 205\,x_4 - 456,25\,y$$
$$0 = -364,97 + 414\,x_5 + 888,90\,y$$
$$0 = -317,23 + 388\,x_6 - 101,26\,y$$

und

$$0 = -865,97 + 889,89\,x + 5753,55\,y$$
$$-545,59 + 88,86\,x_1 + 1997,45\,y$$
$$-188,72 - 165,68\,x_2 + 1475,04\,y$$
$$-166,78 - 42,62\,x_3 + 2119,06\,y$$
$$-306,02 - 456,25\,x_4 + 3361,60\,y$$
$$-1214,23 + 888,90\,x_5 + 5370,43\,y$$
$$-302,79 - 101,26\,x_6 + 1967,21\,y$$

Eliminirt man x, x_1, x_2 .... aus jeder Zeile der letzten Gleichung, so wird dieselbe der Beitrag, den jede der Beobachtungsstationen zur Bestimmung von y liefert, nämlich:

$$0 = -198,''94 + 2383,86\,y$$
$$-423,91 + 1951,81\,y$$
$$-170,44 + 1194,94\,y$$
$$-188,97 + 2108,38\,y$$
$$-708,69 + 2346,17\,y$$
$$-431,06 + 3461,97\,y$$
$$-385,58 + 1940,58\,y$$

Es geht hieraus hervor, dass alle Stationen darin übereinstimmen, einen positiven Werth von y zu fordern; sein wahrscheinlichster Werth geht aus der Summe aller Beiträge: $0 = 2507,''59 + 15387,71\,y$ hervor und ist: $y = +0,''16296$.

Es folgt hieraus mit aller wünschenswerthen Sicherheit, dass die Neigungen der Absehenslinie des Fernrohrs des Sectors gegen die Lothlinie etwas grösser sind, als der Bogen des Instruments sie angibt. Benutzt man diesen Werth von y, um die ersten 7 Gleichungen von dieser unbekannten Grösse zu befreien, so erhält man:

		Polhöhe.	Gewicht.
$x = +0,''1325$	Punnae	8° 9′ 31,″132	192,8
$x_1 = +1,2764$	Putchapolliam	10 59 42,276	172,5
$x_2 = +0,1652$	Dodagoontah	12 59 52,165	96,2
$x_3 = +0,5616$	Namthabad.....	15 5 53,562	169,9
$x_4 = +1,2453$	Daumeragidda	18 3 16,245	192,3
$x_5 = +0,5317$	Takal K'hera.....	21 5 51,532	368,3
$x_6 = +0,8601$	Kullianpoor	24 7 11,860	387,3

Dieses sind also die Resultate, welche man aus den

mit dem Zenithsector gemachten Beobachtungen, unter der Voraussetzung der Richtigkeit der angenommenen Declinationen der Sterne, ziehen muss.

[Mittheilung der Polhöhen für die 7 Stationen aus den einzelnen Sternen, nach Substitution des gefundenen Werthes von y.]

Die Voraussetzung der Richtigkeit anzuwendender Declinationen der Sterne ist die, auf welche das endliche Resultat aller ähnlichen Operationen sich gründen sollte. Diese Declinationen sind nämlich fortgesetzter Vervollkommnungen fähig, welche endlich dahin führen sollen, dass ihre Fehler, vergleichungsweise mit den Fehlern einer geschlossenen Operation, als unerheblich angesehen werden können. Indessen ist dieses Ziel noch nicht erreicht, wenn auch die eben gegebene Zusammenstellung der auf die einzelnen Sterne gegründeten Bestimmungen der Polhöhen dem Pond'schen Cataloge von 1112 Sternen zur grössten Ehre gereicht. Als Lambton die grosse Arbeit anfing, von welcher hier die Rede ist, konnte von Declinationen der Sterne, deren Sicherheit mit der Sicherheit der Beobachtungen selbst vergleichbar wäre, noch nicht die Rede sein, und er ergriff ohne Zweifel das rechte Mittel, indem er seine Beobachtungen so anordnete, dass er die Amplituden, unabhängig von den Declinationen, daraus bestimmen konnte. Es war also nicht seine Absicht, die Voraussetzung zu verfolgen, welche ich bis hierher verfolgt habe, sondern er sah im Gegentheil die Declinationen der Sterne als unbekannt an und bestimmte die Amplituden nur aus den an den verschiedenen Punkten gemeinschaftlich beobachteten Sternen. Das Resultat für eine Amplitude würde offenbar genau dasselbe sein, man mag die Declinationen als bekannt oder als unbekannt betrachten, wenn an ihren beiden Endpunkten ausschliesslich dieselben Sterne, und jeder so oft wie der andere beobachtet wären; wenn dieses nicht der Fall ist, so erhält man verschiedene Resultate, jenachdem man die eine oder die andere Behandlungsart der Beobachtungen anwendet. Die zweite verdient, im Allgemeinen, so lange den Vorzug vor der ersten, als die mit dem Sector gemachten Beobachtungen Resultate versprechen, welche sicherer sind, als die aus den Catalogen entlehnten Declinationen der Fixsterne. So wie dieses aber, durch die Genauigkeit der vorhandenen Cataloge der Declinationen, zweifelhaft wird, so kann eine Wahl zwischen beiden Arten, die Beobachtungen in Resultate zu vereinigen, nicht mehr im Allgemeinen getroffen werden, sondern sie hängt von der besonderen Beschaffenheit jedes Falles ab. In dem gegenwärtigen scheint es mir nothwendig zu sein, auch die Amplituden aus der alleinigen Kraft der Sectorbeobachtungen, ohne Einmischung eines fremden Cataloges, jedoch unter der Voraussetzung der erlangten Kenntniss des allgemeinen Theilungsfehlers des Instruments, abzuleiten.

Ich werde zuerst zeigen, wie die Beobachtungen auf den verschiedenen Stationen, dieser Absicht gemäss, mit einander combinirt werden müssen. Die Anzahl m von Beobachtungen eines Sterns, dessen Declination $= \delta$ angenommen ist, jetzt aber als unbekannt betrachtet und durch $\delta + u$ bezeichnet werden soll, ergibt, wenn seine Zenithdistanz z an einer Station, deren Pohlhöhe φ, beobachtet ist, die Gleichung:

$$0 = -z + \delta - \varphi + u \ldots . \text{Gewicht} = m;$$

Beobachtungen desselben Sterns an anderen Stationen ergeben die ähnlichen Gleichungen:

$$0 = -z_1 + \delta - \varphi_1 + u \ldots . . m_1$$
$$0 = -z_2 + \delta - \varphi_2 + u \ldots . . m_2$$
u. s. w.

Die in der Zusammenstellung der aus den Beobachtungen der einzelnen Sterne folgenden Polhöhen angegebenen Zahlen sind die Werthe von $-z + \delta$, $-z_1 + \delta$, $-z_2 + \delta, \ldots$; setzt man daher für φ, φ_1, $\varphi_2, \ldots$ ihre angewandten Ausdrücke durch Näherungswerthe und x, x_1, $x_2, \ldots$ und bezeichnet man die Reste, welche man erhält, indem man die ersteren von jenen Zahlen abzieht, durch n, n_1, $n_2, \ldots$ so nehmen diese Gleichungen die Form

$$0 = n - x - u \ldots . m$$
$$0 = n_1 - x_1 - u \ldots . m_1$$
$$0 = n_2 - x_2 - u \ldots . m_2$$
u. s. w.

an, oder, wenn man $x_1 = x + z_1$, $x_2 = x_1 + z_2 \ldots$ setzt, die Form:

$$0 = n - (x + u) \ldots . . . . . m$$
$$0 = n_1 - (x + u) - z_1 \ldots . . . . . m_1$$
$$0 = n_2 - (x + u) - z_1 - z_2 \ldots . m_2$$
$$0 = n_3 - (x + u) - z_1 - z_2 - z_3 \ldots m_3$$
u. s. w.

Die in diesen Gleichungen vorkommenden unbekannten Grössen kann man als die zu suchenden betrachten; ihre Werthe sollen so bestimmt werden, dass die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Unterschiede der einzelnen Gleichungen, jedes mit dem zugehörigen m multiplicirt, ein Minimum wird. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn man für jeden an mehr als einer Station beobachteten Stern die Gleichung

$$\left[\begin{smallmatrix} nm \\ 0 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} m \\ 0 \end{smallmatrix}\right](x + u) + \left[\begin{smallmatrix} m \\ 1 \end{smallmatrix}\right] z_1 + \left[\begin{smallmatrix} m \\ 2 \end{smallmatrix}\right] z_2 + \left[\begin{smallmatrix} m \\ 3 \end{smallmatrix}\right] z_3 + \text{etc.}$$

und die Ausdrücke

$$-\begin{bmatrix} n\,m \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ 1 \end{bmatrix}(x+u) + \begin{bmatrix} m \\ 1 \end{bmatrix} z_1 + \begin{bmatrix} m \\ 2 \end{bmatrix} z_2 + \begin{bmatrix} m \\ 3 \end{bmatrix} z_3 + \text{etc.}$$

$$-\begin{bmatrix} n\,m \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ 2 \end{bmatrix}(x+u) + \begin{bmatrix} m \\ 2 \end{bmatrix} z_1 + \begin{bmatrix} m \\ 2 \end{bmatrix} z_2 + \begin{bmatrix} m \\ 3 \end{bmatrix} z_3 + \text{etc.}$$

$$-\begin{bmatrix} n\,m \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ 3 \end{bmatrix}(x+u) + \begin{bmatrix} m \\ 3 \end{bmatrix} z_1 + \begin{bmatrix} m \\ 2 \end{bmatrix} z_2 + \begin{bmatrix} m \\ 3 \end{bmatrix} z_3 + \text{etc.}$$

u. s. w.

bildet, in welchen

$$\begin{bmatrix} n\,m \\ 0 \end{bmatrix} = n\,m + n_1 m_1 + n_2 m_2 + \text{etc.}$$

$$\begin{bmatrix} n\,m \\ 1 \end{bmatrix} = n_1 m_1 + n_2 m_2 + \text{etc.}$$

$$\begin{bmatrix} n\,m \\ 2 \end{bmatrix} = n_2 m_2 + \text{etc.}$$

und

$$\begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} = m + m_1 + m_2 + \text{etc.}$$

$$\begin{bmatrix} m \\ 1 \end{bmatrix} = m_1 + m_2 + \text{etc.}$$

$$\begin{bmatrix} m \\ 2 \end{bmatrix} = m_2 + \text{etc.}$$

u. s. w.

bedeuten; dann $x+u$, durch Hinzufügung der Producte der Gleichung in die Factoren

$$-\frac{\begin{bmatrix} m \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix}}, \quad -\frac{\begin{bmatrix} m \\ 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix}}, \quad -\frac{\begin{bmatrix} m \\ 3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix}}, \ldots\ldots$$

aus den Ausdrücken eliminirt und endlich den 1., 2., 3... Ausdruck, so wie jeder derselben aus jedem der beobachteten Sterne hervorgeht, addirt und die Summen resp. $= 0$ setzt. Hierdurch erhält man so viele Gleichungen als Amplituden und dazugehörige z_1, z_2, z_3,.... vorhanden sind. Ihre Auflösung ergibt die wahrscheinlichsten Werthe dieser Grössen und auch das Gewicht jeder derselben.

Gibt man diesen Gleichungen die gewöhnliche Bezeichnung:

$$\begin{aligned} (an) &= (aa)\,z_1 + (ab)\,z_2 + (ac)\,z_3 + \ldots \\ (bn) &= (ab)\,z_1 + (bb)\,z_2 + (bc)\,z_3 + \ldots \\ (cn) &= (ac)\,z_1 + (bc)\,z_2 + (cc)\,z_3 + \ldots \end{aligned}$$

u. s. w.,

so erhält man, in dem gegenwärtigen Falle, [folgen die numerischen Werthe $(an)\,(aa)\ldots.(ff)$] und durch die Auflösung der Gleichungen:

	Amplituden.		Gewicht.
$z_1 = +0,''9846$	Punnae — Putchapolliam	2°50′ 10,″985	103,17
$z_2 = -0,4705$	Putchapolliam — Dodagoontah	2 0 10,530	49,73
$z_3 = -0,2123$	Dodagoontah — Namthabad	2 6 0,788	83,04
$z_4 = +0,5323$	Namthabad — Daumeragidda	2 57 22,532	84,10
$z_5 = -0,0499$	Daumeragidda — Takal K'hera	3 2 35,950	27,78
$z_6 = +0,3920$	Takal K'hera — Kullianpoor	3 1 20,392	189,15

Die Vergleichung dieser Amplituden mit den Unterschieden der oben bestimmten Polhöhen zeigt, dass die ersteren von den letzteren verschieden sind, resp.

$-0,''159$; $+0,''641$; $-0,''609$; $-0,''151$; $+0,''663$; $+0,''064$.

Ich kenne keinen Grund, der einen Vorzug des einen dieser Resultate vor dem anderen vollständig rechtfertigen könnte; ich glaube also, dass eine Willkür in der Wahl zwischen beiden nicht vermieden werden kann. Wenn man jedoch die Zusammenstellung der aus den einzelnen Sternen abgeleiteten Polhöhen aufmerksam miteinander vergleicht, und die Unterschiede, welche sich daraus für die Amplituden ergeben, bemerkt, so kann man veranlasst werden, das Resultat vorzuziehen, für welches die grössere Anzahl der Beobachtungen stimmt, selbst wenn es nicht von diesen allein abhängig ist. Dieses ist aber das zuerst erhaltene, welches z. B. die Amplitude zwischen Daumeragidda und Takal K'hera mit einem 4,5 Mal so grossen Gewichte ergibt, als das zuletzt erhaltene; auch hat jenes den Vorzug vor diesem, dass es einer Unvollkommenheit der Bestimmung des allgemeinen Theilungsfehlers des Zenithsectors nicht einen Einfluss auf die Amplituden zwischen den verschiedenen Punkten der Gradmessung einräumt, welcher diesen Amplituden proportional wächst, und sich daher zugleich mit der Ausdehnung der Gradmessung vergrössert. Diese Vergrösserung wird man gern vermeiden wollen, wenn ihr Einfluss auf die Figur der Erde auch in demselben Verhältnisse kleiner wird, in welchem sie selbst anwächst.

Ich habe bei der Anwendung, welche ich von dieser Gradmessung gemacht habe, den auf die Voraussetzung der Richtigkeit der Declinationen der Sterne gegründeten Polhöhen den Vorzug eingeräumt und demnach angenommen:

	Polhöhe.	Entfernung der Parallelen Fathoms.	Toisen.
Punnae	8° 9′ 31,″132	0,0	0,0
Putchapolliam	10 59 42,276	171528,76	160944,20
Dodagoontah	12 59 52,165	292759,68	274694,30
Namthabad	15 5 53,562	419728,36	393828,09
Daumeragidda	18 3 16,245	598629,84	561690,06
Takal K'hera	21 5 51,532	782879,76	734570,43
Kullianpoor	24 7 11,860	965766,43	906171,67

Die hier beigeschriebenen Entfernungen der Parallelen sind aus Herrn EVEREST's Werke (p. 112 und 114) genommen und in dem Verhältnisse 1,06576542 : 1 in Toisen verwandelt.

Aus dem XII. Bande der Asiatic Researches p. 91 geht hervor, dass LAMBTON noch an zwei Punkten zwischen Dodagoontah und Namthabad astronomische Beobachtungen angestellt hat, nämlich in Bomasundrum und in Paughur. Ihre Polhöhenunterschiede von Putchapolliam gibt er + 3° 0′ 1,″88 und + 3° 6′ 37,″78 an; die Entfernung ihrer Parallelen von dem Parallele dieses Punktes = 181379,3 und 188078,67 Fathoms. Zugleich gibt er die Entfernung der Parallelen von Putchapolliam und Dodagoontah = 121222,43 Fath., welche aber später, in EVEREST's Account etc. p. 114, in 121230,92 Fath. verwandelt worden ist und die Nothwendigkeit einer Vergrösserung der beiden anderen Entfernungen in demselben Verhältnisse vermuthen lässt. Die astronomischen Beobachtungen an diesen beiden Punkten sind aber, wie es scheint, nie bekannt geworden. Sollte man sie noch wieder auffinden und bekannt machen, so werden die Resultate der Gradmessung durch die Hinzufügung dieser Punkte noch vervollständigt werden können.

---

133. Ueber die Polhöhen, welche der Englischen Gradmessung zum Grunde liegen.*)

(Astron. Nachr. **14**, p. 381.)

In dem schönen Berichte, welchen der verewigte MUDGE über diese ausgezeichnete Unternehmung ertheilt (Phil. Transact. 1803, p. 383—508) findet sich eine Incongruenz, welche, meiner Meinung nach, hätte ausgeglichen werden sollen. Die Amplitude zwischen Dunnose und Clifton, welche durch die Beobachtungen der Zenithdistanzen von an beiden Punkten beobachteten Sternen = 2° 50′ 23,″38 gefunden wurde, sollte mit der Summe der Amplituden zwischen Dunnose und Greenwich = 0° 51′ 31,″39 und Greenwich und Clifton = 1° 58′ 51,″59 übereinstimmen, ist aber 0,″40 grösser als diese Summe. Der Grund hiervon ist offenbar: MUDGE hat die Resultate der Beobachtungen, so wie sie unmittelbar aus den Zenithdistanzen an je zwei Punkten hervorgegangen sind, angenommen, und der Unterschied rührt davon her, dass die beiden zuletzt angeführten Resultate nicht auf allen Sternen beruhen, welche zu den ersteren beigetragen haben, die kleinen Unvollkommenheiten der Beobachtungen also einen Unterschied erzeugen mussten, welcher zwar an sich wenig bedeutend ist und in den Grenzen dieser Unvollkommenheiten liegt, welcher aber nichtsdestoweniger ein Widerspruch der Resultate untereinander ist und daher weggeschafft werden muss. Man muss sich allerdings Unvollkommenheiten der Beobachtungen gefallen lassen, da sie nur verkleinert, nicht vermieden werden können; allein über diese Unvollkommenheiten muss immer so verfügt werden, dass sie die Gleichheit von Grössen, welche der Natur der Sache nach vorhanden sein muss, nicht beeinträchtigen; in dem gegenwärtigen Falle ist nur die Bedingung, dass alle an zwei Punkten beobachteten Sterne eine gleiche Amplitude zwischen denselben geben müssen, verfolgt, die eben so wesentliche, dass die Summe zweier Theile einer Amplitude der ganzen gleich sein muss, aber nicht beachtet worden. Eine richtige Combination der Beobachtungen an den verschiedenen Stationen muss den Widerspruch völlig vernichten. Als ich ihn bemerkte, schien es mir nöthig, die Resultate von diesem kleinen Flecken zu reinigen, wenn es sich auch, bei der vorhandenen Uebereinstimmung der Beobachtungen, erwarten liess, dass die dadurch zu erlangende Verbesserung der Amplituden nicht über einige Zehntel einer Secunde gehen werde. Hierdurch wurde ich veranlasst, die Abhandlung in den Phil. Transact. aufmerksam anzusehen.

Ich hatte nicht die Absicht, an MUDGE's eigenen Reductionen seiner Beobachtungen etwas zu ändern. Indessen fand sich, dass einer der an allen Stationen beobachteten Sterne (α Aurigae) unrichtig auf den Anfang des Jahres 1802 reducirt war; der Fehler beträgt etwa 18″ und ist vermuthlich aus der Anbringung der Nutation mit falschem Zeichen entstanden. Ich durfte nicht vermeiden, MUDGE's eigene Zahlenangaben durch Berichtigung dieses Fehlers zu verändern.

[Folgt die Berichtigung für die Stationen Dunnose, Clifton und Arburyhill.]

Um [aus den auf 1802 reducirten Zenithdistanzen*)] die Amplituden abzuleiten, bin ich von den Werthen

*) [Auszug aus 308 d. a. Verz. — Vgl. Abh. 131, p. 43.]

*) [Dieselben für die 18 beobachteten Sterne weggelassen.]

derselben, welche MUDGE selbst angenommen hat, ausgegangen und habe ihnen die noch zu bestimmenden Verbesserungen x, x', x'' hinzugesetzt. Ich habe also gesetzt:

$$\begin{aligned} \text{Dunnose} - \text{Clifton} &= 2^0\,50'\,23''{,}38 + x' \\ - \text{Arburyhill} &= 1\;\;36\;\;19{,}98 + x'' \\ - \text{Greenwich} &= 0\;\;51\;\;31{,}39 + x''' \end{aligned}$$

und durch Hinzufügung dieser Ausdrücke der Amplituden zu den an den übrigen Stationen beobachteten Zenithdistanzen, alle auf Dunnose reducirt. Setzt man der hier beobachteten Zenithdistanz die Verbesserung y hinzu, so erhält man aus jedem Sterne so viele Gleichungen, als er an verschiedenen Stationen beobachtet ist, nämlich:

$$\begin{aligned} 0 &= y \qquad\qquad \text{Gewicht} = m \\ 0 &= y - x' + n' \ldots\ldots m' \\ 0 &= y - x'' + n'' \ldots\ldots m'' \\ 0 &= y - x''' + n''' \ldots\ldots m''' \end{aligned}$$

wo n', n'', n''' die Reste bedeuten, welche man erhält, wenn man die auf Dunnose reducirten Zenithdistanzen von den daselbst beobachteten abzieht. Man erhält also, durch die gewöhnliche Behandlungsart dieser Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= (mn) + (m)y - m'x' - m''x'' - m'''x''' \\ x' &= -m'n' - m'\,y + m'x' \quad \text{„} \quad \text{„} \\ x'' &= -m''n'' - m''\,y \quad \text{„} \quad + m''x'' \quad \text{„} \\ x''' &= -m'''n''' - m'''y \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + m'''x''' \end{aligned}$$

und wenn man y, durch Addition der Producte der ersten Gleichung in die Factoren

$$\frac{m'}{(m)},\quad \frac{m''}{(m)},\quad \frac{m'''}{(m)}$$

aus x', x'', x''' eliminirt, und die Summen aller x', x'', x''' so wie sie aus den verschiedenen Sternen hervorgehen, resp. $= 0$ setzt, drei Gleichungen, durch deren Auflösung man die wahrscheinlichsten Werthe x', x'', x''' erhält. Bezeichnet man diese Gleichungen, wie gewöhnlich:

$$\begin{aligned} 0 &= (an) + (aa)\,x' + (ab)\,x'' + (ac)\,x''' \\ 0 &= (bn) + (ab)\,x' + (bb)\,x'' + (bc)\,x''' \\ 0 &= (cn) + (ac)\,x' + (bc)\,x'' + (cc)\,x''' \end{aligned}$$

so findet man die Beiträge der einzelnen Sterne zu den Summen: $[(an), (aa)\ldots$ sowie diese selbst*) —.]

Hieraus folgen die Werthe von x', x'', x''' und die Amplituden:

$x' = +0''{,}1170$	Dunnose — Clifton	$2^0\,50'\,23''{,}497$	Gew. = 64,27
$x'' = +0{,}4180$	„ Arburyhill	1 36 20,398	61,09
$x''' = +0{,}0226$	„ Greenwich	0 51 31,367	20,03

Man darf diese Bestimmung aber nicht eher für die definitive annehmen, als bis man sich überzeugt haben wird, ob der Bogen des Sectors, auf welchem die Amplituden gemessen worden sind, wirklich zu dem Halbmesser desselben gehört. Um hierüber ein Urtheil zu erhalten, habe ich auch den Werth von y für jeden der beobachteten Sterne aus der ihn angehenden Gleichung bestimmt und die dadurch erlangten wahrscheinlichsten Zenithdistanzen in Dunnose so auf 1830 reducirt, wie die Vergleichung der Declinationen in den Fundamentis Astronomiae mit den in dem Pond'schen Cataloge von 1112 Sternen enthaltenen erfordert. Diese Reduction, mit der Declination des Pond'schen Catalogs verglichen, ergibt, durch jeden Stern, eine Bestimmung der Polhöhe von Dunnose, in welcher ein allgemeiner Theilungsfehler des Sectors, wenn er vorhanden ist und die Declinationsunterschiede der Sterne genau genug bekannt sind, hervortreten muss. Auf diese Art habe ich Folgendes erhalten:*)

	Z. D. 1830.	Polhöhe.	Beobb.
α Aurigae	$-4^0\,48'\,14''{,}150$	$50^0\,37'\,8''{,}850$	26,40
i Herculis	$-4\;\;31\;\;3{,}455$	7,055	14,97
52 „	$-4\;\;20\;\;6{,}720$	7,520	14,91
v „	$-4\;\;6\;\;22{,}457$	7,057	11,56
τ „	$-3\;\;53\;\;46{,}629$	6,829	21,04
α Persei	$-1\;\;21\;\;56{,}232$	11,132	13,69
η Ursae maj. . . .	$-0\;\;27\;\;16{,}255$	8,955	31,44
i Cygni	$+0\;\;45\;\;8{,}528$	6,272	40,60
γ Draconis	$+0\;\;56\;\;36{,}915$	6,485	47,58
β Draconis	$+1\;\;48\;\;43{,}442$	6,358	45,93
$\varkappa$ Cygni	$+2\;\;26\;\;21{,}769$	6,831	39,34
51 Draconis	$+2\;\;31\;\;12{,}236$	6,464	33,31
17 „	$+2\;\;39\;\;2{,}270$	6,430	10,67
μ „	$+4\;\;4\;\;39{,}463$	7,937	16,24
γ Ursae maj.	$+4\;\;1\;\;15{,}322$	9,478	19,31
c Draconis	$+4\;\;45\;\;5{,}126$	6,674	34,69
ζ Ursae maj.	$+5\;\;11\;\;43{,}321$	12,579	17,40

Der Stern d Draconis hat hier weggelassen werden müssen, weil seine Declination nicht im Pond'schen Cataloge vorkömmt. Jedem Resultate ist die Summe der Gewichte der an den einzelnen Stationen bestimmten Zenithdistanzen beigeschrieben; sein eigenes Gewicht ist etwas kleiner, aber die Angabe reicht hin, seine Zuverlässigkeit beiläufig zu beurtheilen. Man sieht, in dieser Zusammenstellung, einen allgemeinen Theilungsfehler des Sectors nicht mit Entschiedenheit

*) [Hier weggelassen.]

*) [Zenithdist. 1802 u. Reductionen auf 1830 weggelassen.]

hervortreten. GAUSS hat, in seiner Schrift über den Breitenunterschied von Göttingen und Altona, über dasselbe Instrument ein ähnliches Urtheil gefällt.

Ausser den Punkten, deren Polhöhenunterschiede ich schon aufgesucht habe, gehört noch Blenheim zur Gradmessung. Hier wurde jedoch der Sector nicht aufgestellt, sondern die Zenithdistanz des Sterns γ Draconis wurde aus den Beobachtungen abgeleitet, welche der Herzog VON MARLBOROUGH von 1794 bis 1798 incl. gemacht hatte, nämlich:

für 1802 = — 0° 19′ 23,″06.

Da ich die Zenithdistanz desselben Sterns in Dunnose, im Mittel aus seinen Beobachtungen an allen Stationen = + 0° 53′ 56,″939 gefunden habe, so ist der Polhöhenunterschied zwischen Dunnose und Blenheim

= 1° 13′ 19,″999

anzunehmen.

Um endlich die Polhöhen selbst zu erhalten, habe ich für Greenwich 51° 28′ 39″ angenommen. Unter dieser Voraussetzung hat man das Endresultat der Gradmessung:

	Polhöhe.	Entfernung der Parallelen Fathoms.	Toisen.
Dunnose	50°37′ 7,″633	0,0	0,0
Greenwich ..	51 28 39,000	52286,33	49059,89
Blenheim....	51 50 27,632	74421,54	69829,19
Arburyhill...	52 13 28,031	97726,84	91696,89
Clifton.....	53 37 31,130	172734,92	162075,93

Die Entfernungen der Parallelen sind Phil. Transact. 1803 p. 441 und 487 angegeben; allein, nach KATER's Untersuchung der zur Messung angewandten Scale, von 0,00007 vergrössert, auch in dem Verhältnisse 1,06576542:1 in Toisen verwandelt.

---

134. Ueber einen Fehler in der Berechnung der französischen Gradmessung und seinen Einfluss auf die Bestimmung der Figur der Erde.*)

(Astron. Nachr. **19**, p. 97.)

In den „Comptes rendus hebdom. des séances de l'Acad. des Sciences" vom 21. Juni 1841 findet sich der Bericht einer, aus den Herren MATHIEU, DAUSSY und LARGETEAU zusammengesetzten Commission, über einen Fehler der Berechnungsart, welche im Jahre 1808 angewandt worden ist, um die Entfernung der Parallelen von Montjouy und Mola (auf Formentera) aus den Beobachtungen abzuleiten, welche die Herren BIOT und ARAGO zur Bestimmung derselben gemacht und in ihrem 1821 erschienenen Werke „Recueil d'Observations géodésiques etc." mitgetheilt haben. Diese fehlerhafte Berechnungsart wurde von einer früheren, mit der Berechnung der Beobachtungen beauftragten Commission der Akademie befolgt; die Herren BIOT und ARAGO selbst scheinen das Resultat ihrer Arbeit nicht gesucht zu haben. Herr PUISSANT hat das Verdienst, die Unrichtigkeit des Resultats der früheren Commission zur Sprache gebracht zu haben.

Die Entfernung der Parallelen von Montjouy und Mola, welche früher = 153605,T77 angegeben war, wird gegenwärtig

von Herrn MATHIEU . . .	= 153672,T39
LARGETEAU. .	4,48
DAUSSY	5,66
PUISSANT . . .	4,01

*) [Auszug aus 349 d. a. Verz. — Vgl. Abh. 131.]

also von 66,T62 bis 69,T89 grösser als früher gefunden. Wäre dieser Fehler nicht begangen, so würde die Länge des Meters, deren Bestimmung die nähere Veranlassung der grossen, als Beitrag zur Bestimmung der Figur der Erde immer denkwürdig bleibenden Unternehmung war, mehr als 0,T04 grösser festgesetzt worden sein, als wirklich geschehen ist. Dieser Einfluss des Fehlers hat jedoch kaum noch ein Interesse, da das Meter die Anfangs beabsichtigte Bedeutung in keinem Falle haben, und wirklich nichts Anderes sein kann, als ein, zwar nach einer gewissen Absicht gewählter, — aber dennoch innerhalb engerer oder weiterer Grenzen willkürlicher Theil der Toise de Pérou*). Allein da die französische Gradmessung zu der Bestimmung der Abmessungen des Erdsphäroids den wichtigen Beitrag liefert, welcher ihrer Ausdehnung angemessen ist, so wird jetzt nöthig, das aus den vorhandenen, zuverlässiger erscheinenden Messungen von Meridianbögen gezogene Resultat dieser Art, welches ich Nr. 333 der Astron. Nachr. [Abh. 131] bekannt gemacht habe, durch Berücksichtigung des Fehlers zu verbessern.

Da die angeführten vier neuen Rechnungsresultate innerhalb weniger Toisen übereinstimmen, und selbst

*) Herr Geheimrath BESSEL hat seine Ansichten über Naturmaasse ausführlicher in meinem Jahrbuche für 1840 p. 142 ausgesprochen. — [344 d. a. Verz.] SCHUMACHER.

der Unterschied der beiden äussersten unter ihnen keinen Einfluss auf die Bestimmung der Axen des Erdsphäroids erlangt, welcher nicht viel kleiner wäre als die von den Unregelmässigkeiten der Erdoberfläche selbst, von den Beobachtungsfehlern und wahrscheinlich auch von kleinen Unvollkommenheiten der Berechnung einer oder der anderen Gradmessung erzeugte Unsicherheit, so könnte man wohl eins dieser vier Resultate, oder das arithmetische Mittel aller vier, zur Grundlage einer neuen Untersuchung der Figur und Grösse der Erde machen. Ich habe aber geglaubt, bis zu den in dem Werke der Herren BIOT und ARAGO enthaltenen Beobachtungen selbst zurückgehen, also den vier Resultaten noch ein fünftes hinzufügen zu müssen.

In dem eben angeführten Werke (p. 179 etc.) finden sich zwei Werthe der Winkel mehrerer Dreiecke angegeben; nämlich die Werthe, welche die frühere Commission angenommen hat und die, welche die Beobachter selbst für die wahrscheinlichsten halten. Die ersteren sind in den Rechnungen der Herren DAUSSY und LARGETEAU, die letzteren in der Rechnung des Herrn MATHIEU angewandt worden. Diese doppelten Werthe der Winkel sind aus dem Vorhandensein von mehr Beobachtungen, als zur Bestimmung der Winkel erforderlich waren, hervorgegangen: sie müssen durch einen bestimmten Werth jedes Winkels, welchen die Verfolgung der Methode der kleinsten Quadrate immer ergibt, ersetzt werden, wenn man nicht sowohl eine Reihe, zwischen — vielleicht engen — Grenzen schwankender Resultate, als das unzweideutige Resultat einer geschlossenen geodätischen Operation verlangt. Die Beobachtungen der Herren BIOT und ARAGO ergeben nicht allein alle Winkel der einzelnen Dreiecke unmittelbar, sondern oft auch die Summen von zwei oder mehreren, von einem Punkte des Dreiecksnetzes ausgehenden; ferner ergeben sie die vollständige Beobachtung der Winkel des Viereckes Desierto d. l. P. — Espadan — Cullera — Montgo und seiner Diagonalen. Im Ganzen ergeben sie 29 Bedingungen zwischen den verschiedenen beobachteten Winkeln, welche Bedingungen nicht nur in aller Schärfe, sondern auch so erfüllt werden müssen, dass die Verbesserungen, welche an die unmittelbaren Beobachtungen anzubringen sind, damit sie erfüllt werden, der Forderung der Methode der kleinsten Quadrate entsprechen. Die Theorie dieser Ausgleichung der beobachteten Winkel untereinander war zu der Zeit, in welche die frühere Berechnung der französischen Gradmessung fällt, noch nicht bekannt, so dass auch weder die eine noch die andere der beiden erwähnten Angaben der Winkel daraus hervorgegangen sein kann und also keine von ihnen zu dem wahren Resultate der Beobachtungen führt. Der Wunsch, dieses Resultat einer Unternehmung zu erlangen, deren Ausführung grosse Schwierigkeiten mit sich brachte und von den Herren BIOT und ARAGO so grosse Aufopferungen forderte, dass die Mühe einer consequent durchgeführten Rechnung dagegen kaum in Betracht kommt, hat mich veranlasst, diese zu unternehmen.

1.

Ich werde zuerst die auf den einzelnen Dreiecken beobachteten, auf den Horizont reducirten Winkel, so wie das arithmetische Mittel der verschiedenen Beobachtungsreihen jedes Winkels sie ergibt, anführen. Indem das arithmetische Mittel aus verschiedenen, ungleich zahlreichen Reihen von Wiederholungen eines Winkels, so genommen wird, dass jeder dieser Reihen ein der Zahl der Wiederholungen proportionales Gewicht beigelegt wird, wird, wie ich Astron. Nachr. Nr. 256 S. 280 [s. VIII. Verschiedenes: Abh. über die Methode der Vervielfältigung der Beobb.] gezeigt habe, vorausgesetzt, dass die aus der Theilung und Ablesung des angewandten Instruments hervorgehenden Fehler, vergleichungsweise mit den Fehlern der Einstellung des Fernrohrs, verschwinden. Dieses ist ganz gewiss in keinem Falle richtig; allein das Verhältniss der mittleren, aus beiden Ursachen entstehenden Fehler, welches bekannt sein muss, wenn die a. a. O. gegebene Vorschrift zur Bestimmung des Gewichtes jeder einzelnen Beobachtungsreihe soll angewandt werden können, ist für die Wiederholungskreise der Herren BIOT und ARAGO unbekannt, weshalb, falls nicht ein ganz willkürliches Element der Rechnung eingeführt werden soll, nichts übrig bleibt, als der einfachsten Annahme, nämlich der Annahme des der Anzahl der Wiederholungen proportionalen Gewichts, welches auch die von den Beobachtern selbst gemachte ist, zu folgen.

Mittelp. der Winkel.	Nr.	Winkel.		Zahl.	Pag.
Matas.....	1	Morella — Montserrat	54°23′ 39,″685	52	3
Montserrat..	2	Matas — Morella	60 13 20,696	64	7
	3	Morella — Montagut	70 11 17,184	64	8
Morella.....	4	St. Jean — Montagut	37 28 37,916	64	14
	5	Montagut — Montserrat	59 8 0,980	56	13
	6	Montserrat — Matas	65 22 58,506	64	12
Montagut....	7	Montserrat — Morella	50 40 49,210	54	19
	8	Morella — St. Jean	84 29 22,895	84	21
	9	St. Jean — Lleberia	42 40 42,144	88	22
St. Jean,....	10	Montsia — Lleberia	33 17 58,492	42	30
	11	Lleberia — Montagut	107 0 35,275	64	29
	12	Montagut — Morella	58 2 0,220	48	28

Mittelp. der Winkel.	Nr.	Winkel.				Zahl.	Pag.
Lleberia	13	Montagut — St. Jean	30°	18′	42,″412	40	36
	14	St. Jean — Montsia	124	26	35,959	84	37
	15	Montsia — Bosch	33	0	2,208	60	43
Montsia.....	16	Desierto — Arès	37	52	58,344	72	56
	17	Arès — Tosal	35	45	45,935	56	53
	18	Tosal — Bosch	44	26	42,392	46	49
	19	Bosch — Lleberia	53	33	17,135	14	48
	20	Lleberia — St. Jean	22	15	34,094	64	39
		18 + 19.....	98	0	2,557	60	51
Bosch.....	21	Lleberia — Montsia	93	26	45,623	54	61
	22	Montsia — Tosal	74	44	14,267	74	63
le Tosal.....	23	Bosch — Montsia	60	49	6,555	74	68
	24	Montsia — Arès	108	10	54,047	72	70
Arès.....	25	Tosal — Montsia	36	3	24,279	40	74
	26	Montsia — Desierto	88	17	45,017	44	76
	27	Desierto — Espadan	37	7	33,019	58	77
		25 + 26.....	124	21	10,135	20	78
Desierto de	28	Campvey — Montgo	42	5	36,623	38	108
las Palmas..	29	Montgo — Cullera	16	51	20,656	12	99
	30	Cullera — Espadan	47	2	10,351	60	98
	31	Espadan — Arès	101	17	34,304	218	97
	32	Arès — Montsia	53	49	21,126	40	88
		31 + 32.....	155	6	55,859	56	110
		29 + 30 + 31 + 32..	219	0	28,326	20	111
		28 + 29 + 30.....	105	59	8,526	12	112
		29 + 30.....	63	53	29,466	146	104
Espadan.....	33	Arès — Desierto	41	34	55,657	104	123
	34	Desierto — Montgo	99	50	11,039	72	125
	35	Montgo — Cullera	11	54	54,964	34	128.
		34 + 35.....	111	45	6,649	66	127
		33 + 34 + 35.....	153	20	5,366	46	129
Cullera.....	36	Espadan — Desierto	21	12	46,838	100	137
	37	Desierto — Montgo	128	3	19,955	60	139
		36 + 37.....	149	16	10,321	44	140
Montgo	38	Cullera — Espadan	18	49	3,810	20	146
	39	Espadan — Desierto	16	16	31,427	100	149
	40	Desierto — Campvey	78	4	10,088	64	151
	41	Campvey — Mola	21	58	42,544	50	153
		38 + 39.....	35	5	33,569	30	145
		40 + 41.....	100	2	53,769	20	154
		38 + 39 + 40 + 41..	135	8	27,120	32	156
Campvey....	42	Mola — Montgo	95	28	18,337	50	167
	43	Montgo — Desierto	59	50	53,916	74	165
		42 + 43.....	155	19	12,447	20	168
Mola.....	44	Montgo — Campvey	62	33	12,898	80	177

2.

Ich habe zuerst die auf den einzelnen Beobachtungspunkten beobachteten Winkel und ihre Summen untereinander ausgeglichen. Die dazu angewandten Formeln findet man in meinem Buche über die Gradmessung in Ostpreussen S. 71 [Abh. 135 § 15]. Bezeichnet man die Verbesserungen, welche den so ausgeglichenen Winkeln, oder wenn keine Summen beobachtet wurden, den im vorigen § angegebenen, noch hinzuzusetzen sind, durch (1), (2), (3) u. s. w., so erhält man folgende Ausdrücke der Winkel und der a. a. O. S. 149 [§ 37] unter der Bezeichnung [1], [2], [3] u. s. w. eingeführten Grössen.

[Es folgen die 44 Ausdrücke von der Form:
Winkel + (*n*), [*n*] = *a* (*n*) (+ etc.)]

3.

Nachdem hierdurch die 13 Bedingungen erfüllt sind, welche durch eben so viele Beobachtungen von Summen mehrerer einzelnen Winkel gegeben wurden, werde ich die noch zu erfüllenden aufsuchen. Da das Dreiecksnetz 16 Punkte enthält, von welchen zwei willkürlich angenommen werden können, so sind 14 Punkte, also die 28 Grössen, wovon ihre Lage abhängt, zu bestimmen: unter den 44 Winkeln des Netzes sind daher 44 − 28 = 16 durch die übrigen bedingt, oder es müssen noch 16 Bedingungsgleichungen vorhanden sein. Man sieht sehr leicht aus der Figur des Dreiecksnetzes in dem Werke der Herren Biot und Arago, dass 15 von diesen Gleichungen durch die Forderung gegeben werden, dass die Summe der drei Winkel in 15 Dreiecken den Werth erhalte, welchen sie, dem Flächeninhalte jedes Dreiecks nach, haben muss, die 16. geht aus der Forderung hervor, dass die Richtungslinien von 3 Punkten des Vierecks Desierto — Espadan — Cullera — Montgo nach dem 4., sich in Einem Punkte durchschneiden müssen*).

Legt man ein ebenes Dreieck, dessen Seiten a, b, c die Winkel A', B', C' gegenüberstehen, auf eine Kugeloberfläche vom Halbmesser r, so dass seine Seiten grösste Kreise werden, und bezeichnet man die ihnen dann gegenüberstehenden Winkel durch A, B, C, sowie auch seinen doppelten Flächeninhalt in seinem ersten Zustande, oder

$$ab \sin C' = bc \sin A' = ca \sin B'$$

durch n, so hat man bekanntlich:

$$A - A' = \frac{n}{6rr}\left\{1 + \frac{aa + 7bb + 7cc}{120rr}\right\}$$

$$B - B' = \frac{n}{6rr}\left\{1 + \frac{7aa + bb + 7cc}{120rr}\right\}$$

$$C - C' = \frac{n}{6rr}\left\{1 + \frac{7aa + 7bb + cc}{120rr}\right\}$$

also den sphärischen Excess des Dreiecks:

$$\varepsilon = A + B + C - 180^0 = \frac{n}{2rr}\left\{1 + \frac{aa + bb + cc}{24rr}\right\}.$$

Nach diesen Formeln, oder anderen daraus abgeleiteten, durch welche die frühere Legendre'sche Formel bis zu

*) Vgl. Gradmessung in Ostpreussen S. 139 [Abh. 135 § 36.]

der zweiten Ordnung von ε incl. entwickelt wird*), habe ich jetzt die Summe der Winkel jedes der 15 Dreiecke und später auch das ganze Netz berechnet. Die dazu erforderliche genäherte Kenntniss der Dreiecksseiten habe ich durch eine vorläufige, nur die Ausgleichung der Summe der drei Winkel jedes Dreiecks voraussetzende Berechnung des Netzes erlangt, indem ich die Seite Montserrat — Matas, so wie sie Base d. S. Métr. II p. 837 angegeben ist = 20297^{T}8690, und für r den Aequatorealhalbmesser der Erde, nach der Bestimmung Astron. Nachr. Nr. 333 [Abh. 131] = 3271953^{T}854, angenommen habe. Der letzteren Annahme entspricht

$$\log \frac{206264,''8}{2rr} = 1{,}9837808 - 10.$$

Ich werde die auf diese Art berechneten sphärischen Excesse der 15 Dreiecke und die aus den Zahlen des vorigen §'s hervorgehenden Ausdrücke der Summen ihrer drei Winkel mittheilen:

				ε	Summe der 3 Winkel.
I	Matas	— Montserrat	— Morella	3,″081	179°59′ 58,″887 + (1) + (2) + (6)
II	Montserrat	— Morella	— Montagut	3,314	180 0 7,374 + (3) + (5) + (7)
III	Morella	— Montagut	— St. Jean	3,352	1,031 + (4) + (8) + (12)
IV	Montagut	— St. Jean	— Lleberia	3,102	179 59 59,831 + (9) + (11) + (13)
V	St. Jean	— Lleberia	— Montsia	5,207	180 0 8,545 + (10) + (14) + (20)
VI	Lleberia	— Bosch	— Montsia	4,017	6,937 + (15) + (19) + (21)
VII	Bosch	— Montsia	— Tosal	2,108	3,814 + (18) + (22) + (23)
VIII	Montsia	— Tosal	— Arès	3,138	4,476 + (17) + (24) + (25)
IX	Montsia	— Arès	— Desierto	6,5905	5,320 + (16) + (26) + (32)
X	Arès	— Desierto	— Espadan	4,473	3,826 + (27) + (31) + (33)
XI	Desierto	— Espadan	— Cullera	7,792	5,060 + (30) + (34) + (35) + (36)
XII	Espadan	— Cullera	— Montgo	5,550	7,444 + (35) + (36) + (37) + (38)
XIII	Desierto	— Cullera	— Montgo	10,854	15,048 + (29) + (37) + (38) + (39)
XV	Desierto	— Montgo	— Campvey	38,895	41,314 + (28) + (40) + (43)
XVI	Montgo	— Campvey	— Mola	12,936	14,067 + (41) + (42) + (44)

Diese Dreiecke und ihre Numerirung sind dieselben, welche man in dem Recueil d'Observations etc. p. 179—182 zusammengestellt findet. Dort findet sich noch ein Dreieck XIV: Desierto — Espadan — Montgo, welches hier aber wegbleiben muss, weil es aus XI, XII und XIII folgt, nämlich XI + XIII = XII + XIV. Dass die a. a. O. p. 181 angegebenen sphärischen Excesse der vier Dreiecke dieser Bedingung nicht genau, sondern nur bis auf 0,″006 entsprechen, ist eine (unbedeutende) Unvollkommenheit ihrer Berechnung; dass ihr die von den Herren Biot und Arago angenommenen Werthe der beobachteten Winkel weit näher entsprechen, als die von der früheren Commission angenommenen, zeigt, dass die ersteren erfolgreicher ausgeglichen sind. Die durch die Summen der Winkel der 15 Dreiecke gegebenen Bedingungsgleichungen sind, den angeführten Zahlen gemäss:

I	0 = − 4,″194 + (1) + (2) + (6)
II	0 = + 4,060 + (3) + (5) + (7)
III	0 = − 2,321 + (4) + (8) + (12)
IV	0 = − 3,″271 + (9) + (11) + (13)
V	0 = + 3,338 + (10) + (14) + (20)
VI	0 = + 2,920 + (15) + (19) + (21)
VII	0 = + 1,706 + (18) + (22) + (23)
VIII	0 = + 1,338 + (17) + (24) + (25)
IX	0 = − 1,2705 + (16) + (26) + (32)
X	0 = − 0,647 + (27) + (31) + (33)
XI	0 = − 2,732 + (30) + (34) + (35) + (36)
XII	0 = + 1,894 + (35) + (36) + (37) + (38)
XIII	0 = + 4,194 + (29) + (37) + (38) + (39)
XV	0 = + 2,419 + (28) + (40) + (43)
XVI	0 = + 1,131 + (41) + (42) + (44)

Die 16., durch das Viereck Desierto — Espadan — Cullera — Montgo gegebene Bedingung ist

$$1 = \frac{\sin DEC . \sin DCM . \sin EMD}{\sin ECD . \sin CMD . \sin DEM}$$

und wenn man die darin vorkommenden Winkel aus § 2 nimmt, oder

$$\begin{aligned}
DEC &= 111^{\circ}\,45'\ 7,''332 + (34) + (35)\\
DCM &= 128\ \ 3\ 21,145 + (37)\\
EMD &= 16\ 16\ 31,241 + (39)\\
ECD &= 21\ 12\ 47,552 + (36)\\
CMD &= 35\ \ 5\ 34,121 + (38) + (39)\\
DEM &= 99\ 50\ 11,465 + (34)
\end{aligned}$$

setzt und die unbekannten Grössen (34), (35), u. s. w.

*) Ich glaube, dass die Ehre dieser weiteren Entwickelung Buzengeiger gebührt. Seine Abhandlung darüber findet man in Lindenau und Bohnenberger's Zeitschrift für Astronomie Bd. VI. S. 264. Tübingen 1818.

durch die Differenzen der Logarithmen der Sinus der Winkel in Rechnung bringt*),

$$0 = +56{,}4 + 4{,}751\,(34) + 8{,}401\,(35) + 54{,}248\,(36) + 16{,}482\,(37) + 29{,}968\,(38) - 42{,}158\,(39)$$

welcher Gleichung ich die oben fehlende Zahl XIV geben werde.

4.

Aus den nun vollständig bekannten Bedingungsgleichungen des Dreiecksnetzes folgen**) die Ausdrücke der im 2. § durch [1], [2], [3], u. s. w. bezeichneten Grössen durch I, II, III u. s. w.

[Mittheilung der 44 Ausdrücke; ferner enthält: § 5 Bestimmung der Logarithmen I—XVI; § 6 die 44 ausgeglichenen Winkel des Dreiecksnetzes; § 7 Logarithmen der Entfernungen der Dreieckspunkte.]

8.

Jetzt kann auch der letzte Zweck des geodätischen Theils der Fortsetzung der französischen Gradmessung von Matas bis Mola erreicht, nämlich die Entfernung dieser beiden Punkte und die Richtung der, beide miteinander verbindenden Linie auf der Oberfläche der Erde, bestimmt werden.

Ich werde zwei, von dem einen zum anderen dieser Punkte führende Reihen von Dreiecksseiten und die Winkel zwischen jedem aufeinanderfolgenden Paare derselben hiehersetzen, beide so wie sie aus den Angaben der beiden vorigen §§ hervorgehen.

		Log. Entfern.	Entfern.	Innere Winkel.
Matas	— Morella	4,2873327.6	19379,^{T}062	
				198° 0′ 21,″9442
Morella	— St. Jean	4,4133328.6	25901,974	
				161 39 25,5781
St. Jean	— Montsia	4,6655737.9	46299,232	
				166 5 41,4323
Montsia	— Desierto	4,5698870.0	37143,857	
				98 53 58,0789
Desierto	— Campvey	4,9167438.4	82555,087	
				204 40 48,8553
Campvey	— Mola	4,3775137.2	23851,391	
Mola	— Montgo	4,8023808.35	63442,579	
				116 19 24,4215
Montgo	— Espadan	4,8227661.8	66491,500	
				141 25 8,1066
Espadan	— Arès	4,5278217.5	33714,890	
				125 25 19,3824
Arès	— Montsia	4,4770543.3	29995,377	
				226 14 13,2489
Montsia	— Lleberia	4,4888565.4	30821,697	
				154 45 19,1699
Lleberia	— Montagut	4,4770992.7	29998,481	
				177 50 54,0894
Montagut	— Montserrat	4,3040919.0	20141,504	
				130 24 37,9582
Montserrat	— Matas	4,3074504.5	20297,869	

Die Rechnung ist nach der Methode geführt, welche ich in den Astron. Nachr. Nr. 3 [Abh. 125] zuerst gegeben, auch in meinem Buche über die Gradmessung in Ostpreussen S. 253 [Abh. 135 § 61] angewandt habe. Die erste Reihe von Dreiecksseiten hat mir ergeben:

Entfern.: Matas—Mola = 165108,^{T}586 log = 5,2177696.58

Winkel: Morella — Matas — Mola = 319° 59′ 51,″21

„ Campvey — Mola — Matas = 30 41 47,67

Die zweite Reihe hat Herr SCHLÜTER berechnet und dadurch erhalten:

Entfern: Mola—Matas = 165108,^{T}586 log = 5,2177696.59

Winkel: Montgo — Mola — Matas = 93° 14′ 59,″964

„ Mola — Matas — Montserrat = 94 23 50,041

oder wenn die Winkel, wie in der ersten Reihe, resp. von Campvey und Morella an gezählt werden:

Winkel: Campvey — Mola — Matas = 30° 41′ 47,″689

„ Morella — Mola — Matas = 319 59 51,242.

Die Uebereinstimmung der aus beiden Rechnungen hervorgehenden Entfernung ist vollständig, während der unbedeutende Unterschied von resp. 0,″03 und 0,″02 in den Richtungen der Verbindungslinie an beiden Endpunkten, vermuthlich aus der Annahme der Dreiecke als sphärische, während sie wirklich sphäroidische sind, entsteht. Da beide Reihen so gewählt sind, dass sie keine Dreiecksseite miteinander gemein haben, so gewährt ein übereinstimmendes Endresultat beider eine Bestätigung der Richtigkeit der Berechnung der Dreiecksseiten (§ 7). Indessen ist die ganze Rechnung aufmerksam geführt, so wie auch in verschiedenen ihrer Theile von Herrn SCHLÜTER wiederholt, so dass ein ausser den Grenzen der Annäherung der angewandten Logarithmen liegender Fehler nicht wahrscheinlich ist.

9.

Es ist nur noch erforderlich, aus der gegenseitigen Lage der beiden Endpunkte der Messung die Entfernung ihrer Parallelen abzuleiten. An dem nördlichen Endpunkte Matas ist die Richtung des Meridians nicht bestimmt worden, wohl aber an dem wenig davon entfernten Montjouy, wo auch die Polhöhe beobachtet ist. An dem südlicheren Endpunkte Mola ist eine lange Reihe von Beobachtungen mit einem Mittagsfernrohre gemacht worden, deren Zweck die genaueste Bestimmung des Azimuths eines Meridianzeichens war, zwischen welchem und dem Dreieckspunkte Campvey der Winkel sorgfältig gemessen ist. Dieses geht aus einer Stelle des Werkes der Herren BIOT und ARAGO (S. 244) hervor; allein obgleich die Beobachtungen am Mittagsfernrohre in ihrer ganzen Ausdehnung mitgetheilt worden sind, so findet man den Winkel zwischen dem Zeichen, auf welches sie sich beziehen, und Campvey nir-

*) Gradmessung in Ostpreussen S. 140 etc. [§ 36].

**) A. a. O. S. 149 [§ 37].

gends angegeben, so dass, bis zu der Bekanntmachung dieser Angabe, auch kein Nutzen aus jenen Beobachtungen gezogen werden kann.

Man muss also die Richtung der Linie Matas — Mola gegen den Meridian vorläufig durch das in Montjouy beobachtete Azimuth von Matas bestimmen. Dieses Azimuth ist von MÉCHAIN beobachtet worden und wird im II. Bde. der Base du Syst. Métr. p. 138 = 27° 39′ 52″,1 angegeben, von DELAMBRE aber (p. 149) in 27° 39′ 51″,4 verändert. Die Polhöhe von Montjouy ist = 41° 21′ 44″,96 (II. p. 557 — 563 und III. p. 89). Die Entfernung von Montjouy — Matas ist = 9367^{T},8206 (II. p. 839).

Wenn man die Figur der Erde so annimmt, wie sie Astron. Nachr. Nr. 333 [Abh. 131] bestimmt worden ist, nämlich:

Log. der halben kleinen Axe = 6,5133605.073

Log. der Excentricität = 8,9110835

so erhält man durch die Formeln und Tafeln in Nr. 86 der Astron. Nachr. [Abh. 127], die Polhöhe von Matas = 41° 30′ 29″,040 und das daselbst stattfindende Azimuth von Montjouy = 207° 43′ 53″,346. Der Winkel Montjouy — Matas — Montserrat findet sich (II. p. 483 und 484) sowohl unmittelbar als durch zwei andere Winkel, deren Summe er ist, beobachtet, nach gehöriger Ausgleichung = 78° 5′ 58″,43. Setzt man ihn zu dem Azimuthe von Montjouy hinzu, so erhält man das Azimuth von Montserrat = 285° 49′ 51″,78. Zwischen diesem Punkte und Mola ist der Winkel im vorigen §, 319° 59′ 51″,21 — 54° 23′ 41″,28 = 265° 36′ 9″,93 bestimmt worden, woraus, verbunden mit dem Azimuthe von Montserrat, das Azimuth von Mola = 191° 26′ 1″,71 folgt.

Ich habe in dem Buche über die Gradmessung in Ostpreussen § 90 eine einfache Formel bekannt gemacht, welche die Entfernung der Parallelen zweier Punkte, durch die Entfernung der Punkte selbst und die Azimuthe der sie verbindenden geodätischen Linie an beiden, ausdrückt. Da hier das Azimuth in Mola fehlt, so muss man es, falls man diese Formel anwenden will, aus dem Azimuthe in Matas, verbunden mit den Polhöhen beider Punkte, nämlich 41° 30′ 29″,040 und 38° 39′ 56″,11, unter der Annahme der schon angeführten Excentricität der Erdmeridiane, ableiten. Ich finde es

= 10° 57′ 42″,94.

Wenn s die Entfernung der beiden Punkte, S die ihrer Parallelen, α und $\alpha' + 180^0$ die Azimuthe an beiden Punkten, φ und φ' die Polhöhen bedeuten und

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg}\varphi\sqrt{1-ee}, \quad \operatorname{tg} u' = \operatorname{tg}\varphi'\sqrt{1-ee}$$
$$\varrho'\varrho' = 1 + ee\cos(u'+u)$$

gesetzt werden, so ist die erwähnte Formel:

$$S = s\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')}\left\{1 + \frac{1}{12}\left(\frac{s\varrho'}{a}\right)^2\frac{\sin\alpha'\sin\alpha}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')^2} + \text{etc.}\right\}$$

Wendet man sie an, um die Entfernung der Parallelen, sowohl von Matas und Mola, als auch von Matas und Montjouy zu suchen, so hat man, den Angaben des gegenwärtigen §'s zufolge:

	Mola.	Montjouy.
s	165108^{T},586	9367^{T},8206
α	191° 26′ 1″,71	207° 43′ 53″,35
α'	190 57 42,94	207 39 51,40
1. Glied der Formel .	161966^{T},685	8294^{T},371
2. „	+ 1,297	+ 0,001
S	161967,982	8294,372

Die Entfernung der Parallelen von Montjouy und Mola ist der Unterschied dieser beiden Entfernungen, also

= 153673^{T},610.

Dieses Resultat kommt mit dem arithmetischen Mittel der vier, Anfangs angeführten, aus den neueren, in Paris gemachten Rechnungen hervorgegangenen Resultaten bis auf einen Bruch der Toise überein. Ich habe in der That nicht erwartet, dass die vollständige Ausgleichung der Winkelmessungen der Herren BIOT und ARAGO einen sehr erheblichen Einfluss äussern würde; allein ob er nicht bis zu mehreren Toisen steigen würde, konnte man vor der Durchführung der Ausgleichung nicht wissen*). Indessen bin ich der Meinung, dass die Erlangung des unzweideutigen Resultats einer geschlossenen, wichtigen Unternehmung, abgesehen von der Grösse des Zweifels, welchen andere Resultate übriglassen, immer für die Mühe entschädigt, welche mit seiner Aufsuchung verbunden ist.

Die von mir gefundene Entfernung der Parallelen von Montjouy und Mola kann übrigens noch in der Folge Aenderungen erfahren. Von den Aenderungen, welche neue Beobachtungen veranlassen würden, ist hier offenbar nicht die Rede; aber wenn eine vollständige Ausgleichung der Winkel der nördlich von Matas liegenden Dreiecke der französischen Gradmessung zu einem neuen, von dem angenommenen verschiedenen Werthe der Entfernung Montserrat — Matas führen, oder wenn das auf Mola beobachtete Azi-

*) Berechnet man z. B. die Seite Desierto — Montgo, sowohl aus dem Dreiecke Desierto — Espadan — Montgo, als auch aus den beiden Dreiecken Desierto — Espadan — Cullera und Desierto — Cullera — Montgo, indem man die auf den einzelnen Dreieckspunkten ausgeglichenen Winkel (§ 2) nur noch zu der richtigen Summe der 3 Winkel jedes Dreiecks ausgleicht, so erhält man zwei, mehr als 4 Toisen von einander verschiedene Werthe derselben.

muth bekannt werden sollte, so würden der jetzt herausgebrachten Entfernung der Parallelen von Montjouy und Mola Verbesserungen hinzuzusetzen sein, welche jedoch beide fast ohne Mühe gefunden werden können.

10.

Ich komme nun zu den Aenderungen, welche die in Nr. 333 [Abh. 131] bekannt gemachte Untersuchung der Figur und Grösse der Erde, durch die Berichtigung eines Theils der französischen Gradmessung erfährt. Die Seite 336 [p. 42] mitgetheilte Zusammenstellung der einzelnen Theile dieser Gradmessung wird jetzt in die folgende verändert:

4. Französische Gradmessung.

Formentera.	38°39′ 56,″11		
Montjouy . .	41 21 44,96	2°41′ 48,″85	153673,T61
Barcelona. .	41 22 47,90	2 42 51,79	154616,74
Carcassonne.	43 12 54,30	4 32 58,19	259172,61
Evaux	46 10 42,54	7 30 46,43	428019,31
Panthéon . .	48 50 49,37	10 10 53,26	580312,41
Dünkirchen.	51 2 8,35	12 22 12,74	705257,21

Die durch sie gegebenen Bedingungsgleichungen (S. 341 und 343 [p. 45]) werden

$$x_4^1 - x_4 = +3,''991 + 0,9713\,p + 0,8601\,q$$
$$x_4^2 - x_4 = +0,646 + 0,9772\,p + 0,8642\,q$$
$$x_4^3 - x_4 = +0,026 + 1,6378\,p + 1,1889\,q$$
$$x_4^4 - x_4 = -5,035 + 2,7041\,p + 1,2671\,q$$
$$x_4^5 - x_4 = +1,191 + 3,6655\,p + 0,8659\,q$$
$$x_4^6 - x_4 = +5,171 + 4,4537\,p + 0,2051\,q$$

Die ihnen entsprechenden Werthe von (m), (a), (b), (am), u. s. w. (ebendaselbst) werden:

$(m) = +5,990 \quad (am) = +18,3309 \quad (bm) = -0,2661$
$(a) = 14,4096 \quad (aa) = 45,1641 \quad (bb) = 5,2976$
$(b) = 5,2513 \quad (ab) = +11,1409$

Ihr Beitrag zu den beiden Gleichungen, welche p und q bestimmen, wird, statt des früheren (S. 343):

	$(am_,)$	$(aa_,)$	$(ab_,)$	$(bm_,)$	$(bb_,)$
4	+6,0003	15,5021	+0,3313	−4,7597	+1,3583

und diese beiden Gleichungen selbst verwandeln sich in:

$$0 = +38,3095 + 47,6224\,p + 96,8905\,q$$
$$0 = +65,1841 + 96,8905\,p + 480,0274\,q.$$

Ihre Auflösung ergibt:

$p = -0,896192$; Gewicht $= 28,067$
$q = +0,045098 \ldots\ldots = 282,899.$

Diese neuen Werthe von p und q ergeben eine veränderte Darstellung der Polhöhen, auf welchen die 10, der Untersuchung zum Grunde gelegten Gradmessungen beruhen; nämlich, statt der Seite 348 [p. 46] mitgetheilten die folgende:

1. Peruanische Gradmessung.		Blenheim . . .	+2,″705
Tarqui. . . .	−0,″606	Arburyhill . .	+1,395
Cotchesqui . .	+0,606	Clifton	−3,679
2. 1ste Ostindische.		6. Hannovrische Gradmessg.	
Trivandeporum	−0,271	Göttingen . .	−2,493
Paudree. . . .	+0,271	Altona	+2,493
3. 2te Ostindische.		7. Dänische.	
Punnae	−1,470	Lauenburg . .	+0,451
Putchappolliam	−1,712	Lysabbel . . .	−0,451
Dodagoontah .	+4,016	8. Preussische.	
Namthabad. .	−1,447	Trunz	−0,907
Daumeragidda	−0,065	Königsberg . .	−1,448
Takal K'hera .	+3,537	Memel	+2,355
Kullianpoor .	−2,859	9. Russische.	
4. Französische.		Belin	−1,732
Formentera .	+0,955	Nemesch . . .	−2,384
Montjouy . . .	+4,115	Jacobstadt . .	+1,826
Barcelona . .	+0,764	Bristen	+2,627
Carcassonne .	−0,433	Dorpat	−1,044
Evaux.	−6,447	Hochland . . .	+0,607
Panthéon . . .	−1,099	10. Schwedische.	
Dünkirchen .	+2,144	Malörn	+0,560
5. Englische.		Pahlawara . .	−0,560
Dunnose . .	−1,816		
Greenwich . .	+1,396		

Die Summe der Quadrate dieser Aenderungen der Polhöhen ist $= 181,221$ und der mittlere Werth jeder derselben

$$= \sqrt{\frac{181,221}{38-12^*)}} = \pm 2,''640;$$

woraus, verbunden mit den Gewichten der Bestimmungen von p und q, die mittleren Fehler dieser Grössen

$$= \pm 0,4982 \text{ und } = \pm 0,15697,$$

oder die mittleren Fehler von

$$i = \pm 0,00004982$$
$$k = \pm 0,015697$$

hervorgehen.

Die durch die Aenderung der französischen Gradmessung berichtigte Untersuchung ergibt also den Werth des mittleren Grades des Meridians $= g$, und die von der Abplattung der Erde abhängende Grösse α (S. 338) [p. 44]

$$g = \frac{57008}{1-0,0000896192} = 57013,T109 \qquad \underbrace{\pm 2,T8403}_{\text{M. Fehler.}}$$

$$\alpha = \frac{1+0,0045098}{400} = 0,0025112745 \pm 0,000039243$$

*) Nicht $= 38-10$, welche Zahl in Nr. 333 der Astron. Nachr. aus Versehen angewandt ist [s. p. 46].

Aus dieser Bestimmung folgt, auf die in Nr. 333 angewandte Art:

$$n = \frac{a-b}{a+b} = 0{,}0016741848$$

$a : b = 299{,}1528 : 298{,}1528$; m. F. $= \pm 4{,}667$ Einh.

$a = 3272077^{T}{,}14$ $\quad \log a = 6{,}5148235.337$

$b = 3261139{,}33$ $\quad \log b = 6{,}5133693.539$

$\log e = 8{,}9122052$, $\log \sqrt{1-ee} = 9{,}9985458.202$

und endlich die Länge des Erdquadranten

$$= 5131179^{T}{,}81 = 10000855{,}76^{met.}; \quad \text{m. F.} = \pm 498{,}23^{met.}$$

Man erhält hieraus folgende Ausdrücke:

1. die Länge eines Meridiangrades, dessen mittlere Polhöhe $= \varphi$ ist:
$$57013^{T}{,}109 - 286^{T}{,}337 \cos 2\varphi + 0^{T}{,}599 \cos 4\varphi - 0{,}001 \cos 6\varphi;$$*)
2. Die Länge eines Grades des Parallels:
$$p = 57156^{T}{,}285 \cos\varphi - 47^{T}{,}825 \cos 3\varphi + 0^{T}{,}060 \cos 5\varphi;$$
oder, wenn $\sin\psi = e \sin\varphi$ angenommen wird:
$$\log p = 4{,}7567009.0 + \log\cos\varphi - \log\cos\psi;$$
3. die Halbmesser der Krümmung im Meridiane $= r'$, in der darauf senkrechten Richtung $= r''$, in dem Azimuthe $\alpha = r$:
$$\frac{\omega}{r'} = 0{,}''06314417 + 0{,}''00031714 \cos 2\varphi + 0{,}00000013 \cos 4\varphi$$
$$\frac{\omega}{r''} = 0{,}06293257 + 0{,}00010536 \cos 2\varphi - 0{,}00000004 \cos 4\varphi$$
oder
$$\log \frac{\omega}{r'} = 8{,}8025099.6 + 3 \log\cos\psi$$
$$\log \frac{\omega}{r''} = 8.7996016.0 + \log\cos\psi$$
und
$$\frac{\omega}{r} = \lambda + \lambda' \cos 2\alpha$$
wo
$$\lambda = 0{,}''06303837 + 0{,}''00021125 \cos 2\varphi + 0{,}00000004 \cos 4\varphi$$
$$\lambda' = 0{,}00010580 + 0{,}00010589 \cos 2\varphi + 0{,}00000009 \cos 4\varphi$$
4. Die Entfernung vom Mittelpunkte der Erde $= \varrho$ und sogenannte verbesserte Breite $= \varphi'$:
$$\log \varrho \cos\varphi' = \log\cos\varphi - \log\cos\psi$$
$$\log \varrho \sin\varphi' = \log\sin\varphi - \log\cos\psi - 0{,}0029083.6.$$

---

135. Gradmessung in Ostpreussen und ihre Verbindung mit Preussischen und Russischen Dreiecksketten. Ausgeführt von F. W. Bessel und J. J. Baeyer. (Berlin, 1838.)**)

(Mit 3 Tafeln.)

Vorwort.

Im Jahre 1830 befahl des Königs Majestät die Ausführung der astronomisch-geodätischen Arbeiten, welche wir jetzt bekannt machen.

Die Kaiserlich Russische Regierung hatte der unsrigen im Jahre 1829 den Wunsch zu erkennen gegeben, dass der Director der Königsberger Sternwarte in den Stand gesetzt werden möge, eine trigonometrische Verbindung zwischen den, im Russischen Reiche durch Herrn Generalmajor von Tenner Exc. ausgeführten Messungen und der genannten Sternwarte herzustellen. Die Bereitwilligkeit von unserer Seite, diesen Wunsch zu erfüllen, war den Vortheilen angemessen, welche diese Verbindung für die Kenntniss der Figur der Erde versprach. Gegen Westen von dem Lande, in welchem sie auszuführen war, liegen ausgedehnte Gradmessungen, in Frankreich, England, Hannover und Dänemark, und es ist eine mit Sorgfalt gemessene Dreieckskette vorhanden, welche Herr Generallieutenant von Müffling Exc., von den Dreiecken des Herrn Tranchot angefangen und durch Hessen, Thüringen und Brandenburg nach Schlesien geführt hat, welche die, schon mit einander verbundenen Französischen und Englischen Gradmessungen nicht nur mit der Dänisch-Hannövrischen Gradmessung, sondern auch mit Bayrischen und Oesterreichischen Vermessungen in Verbindung setzt, und welche unter dem gegenwärtigen Chef des Königlichen Generalstabes, Herrn Generallieutenant Krauseneck Exc., fortgesetzt und durch das Grossherzogthum Posen und Westpreussen bis in die Nähe des frischen Haffs geführt ist. Gegen Osten liegen zunächst die Dreiecke des Herrn Generalmajor von Tenner Exc., welche mit seiner

*) [Im Original ... $+ 0^{T}{,}611 \cos 4\varphi + 0^{T}{,}001 \cos 6\varphi$; corrigirt nach einer Mittheilung des Herrn Prof. Jordan in Karlsruhe, welcher dazu bemerkt: „Den Fehler $+ 0{,}001 \cos 6\varphi$ sieht man sofort ein; dagegen der falsche Coefficient 0,611, welcher sehr schädlich ist, kann nur durch sehr weitgreifende Nachrechnung gefunden werden, welche ich auf zwei verschiedenen Wegen gemacht habe. Ich habe diesen Fehler bereits in meinem „Kalender für Vermessungskunde“ für 1876 S. 160 angezeigt.“]

**) [Auszüge aus 322 d. a. Verz. — S. auch Baeyer, Die Küstenvermessung, Berlin 1849; Die Verbindungen der preussischen und russischen Dreiecksketten bei Thorn und Tarnowitz, Berlin 1857. — Br. m. O. II. 263. 365. 374 fl. 381 fl. 387. 389. 414. 423. 424. — Berichtigungen und Bemerkungen zu p. 55. 70 und 253 des Originals verdankt der Herausgeber Herrn Professor Jordan in Karlsruhe. — Die Tafeln I—IV, sowie VI des Originals sind hier etwas (um $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{8}$) reducirt gegeben; Taf. V, das Terrain der Basismessung zwischen Trenk und Mednicken in 1 : 25000 d. nat. Gr. weggelassen.]

eigenen Gradmessung und der jetzt in Finland fortgesetzt werdenden des Herrn Etatsraths von Struve Exc. zusammenhängen. Man konnte also, indem man Ostpreussen mit einer Dreieckskette überzog und diese gegen Westen an die letzte Dreiecksseite des Königlichen Generalstabes und gegen Osten an eine Seite der Russischen Dreiecke anschloss, eine ununterbrochene trigonometrische Verbindung von Formentera und von dem nördlichen England bis zu dem südlichsten Endpunkte der Tenner'schen Gradmessung und dem nördlichsten der Struve'schen erhalten; eine Verbindung, welche, indem sie auch die meisten der europäischen Sternwarten berührt und also, durch die Vergleichung häufiger und über den grössten Theil von Europa vertheilter astronomischen Bestimmungen, mit der beziehungsweisen Lage der bestimmten Punkte auf der Oberfläche der Erde, eine Grundlage für die Bestimmung der Figur der Erde, wenigstens in dem Umfange dieses Welttheils erhalten, welche den darauf zu gründenden Schlüssen viel grösseres Gewicht verhiess, als die abgesonderten Gradmessungen bisher haben gewähren können.

Des Königs Majestät geruhete zu bewilligen, dass die Mittel und die Kräfte des Königlichen Generalstabes, vereinigt mit dem Unterzeichneten, diese Verbindung bewirken sollten. Wir beschlossen, uns nicht mit einer blossen Reihe von Winkelbeobachtungen, zwischen der Königsberger Sternwarte und den Preussischen und Russischen Dreiecksketten, zu befriedigen, sondern auch das Maass der Dreiecksseiten durch eine neue Grundlinie unabhängig festzusetzen; sowie auch, an den Verbindungspunkten mit den genannten Dreiecksketten, die Polhöhen und die Richtungen der Meridiane durch astronomische Beobachtungen zu bestimmen. Unsere Arbeit bewirkt daher nicht nur die beabsichtigte Verbindung der beiden Dreiecksketten, sowohl unter sich, als mit der Königsberger Sternwarte, sondern sie gewährt auch jeder derselben eine vollständige Vergleichung und ist endlich eine für sich selbst bestehende Gradmesung.

Im Jahre 1831 fingen wir die Ausführung unserer Arbeit an, wurden aber durch die auch unser Land heimsuchende Cholera zu frühzeitig unterbrochen, um ausser Vorbereitungen, einen ihrer Theile beendigen zu können. Im folgenden Jahre projectirten wir das Dreiecksnetz und erkannten, dass es uns gelingen werde, zwischen unseren äussersten, etwas über 100000 Toisen von einander entfernten Punkten Trunz und Memel, zwei von einander sichtbare Punkte zu finden, von deren einem man Trunz, von dem anderen Memel sehen konnte. Wir erhielten hierdurch die Möglichkeit, die Richtungen der Meridiane von Trunz und Memel durch nur zwei Winkelmessungen mit einander zu vergleichen; dieselbe Vergleichung zwischen Trunz und Königsberg konnten wir durch eine Winkelmessung erhalten. Indem diese einfache Vergleichungsart der Richtungen der Meridiane uns in den Stand setzen musste, sie mit beträchtlicher Genauigkeit auszuführen, so unterliessen wir nicht, diesen Vortheil weiter zu verfolgen, und neben dem Beitrage zur Bestimmung der Figur der Erde, welcher durch die Beobachtung der Polhöhen zu erlangen war, noch einen zweiten zu suchen, welcher auf der Beobachtung der Richtungen der Meridiane und ihrer Vergleichung mit einander beruhet. Wenn, wie in dem Falle unseres Dreiecksnetzes, die Richtung von einem astronomisch bestimmten Punkte zu einem anderen weder mit dem Meridiane zusammenfällt noch ihn senkrecht durchschneidet, sondern sich dem Azimuthe von 45° mehr oder weniger nähert, so sind die beiden eben genannten Beiträge hinreichend zur Bestimmung eines Rotationssphäroides von gegebener Art und der Drehungsaxe der Erde paralleler Axe, welches die beiden Punkte horizontal berührt. Wenn also die Erde wirklich ein Sphäroid dieser Art ist, so können ihre Figur und Grösse durch eine Gradmessung vollständig bestimmt werden. Es scheint, dass man diese Bemerkung vor unserem Versuche nie verfolgt habe; allein auf das Eigenthum derselben machen wir keinen Anspruch, da schon unser grosser deutscher Astronom Tobias Mayer, wie aus einer wieder aufgefundenen und im Juni 1836 in den Astronomischen Nachrichten des Herrn Etatsrath Schumacher abgedruckten Note hervorgeht, dieselbe Idee gehabt hat und nur in der Art, wie er sich ihre Ausführung dachte, den Ansichten und Hülfsmitteln seiner Zeit gemäss, von unserer wirklichen Ausführung derselben verschieden war.

Nachdem wir im Jahre 1832 das Project unseres Dreiecksnetzes vollendet, auch Beobachtungsstationen eingerichtet und einige durch Wälder gehende Gesichtslinien durchgehauen hatten, um nicht gezwungen zu sein, unsere Dreieckspunkte auf hohe Gerüste zu verlegen, führten wir die astronomischen Beobachtungen in Trunz aus. Darauf beschäftigte uns ein Versuch, die Länge der Grundlinie zu messen, deren Endpunkte schon unter der Oberfläche des Bodens festgelegt und über derselben durch gemauerte Pfeiler bezeichnet waren; allein fast ununterbrochener, heftiger Regen erweichte den Boden so sehr, dass die zur Festlegung der Messstangen ergriffenen Massregeln sich ungenügend erwiesen, und wir nach dem Verluste von 12 Tagen gezwungen wurden, die Messung einem günstigeren Jahre vorzubehalten. Da inzwischen ein grosser Theodolit, dessen Verfertigung Herr Ertel in München übernommen hatte, angekommen war, so konnten wir noch in diesem Jahre Winkelmessungen an beiden Endpunkten der Grundlinie und an Hülfspunkten, welche ihre Verbindung mit dem Netze der Hauptdreiecke gewähren sollten, ausführen. Im Spätherbste hatten wir in Memel eine Zusammenkunft mit Herrn Generalmajor von Tenner Exc., in welcher die, der Verbindung der beiderseitigen Dreiecke wegen nöthigen, gemeinschaftlichen Massregeln verabredet wurden.

Der Sommer 1833 wurde ausschliesslich auf die Beobachtungen der Winkel des Dreiecksnetzes verwandt; der Anfang des Sommers 1834 auf die Vollendung derselben. Sein Ende wandten wir auf die astronomischen Beobachtungen in Memel und auf eine Wiederholung der früheren Bestimmung der Richtung des Meridians von Trunz, welche aus Gründen nöthig wurde, die man in dem die astronomischen Beobachtungen enthaltenden Abschnitte kennen lernen wird. Später wurde die Grundlinie gemessen.

Im Jahre 1835 wurde eine besondere Dreiecksverbindung ausgeführt, deren Zweck war, die Königsberger Sternwarte mit dem Netze der Hauptdreiecke sicherer zu verbinden, als durch zwei von ihr sichtbare Punkte desselben hatte bewirkt werden können. Jetzt fehlte nur noch die Beobachtung auf der Königsberger Sternwarte derselben Sterne, auf welchen die Bestimmungen der Polhöhen von Trunz und Memel beruheten. Sie musste mit demselben Apparate, welcher an diesen Punkten angewandt war, ausgeführt werden, konnte aber 1835 nicht vorgenommen werden, indem weder der eine noch der andere von uns in Königsberg gegenwärtig sein konnte. Sie wurde also auf 1836 verschoben und in diesem Jahre wirklich ausgeführt.

Wir haben noch die angenehme Pflicht zu erfüllen, Die zu nennen, die uns in unserer Arbeit unterstützt haben. Vor allen nennen wir Herrn Premierlieutenant Kulenkamp, dessen Kennt-

nisse und Umsicht uns von dem grössten Nutzen gewesen sind. Er hat nicht nur die Winkelmessungen auf den Punkten Legitten, Gilge, Kalleninken und Algeberg ausgeführt, sondern auch die Rechnungen, welche die Messungen der Grundlinie erforderten und die weit umfangreicheren, welche die vollständige Ausgleichung aller Winkelbeobachtungen und die endliche Construction des Dreiecksnetzes herbeiführten, gemeinschaftlich mit einem von uns während seines Aufenthalts in Königsberg im Winter 1834—35 vollendet, so dass von Tage zu Tage jede Zahl verglichen werden konnte und wir die vollkommenste Ueberzeugung von ihrer Richtigkeit erhielten.

Ferner nennen wir Herrn Ingenieur-Geographen Bertram, dessen genaue Bekanntschaft mit Arbeiten von der Art der ausgeführten uns vielfältige Hülfe gewährt hat, wenn wir ihn auch, um diese allenthalben wo sie nöthig war benutzen zu können, nicht mit einem abgesonderten Theile der Arbeit beschäftigen wollten. Aehnliche Hülfe genossen wir von den Herren Lieutenants von Borke, von Happe und von Mörner; von dem letzteren auch in der Wiederholung einzelner Theile der Rechnungen.

Besonders dankbar erwähnen wir der Unterstützungen, welche Herr Ingenieur-Hauptmann Schwink und Herr Professor Feldt in Braunsberg den Messungen unserer Grundlinie haben angedeihen lassen; beide durch die Uebernahme mühsamer und oft mit beträchtlicher Aufopferung verbundener Geschäfte bei der Ausführung selbst; der erstere überdies durch den Bau der Pfeiler an den Endpunkten der Grundlinie, an ihren Hülfspunkten und an den Hauptdreieckspunkten Galtgarben und Condehnen. Bei den Messungen der Grundlinie haben wir uns auch der Hülfe der Herren Albert Busolt und Wilhelm Bessel erfreuet, welchen wir einzelne Operationen des aus mehreren zusammengesetzten Geschäftes übertrugen. Der letztere hat endlich die schon erwähnte, zur sichereren Verbindung der Sternwarte mit dem Dreiecksnetze führende Operation allein übernommen.

Was uns selbst anlangt, so haben wir während der Sommermonate der Jahre 1831—34 fast ununterbrochen zusammen gelebt und würden den Antheil, den jeder von uns an der vollendeten Arbeit hat, zu trennen kaum im Stande sein, wenn wir auch kein Vergnügen darin fänden, ihn geflissentlich zu vermischen. Wo es nöthig war, einen von uns zu nennen, nämlich bei der Ausführung der astronomischen Beobachtungen, haben wir es nicht versäumt. Wir würden kaum von einem Theile der Arbeit sagen können, dass ihn Einer allein ausgeführt habe, wenn nicht die Entfernung unserer Wohnorte und die Verschiedenheit unserer sonstigen Geschäfte uns während der den Arbeiten im Freien ungünstigen Jahreszeiten getrennt hätten. Nur Ein Geschäft ist, seiner Natur nach, Einem ganz allein zugefallen, und dieses ist die Verfassung des Buches, welches wir jetzt bekannt machen. Indem ich hierin allein hervortreten muss, benutze ich die mir dadurch gegebene Gelegenheit, Herrn Major Baeyer für sein inniges Eingehen in alle gemeinschaftlichen Maassregeln freundschaftlich zu danken.

F. W. Bessel.

Erster Abschnitt.

Grundlinie.

Die Aufgabe, die auf die Oberfläche des Meeres reducirte Entfernung zweier Punkte, welche die Grundlage eines Dreiecksnetzes werden sollen, durch ein gegebenes Maass zu messen, hat die Bemühungen der Geodäten und Mechaniker fast bei jeder neuen Anwendung neu in Anspruch genommen und vielfältige, mehr oder weniger wesentlich verschiedene Verfahrungsarten hervorgebracht. Es ist nicht zu bezweifeln, dass das zu erreichende Ziel auf verschiedenen Wegen erreicht werden könne: jede Abweichung von einem früher angewandten Verfahren darf also nicht dadurch gerechtfertigt werden, dass man Mängel an diesem nachweiset; vielmehr werden die in jedem Falle zu Gebote stehenden Hülfsmittel berücksichtigt und die zu ergreifenden Massregeln denselben angemessen angeordnet werden müssen. Wenn ein Mechaniker wie Repsold seine Hülfe verleihet, so können Messstangen und sonstige Einrichtungen gemacht werden, wie Schumacher sie bei der Messung seiner Grundlinie angewandt hat*). Wenn solche Hülfe fehlt, so müssen andere Wege eingeschlagen werden, welche jedoch nicht weniger sicher zum Ziele führen dürfen: trotz der Willkür in der Wahl der Mittel müssen gewisse Forderungen immer erfüllt werden.

Dass die Längeneinheit von dem vorhandenen Originale des Maasses auf die anzuwendenden Messstangen genau müsse übertragen werden können, ist eine dieser Forderungen; die übrigen sind, dass die Messstangen entweder unmittelbar wagerecht gelegt werden können, oder das Mittel gewähren, den Einfluss ihrer Neigung aus dem Resultate zu schaffen; dass sie in gerader Linie aufeinander folgen können; dass die Veränderungen ihrer Länge, welche aus Veränderungen der Wärme entstehen, in jedem Augenblicke genau bekannt seien. Wenn diese Forderungen durch die Einrichtung der Messstangen erfüllt und diese dann so angewandt werden, dass die Lage jeder derselben, während der Zeit, während welcher sie als unveränderlich vorausgesetzt wird, wirklich unverändert bleibt, so wird die Messung nichts zu wünschen übrig lassen; auch durch eine Wiederholung in soweit bestätigt werden, dass die Unterschiede in den Grenzen der kleinen Fehler der Beobachtungen liegen, welche durch Verfeinerung des Apparates bis zum Unbedeutenden verengt werden können.

Borda hat auch bei der Einrichtung, welche er den Messstangen gegeben hat, die eigentlichen Schwierigkeiten der Aufgabe von Nebensachen zu unterscheiden gewusst. Er hat die Messstangen zuerst so angewandt, dass sie sich einander nicht berühren, also in eine gewisse Entfernung von einander gelegt werden, deren

*) Schreiben an Herrn Dr. W. Olbers in Bremen. Altona 1821.

Fig. 1.

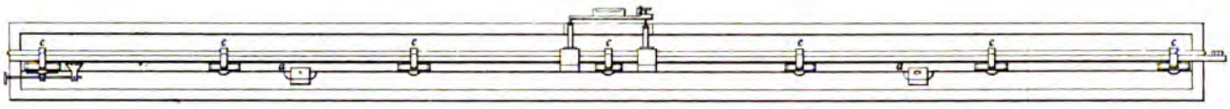


Fig. 2.

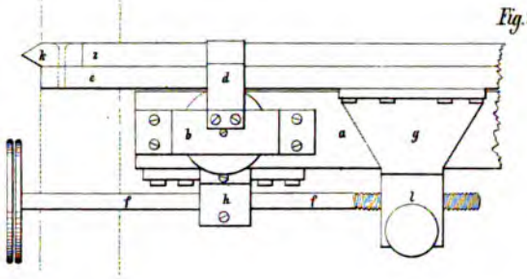


Fig. 3.

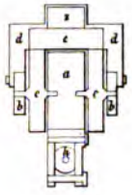


Fig. 4.

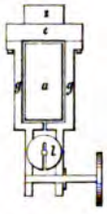


Fig. 5.

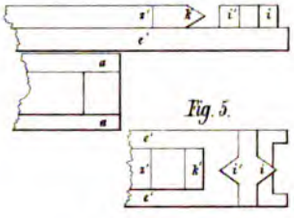


Fig. 6.

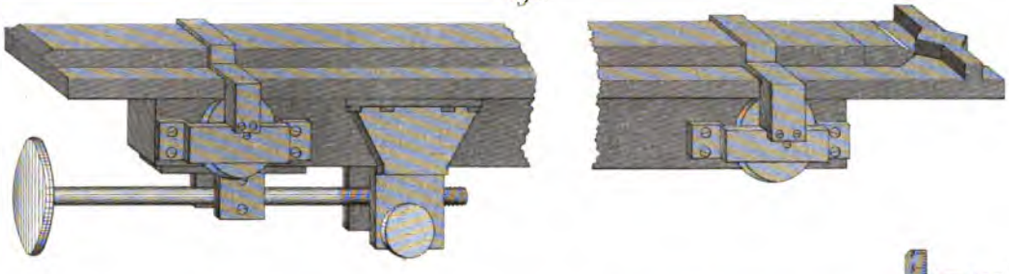


Fig. 8.

Fig. 7.

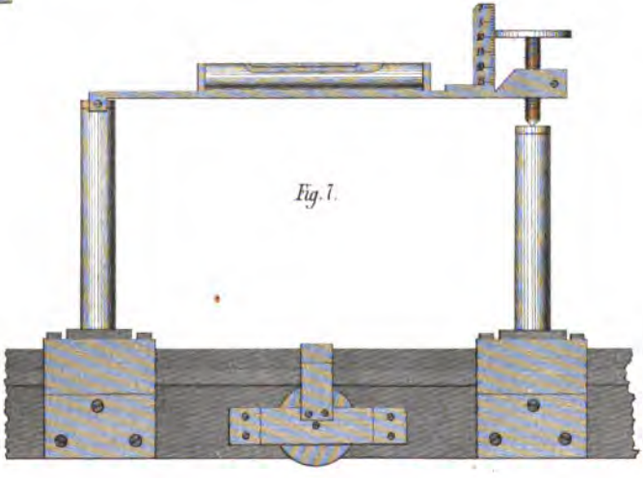


Fig. 10.

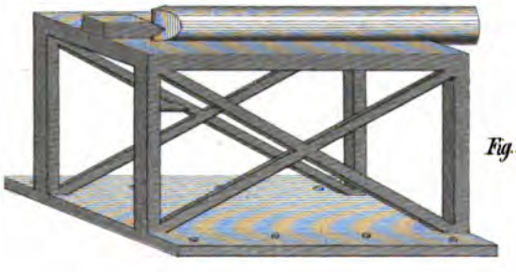
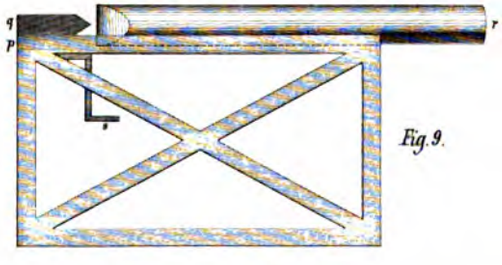


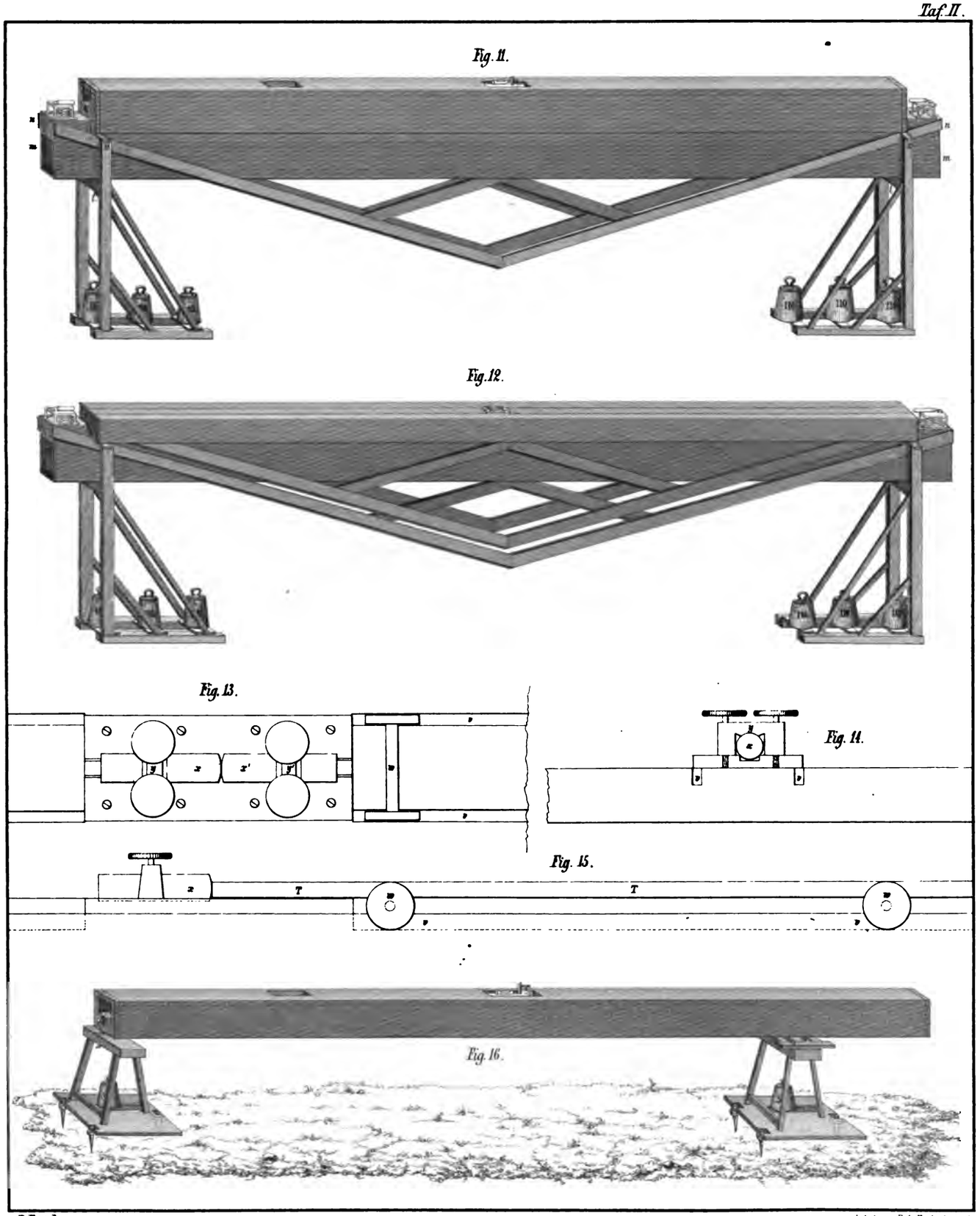
Fig. 9.



R.E. rod.

Lith. Anst. v. E. A. Funke, Leipzig

Bessel's Basisapparat.

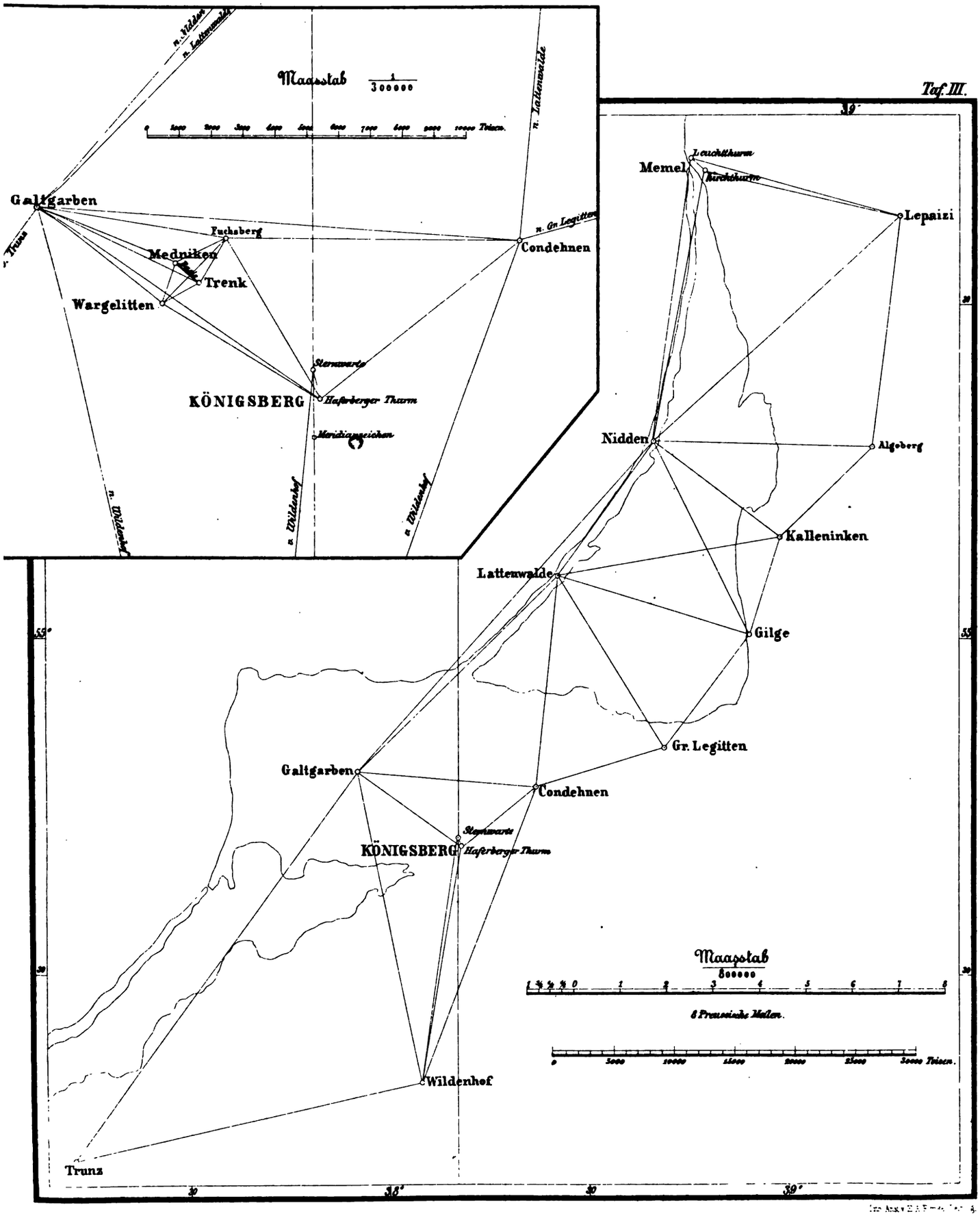


R. E. red.

Lith. Anst. v. E. A. Funke Leipzig

Bessel's Basisapparat.

Taf. III.



Maasstab 1/300000
0 1000 2000 3000 4000 5000 6000 7000 8000 9000 10000 Toisen.
n. Nidden
n. Lattenwalde
n. Lattenwalde
Galtgarben
Fuchsberg
Medniken
Trenk
Wargelitten
n. Gr. Legitten
Condehnen
Sternwarte
KÖNIGSBERG
Haferberger Thurm
Meridianzeichen
n. Wildenhof
n. Wildenhof
n. Wildenhof
Memel
Leuchtthurm
Kirchthurm
Lepaizi
Nidden
Algeberg
Kalleninken
Lattenwalde
Gilge
Gr. Legitten
Galtgarben
Condehnen
Sternwarte
KÖNIGSBERG
Haferberger Thurm
Wildenhof
Trunz
Maasstab 800000
1 ¾ ½ ¼ 0 1 2 3 4 5 6 7 8
8 Preussische Meilen.
0 5000 10000 15000 20000 25000 30000 Toisen.
39°
55°
30
38°
30
39°

Grösse gemessen wird; hierdurch hat er den Einfluss der folgenden Stange auf die vorhergehenden gänzlich vermieden. Ferner hat er jede seiner von Platin gemachten Stangen mit einer Stange von Kupfer verbunden, welche jene fast der ganzen Länge nach bedeckt und an einem ihrer Enden auf derselben befestigt ist, so dass das andere Ende bei einer Aenderung der Wärme, beziehungsweise auf jene, um den Unterschied der Ausdehnungen beider Metalle bewegt wird; die Grösse dieser relativen Aenderung der Länge der Stangen, welche durch eine Eintheilung angegeben wird, wird das Mittel zur Erkennung der absoluten Aenderung der Länge der Stange von Platin. Indem die Gleichheit der Wärme beider Stangen, an allen Punkten ihrer Länge, durch ihr Aufeinanderliegen verbürgt wird, gewährt die relative Ausdehnung einen sicheren Schluss auf die absolute und macht die Kenntniss der Wärme der Stangen selbst überflüssig. Wenn man die grosse Schwierigkeit erwägt, welche die Bestimmung der Wärme eines festen Körpers immer, und vorzüglich bei schnellen Aenderungen der Wärme der Luft, darbietet, so muss man diese Vermeidung ihrer Kenntniss als eine sehr wesentliche Verbesserung der Messstangen erkennen. — Zur Messung der Zwischenräume der Stangen hat REICHENBACH, statt des von BORDA angewandten, mit einem Nonius versehenen Schiebers, einen in einem sehr spitzen Winkel geschliffenen Keil eingeführt, welcher so weit bis er beide Stangen berührt, zwischen sie geschoben wird. Auch REPSOLD hat diesen Keil, von Glas verfertigt, bei dem Schumacher'schen Apparate benutzt. — REICHENBACH'S Stangen endigen sich in keilförmigen Schärfen, deren eine wagerecht, die andere lothrecht ist; REPSOLD'S Stangen sind an einem Ende durch eine senkrechte Ebene abgeschnitten, am anderen kugelförmig. Die erstere Einrichtung ist nothwendig, wenn man die Messung mit geneigten, den Unebenheiten des Bodens folgenden Stangen vornehmen will; die andere setzt die wagerechte Aufstellung der Stangen voraus, auf deren Erlangung der Schumacher'sche Apparat eingerichtet ist. — Wir haben diese Hauptpunkte der Einrichtung eines Messapparates, vor der Beschreibung des unsrigen, nicht unerwähnt lassen wollen, damit leichter übersehen werden könne, wie wir sie benutzt haben.

§. 1. Einrichtung der Messstangen.

Die vier angewandten Messstangen sind von Eisen, etwa 2 Toisen lang, 12 Lin. breit und 3 Lin. dick. Auf ihnen liegen Stangen von Zink, von der halben Breite und der ganzen Dicke der Eisenstangen. Die Figuren 2 bis 6 Taf. I zeigen, in den e, e' bezeichneten Theilen, die Messstangen von Eisen, in den z, z' bezeichneten die Stangen von Zink. An dem Ende ze Fig. 2 sind beide Stangen durch Schrauben und Löthung fest mit einander verbunden; von diesem Ende bis zu dem anderen $z'e'$ sind sie ohne Verbindung. Beide sind fleissig gerade gehobelt, damit sie sich ihrer ganzen Länge nach berühren. Das Eisen ist aus dem Handel genommen, das Zink zu allen vier Stangen aber auf dem Zinkwerke in Neustadt-Eberswalde in einen langen Streifen ausgewalzt, der in Königsberg mit der Säge in vier schmälere Streifen getrennt wurde. Es ist also Grund vorhanden, auf die Gleichheit des zu den vier Stangen verwandten Zinks zu rechnen; die Gleichheit des Eisens kann nicht verbürgt werden. — An beiden Enden der Zinkstange sind Stücken von Stahl aufgelöthet, welche keilförmig abgeschärft sind, wie Fig. 2 und Fig. 5 in k und k' zeigen. Auf die Eisenstange ist das Stück von Stahl ii' aufgeschraubt und gelöthet, welches gleichfalls keilförmige Abschärfungen hat, deren Schneiden senkrecht auf die Ebene der Stange stehen, während die Schneiden der Keile an der Zinkstange ihr parallel sind. Man sieht aus dieser Beschreibung, dass die Entfernung ki die Länge der Messstange bestimmt, und dass die Aenderungen der Entfernung $k'i'$ durch die Wärme die Aenderungen der Länge der Messstange, welche aus derselben Ursache entstehen, andeuten. Man versteht auch leicht, dass bei dieser Einrichtung beabsichtigt wird, die Entfernung zweier, in gerader Linie aufgestellten Stangen, durch das Zwischenschieben eines Glaskeils zwischen das Ende i der einen und das Ende k der anderen zu messen, während die Länge der ersteren durch das Zwischenschieben desselben Glaskeils zwischen k' und i' bekannt werden soll.

Da eine Stange von den angegebenen Abmessungen eine beträchtliche Biegung erfahren würde, wenn sie nur an zwei Punkten unterstützt würde, so hat sie mehrere, und zwar sieben Ruhepunkte, in 2 Fuss Entfernung von einander erhalten. Es würde sehr unzweckmässig gewesen sein, diese Ruhepunkte an dem Holze des Kastens, in welchem die Stange eingeschlossen ist, anzubringen; denn der Einfluss der Feuchtigkeit und der Sonnenstrahlen auf das Holz, sowie auch die unvollkommene Elasticität desselben, bringen fortwährende Aenderungen seiner Figur hervor, deren Einfluss auf die Figur der Stange vermieden werden musste. Dieses ist dadurch erlangt worden, dass man die 7 Ruhepunkte an einer 6 Linien dicken und 14 Linien hohen Stange von Eisen angebracht hat, welche durch die

ganze Länge des Kastens geht und in den verschiedenen Figuren durch *aa* bezeichnet ist. Diese Stange ruhet auf zwei im Kasten befestigten, gabelförmigen Trägern, welche die erste Figur neben den Buchstaben *a, a* zeigt; mit dem einen von ihnen ist sie durch einen Zapfen verbunden, welcher durch den Träger und ein halbkreisförmiges, unter die Stange gelöthetes Stück Eisen geht; mit dem anderen ist die Verbindung ähnlich, jedoch ist hier das Zapfenloch nicht rund, sondern lang. Durch diese Einrichtung wird der Einfluss jeder Aenderung der Figur und Länge des Kastens auf die Stange völlig vermieden.

Die 7 Ruhepunkte der Messstange befinden sich auf der Oberfläche eben so vieler Rollenpaare *c, c...*, deren Anbringungsart an die Stange *aa* die Figuren 2, 3, 6 deutlich machen. Die höchsten Punkte dieser Rollen ragen sehr wenig über die Oberfläche der Stange *aa* hervor. Die Rollen haben etwas ungleiche Durchmesser, welche so bestimmt worden sind, dass eine angespannte Saite alle zugleich berührt, wenn die Stange auf ihren beiden Trägern liegt. Die Oberflächen aller Rollen liegen also in Einer Ebene, obgleich die Stange, an welcher sie sich befinden, durch ihr eigenes Gewicht gebogen wird; allein nachdem die Messstange auf die Rollen aufgelegt ist, entsteht eine neue, jedoch weit kleinere Biegung, welche man zwar auch hätte vermeiden können, welche aber nicht vermieden worden ist, weil sie ganz ohne Einfluss ist, indem sie bei der Bestimmung der Länge der Messstange und bei ihrer Anwendung gleichen Einfluss äussert. Man hätte aus diesem Grunde auch die Biegung der Stange *aa* durch ihr eigenes Gewicht unberücksichtigt lassen können; allein ihre Wegschaffung wurde vorgezogen, um die Messstange der geraden Linie wenigstens sehr nahe zu bringen.

Die Messstange ruhet also, ohne die Stange *aa* zu berühren, auf 7 Rollenpaaren, auf welchen sie sich ihrer Länge nach sehr leicht bewegen lässt; damit sie keine Verschiebungen auf die Seite erleide, sind an jedem Rollenpaare die das Eisen und das Zink der Messstange fast berührenden Stücke *d* (Fig. 2 und 3) angebracht. Die Bewegung auf den Rollen wird durch eine Schraube *ff* hervorgebracht, welche in *h* eine Kugel und in *l* ihre Mutter hat und deren Knopf aus dem Kasten hervorragt.

Um die Neigung der aufgelegten Stange messen zu können, ist in der Mitte der Stange *aa* das Fussgestell einer Wasserwage, Fig. 7 und 8, befestigt. Die beiden aufrechtstehenden Cylinder, welche so mit der Stange *aa* verbunden sind, dass die Messstange frei unter ihnen durchgeht, haben an ihren oberen Enden Platten von gehärtetem Stahl, der eine eine lange, der andere eine runde. In jene greifen zwei Schraubenspitzen ein, um welche die Unterlage der Wasserwage sich drehet; auf dieser ruhet die Spitze einer Schraube, durch deren Drehung die Wasserwage zum Einspielen gebracht werden kann. Die Umdrehungen derselben werden durch eine Scale und durch eine Eintheilung ihres Knopfes in 50 Theile gemessen. Wenn die Angabe dieser Theilungen, welche zu der wagerechten Lage der Messstange gehört, und die Neigung, welche einer ganzen Drehung der Schraube entspricht, ermittelt worden sind, so erfährt man durch das Einspielen der Wasserwage und durch die Ablesung der Theilungen die Neigung der Messstange. Diese Einrichtung leistet ihre Dienste bis zu fast 3 Graden der Neigung.

Die Anbringung von Quecksilberthermometern an so eingerichteten Messstangen ist für den zu erreichenden Zweck gänzlich überflüssig. Will man aber die Längen der Stangen für bestimmte Grade der Temperatur erfahren, oder die durch die beiden Metalle angegebene Temperatur derselben mit der Temperatur der Luft im Kasten vergleichen, so muss man Quecksilberthermometer hinzufügen. Der Kasten jeder unserer Stangen enthält ein solches Thermometer, in der Mitte zwischen dem Mittelpunkte und einem Ende, etwa einen Zoll über der Stange befestigt. Man liest seine Angabe durch eine Glasscheibe ab, welche durch einen Deckel von Holz verdeckt ist, den man bei der Ablesung lüftet. Taf. II Fig. 16 zeigt die unverdeckte Oeffnung, in welcher die Glasscheibe sich befindet.

§ 2. Einrichtung zur Vergleichung der Längen der Messstangen untereinander.

Wenn die Ausdehnungen des Eisens und des Zinks durch die Wärme einander proportional angenommen werden, so sind offenbar die Veränderungen der Entfernung *k'i'* und der Länge der Messstange *ki* (Fig. 2) einander proportional, oder die Veränderungen der Länge der Messstange sind den Angaben des Metallthermometers proportional, unter welcher Benennung hier die Entfernung des freien Endes der Zinkstange von der nach innen gewandten Schneide des auf die Messstange befestigten Stahlstückes verstanden wird. Wenn man also diese Angabe des Metallthermometers für eine der Messstangen durch a bezeichnet; das Verhältniss ihrer Veränderungen zu den Veränderungen der Länge der Stange durch $1 : m$; die zu a gehörige Länge der Stange durch l, die zu $a = 0$ gehörige durch λ, so hat man:

$$l = \lambda - am,$$

welche Gleichung für jede der Stangen vorhanden ist, aber für jede andere Werthe der darin vorkommenden Grössen voraussetzt. Man kann für die vier Messstangen, also:

für Nr. I. .... $l' = \lambda' - am'$
II. .... $l'' = \lambda'' - bm''$
III. .... $l''' = \lambda''' - cm'''$
IV. .... $l^{IV} = \lambda^{IV} - dm^{IV}$

setzen, oder wenn man

$$\lambda' + \lambda'' + \lambda''' + \lambda^{IV} = 4L$$
$$\lambda' = L + x'$$
$$\lambda'' = L + x''$$
$$\lambda''' = L + x'''$$
$$\lambda^{IV} = L + x^{IV}$$

schreibt, statt dieser Ausdrücke auch

$$l' = L + x' - am'$$
$$l'' = L + x'' - bm''$$
$$l''' = L + x''' - cm'''$$
$$l^{IV} = L + x^{IV} - dm^{IV}$$

annehmen. Sobald die Werthe von x', x'' ... und m', m'' ... bekannt sind, sind die Messstangen vollständig, d. h. für jede Angabe ihrer Metallthermometer, unter einander verglichen; sobald auch L bekannt ist, kennt man ihre absoluten Längen eben so vollständig. Die Mittel, durch welche die Kenntniss von x', x'' ... und m', m'' ..., also die vollständige Vergleichung der Stangen unter einander, erlangt worden ist, sollen jetzt beschrieben werden.

Das Wesentliche des angewandten Apparates besteht in zwei Cylindern von Stahl, welche um etwas mehr als die Länge der Messstangen von einander entfernt, sich so in zwei Bahnen bewegen können, dass ihre Axen immer in Einer geraden Linie liegen; in dieselbe gerade Linie wird die Axe einer Messstange gebracht; die Cylinder werden ihr bis zur Berührung ihrer Endflächen mit den die Länge der Stange bestimmenden Schneiden genähert; endlich wird die Lage der Cylinder auf ihren Bahnen beobachtet, welches durch die Anwendung des Glaskeils geschieht, so wie alle Messungen, welche die endliche Bestimmung der Grundlinie erfordert, durch dieses Mittel erlangt werden. Die 9. und 10. Figur stellen diesen Apparat dar; seine Anbringung auf einer, aus trockenem Holze gemachten und durch Streben verstärkten Röhre mn, zeigt Fig. 11. Taf. II. Er besteht aus einer, durch einen festen Fuss von Messing getragenen Platte von demselben Metalle p, auf welcher der Keil von Stahl q fest ist, und auf welcher der Cylinder von Stahl r in einer Bahn liegt, deren Durchschnitt dem Fig. 14 gezeichneten ganz ähnlich ist. Dieser Cylinder ist an seinem, dem Keile q zugewandten Ende keilförmig, an dem der Schneide der Messstange zugewandten kugelförmig abgeschliffen; wenn dieses letztere Ende mit der Schneide an der Messstange in Berührung gebracht ist, so wird der Glaskeil zwischen das erstere Ende und den festen Keil q geschoben. Indem an beiden Enden der Messstange genau dasselbe geschieht, erlangt man hierdurch einen Ausdruck der Länge der Stange: sie ist nämlich gleich der unbekannten Entfernung der festen Keile q an beiden Enden, weniger der gleichfalls unbekannten Summe der Längen der beiden Cylinder r, weniger der Summe der durch den Glaskeil gemessenen Zwischenräume. Wiederholt man dieselbe Operation mit einer anderen der Messstangen, so verschwinden die unbekannten Grössen aus dem Ausdrucke des Unterschiedes der Längen beider Messstangen. Man erlangt also durch diese Einrichtung die gewünschte Vergleichung der Längen der Messstangen untereinander.

Die Einzelnheiten der Einrichtung müssen jedoch noch näher erklärt werden. Die Röhre von Holz, welche den Apparat trägt, liegt auf den Querhölzern tt zweier Böcke (Fig. 11), deren durch Gewichte belastete Füsse auf Steinplatten stehen, welche sich unter dem Fussboden der Königsberger Sternwarte befinden; dieser ist, um die Aufstellung der Böcke von dem Beobachter gänzlich trennen zu können, an den Stellen wo sie stehen, durchbrochen worden. An dem oberen Ende der Böcke sind Eisenstangen u, u eingelegt, welche die Röhre nicht berühren; die auf diese gelegten Messstangen sind also ausser allem Einflusse auf den Apparat. — Die Bahnen für beide Cylinder r sind durch ein, dem seligen Repsold eigenthümliches Verfahren, in eine gerade Linie gebracht worden: es besteht darin, dass man einen, senkrecht auf seine Axe abgeschnittenen und an der Durchschnittsebene polirten Cylinder auf die eine Bahn legt, und nun durch Reflexion des Bildes eines leuchtenden Punkts beurtheilt, ob die reflectirende Ebene senkrecht auf der Linie steht, in welcher die Axe des Cylinders liegen soll. Da diese Linie durch die Axe des anderen Cylinders geht, erlangt man die beabsichtigte Prüfung, indem man ein an drei in gerader Linie liegenden Punkten, deren äussere von dem mittleren gleich weit entfernt sind, durchbohrtes Lineal mit seinem mittleren Loche auf diesen Cylinder steckt und untersucht, ob eine durch das eine der Seitenlöcher durchscheinende Lichtflamme nach dem anderen

zurückgeworfen wird, was durch das hinter diesem Loche befindliche Auge leicht und sicher beurtheilt wird. — Die Forderung, dass die Schneiden an der Messstange genau in der Axe der Cylinder seien, wird sehr leicht erfüllt, indem man die Cylinder umlegt, so dass die keilförmigen Enden derselben den Schneiden zugewandt werden, wodurch man die der Messstange zu gebende Lage unmittelbar erkennt. Durch eine halbe Umdrehung der Cylinder in ihren Bahnen kann man sich davon überzeugen, dass ihre Schneiden genau durch ihre Axen gehen. — Da es überdies erforderlich ist, dass die Schneiden der Cylinder senkrecht, oder wenigstens bei allen zusammen zu verbindenden Beobachtungen, in Beziehung auf die Ebenen der Platten p, gleichliegend sind, so ist auf einem, an dem Apparate befestigten hakenförmigen Stücke ein Strich gezogen, welcher durch ein Loch in der Platte von oben sichtbar ist und auf welchen die Schärfe der Schneide, durch Drehung des Cylinders um seine Axe, gerichtet werden kann. — Sollte der Apparat, während der Dauer der Vergleichungen der verschiedenen Messstangen, durch Veränderungen der Wärme oder Feuchtigkeit der Luft, eine Aenderung erfahren, so würde diese ihren Einfluss auf die Vergleichungen äussern, also eine Unrichtigkeit erzeugen; da man die Ursache dieser Unsicherheit nicht aufheben kann, so fordert die Vorsicht, dass man eine in einer gewissen Reihefolge der Stangen, z. B. I, II, III, IV, gemachte Vergleichung in der umgekehrten IV, III, II, I wiederhole und das Mittel aus beiden als das Resultat ansehe.

Wenn man den Unterschied der unbekannten Entfernung der beiden festen Keile q des Apparates und der unbekannten Summe der Längen der beiden Cylinder durch $L+C$, die Summe der beiden, mit dem Glaskeile gemessenen Entfernungen, für die verschiedenen Messstangen, aber durch n', n'', n''', n^{IV} bezeichnet, so erhält man aus jeder gemachten Vergleichung der vier Stangen die Ausdrücke ihrer Längen:

$$l' = L + C - n'$$
$$l'' = L + C - n''$$
$$l''' = L + C - n'''$$
$$l^{IV} = L + C - n^{IV}$$

Wenn bei jeder Vergleichung die Angabe des Metallthermometers beobachtet ist, so erhält man dadurch andere Ausdrücke derselben Längen der Stangen, nämlich:

$$l' = L + x' - am'$$
$$l'' = L + x'' - bm''$$
$$l''' = L + x''' - cm'''$$
$$l^{IV} = L + x^{IV} - dm^{IV}$$

Durch Vergleichung beider Ausdrücke hat man also:

$$n' = C - x' + am'$$
$$n'' = C - x'' + bm''$$
$$n''' = C - x''' + cm'''$$
$$n^{IV} = C - x^{IV} + dm^{IV}$$

in welchen Gleichungen C, m', m'', m''', m^{IV} und x', x'', x''', x^{IV} unbekannt sind, die Summe der vier letzteren Grössen aber $= 0$ ist. Jede andere Vergleichung der Messstangen führt einen anderen Werth von C ein, indem nicht angenommen werden kann, dass der Apparat sich in der Zwischenzeit nicht verändert habe. Aus h Vergleichungen aller vier Messstangen, oder aus $4h$ Beobachtungen hat man also $h+7$ unbekannte Grössen zu bestimmen, indem die vier sich zu 0 ergänzenden x nur für drei gelten.

Man kann die Vergleichungen der Messstangen unter einander so anstellen, dass sowohl die verschiedenen x als auch die verschiedenen m mit der für die Anwendung zur Messung einer Grundlinie erforderlichen Sicherheit daraus hervorgehen. Diese Sicherheit wird erlangt werden, wenn man sowohl in niedrigen als in hohen Temperaturen die Messstangen mit einander vergleicht, und diesen Vergleichungen andere hinzufügt, bei welchen abwechselnd zwei derselben eine niedrige, die beiden anderen eine hohe Temperatur besitzen, was dadurch erlangt werden kann, dass man die letzteren in ein stark erwärmtes Zimmer bringt, während die ersteren in der Kälte, neben dem Vergleichungs-Apparate, bleiben. Durch dieses Verfahren erspart man besondere pyrometrische Versuche, welche bisher selten mit vollständiger Sicherheit haben gemacht werden können. Es ist zwar keinem Zweifel unterworfen, dass die Stangen, welche von einer grösseren Wärme in eine beträchtlich geringere gebracht werden, etwas von der ersteren verlieren; allein der Verlust ist nicht bedeutend, wenn die Kästen ganz verschlossen gehalten werden und wenn man die Vergleichung ohne Zögerung, gleich nachdem die Stangen die Wärme verlassen haben, vornimmt; in Beziehung auf die Richtigkeit des Resultats ist dieser Verlust gleichgiltig, da die Metallthermometer immer die wahre Wärme der Messstangen anzeigen.

Durch die hier beschriebene Einrichtung kann auch geprüft werden, ob die Schneiden der Messstangen senkrecht auf den Axen derselben stehen. Nachdem nämlich die Bahnen beider Cylinder am Vergleichungs-Apparate, durch das Repsold'sche Verfahren, in Eine gerade Linie gebracht sind, zeigt die Auflegung des senkrecht auf seine Axe abgeschnittenen Cylinders, wel-

cher zu dieser Berichtigung angewandt worden ist, und sein Anschieben an die Schneiden einer gehörig aufgelegten Messstange, unmittelbar das Verlangte: die Ebene am Cylinder muss die Schneiden ihrer Länge nach berühren.

§ 3. Einrichtung zur Erfindung der wahren Längen der Messstangen.

Nachdem die Messstangen vollständig unter einander verglichen worden sind, erfordert die Kenntniss ihrer absoluten Längen für jede Angabe ihrer Metallthermometer nur noch die Erfindung des Werthes der Constante L. Diese kann nur durch Vergleichung der Messstangen, oder einer derselben, mit einem Originalmaasse gefunden werden.

In dem gegenwärtigen Falle ist die Toise das Originalmaass: eine Stange von Eisen von etwa der halben Länge der Messstangen, deren Länge durch die Entfernung ihrer Endflächen, in ihrer Axe genommen, bestimmt wird. Die Aufgabe, zu deren Auflösung eine geeignete mechanische Einrichtung getroffen werden muss, ist also, die Länge einer der Messstangen durch ein so beschaffenes Originalmaass zu messen.

Wenn statt der Toise eine Doppeltoise vorhanden wäre, so würde die Vergleichung der Messstangen mit derselben nur einen unbedeutenden Zusatz zu der im vorigen § beschriebenen Einrichtung erfordern. Man dürfte nur eine Unterlage für die Doppeltoise hinzufügen, welche, auf dieselben Eisen u, u (Fig. 11) gelegt, auf welchen die Messstangen bei ihrer Vergleichung unter einander liegen, die Axe der Doppeltoise in dieselbe gerade Linie brächte, in welcher die Axen der Cylinder r liegen. Legte man dann eine der Messstangen, z. B. Nr. I, auf die Eisen u, u und mässe man die Zwischenräume zwischen den festen Keilen q und den Schneiden der Cylinder r, welche bei der Berührung der convexen Enden dieser Cylinder mit den Schneiden der Messstange übrig bleiben, so würde man dadurch, wie im vorigen §,

$$l' = L + C - n'$$

erhalten. Brächte man aber die Doppeltoise zwischen die convexen Enden der Cylinder r, und bezeichnet man die Summe der Zwischenräume, welche dann übrig bleiben würden, durch n, so wie auch die der Temperatur der Doppeltoise, bei der Messung, zugehörige Länge derselben durch $2T$, so würde man ebenso

$$2T = L + C - n,$$

und durch die Vergleichung beider Ausdrücke

$$l' + n' = 2T + n,$$

oder, da $l' = L + x' - am'$ ist,

$$L = 2T - x' + am' + n - n'$$

erhalten. Man würde also L und dadurch die Längen der vier Messstangen gefunden haben.

Diese Bestimmung der Längen der Messstangen setzt aber den Besitz einer Doppeltoise voraus, welche weder vorhanden ist, noch in anderer Hinsicht vortheilhaft sein würde. Man muss also noch etwas hinzufügen, um die Länge der einfachen Toise verdoppeln zu können. Dieses besteht in einer Einrichtung einer auf die Eisen u, u zu legenden Unterlage der Toise, welche jetzt beschrieben werden soll. Diese, mit Streben zu ihrer Verstärkung versehene, Taf. II. Fig. 12 dargestellte Unterlage hat ihrer Länge nach zwei Einschnitte, welche die Bahnen für vier, durch cylindrische Axen verbundene Rollenpaare sind. Auf die Axen dieser Rollenpaare kann die Toise gelegt, also vor- und rückwärts gefahren werden. Die Figuren 13, 14, 15, Taf. II. zeigen die Einschnitte vv und die Rollenpaare w; die letzte dieser Figuren zeigt die Rollenpaare mit der darauf liegenden Toise TT. In der Mitte der Unterlage ist eine Platte von Messing aufgeschraubt (Fig. 13), auf welcher zwei einander gleiche, an einem Ende kugelförmig abgerundete Cylinder x und x', in einer Bahn, deren Durchschnitt Fig. 14 darstellt, in der Richtung ihrer Axen verschoben werden können. Jeder dieser Cylinder kann an einem beliebigen Orte in der Bahn durch eine der Klemmen y und y' festgeklemmt werden. — Durch diese Einrichtung wird die Verdoppelung der Toise sehr leicht erlangt. Man klemmt zuerst den einen der Cylinder x fest und bringt das ihm zugewandte Ende der auf den vier Rollenpaaren liegenden Toise in Berührung mit seiner convexen Fläche (Fig. 15), schiebt das convexe Ende des Cylinders r des Vergleichungsapparates an das andere Ende der Toise und misst nun, mit dem Glaskeile, die Entfernung zwischen dem Keile q und der Schneide des Cylinders r; dann schiebt man die Toise zurück, legt den anderen Cylinder x' auf die Bahn, so dass seine convexe Fläche die des ersten berührt und klemmt ihn in dieser Lage fest; darauf nimmt man den ersten Cylinder ab, bringt die Rollen und die Toise auf die andere Hälfte der Unterlage und verfährt auf dieser genau so, wie man auf der ersten verfahren ist.

Diese Einrichtung erfordert, dass die Mittelpunkte der kugelförmig gekrümmten Flächen der Cylinder genau in den Axen derselben liegen. Man kann sich davon überzeugen, wenn man zwei Cylinder auf die Bahn legt, ihre convexen Flächen zur Berührung bringt

und ein senkrecht aufgestelltes Mikroskop auf den Berührungspunkt richtet; bewegt dieser Punkt sich weder bei der Drehung des einen noch des anderen Cylinders um seine Axe, so ist ihre Construction der Forderung gemäss; bewegt er sich, so muss sie verbessert werden. — Das Zusammenfallen der Axen der zur Verdoppelung der Toise bestimmten Cylinder mit den Axen der Cylinder am Vergleichungsapparate erlangt man durch das Repsold'sche Verfahren. — Ob die Axen der vier Rollenpaare in Einer Ebene liegen, erkennt man durch eine ausgespannte Saite. — Die Klemmen y und y' müssen sorgfältig gemacht werden, damit das Anziehen ihrer Schrauben die Cylinder x und x' nicht verschiebe; ob diese Bedingung erfüllt ist, sieht man durch das wiederholte Anziehen und Loslassen der Schrauben, wodurch der Ort des Cylinders, dem Zeugnisse eines darüber aufgestellten Mikroskopes zufolge, nicht verändert werden darf.

§ 4. Beschreibung des Glaskeils.

Mehrere, einander fast vollkommen gleiche Exemplare des Keils sind von den Herren PISTOR und SCHIEK in Berlin verfertigt worden. Da sie bei den schon beschriebenen Vorbereitungen zur Messung der Grundlinie ein eben so wesentlicher Theil des Apparates sind, als bei der Messung selbst, so wird es nothwendig, sie näher zu beschreiben, auch die Mittel anzugeben, durch welche man zur Kenntniss des Werthes ihrer Eintheilungen gelangt ist.

Die fünf vorhandenen Keile, von welchen aber einige bei ihren häufigen Anwendungen verunglückt sind, sind in Einem Stücke geschliffen und nach dem Schleifen so von einander getrennt, dass die jeden derselben begrenzenden parallelen Ebenen, 3 Linien Entfernung haben. Das dünnere Ende dieser Keile ist etwas weniger als 0,8 Lin. dick, das dickere etwas mehr als 2,0 Lin. Zwischen zwei Punkten der Keile, an welchen ihre Dicken nahe 0,8 Lin. und 2,0 Lin. betragen, sind, auf einer der parallelen Ebenen 120 Striche in gleichen Zwischenräumen so gezogen, dass sie die den Winkel der geneigten Ebenen des Keils halbirende Linie senkrecht durchschneiden. Diese 120 Striche füllen eine Länge von 41 Linien, so dass sie etwa $\frac{1}{3}$ Linie von einander entfernt sind und sehr nahe von $0^{L},01$ zu $0^{L},01$ der Dicke des Keils fortgehen. Die Zehntel eines Zwischenraums von $\frac{1}{3}$ Linie können ohne Schwierigkeit durch das Augenmaass geschätzt werden, weshalb angenommen werden kann, dass die Keile auf Tausendtel der Linie genau messen.

Indessen wird hierbei vorausgesetzt, dass die Dicken der Keile, welche den verschiedenen Punkten ihrer Eintheilungen entsprechen, genau bekannt seien. Da man die begrenzenden Flächen der Keile nicht als Ebenen annehmen wollte, so musste, zur Messung der Dicken, ein Verfahren angewandt werden, welches an allen Punkten der Eintheilung seine Dienste leistet. Das folgende ist das von uns angewandte.

Eine von den Herren PISTOR und SCHIEK auf Silber von $0^{L},2$ zu $0^{L},2$ getheilte Scale von 12 Lin. Länge wurde auf einen der Cylinder r des Vergleichungsapparates so befestigt, dass ihre Ebene wagerecht war; eins der von denselben Künstlern früher verfertigten, zur Prüfung der Eintheilungen des Meridiankreises der Königsberger Sternwarte bestimmten Mikrometer-Mikroskope wurde senkrecht über dieser Scale aufgestellt. Der Cylinder r wurde dann so weit zurückgeschoben, dass seine lothrechte Schneide die wagerechte des festen Keils q berührte, in welcher Lage des Cylinders und der darauf befestigten Scale das bewegliche Fadenkreuz des Mikroskops auf den Anfangspunkt der letzteren gestellt wurde. Dann wurde einer der vorhandenen Glaskeile so tief zwischen die beiden Schneiden geschoben, dass nach und nach die Theilstriche $0^{L},8$, $1^{L},0$ ... $2^{L},0$ der Scale unter dem Fadenkreuze erschienen; für jede dieser Einschiebungen wurde die Angabe der Eintheilungen auf dem Keile abgelesen. Dieser Versuch wurde 9 Mal wiederholt, indem man nach und nach, statt des Anfangspunktes der Scale, die Punkte $0^{L},2$, $0^{L},4$ ... $1^{L},6$ zu Anfangspunkten der Messung machte. Obgleich kleine Unregelmässigkeiten der Theilstriche der Scale, durch diese Wiederholungen, fast alles Einflusses auf das Resultat beraubt werden mussten, so wurde die Scale doch noch durch Anwendung der Schrauben der Objectivhälften des Heliometers der Königsberger Sternwarte geprüft und die sehr kleinen dadurch erkannten Unregelmässigkeiten derselben bei der Berechnung der Messungen der Dicke der Keile angewandt. — Man sieht sehr leicht, dass die Veränderungen der Dicke der Keile, welche Veränderungen ihrer Eintheilungen entsprechen, durch dieses Verfahren unabhängig von jeder Voraussetzung gefunden werden, dass es aber den absoluten Werth der Dicke nur dann richtig ergibt, wenn die wagerecht liegende Schneide des festen Keils q eine gerade Linie ist. Man hat diese Forderung durch sorgfältiges Anschleifen dieser Schneide, wozu Herr KATER in seiner berühmten Abhandlung über die Bestimmung der Pendellänge die Anleitung gibt, zu erfüllen gesucht; um noch grössere Sicherheit zu erhalten, ist aber die eben beschriebene Prüfung der Dicken der Keile an dem zweiten festen Keile des

Vergleichungsapparates wiederholt, wodurch so gut wie völlig übereinstimmende Resultate erlangt worden sind.

[Folgt Verbesserungstafel für die 5 Keile.]

§ 5. Vergleichung der Längen der Messstangen unter einander.

Diese Vergleichungen wurden theils vor, theils nach der Messung der Grundlinie auf die im 2. § erläuterte Art, im Ganzen 29 Mal vorgenommen; 15 Mal war die Wärme aller vier Messstangen nahe gleich, 14 Mal waren zwei derselben beträchtlich, etwa 20° Réaum., wärmer als die beiden anderen. Die ersteren 15 Vergleichungen sind in fünf, die letzteren 14 in vier arithmethische Mittel vereinigt, deren jedes die an auf einander folgenden Tagen und in nahe gleicher Wärme gemachten enthält. Diese Vergleichungen, nämlich die beobachteten Werthe von n', n'', n''', n^{IV} und a, b, c, d (§ 2), folgen hier in der Ordnung der Beobachtungszeiten.

[Mittheilung der Werthe $n' \ldots a \ldots$, sowie der aus den Vergleichungen der Messstangen unter einander folgenden (9×4) Gleichungen von der Form:

$$n' = C^i - x' + am'$$
$$n'' = C^i - x'' + bm''$$
$$n''' = C^i - x''' + cm'''$$
$$n^{IV} = C^i - x^{IV} + dm^{IV}$$
$$i = 1 \ldots 9.]$$

Die in diesen Gleichungen vorkommenden unbekannten Grössen $C^{(1)}$, $C^{(2)} \ldots$ sind die arithmetischen Mittel der den einzelnen, zu jedem Mittel vereinigten Vergleichungen zukommenden Werthe von C. Indem die 36 Gleichungen nur 16 unbekannte Grössen enthalten, müssen sie nach der Methode der kleinsten Quadrate aufgelöst werden. Nachdem man $C^{(1)}$, $C^{(2)} \ldots$ eliminirt hat, erhält man acht Gleichungen*), deren Auflösung ergibt:

$x' = -0^L,3015$	$m' = 0{,}54033$
$x'' = +0{,}3986$	$m'' = 0{,}55976$
$x''' = -0{,}0713$	$m''' = 0{,}57575$
$x^{IV} = -0{,}0258$	$m^{IV} = 0{,}58103$

wodurch $C^{(1)}$, $C^{(2)} \ldots$ folgendermassen gefunden werden:

$C^{(1)} = 2^L,6444$	$C^{(4)} = 2^L,3110$	$C^{(7)} = 2^L,3950$
$C^{(2)} = 2{,}6422$	$C^{(5)} = 2{,}1669$	$C^{(8)} = 2{,}3995$
$C^{(3)} = 2{,}61705$	$C^{(6)} = 2{,}0408$	$C^{(9)} = 2{,}46655$

Die Summe der Quadrate der übrigbleibenden 36 Fehler ist $= 0{,}00024939$*); da 16 unbekannte Grössen bestimmt worden sind, so erhält man hieraus den mittleren Fehler jeder der 36 Gleichungen:

$$= \sqrt{\frac{0{,}00024939}{36-16}} = 0^L,003531.$$

Die aus diesem mittleren Fehler hervorgehende Unsicherheit der Länge der Grundlinie wird später untersucht werden.

§ 6. Bestimmung der Längen der Messstangen.

Die Toise, mit welcher die Messstangen verglichen worden sind, ist dieselbe, auf welcher die Bestimmung der Länge des einfachen Secundenpendels für die Königsberger Sternwarte beruhet. Sie ist von FORTIN verfertigt und von den Herren ARAGO und ZAHRTMANN mit dem Originale der Toise du Pérou verglichen worden. Ein hierüber ausgefertigtes Certificat dieser Herren ist, bei Gelegenheit des Berichtes über die frühere Anwendung der Toise, abgedruckt worden**). Aus diesem Certificate geht hervor, dass sie etwas zu kurz, und dass ihre wahre Länge $= 863^L,9992$ ist. Die erwähnten Versuche über die Länge des Secundenpendels haben überdies ergeben***), dass das Verhältniss der Längen dieser Toise in den Temperaturen des gefrierenden und des siedenden Wassers $= 1 : 1{,}001167$ ist. Aus beiden Bestimmungen zusammengenommen folgen die Ausdrücke der Länge der Toise für Temperaturen, welche den Angaben C, R oder F des Centesimal-, Réaumur'schen oder Fahrenheit'schen Thermometers entsprechen:

$$T = 863^L,835384 + C.0^L,0100811$$
$$= 863{,}835384 + R.0{,}0126014$$
$$= 863{,}656165 + F.0{,}0056006$$

Da die Länge der Toise für jede Temperatur, welche sie bei der Anwendung besitzt, durch diese Formeln bekannt ist, so hat die Bestimmung der Längen der Messstangen, nach dem § 3 erklärten Verfahren, keine Schwierigkeit, ausser der, welche aus der Erfindung der als bekannt vorausgesetzten Temperatur hervorgehen möchte. Diese ist aber weit beträchtlicher als man oft geglaubt zu haben scheint. Es ist zwar leicht, jedes Thermometer durch die bekannte Berichtigungsart von seinen Fehlern völlig zu befreien; aber es ist nicht leicht, sich zu überzeugen, dass die Temperatur der Toise mit der Angabe eines in ihrer Nähe befindlichen

*) [Die einzelnen Gleichungen weggelassen.]

*) [Einzelne Fehler weggelassen.]

**) Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels. Berlin 1828. S. 126. [Abh. 137. Beil. V.]

***) Ebendaselbst S. 57. [Abh. 137. § 22.]

Thermometers übereinstimmt; vielmehr haben sich, im Laufe der Beschäftigungen mit den Messstangen, in einem ganz ähnlichen, aber der Gleichheit beider Temperaturen noch vortheilhafteren Falle, auffallende Unterschiede gezeigt, welche an die Nothwendigkeit der grössten Vorsicht erinnerten. Die Angaben des in dem Kasten jeder Messstange befindlichen Quecksilberthermometers (§ 1) wurden nämlich häufig gleichzeitig mit der Angabe des Metallthermometers beobachtet, wobei sich zeigte, dass beide keinen übereinstimmenden Gang hatten, so dass oft, wenn ein schon einmal beobachteter Stand des Metallthermometers wiederkehrte, das Quecksilberthermometer nicht zugleich auf seinem früheren Stande war, sondern mehr oder weniger beträchtlich davon abwich. Man konnte leicht bemerken, dass dieses jenem im Ganzen voreilte, also eine grössere Wärme zeigte, wenn die Wärme in dem nördlichen Saale der Sternwarte, wo die Messstangen sich befanden, im Zunehmen war, eine kleinere, wenn sie abnahm; allein auch zur Zeit des täglichen Maximums der Wärme fand sich keine völlige Gleichförmigkeit des Ganges beider Thermometer. Da wir wünschten, eine Reihe zusammengehöriger Angaben beider Thermometer kennen zu lernen, so wurden die vier Messstangen neben einander auf eine horizontale, möglichst weit von den Fenstern des Zimmers entfernte Unterlage gelegt und hier die Vergleichungen beider Thermometer nur dann vorgenommen, wenn die Temperatur des Zimmers sich sehr nahe beständig zeigte. Aber selbst an trüben Tagen des Spätherbstes und Winters, an welchen die Temperatur in der Sternwarte während des ganzen Tages kaum verändert wird, fanden sich Unterschiede, welche die möglichen Beobachtungsfehler beträchtlich überstiegen: wenn die Angabe des einen Thermometers einer früheren wieder gleich wurde, war die des anderen oft um einige Zehntel eines Réaumurschen Grades von seiner früheren verschieden. Aus dieser Erfahrung geht unzweifelhaft hervor, dass die Temperatur der die Messstangen umgebenden Luft, selbst wenn sie nicht merklich wächst oder abnimmt, von der Temperatur der Messstangen merklich verschieden sein kann. Da die Messstangen sich in verschlossenen Kästen befinden, in welchen die Wärme sich noch weniger schnell ändern muss als ausser denselben, so wurde es sehr wahrscheinlich, dass zwischen der Wärme der nicht in einem Kasten eingeschlossenen Toise und der durch auf ihr befindliche Thermometer angegebenen, auch unter den vortheilhaftesten Umständen, ein nicht unerheblicher Unterschied sein könne, welcher noch grösser zu befürchten ist, wenn man die Anwendung der Toise nicht auf die Zeiten des Maximums der Wärme beschränken will.

Bei den ersten Versuchen, die Längen der Messstangen zu bestimmen, waren zwei Thermometer auf der Toise befestigt und, um die Ausstrahlung ihrer Wärme zu vermeiden, mit Papier bedeckt; es zeigten sich aber Unterschiede verschiedener Bestimmungen von zwei Hunderteln einer Linie, welche man nicht anders zu erklären wusste, als durch die Annahme von Verschiedenheiten zwischen den Temperaturen der Toise und der Thermometer. Eine darauf versuchte gänzliche Einhüllung der Toise und ihrer Thermometer in Papier verbesserte den Erfolg nicht; auch blieb er derselbe, als man die Thermometerkugeln mit Eisenfeilspänen überschüttete, um dadurch eine leichtere Fortleitung der Wärme von der Toise zu ihnen zu erlangen.

Endlich, nach vielen verlorenen Versuchen, wurde der Entschluss gefasst, die Toise mit ihren Thermometern in einen mit Wasser gefüllten Trog zu legen und sie, nachdem sie sich lange genug im Wasser befunden hatte, um mit diesem eine gleiche Temperatur zu besitzen, auf den Vergleichungsapparat zu bringen. Um den Einfluss der Verdunstung des Wassers an der aus ihrem Bade genommenen Toise zu vernichten, oder wenigstens sehr klein zu machen, wurde sie mit feinem und daher dichtem wollenen Tuche bekleidet, so dass nur ihre Endflächen frei blieben; die Kugeln der Thermometer wurden, durch in den Ueberzug geschnittene Löcher, unter diesen geschoben. Diese Einrichtung hatte zur Folge, dass die sehr empfindlichen Thermometer während der kurzen, nie zwei Minuten betragenden Zeit, während welcher die Toise auf dem Vergleichungsapparate war, gewöhnlich gar nicht, höchstens aber um zwei Zehntel eines Fahrenheit'schen Grades fielen und daher keinen erheblichen Zweifel gegen die Unveränderlichkeit der Temperatur, welche die Toise im Wasser erlangt hatte, entstehen liessen. Es kann angenommen werden, dass die, aus der Verdunstung des Wassers an der Oberfläche des wollenen Tuches ohne Zweifel hervorgegangene Verminderung der Temperatur, während der kurzen Dauer der Versuche, nicht bis zur Toise gedrungen ist.

Durch dieses Verfahren wurden Messungen von erwünschter Uebereinstimmung hervorgebracht. Sie wurden 12 Mal wiederholt [1834 Juni 26—28], immer zur Zeit der grössten Tageswärme. Zuerst wurde die Toise auf den Vergleichungsapparat gebracht, dann die Messstange Nr. I, endlich wieder die Toise.

[Es folgt die Vergleichung der Messstange I mit der Toise.]

Man erhält hieraus 12 Bestimmungen des Werthes von L, nach der Formel:

$$L = 2T - x' + n - n' + am',$$

welche durch Substitution der im vorigen § gefundenen Werthe von x' und m' von allem Unbekannten frei werden, [und deren Mittel ergibt*):]

$$L = 1728^{L},0707 - x' + 1^{L},3778\, m' = 1729^{L},1167.$$

Die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Unterschiede ist $= 0{,}00012767$ und folglich der mittlere Fehler einer Vergleichung der Messstangen mit der Toise

$$= \sqrt{\frac{0{,}00012767}{12-1}} = 0^{L},003407.$$

Durch die Verbindung der im vorigen § und im gegenwärtigen erhaltenen Resultate, erhält man die Ausdrücke der Längen der vier Messstangen, welche zu den Angaben a, b, c, d ihrer Metallthermometer gehören, folgendermassen:

Nr. I. ... $l' = 1728^{L},8152 - 0{,}54033\,.a$
„ II. ... $l'' = 1729{,}5153 - 0{,}55976\,.b$
„ III. ... $l''' = 1729{,}0454 - 0{,}57575\,.c$
„ IV. ... $l^{IV} = 1729{,}0909 - 0{,}58103\,.d$

§ 7. Vergleichung der Metallthermometer und der Quecksilberthermometer und Bestimmung der Ausdehnungen beider Metalle für die verschiedenen Messstangen.

Obgleich die Kenntniss der Temperatur der Messstangen weder bei der Bestimmung ihrer Längen, noch bei ihrer Anwendung zur Messung einer Grundlinie nöthig ist, und obgleich auch die Kenntniss der absoluten Ausdehnungen der Metallstangen, aus welchen sie zusammengesetzt sind, keinen für diese Zwecke wesentlichen Nutzen gewährt, so waren doch einige Gründe vorhanden, die Vergleichung der Quecksilberthermometer mit den Angaben der Metallthermometer und die Ausdehnungen der beiden Metalle aufzusuchen. Man wünschte nämlich, die Längen der Messstangen nicht allein für die Angaben ihrer Metallthermometer, sondern auch für gegebene Temperaturen zu erfahren; auch wünschte man kennen zu lernen, warum m', m'', m''', m^{IV} nicht übereinstimmen, ob der Grund davon in einer Verschiedenheit der Ausdehnung des Eisens oder des Zinks der verschiedenen Stangen liegt; endlich wünschte man zu wissen, wie die Resultate der Messungen der Grundlinie ausgefallen sein würden, wenn man die Stangen ohne Metallthermometer gelassen, sich also bei der Annahme, dass die Quecksilberthermometer ihre wahre Temperatur anzeigen, befriedigt hätte. Die diese Wünsche erfüllenden Untersuchungen wird der gegenwärtige § enthalten.

Zuerst wurden die Verbesserungen aufgesucht, durch deren Anbringung die Angaben der Quecksilberthermometer auf wahre Réaumur'sche Grade reducirt werden. Diese Thermometer wurden aus den Gehäusen der Messstangen genommen und innerhalb der Grenzen der Temperaturen, welche bei den Anwendungen vorkommen können, mit zwei scharf berichtigten Thermometern der Sternwarte verglichen; dieses geschah in Wasser, dessen Wärme man sowohl langsam aufsteigen, als auch langsam abnehmen liess; öftere Wiederholungen dieser Vergleichung lassen an der Erreichung völliger Sicherheit nicht zweifeln. Es ergab sich daraus folgende Verbesserungstafel für die Angaben der Quecksilberthermometer:*)

	I	II	III	IV
0°	+ 0°,13	− 0°,66	− 0°,58	− 0°,11
5	+ 0,18	− 0,56	− 0,65	− 0,07
10	+ 0,24	− 0,44	− 0,72	− 0,12
15	+ 0,29	− 0,40	− 0,82	− 0,15
20	+ 0,29	− 0,40	− 0,95	− 0,18
25	+ 0,29	− 0,37	− 1,05	− 0,17
29	+ 0,28	− 0,28	− 1,09	− 0,15

Schwieriger als die Vergleichung der Angaben der Quecksilberthermometer mit der wahren Temperatur war ihre Vergleichung mit den Angaben der Metallthermometer; denn die im vorigen § schon erwähnte Ungleichförmigkeit des Ganges beider machte eine häufige Wiederholung der Vergleichungen nöthig und forderte dabei immer das Abwarten der Beständigkeit der Temperatur im Nord-Saale der Sternwarte. Wenn diese eintrat, so suchte man die Vergleichungen von Stunde zu Stunde vorzunehmen; nach der Reduction der Ablesungen der Quecksilberthermometer auf Réaumursche Grade und nach der Zusammenziehung von immer 10 Vergleichungen in ein arithmetisches Mittel erhielt man folgende, auf 160 einzelnen Beobachtungen beruhenden 16 Mittel:

R	a	R	b	R	c	R	d
3°,36	1^L,9302	3°,37	2^L,0316	3°,36	1^L,9374	3°,45	1^L,9834
3,60	1,9165	3,66	2,0150	3,64	1,9226	3,71	1,9704
3,80	1,9158	3,75	2,0158	3,73	1,9230	3,85	1,9673
4,25	1,8905	4,41	1,9869	4,47	1,8886	4,64	1,9338
4,58	1,8733	4,62	1,9753	4,60	1,8805	4,67	1,9267
5,31	1,8435	5,26	1,9393	5,15	1,8521	5,17	1,8947
6,12	1,8128	6,11	1,9131	6,08	1,8201	6,14	1,8692
6,23	1,8113	6,16	1,9087	6,14	1,8229	6,145	1,8659

*) [Einzelwerthe weggelassen.]

*) [Im Original von Grad zu Grad fortschreitend.]

R	a	R	b	R	c	R	d
6°49	1L,7950	6°53	1L,8961	6°49	1L,8038	6°54	1L,8531
8,49	1,6722	8,53	1,7710	8,46	1,6829	8,48	1,7390
9,62	1,6495	9,67	1,7485	9,52	1,6617	9,51	1,7090
10,085	1,6251	10,14	1,7237	9,93	1,6388	9,895	1,6859
13,27	1,4641	13,385	1,5742	13,185	1,4892	13,155	1,5369
13,345	1,4724	13,42	1,5725	13,255	1,4885	13,26	1,5374
17,055	1,3086	17,03	1,4086	16,97	1,3293	16,945	1,3791
17,03	1,3082	16,97	1,4097	16,94	1,3303	16,915	1,3794

Wenn man die Temperaturen der Messstangen den Angaben der Quecksilberthermometer entsprechend, und die Ausdehnung der beiden Metalle diesen proportional annimmt, so kann man a, b, c, d durch R, nach der Formeln:

$$a = \alpha' - R \,.\, \beta'$$
$$b = \alpha'' - R \,.\, \beta''$$
$$c = \alpha''' - R \,.\, \beta'''$$
$$d = \alpha^{IV} - R \,.\, \beta^{IV}$$

ausdrücken. Die Methode der kleinsten Quadrate ergibt dann diejenigen Werthe von α', β', α'', β'' u. s. w., welche den Beobachtungen am meisten entsprechen. Auf diese Art findet man die Formeln:

$$a = 2^{L},08638 - R \,.\, 0^{L},045939$$
$$b = 2,18597 - R \,.\, 0,045750$$
$$c = 2,08850 - R \,.\, 0,045060$$
$$d = 2,13875 - R \,.\, 0,045207$$

Die [bis $+ 0^{L},0247$ steigenden] Unterschiede der Formeln von den Beobachtungen*) zeigen, dass die Ungleichheiten der Temperaturen der Messstangen und der Quecksilberthermometer, auch in Mitteln aus 10, zu verschiedenen Zeiten, immer unter den vortheilhaftesten äusseren Verhältnissen gemachten Vergleichungen, noch beträchtlich hervortreten können. Zufälligen Beobachtungsfehlern kann wenigstens der dritte Theil der Unterschiede nicht zugeschrieben werden, indem man Fehler von solcher Grösse bei einer einzelnen Vergleichung, geschweige denn bei einem Mittel aus 10 Vergleichungen, nicht begehen kann. Man sieht also hierin die Bestätigung der im vorigen § behaupteten Unzulänglichkeit der auf gewöhnliche Art angewandten Thermometer zur Bestimmung der Temperatur der Toise. Zugleich bemerkt man, dass die erlangten Ausdrücke der Angaben der Metallthermometer, durch die Temperatur der Luft in den Gehäusen der Messstangen, keinen Anspruch auf grosse Sicherheit haben können.

Wenn man die Ausdehnung des Eisens der vier Messstangen für jeden Grad des Réaumur'schen Thermometers durch e', e'', e''', e^{IV} bezeichnet, die des Zinks durch z', z'', z''', z^{IV}; die in der Temperatur des schmelzenden Eises stattfindenden Längen des Eisens durch E', E'', E''', E^{IV}, des Zinks durch Z', Z'', Z''', Z^{IV}, so hat man die Längen beider, für die Temperatur R, z. B. für die erste Messstange:

$$= E'\{1 + e'R\} \quad \text{und} \quad = Z'\{1 + z'R\}.$$

An dem Metallthermometer zeigt sich der Unterschied der Ausdehnungen gleicher Längen Eisen und Zink; bezeichnet man seine Veränderung für eine Veränderung von einem Grade, im Stande des Réaum. Thermometers, durch p', p'', p''', p^{IV}, so erhält man hieraus den Ausdruck von

$$p' = Z'(z' - e');$$

da die Veränderung des Metallthermometers sich zur Veränderung der Länge der Messstange verhält wie $1 : m'$, so ist der Ausdruck von

$$m' = \frac{E'}{Z'} \cdot \frac{e'}{z' - e'}$$

und man hat:

$$p'm' = E'e'.$$

Man findet also e' und $z' - e'$ aus den Formeln:

$$e' = \frac{p'm'}{E'}; \quad z' - e' = \frac{p'}{Z'};$$

in welchen die sich auf die übrigen Messstangen beziehenden ähnlichen Grössen angenommen werden, wenn sie für diese gelten sollen.

Nach den vorigen Bestimmungen ist:

$$E' = 1728{,}8152 - 2{,}08638\,m' = 1727{,}6879$$
$$E'' = 1729{,}5153 - 2{,}18597\,m'' = 1728{,}2917$$
$$E''' = 1729{,}0454 - 2{,}08850\,m''' = 1727{,}8432$$
$$E^{IV} = 1729{,}0909 - 2{,}13875\,m^{IV} = 1727{,}8482$$

Ferner sind sämmtliche Zinkstangen um die Länge der verschiedenen Stahlkeile ($= 26^{L},0$) und um die Angabe des Metallthermometers kürzer als die Messstangen; also ist

$$Z' = 1727{,}6879 - 26{,}0 - 2{,}0864. = 1699{,}6015$$
$$Z'' = 1728{,}2917 - 26{,}0 - 2{,}1860 = 1700{,}1057$$
$$Z''' = 1727{,}8432 - 26{,}0 - 2{,}0885 = 1699{,}7547$$
$$Z^{IV} = 1727{,}8482 - 26{,}0 - 2{,}1388 = 1699{,}7094$$

Setzt man diese Werthe von E', Z'; E'', Z'' u. s. w. in die Formeln, welche e', $z' - e'$; e'', $z'' - e''$ u. s. w. ausdrücken, so erhält man:

$e' = 0{,}000014367$	$z' - e' = 0{,}000027029$
$e'' = 0{,}000014818$	$z'' - e'' = 0{,}000026911$
$e''' = 0{,}000015015$	$z''' - e''' = 0{,}000026509$
$e^{IV} = 0{,}000015202$	$z^{IV} - e^{IV} = 0{,}000026597$

*) [Hier weggelassen.]

$$z' = 0{,}000041497$$
$$z'' = 0{,}000041729$$
$$z''' = 0{,}000041524$$
$$z^{IV} = 0{,}000041799$$

Nach den gemachten Bestimmungen der Werthe von m', m'', m''', m^{IV} und von p', p'', p''', p^{IV} ist also das Eisen der vier Messstangen in seiner Ausdehnbarkeit durch die Wärme merklich verschieden, während das Zink sehr nahe gleiche Ausdehnbarkeit zeigt. Dieses letztere ist das was man erwarten durfte (§ 1); man kann also sein wirkliches Hervorgehen aus den zum Grunde gelegten Bestimmungen als eine Bestätigung derselben ansehen. Uebrigens hat hier der Zufall günstig gewirkt, denn die Uebereinstimmung ist grösser, als die Unsicherheit der Vergleichung der Quecksilberthermometer mit den Metallthermometern zu erwarten berechtigt.

§ 8. Bestimmung der Neigungen der Messstangen durch die Angaben ihrer Wasserwagen.

Die Bestimmung der der horizontalen Lage einer Messstange entsprechenden Angabe der Schraube ihrer Wasserwage erlangt man sehr leicht, indem man den Vergleichungsapparat für die Längen der Messstangen auch zur Erlangung derselben benutzt. Indem man nämlich eine jede dieser Stangen, durch das im 2. § angegebene Mittel, so zwischen die Cylinder r bringen kann, dass die Axen dieser Cylinder und die Axe der Messstange in Eine gerade Linie fallen, so erlangt man die Bestimmung der ihrer horizontalen Lage entsprechenden Angabe der Schraube der Wasserwage durch das Mittel aus den beiden Angaben dieser Schraube, bei welchen die Einspielung der Wasserwage in entgegengesetzten Lagen der Messstange erfolgt. Auf diese Art hat sich für die vier Messstangen gefunden*):

	Nr. I.	Nr. II.	Nr. III.	Nr. IV.
Mittel aus 7 Beob.	11 35,64	11 37,89	10 2,96	10 8,06

Die vier ersten dieser Bestimmungen sind vor der Messung der Grundlinie, die drei letzten nach derselben gemacht. Die nahe Uebereinstimmung der früheren und der späteren Bestimmungen bestätigt die erwartete Unveränderlichkeit der Messstangen. Wenn die stumpfen Spitzen der Schrauben der Wasserwagen, oder die Stahlplatten auf welche sie treffen, sich durch den häufigen Gebrauch der Schrauben bei der Messung etwas abgenutzt haben sollten, so würde dieses ein Grund sein, einem Mittel aus Bestimmungen vor und nach der Messung vor einer einseitigen Bestimmung einen Vorzug einzuräumen.

Auch die Veränderung der Neigung der Messstangen gegen die wagerechte Ebene, welche einer Umdrehung der die Wasserwage bewegenden Schraube entspricht, kann man durch eine Benutzung des Vergleichungsapparates leicht bestimmen. Man erhöhet nämlich das eine Ende der auf die Eisen *uu* Fig. 11 gelegten Messstange um mehrere Zolle, bringt die Wasserwage zum Einspielen und misst, mit einer besonderen Scale, die Höhen beider Enden der Messstange über der, die Axen der Cylinder r verbindenden geraden Linie; man wiederholt dasselbe, indem man das vorher erhöhete Ende wieder erniedrigt und das entgegengesetzte erhöhet. Auf diese Art hat sich die, einer Umdrehung der Schraube entsprechende Veränderung der Höhe des einen Endes jeder der Messstangen, über dem anderen, gefunden*):

	Nr. I.	Nr. II.	Nr. III.	Nr. IV.
Mittel aus 4 Best.	$7^{L}{,}7505$	$7^{L}{,}598$	$7^{L}{,}768$	$7^{L}{,}957$

Wenn man eine dieser Zahlen durch q bezeichnet, die der wagerechten Lage der Messstange, zu welcher sie gehört, entsprechende Angabe ihrer Schraube durch S, so wird die zu einer anderen Angabe s derselben gehörige Neigung i durch die Formel

$$\operatorname{tg} i = \frac{s-S}{l} q$$

gefunden. Die so bestimmte Neigung jeder der Messstangen, bei ihrer Anwendung zur Messung der Grundlinie, gewährt einen doppelten Nutzen: durch Multiplication der Länge der Messstange mit dem Cosinus der Neigung erhält man nämlich die auf die wagerechte Ebene reducirte Länge derselben; durch ihre Multiplication mit dem Sinus der Neigung die Erhöhung ihres einen Endes über dem anderen. Die Summe dieser Erhöhungen, vom Anfange der Grundlinie an genommen, bestimmt die Erhöhung jeder Messstange über dem Anfangspunkte und ergibt dadurch das, was man kennen muss, wenn man die Grundlinie richtig auf die Meeresfläche reduciren will. In aller Strenge genommen ist diese Kenntniss nothwendig; da man jedoch die Grundlinie immer auf einem wenig unebenen Boden messen wird, so wird die Verwechselung der halben Summe der Höhen ihrer Endpunkte mit der mittleren Höhe aller Messstangen, welche man auf die eben erwähnte Art erhält, selten oder nie einen Fehler von

*) [In $^1/_{50}$. Revol. — Die Einzel-Bestimmungen, 1831 Juli — 1834 Aug., weggelassen.]

*) [Die Einzel-Bestimmungen, 1831 Juli — 1834 Aug., weggelassen.]

wesentlicher Erheblichkeit erzeugen. — Vor der Multiplication der Länge einer Messstange mit $\cos i$ und $\sin i$ darf man nicht übersehen, ihr die zwischen ihr und der folgenden eingeschobene Dicke des Glaskeils hinzuzufügen, indem die Ebene desselben an ihrer lothrechten Schneide anliegt, also die durch den Glaskeil gemessene Entfernung beider Stangen nicht in der wagerechten Ebene, sondern in der gegen diese geneigten gemessen wird. Man hat also, wenn diese Entfernung durch n bezeichnet wird:

$$\text{die Reduction} = -(l+n)(1-\cos i)$$
$$\text{die Erhöhung} = -(l+n)\sin i$$

wo das Zeichen der letzten Formel so genommen ist, wie die Ordnung erfordert, in welcher die Drehungen der Schrauben unserer Messstangen gezählt werden. Für die Neigungen, welche bei der gemessenen Grundlinie wirklich vorgekommen sind, kann man, statt dieser Formeln, die genäherten:

$$\text{Reduction} = -\frac{l+n}{l}\cdot\frac{(s-S)^2}{2l}qq$$
$$\text{Erhöhung} = -\frac{l+n}{l}\cdot(s-S)q$$

anwenden, auch für $\frac{l+n}{l}$ den mittleren Werth desselben setzen. Bei den gemachten Messungen der Grundlinie waren die mittleren Werthe von l', l'', l''', l^{IV} und n', n'', n''', n^{IV} die folgenden:

$$l' = 1728{,}156 \qquad \frac{l'}{n'} = 1223$$
$$l'' = 1728{,}780 \qquad \frac{l''}{n''} = 1266$$
$$l''' = 1728{,}333 \qquad \frac{l'''}{n'''} = 1306$$
$$l^{\text{IV}} = 1728{,}338 \qquad \frac{l^{\text{IV}}}{n^{\text{IV}}} = 1250$$

und es folgen daraus die zur Berechnung dieser Messungen angewandten Formeln:

$$\begin{aligned}\log.\text{ Reduction} &= 8{,}24040 + 2\log(s' - S')\\ &= 8{,}22299 + 2\log(s'' - S'')\\ &= 8{,}24231 + 2\log(s''' - S''')\\ &= 8{,}26320 + 2\log(s^{\text{IV}} - S^{\text{IV}})\\ \log.\text{ Erhöhung} &= 0{,}88968 + \log(s' - S')\\ &= 0{,}88105 + \log(s'' - S'')\\ &= 0{,}89065 + \log(s''' - S''')\\ &= 0{,}90100 + \log(s^{\text{IV}} - S^{\text{IV}})\end{aligned}$$

§ 9. Wahl der gemessenen Grundlinie.

Die zu treffende Wahl einer Linie zur Grundlinie eines Dreiecksnetzes kann nicht durch die Forderung, dass sie den dadurch zu bestimmenden Entfernungen die grösste Genauigkeit gebe, geleitet werden, sondern hängt wesentlich von Nebenbedingungen ab. Wenn die Erfindung der Länge einer Linie auf der Erdoberfläche der Zweck einer geodätischen Operation ist, so kann derselbe dadurch erreicht werden, dass man eine andere, zu der vorigen im Verhältnisse $1 : m$ stehende Linie wirklich misst und die Gesuchte aus ihr durch eine dieses Verhältniss beider kennen lehrende trigonometrische Operation ableitet. Diese Ableitung würde offenbar am sichersten geschehen, wenn die trigonometrische Operation selbst gar keine Unsicherheit besässe; allein selbst in diesem nicht vorhandenen Falle würde die Sicherheit des gesuchten Resultats desto grösser werden, je kleiner m, oder je grösser die wirklich gemessene Linie ist. Aus der bekannten Theorie der zufälligen Beobachtungsfehler geht nämlich hervor, dass der zu befürchtende Einfluss derselben auf die Messung einer Linie der Quadratwurzel aus der Länge derselben proportional ist, dass er also für die kürzere und für die längere Linie $\left(\frac{l}{m}\text{ und }l\right)$ den Ausdruck

$$\varepsilon\sqrt{\frac{l}{m}} \quad\text{und}\quad \varepsilon\sqrt{l}$$

hat; indem die erstere Linie im Verhältnisse $1 : m$ vergrössert werden muss, um die letztere zu ergeben, wird also der aus jener hervorgehende, zu befürchtende Fehler des gesuchten Resultats $= \varepsilon\sqrt{lm}$, also vergleichungsweise mit dem Fehler, welcher bei einer unmittelbaren Messung von l zu befürchten wäre, desto grösser, je grösser m ist. Man muss die kürzere Linie m Mal messen und das Mittel aus diesen Messungen für ihre Länge annehmen, wenn ihre, übrigens fehlerfreie, Uebertragung auf die längere ein eben so sicheres Resultat geben soll, als die einmalige Messung der längeren. Wenn man also die Bedingung der grösstmöglichen Genauigkeit des Resultats verfolgen wollte, so müsste man den auf der Erdoberfläche zu messenden Bogen, dessen Erfindung der Zweck der ganzen Operation ist, unmittelbar, d. h. ohne die Hülfe von Dreiecken, messen. Dieses ist aber in den meisten Fällen unmöglich, in allen vermuthlich unausführbar.

In der That wird die Wahl einer Grundlinie durch viele Nebenbedingungen beschränkt, und man kann nicht die grösste Genauigkeit des Resultats zu ihrer Bedingung machen, sondern muss sich bei der Erreichung einer so grossen, dass die übrigbleibende Unsicherheit für den Zweck der Unternehmung unbedeutend wird, befriedigen. Die Nebenbedingungen sind, dass die Beschaffenheit des Bodens der Grundlinie ihrer Messung

günstig sei, und dass die Messstangen von dem Orte, an welchem sie geprüft und berichtigt worden sind, nach dem Orte ihrer Anwendung und von da wieder zurück müssen geschafft werden können, ohne dass dadurch eine Aenderung ihres Zustandes entstehe.

Die letzte Forderung machte es sehr wünschenswerth, unsere Grundlinie in der Nähe von Königsberg zu messen, so dass die Messstangen durch Lastträger, sowohl zu ihr als auch wieder zur Sternwarte zurück, getragen werden konnten. Die Grundlinie musste also geeignet sein, eine der Seiten des grossen, Königsberg einschliessenden Dreiecks Galtgarben-Condehnen-Wildenhof (Taf. III.) durch ihre Verbindung mit einer zweckmässigen trigonometrischen Operation zu ergeben; denn auf eine unmittelbare Messung einer dieser Seiten konnte man nicht ausgehen, sowohl wegen der zu grossen Länge derselben, welche für die kürzeste Seite Galtgarben-Condehnen 15168 Toisen beträgt, als wegen unübersteiglicher Hindernisse auf dem Boden, über welchen die Seiten hinweggehen. Die Frage, ob es nothwendig ist, eine Grundlinie von der Länge der gewöhnlich gemessenen anzuwenden, oder ob man durch eine beträchtlich kürzere die Absicht gleichfalls mit Sicherheit erreicht, kann nur mit Rücksicht auf die vorhandenen Mittel zur Messung der Winkel und auf die grössere oder geringere Sicherheit, mit welcher man die zu messende Linie mit der zu bestimmenden in Verbindung bringen kann, beantwortet werden. Wir glauben, dass der folgende, die trigonometrische Operation darstellende Abschnitt unseres Buches die Ueberzeugung hervorbringen wird, dass die zur Messung der Winkel angewandten Hülfsmittel eine sehr grosse Sicherheit gewähren. Wir zweifelten nicht, durch diese Hülfsmittel eine kürzere Linie mit grosser Genauigkeit bis zu einer beträchtlich längeren vervielfältigen zu können und sahen daher eine grosse Länge der zu messenden Linie für weniger erheblich an, als ihre Nähe bei dem Prüfungsapparate der Messstangen und als die Forderung, ihre Länge durch ein gutgeformtes und vielfältige Bedingungen zu seiner Prüfung darbietendes Dreieckssystem auf die Dreiecksseite Galtgarben-Condehnen übertragen zu können. Wir entschlossen uns desto lieber zu der Wahl einer diese Bedingung erfüllenden Grundlinie von nur 935 Toisen, je weniger Schwierigkeit es hatte, der Messung einer Linie von so geringer Länge, durch Wiederholung dieser Messung, eine grössere Sicherheit zu geben, als die sonst übliche einmalige Messung einer längeren Linie gewährt haben würde. Die Herren DELAMBRE und MÉCHAIN haben Grundlinien von etwa 6000 Toisen gemessen; Herr General ROY von etwa 4500 Toisen; Herr Etatsrath SCHUMACHER von 3015 Toisen; Herr Etatsrath STRUVE von 3935 Toisen; auf diesen Grundlinien beruhen Dreiecksnetze, welche mehr oder weniger unmittelbar zu beträchtlich grösseren Seiten führen. Herr Professor SCHWERD hat dagegen den ersten Versuch gemacht, eine kürzere Linie von nur 441 Toisen durch Winkelmessungen, anstatt der wirklichen Aneinanderlegung der Messstangen, zu vervielfältigen. Das Gelingen dieses Versuches hat er in einem eigenen, sehr lesenswerthen Buche*) dargestellt.

Unsere Grundlinie ist die Entfernung zwischen zwei, auf den Feldern der Güter Trenk und Mednicken liegenden Punkten, welche sowohl unter der Oberfläche der Erde dauerhaft bezeichnet, als auch über derselben durch gemauerte Signalpfeiler sichtbar gemacht sind. Zunächst ist sie die Grundlinie zweier Dreiecke, welche ihre Spitzen in den 2953 Toisen von einander entfernten Punkten Fuchsberg und Wargelitten haben. Die Linie zwischen diesen Punkten ist wiederum die Grundlinie zweier Dreiecke, deren Spitzen in den Punkten Galtgarben und Haferberger-Thurm in Königsberg, 10782 Toisen von einander entfernt, liegen. Durch diese Linie, so wie auch durch die Linien Galtgarben-Fuchsberg und Fuchsberg-Condehnen, wird die Linie Galtgarben-Condehnen bestimmt. Die III. Tafel zeigt diese Verbindung; man sieht zugleich daraus, dass in der Figur 25 Winkel gemessen worden sind, während 10 davon zu ihrer Construction hingereicht hätten; dass sie also 15 Bedingungsgleichungen unter den gemessenen Winkeln ergibt, welche die Sicherheit der zur Construction nothwendigen Winkel beträchtlich vermehren müssen.

Die schon erwähnte dauerhafte Bezeichnung der Endpunkte der Grundlinie muss hier näher beschrieben werden, damit man diese in der Folge wiedererkennen könne. Es sind 5 Fuss tiefe Löcher ausgegraben und mit einem gemauerten Grunde versehen worden, in welchen ein Granitblock von beträchtlicher Grösse eingebettet ist; dieser ist in lothrechter Richtung angebohrt und das Bohrloch mit einem Cylinder von Messing gefüllt, dessen durch einen eingesägten Kreuzschnitt bezeichnete Axe jeden der Endpunkte der Grundlinie bestimmt. Um diesen Endpunkt auch in passender Höhe über der Erde zu bezeichnen, ist das Grundmauerwerk bis zur Oberfläche fortgesetzt und auf dasselbe ein gemauerter Pfeiler errichtet worden, welcher sich in einen Cubus von Sandstein endigt,

*) Die kleine Speyerer Basis. Speyer 1822.

in dessen Mitte sich ein, etwa einen halben Zoll über die Oberfläche hervorragender Cylinder von Messing mit durchbohrter Axe befindet. Um die Axen beider Cylinder in Eine Lothlinie zu bringen, wurden vier einen Fuss starke Pfeiler von Eichenholz in die vier Ecken eines Quadrats so um den Endpunkt eingegraben und festgestampft, dass dieser nahe in dem Durchschnittspunkte ihrer Diagonalen lag; von einer festen Verbindung des oberen Endes dieser Pfeiler hing ein Loth herab, welches, durch zwei senkrecht auf einander wirkende Schrauben, zuerst in die Axe des unteren Cylinders gebracht werden konnte und nach welchem dann, nach vollendetem Baue des Pfeilers, der obere Cylinder gesetzt wurde.

Auf den Punkten Fuchsberg und Wargelitten sind genau dieselben Vorkehrungen getroffen, so dass auf die dauerhafte Bewahrung derselben mit gleichem Rechte gerechnet werden kann. Der erste dieser Punkte befindet sich auf einem sich 18 Toisen über der Grundlinie erhebenden Hügel, welcher theilweise mit Wald bewachsen und zum Ackerbau nicht geeignet ist. Der andere ist auf einer geringeren Erhöhung, welche, wenigstens jetzt, nicht angebauet ist, und, da sie sich am Rande eines Begräbnissplatzes befindet, in der nächsten Zeit wahrscheinlich nicht beackert werden wird. Die ferner zur Wiederauffindung der Endpunkte der Grundlinie anwendbaren Punkte Galtgarben und Condehnen sind ebenfalls auf die beschriebene Art in ihrem Grunde bezeichnet; mit dem Unterschiede, dass auf Galtgarben statt des Granitblockes eine eiserne Kanone angewandt worden ist, in deren Traube man einen Kreuzschnitt eingesägt hat. Diese beiden Punkte sind, statt der gemauerten Pfeiler, mit Pfeilern von Sandstein versehen, welche auch ihrer äusseren Sichtbarkeit eine längere Dauer verheissen. Der Grund dieses Unterschiedes war die Absicht, die vier Pfeiler an den Endpunkten der Grundlinie und in Fuchsberg und Wargelitten nach der Vollendung ihrer Anwendung wegzubrechen, die beiden anderen aber zu erhalten, damit sie, als Grundlagen anderer trigonometrischer Arbeiten, ohne weitere Vorbereitungen benutzt werden könnten.

Die Grundlinie fängt auf einem Felde des Gutes Trenk auf einer kleinen Erhöhung an, senkt sich dann, um in etwa 100 Toisen Entfernung in einen mit torfartiger Oberfläche bedeckten, theils als Viehweide, theils als Graswiese benutzten Grund zu gelangen, in welchem sie 100 Toisen weit fortgeht und nun das zum Vorwerke Sagehnen gehörige Ackerland erreicht, auf welchem sie, bis 630 Toisen Entfernung vom Anfangspunkte, bleibt; von hier geht sie über Felder und kleine Wiesenstriche des Gutes Mednicken bis zu ihrem anderen Endpunkte, welcher wieder auf etwas aufsteigendem Boden liegt; in der Mitte ihrer Länge erreicht ihre Höhe sehr nahe die Höhe der beiden Endpunkte.

§ 10. Anwendungsart der beschriebenen Einrichtungen zur Messung der Grundlinie.

Jede Messstange liegt bei ihrer Anwendung auf zwei etwa 18 Zoll hohen Böcken von Eichenholz, welche selbst auf wagerecht gelegten, starken Brettern von demselben Holze stehen und grösserer Festigkeit wegen mit aufgesetzten Gewichten von einem halben Centner belastet sind, wie Fig. 16, Taf. II zeigt. Die Bretter sind nicht unmittelbar auf den Boden gelegt, sondern jedes derselben liegt auf drei in den Boden eingetriebenen starken, kegelförmigen und 10 Zoll langen Nägeln von Gusseisen, an deren oberes Ende Scheiben angegossen sind, welche die Bretter tragen. Cylindrische Ansätze auf den Scheiben, welche durch Ausschnitte der Bretter gehen und über die Oberfläche derselben hervorragen, dienen zur leichteren Berichtigung der wagerechten Lage der Bretter; denn man kann jeden der drei Ruhepunkte eines Brettes durch Schläge mit einem hölzernen Hammer auf diese Ansätze erniedrigen, ohne das Brett abzunehmen. Diese Art, die Bretter festzulegen, wird nur angewandt, wenn der Boden so fest ist, dass die kegelförmigen Nägel mit beträchtlicher Kraft eingetrieben werden müssen; wo dieses nicht stattfindet, wie z. B. auf dem Wiesengrunde, über welchen die Grundlinie hinweggeht, sind statt der Nägel hölzerne Pfähle von 18 Zoll Länge und 3 Zoll Dicke so tief in die Erde eingerammt worden, dass die darauf gelegten Bretter den Boden beinahe berühren. Durch die eine oder die andere Befestigungsart der Bretter wird, wie man leicht bemerkt, den Böcken und der darauf gelegten Messstange eine sichere Aufstellung gewährt.

Die Messung der Grundlinie schreitet so fort, dass die lothrechten Schneiden der Stangen immer vorausgehen, die wagerechten folgen; das in der 16. Figur sichtbare Ende der Stange ist das letztere. Dieses Ende wird durch die Spitze einer Schraube, welche sich an dem unter ihm stehenden Bocke befindet, getragen und kann durch Drehung derselben erhöhet und erniedrigt werden. Der andere Bock, der etwa zwei Fuss von dem vorderen Ende der Stange entfernt steht, trägt den Kasten derselben seiner Breite nach, so dass er durch eine Linie und einen Punkt, also vollständig, unterstützt wird. Dieses wird durch eine halb-cylindrische Hervorragung bewirkt, welche sich an einem,

auf dem vorderen Bocke liegenden Brette befindet und deren Axe senkrecht auf die Axe der Stange gelegt wird; sie ist in der 16. Fig. sichtbar; das Brett auf welchem sie sich befindet, liegt nicht unmittelbar auf der oberen Fläche des Bockes, sondern zwischen beiden befinden sich zwei Paare von Keilen, welche mit ihren Schärfen zusammengeschoben sind, so dass jedes Paar ein Parallelepipedum bildet, dessen Höhe durch das Zusammenschieben oder Auseinanderziehen der Keile vermehrt oder vermindert werden kann. Durch diese Einrichtung wird es sehr leicht, die halb-cylindrische Hervorragung und damit das vordere Ende der Messstange zu erhöhen oder zu erniedrigen, auch diese Hervorragung durch das Aufsetzen einer Setzwage wagerecht zu machen.

Was sonst noch über die Anwendung der Messstangen zu bemerken ist, wird sich der Darstellung des bei den Messungen der Grundlinie beobachteten Verfahrens am besten einschalten lassen. Die Vorbereitungen dieser Messungen bestanden in der Wegräumung oder Ausfüllung der grössten Unebenheiten des Bodens, und in der Aussteckung der Richtung der Grundlinie durch eine Reihe weiss angestrichener Pfähle in 10 oder 12 Toisen Entfernung von einander. Dieses geschah durch die Hülfe eines Passageninstruments, welches zuerst auf dem Signale Trenk, dann in der Mitte der Grundlinie und endlich auf dem Signale Mednicken aufgestellt wurde; da es schwierig gefunden wurde, die Pfähle genau in gerader Linie einzuschlagen, so wurde, nachdem dieses näherungsweise geschehen war, die wahre gerade Linie durch einen in die Oberfläche jedes Pfahls geschlagenen Nagel bezeichnet. Ausser diesen Pfählen, welche keinen anderen Zweck hatten, als die Richtung anzugeben, in welcher die Bretter gelegt werden mussten, wurden noch an 4 oder 5 Punkten der Linie im Dreiecke stehende Pfähle bis zur Oberfläche des Bodens eingeschlagen, auf welchen die 3 Füsse des Gestells für das Passageninstrument stehen sollten, welches man benutzen wollte, um die Stangen in die Richtung der Linie zu bringen. Um bei der Messung selbst keine Zeit zu verlieren, wurden die Punkte, auf welche die Füsse gestellt werden mussten, damit das Passageninstrument sich genau in der Linie befand, vorher ausgemittelt und auf den Pfählen bezeichnet.

Dem Anfange der Messung ging die Aufstellung des Passageninstruments auf seinem, dem Signale Trenk nächsten Standpunkte voran. Da man mit dem wagerechten Keile der ersten zu legenden Messstange Nr. I. nicht bis zu dem, den Anfangspunkt der Grundlinie bestimmenden Cylinder von Messing reichen konnte, so war ein genau abgeglichener Pariser Fuss von Eisen vorhanden, welcher in der Richtung der Linie so auf die Oberfläche des Würfels von Stein, in dessen Mitte der Anfangspunkt befestigt ist, gelegt wurde, dass seine eine Endfläche den Anfangspunkt durchschnitt, die andere also einen Fuss von ihm entfernt war. Die wagerechte Schneide der nun aufgestellt werdenden Messstange Nr. I. wurde dann durch die Stellschraube dieser Stange zur Berührung mit dieser Endfläche gebracht; ihre lothrechte, vordere Schneide wurde durch Zeichen, welche ein Beobachter am Passageninstrumente gab, in die Richtung der Grundlinie gebracht, welches durch das Erscheinen des Einschnittes am vorderen Ende der Stange (Taf. I. Fig. 5) unter dem Faden des Instruments beurtheilt wurde. Sobald diese Stange richtig lag, wurde Nr. II. aufgelegt; ihr wagerechter Keil wurde durch die Schraube ihres hinteren Bockes in die Höhe der Axe von Nr. I. gestellt und durch Seitenbewegung in die Linie geschoben, worauf ihr vorderes Ende durch das Passageninstrument gleichfalls in die Linie gebracht wurde; die Entfernung zwischen der vorderen Schneide von Nr. I. und der hinteren von Nr. II. wurde durch die Stellschraube der letzteren in die Grenzen gebracht, innerhalb welcher man mit dem Glaskeile messen kann. Eben so wurden Nr. III. und Nr. IV. aufgestellt. Nachdem alle vier Stangen lagen, wurden die Wasserwagen eingestellt und an Nr. I. abgelesen:

1. die Angabe der Schraube der Wasserwage,
2. das Quecksilberthermometer,
3. die Einschiebung des Glaskeils am Metallthermometer,
4. die Einschiebung desselben zwischen Nr. I. und Nr. II.

An der Stange Nr. II. wurden dieselben Ablesungen 1 bis 3, statt 4 aber die der Einschiebung des Glaskeils zwischen Nr. II. und Nr. III. gemacht. Nun wurde Nr. I. abgenommen und vor Nr. IV. aufgestellt, worauf man die Ablesungen an Nr. III. machte, auch die Einschiebung des Glaskeils zwischen Nr. II. und Nr. III. wiederholte. — Auf diese Art ging es fort: zur Zeit der Ablesungen lagen immer alle vier Stangen auf ihren Lagern und in der Richtung der Linie; abgelesen wurde immer an der vorletzten. Da man Bretter und Nägel für 7 Stangen vorräthig hatte, so waren die mit der Legung derselben beauftragten Arbeiter immer weit genug vor der Messstange, an welcher beobachtet wurde, voraus. Wenn man dem Passageninstrumente so nahe gekommen war, dass die Undeutlichkeit des

Sehens störend wurde, so wurde es auf seinen nächsten Standpunkt versetzt.

Bei der zweiten Beobachtung eines schon beobachteten Zwischenraumes zwischen zwei Stangen hätte das Metallthermometer der folgenden auch noch einmal beobachtet werden sollen; wir unterliessen dieses aber, weil die kleinen Aenderungen desselben in der kurzen Zeit zwischen beiden Beobachtungen der Zeit proportional angenommen und daher aus zwei aufeinanderfolgenden Beobachtungen geschlossen werden konnten.

Es muss noch angegeben werden, durch welches Mittel der Punkt festgelegt wurde, bis zu welchem man am Abend gelangt war, von welchem also am nächsten Morgen wieder angefangen werden musste. Man grub und rammte an dem vorläufig bestimmten Punkte, an welchem man aufhören wollte, einen starken Pfahl in die Erde, so dass seine Oberfläche mit der Oberfläche des Bodens gleich wurde. Auf diesen Pfahl befestigte man durch Bohrschrauben eine Einrichtung, durch welche ein, auf einer Silberplatte gemachter Punkt in zwei auf einander senkrechten Richtungen durch Schrauben verschoben und in beliebiger Lage festgestellt werden konnte. Wenn die Messung bis zu dem Pfahle vorgerückt war, so stellte man noch die darüber hinausgehende Stange auf und mass auch den Zwischenraum zwischen ihr und der vorhergehenden. Von ihrer wagerechten Schneide hing man ein mit einer feinen Spitze versehenes Loth herab und wandte die auf dem Pfahle befestigte Einrichtung an, um den Punkt auf der Silberplatte an dem durch die Spitze angedeuteten Orte zu befestigen. Damit der Wind das Loth nicht störe, war dieses mit einer auf dem Pfahle aufstehenden und bis zu dem Aufhängungspunkte hinaufgehenden Röhre, in deren unteres Ende Glastafeln eingesetzt sind, durch welche die Spitze des Lothes sichtbar wird, umgeben. Beim Wiederanfange am nächsten Morgen wurde dieselbe Messstange, von welcher das Loth am Abend herabgelassen war, wieder aufgestellt und durch dasselbe Mittel in ihre vorige Lage gebracht. Während der Nacht wurde der Pfahl und die darauf befestigte Einrichtung mit einem Brette und dieses mit Steinen und Erde bedeckt. — Dieses Verfahren ist bequem und sicher; es fordert aber, dass man sich vorher von der Richtigkeit des Lothes überzeuge, dessen Spitze ihren Ort nicht verändern darf, wenn der Faden um seine Axe gedrehet wird.

Wenn die letzte Stange vor der Ankunft an dem Signalpfeiler am Ende der Grundlinie gelegt worden war, so war noch die Entfernung ihres Endes von der Axe des Cylinders, welche den Endpunkt bestimmt, zu messen. Um dieses ausführen zu können, wurde eine gerade, 4 Zoll starke Stange von Holz, an deren einer Kante eine gerade Linie gezogen worden war, so abgeschnitten, dass sie den Zwischenraum zwischen der Messstange und dem Signalpfeiler ausfüllte; sie wurde durch eine Setzwage wagerecht gelegt, so hoch wie die Oberfläche des Cylinders, welcher den Endpunkt der Grundlinie bestimmt, und so, dass die gerade Linie auf ihrer Oberfläche in der Richtung der Grundlinie lag. Die letzte Messstange wurde dann an ihrem vorgehenden Ende erhöhet oder erniedrigt, bis ihre Axe in der Ebene der Stange von Holz war. Nach dieser Vorbereitung mass man die Entfernung des Endpunktes der Grundlinie von der lothrechten Schneide der Messstange durch den, schon am Anfange der Messung angewandten Pariser Fuss von Eisen, welcher so oft zwischen zwei rechtwinkeligen Messingstücken abgeschoben wurde, als er ganz in der Entfernung enthalten war; der übrigbleibende Bruch wurde durch eine besondere Scale gemessen.

§ 11. Messungen der Grundlinie.

Nachdem sämmtliche Vorbereitungen getroffen waren, und nachdem jedem Theilnehmer der Messung sein Geschäft erklärt und gezeigt worden war, fing die Messung am 11. August 1834 um 10^h Morg. am Endpunkte Trenk an. Sie gelangte ohne Schwierigkeit bis zu dem niedrigeren Grunde, dessen weichere Oberfläche die Anwendung hölzerner Pfähle, statt der bis dahin zur Grundlage der Bretter benutzten eisernen Nägel, erforderte. Hier aber zeigte sich die vorher vorgenommene Einschlagung der hölzernen Pfähle nicht immer genügend, sondern erforderte häufige Nachhülfe, welche ein langsameres Fortschreiten der Messung zur Folge hatte, so dass wir um $7^h\ 30^m$ Abends erst 28 volle Lagen und eine Stange, oder etwa 226 Toisen gelegt hatten. Hier wurde ein Endpunkt festgelegt, welcher, da er auch bei den folgenden Messungen wieder vorkommt, die Bezeichnung A erhalten soll. Es war ein Grund vorhanden, diesen Punkt auf eine von der im vorigen § beschriebenen etwas verschiedene Art festzulegen; da man ihn nämlich während der Dauer der Messung unverändert bewahren, und dennoch auf die fernere Anwendung der Einrichtung zur Festlegung der Endpunkte nicht Verzicht leisten wollte, so wurde diese Einrichtung nicht auf dem Pfahle befestigt, sondern die Spitze des Lothes bis auf die Oberfläche des Pfahles herabgelassen und an dem durch sie bezeichneten Punkte eine Nadel eingeschlagen, deren Axe den Punkt A bezeichnete. Diese Aufbewahrung des Punktes war

wünschenswerth, weil der langsame Gang der Messung und der am Anfange noch stattfindende Mangel an Uebung der Arbeiter uns fürchten liessen, dass der gemessene Theil der Grundlinie nicht die Sicherheit gewähren möchte, welche wir bei der Fortsetzung zu erreichen hofften. Wir gingen daher am folgenden Tage zwar von dem Punkte A weiter vorwärts, allein wir kehrten, nach der Erreichung des Endpunktes Mednicken, zu dem Anfangspunkte zurück, um die Entfernung Trenk-A noch einmal zu messen. Hierdurch ist die erste Messung der Grundlinie aus den beiden Theilen A-Mednicken und Trenk-A zusammengesetzt worden. Nachdem wir aber zum zweiten Male am Punkte A angelangt waren, gingen wir wieder von ihm vorwärts bis zum Endpunkte Mednicken, und fügten zuletzt noch die dritte Messung der Entfernung Trenk-A hinzu, wodurch die zweite Messung der Grundlinie dieselben beiden Abtheilungen erhalten hat, welche die erste besass. — Bei der ersten Messung war das Ende der letzten Messstange fast um zwei Toisen von dem Endpunkte Mednicken entfernt geblieben, so dass fast die volle Länge einer Stange durch die Abschiebungen des Fusses gemessen werden musste; um dieses zu vermeiden, richteten wir die zweite Messung durch Verkleinerung der willkürlichen Zwischenräume zwischen den Stangen so ein, dass noch eine Stange mehr gelegt werden konnte, wodurch eine so kleine Entfernung zwischen ihrem Ende und dem Punkte Mednicken übrig blieb, dass sie unmittelbar mit der Scale gemessen werden konnte.

Am 12. August, zwischen $6^h\ 26^m$ Morgens und $6^h\ 44^m$ Abends, wurden vom Punkte A aus 414 Toisen gemessen; am 13., zwischen $6^h\ 23^m$ Morg. und $0^h\ 50^m$, wurden die bis zum Endpunkte Mednicken noch fehlenden 295 Toisen hinzugesetzt. Der Wiederanfang am Punkte Trenk geschah am 14. Aug. $5^h\ 31^m$ Morg.; um 11^h war der Punkt A erreicht; allein wir gelangten nicht ganz zu diesem Punkte, sondern blieben, wegen der erwähnten Verkleinerung der Zwischenräume, fast 3 Zoll von ihm entfernt, nach genauerer Messung mit der Scale $34{,}^L462$. Nach der Bestimmung dieses Unterschiedes gingen wir weiter und gelangten $5^h\ 21^m$ Abends in die Entfernung von 386 Toisen vom Anfangspunkte. Am 15. August, zwischen $5^h\ 23^m$ Morg. und $6^h\ 10^m$ Abends massen wir 549 Toisen, bis zum Endpunkte Mednicken. Am 16. zwischen $6^h\ 4^m$ und 11^h Morg. wurde wieder von Trenk bis A gemessen, von welchem Punkte wir dieses Mal $48{,}^L407$ entfernt blieben.

Man sieht aus diesem Auszuge des Tagebuches, dass die getroffenen Einrichtungen die Messung einer Grundlinie mit verhältnissmässig kleinem Zeitaufwande gewähren. Wenn die Arbeiter am thätigsten waren und wenn Jeder, der ein Geschäft auszuführen hatte, den Augenblick des Vorkommens desselben genau wahrnahm, so wurden 8 Lagen oder 64 Toisen in jeder Stunde gemessen. Dabei wurde nichts übereilt, so wie auch die zur Ruhe der Arbeiter nothwendigen Zwischenzeiten nicht beschränkt wurden; jeder einzelne Theil des Geschäftes hatte die zu seiner ordentlichen Ausführung gehörige Zeit; Uebung und genaues Ineinanderpassen der einzelnen Theile machten eine Schnelligkeit des Fortganges möglich, welche uns wünschenswerth erschien, weil sie den Grund der Voraussetzung der unveränderten Aufstellung der Messstangen durch Verminderung der Zwischenzeiten vermehrte.

Obgleich die erste Messung der Entfernung Trenk-A nicht für so sicher gehalten wurde als die übrigen, so ist sie doch berechnet worden, weshalb wir sie hier auch mit aufführen werden. Die verschiedenen Messungen ergaben*):

Entfernung Trenk-A.

Messung	0.	I.	II.
1 Fuss am Anfange	$+144{,}^L011$	$+144{,}^L001$	$+144{,}^L001$
113 Messst. $=113L+\lambda'-L$	$-\ 0{,}301$	$-\ 0{,}301$	$-\ 0{,}301$
Reduction	$-\ 52{,}646$	$-\ 51{,}150$	$-\ 52{,}431$
Metallthermometer	$-\ 80{,}520$	$-\ 85{,}126$	$-\ 88{,}069$
Zwischenräume	$+174{,}149$	$+143{,}575$	$+133{,}265$
Entfernung d. Endes von A	$0{,}000$	$+\ 34{,}462$	$+\ 48{,}407$
Summe $113L$	$+184{,}693$	$+185{,}461$	$+184{,}872$

Entfernung A-Mednicken.

Messung	I.	II.
Entfernung des Anfanges von A	$0{,}^L000$	$-\ 34{,}^L462$
353 Messst. $=353L+\lambda''-L$	$+\ 0{,}399$	.....
354 „ $=354L+\lambda''+\lambda'''-2L$	.....	$+\ 0{,}327$
Reduction	$-\ 86{,}437$	$-\ 87{,}205$
Metallthermometer	$-\ 246{,}913$	$-\ 246{,}185$
Zwischenräume	$+\ 558{,}773$	$+\ 443{,}899$
Entfernung des Endes von Mednicken	$+1657{,}389$	$+\ 80{,}411$
Summe	$+1883{,}211$	$+156{,}785$
	$+\ 353L$	$+354L$

Hieraus geht die Länge der Grundlinie hervor:

	I.	II.
Trenk-A	$113L+\ 185{,}^L461$	$113L+184{,}^L872$
A-Mednicken	$353L+1883{,}211$	$354L+156{,}785$
Trenk-Mednicken	$466L+2068{,}672$	$467L+341{,}657$

*) [Einzelmessungen nicht aufgeführt.]

Da L, dem 6. § zufolge $= 1729^{L},1167 = 2^{T} + 1^{L},1167$ ist, so sind resp. 466 L und 467 L

$$932^{T} + 520^{L},382 \mid 934^{T} + 521^{L},499$$

und man erhält die Länge der Grundlinie

$$= 934^{T} + 861^{L},054 \mid 934^{T} + 863^{L},156.$$

Das Mittel aus beiden $2^{L},102$ von einander verschiedenen Messungen ist

$$934^{T} + 862^{L},105 = 934^{T},997807.$$

Diese Länge ist als auf einer, der Meeresoberfläche parallelen, in der mittleren Höhe der Grundlinie befindlichen Fläche gemessen, anzusehen; um sie auf die Meeresfläche zu reduciren, muss man die mittlere Höhe der Grundlinie kennen. Diese mittlere Höhe geht aus den Höhen der beiden Endpunkte Trenk und Mednicken, verbunden mit den Höhen der einzelnen Messstangen in Beziehung auf diese Endpunkte, hervor. Die ersteren finden sich, durch Beobachtungen von Zenithdistanzen, wie man im 4. Abschnitte sehen wird: Trenk $= 17^{T},599$; Mednicken $= 18^{T},067$. Die letzteren sind aus den Ablesungen der Schrauben der Wasserwagen, nach den im 8. § angeführten Formeln, berechnet worden. Diese Ablesungen haben bei der ersten Messung die Höhe von Mednicken über Trenk $= 0^{T},347$, bei der zweiten $0^{T},398$ ergeben, während dieselbe aus den beobachteten Zenithdistanzen $= 0^{T},468$ hervorgeht. Die mittlere Höhe der Grundlinie, in Beziehung auf die mittlere Höhe der Endpunkte, ist aus den Angaben der Schrauben der Wasserwagen $= -1^{T},422$ hervorgegangen; von der Meeresfläche an gerechnet ist sie also $16^{T},41$. — Wenn man den Krümmungshalbmesser der Erde an dem Orte und in der Richtung der Grundlinie $= 3276143^{T}$ annimmt, so erhält man hieraus die Reduction der gemessenen Länge auf die Meeresfläche $= 4^{L},046 = 0^{T},004683$. Die auf die Meeresfläche reducirte Länge der Grundlinie ist daher $= 934^{T},993124$.

§. 12. Beurtheilung der Messungen der Grundlinie.

Die Fehler, welche die Bestimmung der Länge der Grundlinie haben kann, können aus drei von einander getrennten Ursachen entstehen: aus übriggebliebenen Fehlern in der Vergleichung der Messstangen untereinander (§ 5); aus einem Fehler in der Bestimmung ihrer Längen (§ 6); endlich aus zufälligen Fehlern, welche bei ihrer Anwendung zur Messung der Grundlinie begangen worden sind (§ 11). Welcher Einfluss auf die Länge der Grundlinie aus jeder dieser Ursachen zu fürchten ist, soll hier untersucht werden. Es wird auch daraus hervorgehen, inwiefern die gemachten Vergleichungen der Messstangen untereinander und mit der Toise als genügend betrachtet werden können.

Dem vorigen § zufolge ist der Ausdruck der Längen beider Theile der Grundlinie:

$$= 29\lambda' + 28\lambda'' + 28\ \lambda''' + 28\lambda^{IV} + 272^{L},065 - 38^{L},019\,m' - 39^{L},541\,m'' - 37^{L},294\,m''' - 38^{L},638\,m^{IV}$$
$$+ 88\lambda' + 89\lambda'' + 88{,}5\lambda''' + 88\lambda^{IV} + 1266{,}164 - 103{,}805\,m' - 114{,}265\,m'' - 106{,}942\,m''' - 111{,}744\,m^{IV}$$

der Ausdruck ihrer ganzen Länge also

$$117\lambda' + 117\lambda'' + 116{,}5\lambda''' + 116\lambda^{IV} + 1538^{L},229 - 141^{L},824m' - 153^{L},806m'' - 144^{L},236m''' - 150^{L},382\,m^{IV}.$$

Setzt man für λ', λ'', λ''', λ^{IV} ihre Ausdrücke durch L, x', x'', x''', x^{IV}, für L aber seinen aus den Vergleichungen der Messstange Nr. I folgenden Ausdruck § 6, nämlich:

$$L = 1728^{L},0707 - x' + 1{,}3778\,m',$$

so erhält man den Ausdruck des Einflusses von x', x'', x''', x^{IV} und m', m'', m''', m^{IV} auf die Länge der Grundlinie:

$$- 349{,}5\,x' + 117\,x'' + 116{,}5\,x''' + 116\,x^{IV} + 500^{L},980\,m' - 153^{L},806\,m'' - 144^{L},236\,m''' - 150^{L},382\,m^{IV}.$$

Der mittlere Fehler der Grundlinie, insofern er aus der ersten Ursache, nämlich aus der Vergleichung der Messstangen untereinander hervorgeht, ist also der mittlere Fehler dieses Ausdruckes.

Wenn unbekannte Grössen x, y, z.... aus den Gleichungen

$$(an) = (aa)\,x + (ab)\,y + (ac)\,z + \ldots.$$
$$(bn) = (ab)\,x + (bb)\,y + (bc)\,z + \ldots.$$
$$(cn) = (ac)\,x + (bc)\,y + (cc)\,z + \ldots.$$

u. s. w.

hervorgehen, und wenn man das Gewicht P eines, aus denselben zusammengesetzten Ausdruckes:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots.$$

sucht, so findet man es bekanntlich durch die Formel:

$$\frac{1}{P} = \alpha A + \beta B + \gamma C + \ldots.$$

in welcher A, B, C.... die den Gleichungen

$$\alpha = (aa)\,A + (ab)\,B + (ac)\,C + \ldots.$$
$$\beta = (ab)\,A + (bb)\,B + (bc)\,C + \ldots.$$
$$\gamma = (ac)\,A + (bc)\,B + (cc)\,C + \ldots.$$

u. s. w.

Genüge leistenden Grössen sind. Man erhält also, in

dem gegenwärtigen Falle A, B, C.... aus den Gleichungen des § 5, deren Auflösung ergibt*):

$$\log A = 2{,}20541\,n \qquad \log E = 1{,}41788\,n$$
$$\log B = 1{,}64474 \qquad \log F = 1{,}83984$$
$$\log C = 1{,}76580 \qquad \log G = 1{,}91179$$
$$\log D = 1{,}76363 \qquad \log H = 1{,}90142$$

womit man $\frac{1}{P} = 27268{,}7$, und da der mittlere Fehler jeder der, der Bestimmung der unbekannten Grössen zum Grunde liegenden Gleichungen im 5. § $= 0^{L}{,}003531$ gefunden ist, den mittleren Fehler der Grundlinie, insofern er aus dieser Bestimmung hervorgeht,

$$= \pm 0^{L}{,}583$$

erhält.

Der mittlere Fehler einer Messung von L, mit der Toise, ist im 6. § $= 0^{L}{,}003407$ gefunden; da die angewandte Bestimmung von L auf 12 Messungen beruhet und da die Grundlinie durch eine 466,5malige Vervielfältigung von L gemessen worden ist, so ist ihr mittlerer, aus der Vergleichung der Messstangen mit der Toise hervorgehender Fehler:

$$= \frac{466{,}5}{\sqrt{12}} \cdot 0^{L}{,}003407 = \pm 0^{L}{,}459.$$

Der Einfluss der dritten Ursache, nämlich der zufälligen Fehler bei der Anwendung der Messstangen, kann nur durch die Vergleichung der gemachten beiden Messungen, sowohl des einen als des anderen Theils der Grundlinie, geschätzt werden. Die Unterschiede dieser Messungen betragen für den Theil von 113 Messstangen Länge $0^{L}{,}589$, für den anderen von 354 Messstangen $2^{L}{,}691$; man erhält dadurch für das Quadrat des mittleren Fehlers der ganzen Grundlinie, welcher bei Einer Messung zu fürchten ist, den Ausdruck:

$$\frac{467}{2}\left\{\frac{(0{,}589)^2}{113} + \frac{(2{,}691)^2}{354}\right\}$$

und also den mittleren Fehler der aus der zweimal wiederholten Messung hervorgegangenen Länge:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{467}{113}(0{,}589)^2 + \frac{467}{354}(2{,}691)^2} = \pm 1^{L}{,}657^{**}).$$

Diese Bestimmung des mittleren, aus der dritten Ursache hervorgehenden Fehlers verdient ohne Zweifel kein grosses Vertrauen, indem sie nur auf zwei Vergleichungen beruhet; allein auch die erste, nicht für völlig sicher gehaltene Messung der Entfernung Trenk-A, welche von dem Mittel der beiden späteren nur $0^{L}{,}474$ abweicht, gibt mit den übrigen übereinstimmend keine Veranlassung zu argwohnen, dass bei der Anwendung der Messstangen beträchtliche Fehler entstehen. Wenn Fehler in der Messung der Zwischenräume, der Messstangen sowohl als der Metallthermometer, die einzige Ursache der Abweichung verschiedener Messungen von einander wären, so würde man haben erwarten können, die unsrigen innerhalb einer halben Linie übereinstimmen zu sehen; der Erfolg macht also noch andere Fehlerursachen wahrscheinlich, unter welchen sich die Einwirkung der Sonnenstrahlen auf die Aufstellung der Messstangen gewiss befindet. Die zweite in der Beschreibung der Anwendungsart (§ 10) erwähnte Beobachtung jedes Zwischenraumes (welche jedoch bei der ersten Messung der Entfernung A-Mednicken noch nicht vorgenommen wurde) lässt zwar etwanige zufällige Verrückungen der Stangen entdecken, verräth aber Einwirkungen der Sonnenwärme nicht, welche alle Stangen zugleich betreffen. Diese zweite Beobachtung des schon beobachteten Zwischenraumes stimmte übrigens fast immer, bis auf eine unerhebliche Kleinigkeit, mit der ersten überein; selten zeigte sich ein Unterschied von ein Paar Hunderteln einer Linie, doch zweimal betrug er ein Zehntel und einmal sogar vier Zehntel einer Linie, welches wir, da kein Grund davon zu entdecken war, einer Unvorsichtigkeit der Arbeiter zuschreiben zu müssen glaubten. Da man nicht wissen kann, ob solche Unterschiede aus einer Bewegung der einen Stange vorwärts, oder der anderen rückwärts, entstanden sind, so ist es am besten, das Mittel aus beiden Beobachtungen anzunehmen.

Will man die aus den drei getrennten Ursachen entstehenden mittleren Fehler der Länge der Grundlinie vereinigen, so erhält man daraus:

$$\sqrt{(0{,}583)^2 + (0{,}459)^2 + (1{,}657)^2} = \pm 1^{L}{,}816;$$

dieser Schätzung gemäss ist der mittlere Fehler der Grundlinie etwa ihr 445000. Theil, welcher auf die Länge eines Grades einen Einfluss von $0^{T}{,}13$ erhält.

Bei dieser Gelegenheit wollen wir noch das Resultat einer Untersuchung mittheilen, welche den Zweck hatte, anzugeben, was die Messungen der Grundlinie ergeben haben würden, wenn man gezwungen gewesen wäre, die Wärme der Messstangen den Angaben der Quecksilberthermometer in ihren Gehäusen gleich anzunehmen. Die gefundenen Ausdrücke der Angaben der Metallthermometer, welche bekannten, in Réaumurschen Graden ausgedrückten Temperaturen entsprechen

*) [Die 8 Gleichungen wieder weggelassen, s. p. 71.]

**) [Herr Prof. Jordan schreibt hierüber: „Soll sein $\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\text{etc.}}$; dass hier Bessel einen principiellen Fehler macht, indem er den Fehler $\sqrt{2}$ mal zu klein angibt, habe ich schon im 74. Bd. der Astr. Nachr. (p. 209 fl.) angegeben"...—; vgl. die Aufsätze von Andrae und Zachariae, Astr. Nachr. 74 und 80.]

(§ 7), machten es möglich, aus den bei den Messungen der Grundlinie immer angeschriebenen Ständen der Quecksilberthermometer zu berechnen, was die Metallthermometer angegeben haben würden, wenn die Wärme der Messstangen immer den Quecksilberthermometern entsprochen hätte. Der Unterschied der so berechneten Angabe und der wirklich beobachteten zeigte also den Unterschied der Wärme der Thermometer und der Wärme der Stangen. Die bei den Messungen der Grundlinie gemachte Erfahrung stimmte mit der Erwartung überein: wenn die Wärme zunahm, so waren die Quecksilberthermometer immer wärmer als die Stangen; wenn sie abnahm, so wurde das Fallen der Quecksilberthermometer früher bemerkt als das Fallen der Metallthermometer; der Unterschied beider wurde eine zeitlang kleiner und ging endlich, wenn die Abnahme lange genug dauerte, auf die entgegengesetzte Seite über. Bei dem schnellsten Zunehmen der Wärme, welches in den Gehäusen der Stangen in einer Stunde zuweilen 4° R. betrug, ging der Unterschied der Angabe der Quecksilberthermometer von der Temperatur der Stangen bis auf 3° R. und darüber. Aus diesen beträchtlichen Unterschieden hätten nicht unbedeutende Fehler entstehen müssen, wenn man gezwungen gewesen wäre, die Angaben der Quecksilberthermometer zur Berechnung der Messungen der Grundlinie anzuwenden. Da die Wärme bis 2 oder 3^h nach Mittag zuzunehmen pflegt, dann aber noch eine beträchtliche Zeit verfliesst, ehe die vorausgeeilten Quecksilberthermometer auf die Wärme der Stangen zurückkommen, so sind im Allgemeinen jene zu hoch, und die auf ihre Angabe gegründete Berechnung einer Grundlinie gibt eine zu grosse Länge derselben.

Die folgenden Tafeln geben die Fehler näher an, welche bei unseren beiden Messungen der Grundlinie aus der Anwendung der Quecksilberthermometer entstanden sein würden. Sie enthalten die Summen:

$$(a-a')m' + (b-b')m'' + (c-c')m''' + (d-d')m^{IV} + \text{etc.}\ldots.$$

wo a den beobachteten, a' den aus der Angabe des Quecksilberthermometers berechneten Stand des Metallthermometers der Stange Nr. I; b, b', c, c', d, d' dasselbe für die Stangen II, III, IV bedeuten; die letzte Spalte enthält die Summe der Fehler, vom Anfangspunkte der Messung an gerechnet.

Messung I.

Toisen	Tageszeit.	Thermomtr. R.	Fehler.	Summe.
80	17^{h}31^m — 19^{h}11^m	13°3 bis 17°1	+ 0,^{L}538	+ 0,^{L}538
80	19 15 — 21 40	17,1 — 20,1	+ 1,300	+ 1,838
66	21 42 — 23 11	20,9 — 21,0	+ 0,827	+ 2,665
92	18 26 — 21 0	13,1 — 21,2	+ 3,034	+ 5,699
84	21 30 — 23 32	23,2 — 24,9	+ 2,588	+ 8,287
76	23 35 — 1 8	25,4 — 28,1	+ 2,291	+ 10,578
84	3 17 — 5 15	27,1 — 22,8	+ 0,661	+ 11,239
80	5 19 — 6 58	23,4 — 17,3	— 0,393	+ 10,846
124	18 23 — 20 52	11,2 — 17,0	+ 2,055	+ 12,901
84	21 13 — 22 57	17,8 — 21,1	+ 1,846	+ 14,747
84	23 0 — 0 50	21,8 — 23,8	+ 1,599	+ 16,346

Messung II.

110	18^h 4^m — 19^{h}44^m	13°7 bis 16°1	+ 0,^{L}251	+ 0,^{L}251
116	20 46 — 22 49	17,8 — 21,6	+ 1,527	+ 1,778
96	1 10 — 3 18	24,1 — 24,5	+ 1,321	+ 3,099
64	3 51 — 5 21	23,8 — 19,5	— 0,195	+ 2,904
96	17 23 — 18 52	14,2 — 15,6	— 0,032	+ 2,872
102	19 6 — 20 54	16,2 — 19,8	+ 1,472	+ 4,344
86	21 35 — 23 4	20,6 — 20,3	+ 0,890	+ 5,234
38	23 36 — 0 12	18,7 — 19,3	— 0,032	+ 5,202
100	1 20 — 3 6	20,8 — 23,5	+ 1,959	+ 7,161
32	3 9 — 3 44	24,2 — 20,9	+ 0,256	+ 7,417
24	3 46 — 4 10	21,5 — 20,8	— 0,038	+ 7,379
40	4 12 — 4 44	21,3 — 20,7	+ 0,283	+ 7,662
30	5 24 — 6 16	19,2 — 17,2	— 0,256	+ 7,406

Die Anwendung der Angaben der Quecksilberthermometer, statt der wahren Temperatur der Messstangen, würde bei der ersten Messung die Länge 16,^{L}346 zu gross, bei der zweiten 7,^{L}406 gleichfalls zu gross gegeben haben; das Mittel aus beiden Messungen würde also 11,^{L}876 zu gross ausgefallen sein. Dass der Fehler bei der ersten Messung grösser gewesen sein würde als bei der zweiten, rührt von immer heiterem Himmel bei jener, und von veränderlichem Wetter und Gewitterschauern bei dieser her. Obgleich nicht zu zweifeln ist, dass mehrere in das Metall jeder Messstange eingelegte Thermometer, statt des einen ganz von ihr getrennten, die Temperatur derselben richtiger angegeben haben würden, so zeigen die Beispiele unserer beiden Messungen doch, dass Vorsicht angewandt werden muss, wenn die Sorgfalt, mit welcher eine Grundlinie gemessen wird, nicht durch Zweifel über die wahre Temperatur der Messstangen erfolglos werden soll.

Zweiter Abschnitt.

Winkelbeobachtungen.

Für die beiden äussersten Punkte unseres Dreiecksnetzes, für Trunz und für den Leuchtethurm von Memel,

sind die Polhöhen und die Richtungen der Meridiane durch astronomische Beobachtungen bestimmt worden. Der Zweck des Netzes war, diese Bestimmungen und die ähnliche, sich auf die Königsberger Sternwarte beziehende, untereinander zu vergleichen, auch die Längen und Richtungen zweier Dreiecksseiten zu bestimmen, deren eine es gemeinschaftlich haben sollte, mit der Kette von Dreiecken, welche der Generalstab der Königlichen Armee von dem Rheine, durch Hessen, Thüringen, Sachsen, Schlesien, Posen und Westpreussen geführt hat; die andere mit dem Dreiecksnetze, mit welchem Herr Generalmajor VON TENNER Russisch Litthauen bedeckt hat und welches sich an die von ihm und Herrn Etatsrath STRUVE ausgeführten Gradmessungen anschliesst.

Die unmittelbare Uebertragung des Meridians der Königsberger Sternwarte in das Dreiecksnetz ist dadurch möglich geworden, dass man einen der Hauptdreieckspunkte, Wildenhof, von der Sternwarte sehen und also seine Richtung durch das Meridianzeichen bestimmen konnte. Der astronomisch bestimmte Punkt Trunz, in der Nähe des so benannten Dorfes, ist derselbe Pfeiler, welcher der Dreieckspunkt ist. Der astronomisch bestimmte Punkt in der Nähe des Leuchtethurms von Memel ist von dem dortigen Dreieckspunkte verschieden, indem es nothwendig war, diesen auf der Gallerie des Thurmes, jenen auf der Erdoberfläche zu wählen. Um die in Trunz und Memel bestimmten Richtungen der Meridiane desto sicherer miteinander vergleichen zu können, wünschten wir durch möglichst wenige Zwischenpunkte von dem einen zu dem anderen zu gelangen. Obgleich die Entfernung beider Punkte über 100000 Toisen beträgt, und obgleich sie in einem Lande liegen, welches keine Berge besitzt, so wurde es doch möglich, zwei von einander sichtbare Punkte zu finden, von deren einem der 103 Toisen über der Meeresfläche liegende Punkt Trunz, von dem anderen der 14,6 Tois. hohe Punkt auf der Gallerie des Leuchtethurms von Memel gesehen werden konnte. Der eine dieser Punkte liegt auf dem 56,6 Tois. hohen, 40863 Tois. von Trunz entfernten Hügel Galtgarben; der andere, in der Höhe von 29,4 Tois., auf einer Sanddühne der Curischen Nehrung, neben der Poststation Nidden, 37811 Tois. von Galtgarben und 24349 Tois. von dem Leuchtethurme in Memel entfernt. Die Linie von Galtgarben nach Trunz geht grösstentheils über das frische Haff hinweg und die Höhen beider Punkte sind beträchtlich genug, um jede Schwierigkeit der Bestimmung ihrer Richtung zu entfernen; allein die fast ganz über die Ostsee hinweggehende Linie von Galtgarben nach Nidden kömmt der Oberfläche derselben so nahe, dass der eine Punkt von dem anderen nicht immer, sondern nur bei grösserer irdischen Strahlenbrechung gesehen werden kann. Da wir aber durch unmittelbare Versuche, bei welchen das Heliotropenlicht auf dem einen Punkte, von dem anderen, an einigen aufeinanderfolgenden Tagen sichtbar wurde, die Hoffnung erlangt hatten, dass die dazu erforderlichen Umstände nicht selten eintreten möchten, so entschlossen wir uns lieber, es darauf zu wagen, als die Verbindung zwischen Trunz und Memel durch nur zwei Zwischenpunkte aufzugeben. Wir suchten die Ausführbarkeit unseres Vorhabens durch Gerüste zu erleichtern, welche wir über den Punkten Galtgarben und Nidden errichteten, durch welche das Heliotropenlicht an dem ersteren bis auf $60^{T},604$, an dem anderen bis auf $30^{T},947$ erhöhet wurde; wir wären an diesem Punkte gern noch höher gegangen, allein der lose Sand der Dühnen und die heftigen Stürme, welchen die Nehrung häufig ausgesetzt ist, erlaubten keinen hohen Bau.

Die Verbindung unseres Dreiecksnetzes mit dem Preussischen ist durch die Dreiecksseite Trunz-Wildenhof von 30124 Tois. Länge; die mit dem Russischen durch Memel-(Kirchthurm)-Lepaizi von 16866 Toisen Länge erlangt worden. Der Kirchthurm in Memel ist zwar keiner unserer Beobachtungspunkte, allein seine Lage ist durch Beobachtungen auf den drei Punkten Nidden, Memel (Leuchtethurm) und Lepaizi nicht weniger sicher bestimmt worden, als geschehen sein würde, wenn man auf ihm Winkel gemessen hätte.

§. 13. Beschreibung der zur Winkelmessung angewandten Instrumente.

Bei weitem der grösste Theil der Winkelmessungen ist mit einem, von Herrn TH. ERTEL in München verfertigten Theodoliten von 15 Zoll Durchmesser gemacht worden; nur auf den Punkten Legitten, Gilge, Kalleninken und Algeberg, welche sämmtlich auf der Ostseite des Curischen Haffs liegen, ist ein 12-zölliger Wiederholungstheodolit, von den Herren PISTOR und SCHIEK in Berlin verfertigt, angewandt.

Das erstere Instrument ist nach einer Zeichnung gebauet, welche Herr Etatsrath SCHUMACHER entworfen hatte und uns im Jahre 1831 mittheilte, und welche veranlasste, Herrn ERTEL sogleich um die Ausführung derselben zu bitten. Es kann als Wiederholungsinstrument und auch zur einfachen Beobachtung der Richtungen angewandt werden; seine Eintheilungen, durch vier Nonien, geben unmittelbar $2''$ an, wodurch die Ablesungen eine Genauigkeit erlangen, welche der letz-

teren Anwendungsart den Vorzug vor der ersteren zu geben scheint, zumal da die ganz willkürliche Wahl der Anfangspunkte einer Furcht vor einem übrigbleibenden Einflusse kleiner Theilungsfehler keinen Raum gibt. Wir haben nur diese Beobachtungsart angewandt.

Das Fernrohr des Instruments ist 19 Zoll lang und hat 21 Lin. Oeffnung; es ist ausgezeichnet schön und hat, in seinem Brennpunkte, ein Netz von vier sehr feinen Fäden, welche paarweise einander parallel, in etwa 22″ Entfernung von einander, sich rechtwinklig durchschneiden, also ein kleines Quadrat bilden, dessen Mittelpunkt der Collimationspunkt des Fernrohrs ist. — Die Axe des Fernrohrs liegt auf zwei, auf der lothrechten Axe des Alhidadenkreises festen, von ihr auseinander gehenden und an ihren oberen Enden 10¾ Zoll von einander entfernten Trägern. Sie befindet sich 10 Zoll über der gemeinschaftlichen Ebene der Theilungen des Kreises und der Alhidade, welche Höhe der Axe möglich macht, das Fernrohr bis noch über die Höhe des Poles hinaus zu erheben, also Azimuthalunterschiede zwischen Circumpolarsternen und irdischen Gegenständen zu beobachten. Die Last der Axe und des Fernrohrs, welche beträchtlich ist, wird durch mit Reibungsrollen versehene Federn getragen. Die Horizontalität der Axe wird durch eine aufzusetzende Wasserwage erlangt; dass die Axe in ihren Lagern umgelegt werden kann, versteht sich von selbst.

Ein werthvoller Vorzug dieses Instruments vor den gebräuchlichen Arten der Theodoliten ist die Leichtigkeit, mit welcher es auch die Beobachtung von Zenithdistanzen gewährt. Auf der horizontalen Axe, an dem einen über ihren Träger hervorstehenden Ende derselben, befindet sich nämlich ein Kreis von 7½ Zoll Durchmesser und die ihn, durch 4 Nonien, von 4″ zu 4″ eintheilende Alhidade. Diese trägt eine Wasserwage, welche, nachdem das Fernrohr auf den Punkt gerichtet ist, dessen Zenithdistanz bestimmt werden soll, durch Drehung der Alhidade zum Einspielen gebracht wird und dann die Zenithdistanz, einschliesslich des Indexfehlers, angibt. Den Punkt, auf welchen der Indexfehler sich bezieht, kann man durch Drehung der Wasserwage um die Axe der Alhidade nach Belieben verändern; den Indexfehler selbst aber durch Umlegung der Axe aus dem Resultate schaffen. — Man sieht hieraus, dass jede Richtung des Instruments auf einen Punkt die vollständige Bestimmung desselben durch Azimuth und Höhe gibt, wenn man beide ablesen will. Das Instrument ist von Herrn Ertel sehr fest und schwer gebauet worden. Wie viel es leistet, werden die folgenden Beobachtungen besser zeigen, als vorläufige Schätzungen, welche hier ihren Platz finden könnten.

Dieses Instrument ist in der Regel von uns gemeinschaftlich angewandt worden, so dass beide Beobachter abwechselnd Sätze von Einstellungen und Ablesungen machten. Einigemale war nur einer von uns auf einem Dreieckspunkte gegenwärtig und beobachtete also allein; aber da sich kein merklicher Unterschied zwischen der Geschicklichkeit beider ergab, so halten wir für überflüssig, die Namen jedesmal zu nennen. Das zweite Instrument, der 12-zöllige Wiederholungstheodolit von Pistor und Schiek, ist ausschliesslich von Herrn Lieutenant Kulenkamp angewandt worden. Er hat sowohl die Winkel wiederholt, als auch einzelne Einstellungen gemacht, wie aus den folgenden Registern seiner Beobachtungen auf den vier genannten Punkten hervorgehen wird. Es wird nicht nöthig sein, die Bauart dieses Instruments zu beschreiben, da ähnliche bekannt genug sind. Seine Theilung durch 4 Nonien ist ausgezeichnet schön und gibt unmittelbar 5″ an; dasselbe Lob der schönen Ausführung gebührt dem ganzen Instrumente und seinem Fernrohre. Zenithdistanzen gibt es nicht an.

§ 14. Aufstellungsart der Instrumente und Signalisirung der Dreieckspunkte.

Wo es geschehen konnte, bestimmten wir unsere Dreieckspunkte durch Pfeiler von Stein, Mauerwerk oder Holz, welche sich 3 Fuss über die Oberfläche des Bodens erhoben, und welche zu Standpunkten, nicht nur für das Instrument zur Messung der Winkel, sondern auch für das Heliotrop oder sonstige Einrichtungen zur Signalisirung dienten. In einigen Fällen mussten höher liegende Punkte zu Standpunkten für das Instrument gewählt werden. Auf den benutzten Thürmen in Königsberg, Legitten und Kalleninken wurden möglichst feste Standpunkte eingerichtet; auf dem Leuchtethurme von Memel wurde ein festes, aus dreizolligem Eichenholze construirtes Gestell an der äusseren Mauer des Thurmes durch Schraubenbolzen, welche durch dieselbe hindurchgingen, befestigt und diente zur Aufstellung des Instruments und des Heliotrops. In Gilge befand sich der Aufstellungs- und Signalisirungspunkt auf dem östlichen Schornsteine des dortigen Pfarrhauses. Auf dem Dreieckspunkte Wildenhof, auf welchem, trotz seiner Höhe von 112 Tois. über der Meeresfläche, vorliegende Wälder die Aussichten verschlossen, wurde das Instrument 5,T755 über der Oberfläche des Bodens aufgestellt; eine sehr grosse, auf dem Schlossberge von Wildenhof wachsende Fichte wurde in dieser Höhe ab-

geschnitten, daselbst mit einem Stücke Eichenholze bedeckt, von ihrer Rinde befreiet und mit einem Zimmerwerke umgeben, welches dem schweren Instrumente Sicherheit beim Heraufbringen, und den Beobachtern einen geräumigen, sicheren Standpunkt gewährte. Dieses Zimmerwerk war ausser Verbindung mit dem Fichtenstamme, auf welchen also auch die Bewegungen der Beobachter ohne Einfluss waren. — In Lepaizi, auf Russischem Gebiete, hatte Herr General VON TENNER ein sehr hohes Signal errichten lassen, unter welchem unser Instrument, nahe an der Erde, seinen Stand erhielt.

Dass Einrichtungen getroffen werden, vermöge welcher der Mittelpunkt des Instruments und der Mittelpunkt der Signalisirungen entweder in eine und dieselbe Lothlinie, oder wenigstens in bekannte Lage gegeneinander gebracht werden können, ist immer nothwendig, vorzüglich aber dann, wenn grössere Entfernungen aus kleineren, durch trigonometrische Operationen, abgeleitet werden sollen. Da dieser Fall bei unserem Netze, vorzüglich bei der Verbindung der Grundlinie mit der Dreiecksseite Galtgarben-Condehnen, vorkommt, so war es nöthig, Mittel anzuwenden, durch welche man sich von der Centrirung, sowohl des Theodoliten als der Signale, vollkommen überzeugen konnte. Um die erstere hervorzubringen, wurde der Theodolit nicht unmittelbar auf den Signalpfeiler gestellt, sondern auf einen Dreifuss von starken, in Einer Ebene liegenden Eisenstangen, welche in einem Mittelpunkt zusammentreffen; dieser Mittelpunkt ist durchbohrt, sodass das Loch darin genau auf den, den Dreieckspunkt bezeichnenden, einen halben Zoll über die Oberfläche des Steines hervorragenden Cylinder von Messing passt; die drei Stäbe des Dreifusses haben an ihrer oberen Fläche, in gleicher Entfernung von dem Mittelpunkte, conische Löcher, in welche die drei Fussschrauben des Theodoliten treffen; unter denselben haben sie kleine Hervorragungen, mit welchen der Dreifuss die Ebene des Steines berührt. Wenn man eine Beobachtung mit dem auf dem Dreifusse stehenden Theodoliten gemacht hat, beide zusammen dann um 180° drehet und die Beobachtung wiederholt, so beziehet sich das Mittel aus beiden Beobachtungen offenbar auf die Axe des Cylinders, selbst wenn der Mittelpunkt des Theodoliten nicht mit dem Mittelpunkte des durch die drei Fussschrauben gezogenen Kreises zusammenfällt; dasselbe wird erlangt, wenn man den Dreifuss und den Theodoliten um 120° und 240° drehet, also aus drei Beobachtungen das Mittel nimmt, u. s. w.

Zur Signalisirung der wenig entfernten Punkte haben wir zwei Mittel angewandt, welche, das eine bei Sonnenschein, das andere bei bedecktem Himmel, vollständige Sicherheit gewähren. Das erstere besteht in einer versilberten und polirten Halbkugel von Kupfer, welche so auf den zu signalisirenden Pfeiler gesetzt wird, dass der über denselben hervorragende Cylinder sich in einem Loche befindet, dessen Axe durch den Mittelpunkt der Halbkugel geht, und dessen Durchmesser der Dicke des Cylinders gleich ist. Wenn die Sonne scheint, so sieht man einen hellen Punkt auf der Oberfläche der Kugel, auf welchen das Instrument mit grosser Schärfe gerichtet werden kann; der Ort dieses Punktes hängt von dem Stande der Sonne, also von der Beobachtungszeit ab und muss durch eine Rechnung gefunden werden, deren Elemente der Stundenwinkel und die Declination der Sonne, die Polhöhe, der Halbmesser der Halbkugel und ihre Entfernung vom Beobachter sind. Es waren 7 Halbkugeln dieser Art vorhanden, vier von $94^{L},98$ bis $95^{L},76$, drei von $46^{L},55$ bis $46^{L},66$ Durchmesser; die grösseren konnte man in Entfernungen von 5000 Toisen mit dem Fernrohre des 15-zolligen Theodoliten noch ohne Schwierigkeit beobachten. Dieses Mittel lässt, wenn die Sonne scheint, nichts zu wünschen übrig; allein um von dieser Forderung unabhängig zu werden, wandten wir noch ein zweites an. Es war dieses eine quadratische Tafel von Holz, von etwa 2 Fuss Seite, auf einem Dreifusse stehend, welcher ihre Ebene senkrecht macht, wenn er auf eine wagerechte Ebene gesetzt wird. Um dieses in aller Schärfe zu erlangen, ist der Dreifuss mit Stellschrauben versehen, welche, wenn sie einmal berichtigt waren, der auf der horizontalen Ebene eines Signalpfeilers aufgestellten Tafel ohne Weiteres die senkrechte Lage gaben. Die Tafel ist weiss angestrichen, hat aber in ihrer Mitte einen schwarzen, von Oben nach Unten gehenden Streifen von 10 Zoll Breite. Damit die Mitte dieses Streifens genau in die Lothlinie des zu signalisirenden Punktes gebracht werden könne, ist an dem unteren Rande der Tafel, in der Mitte und in der fortgesetzten Ebene des Streifens, eine stählerne Spitze angebracht, welche bei der Aufstellung in die Durchbohrung der Axe des den Dreieckspunkt bezeichnenden Cylinders gebracht wird, und dadurch einen Fehler der Aufstellung der Tafel unmöglich macht. Durch Drehung der Tafel um ihre lothrechte Axe kann die Breite, in welcher man den schwarzen Streifen sieht, verkleinert werden, ohne dass er seinen Ort verändert. — Beide Mittel der Signalisirung und die vorher beschriebene Aufstellungsart des Theodoliten haben uns auf das Vollständigste versichern können, dass unsere Beob-

achtungen sich wirklich auf die Punkte beziehen, auf welche sie sich beziehen sollen.

Zur Signalisirung der entfernteren Punkte wurde meistentheils Heliotropenlicht angewandt. Die benutzten Heliotrope waren theils von der Einrichtung, welche der Erfinder dieser unschätzbaren Methode ihnen gegeben hat; theils waren sie von einer sehr leicht ausführbaren Construction, welche von Herrn Ingenieur-Geographen BERTRAM herrührt und welche vorzüglich bequem ist, wenn das Instrument auch zur Uebertragung von Nachrichten von einem Dreieckspunkte zum anderen angewandt werden soll, was häufig von Nutzen sein kann und auch von uns benutzt worden ist. — Für die in unserem Dreiecksnetze vorkommenden, schon genannten drei Kirchthürme sind die unmittelbar unter ihren Knöpfen liegenden Punkte ihrer Helmstangen zu Absehenspunkten gewählt; wie die Centrirung der Aufstellungspunkte des Instruments auf diese Punkte erlangt worden ist, wird bei Gelegenheit der Aufzählung der Beobachtungen selbst angegeben werden. — Wo wir unsere Beobachtungen von dem Sonnenscheine unabhängig machen wollten, haben wir ein gleichschenkliges Dreieck von Lattenwerk über einem Dreieckspunkte aufgerichtet, dessen senkrecht stehende sich auf den Himmel projicirende Ebene mit schwarzer Leinewand bekleidet war, und dessen Spitze sich in der Lothlinie des Dreieckspunktes befand; eine Signalisirung dieser Art ist oft vortheilhafter als Heliotropenlicht, vorzüglich wenn die Entfernung nicht grösser ist als 15000 bis 20000 Toisen; eine quadratische Fläche über dem Signalpfeiler würde der dreieckigen wahrscheinlich noch vorzuziehen sein.

§ 15. Beobachtungsart mit dem 15-zolligen Theodoliten und Combination der damit gemachten Beobachtungen.

Das Instrument ist immer auf diejenigen Dreieckspunkte eingestellt worden, auf welchen das Heliotropenlicht oder die sonstige Signalisirung sichtbar war und für deren Beobachtung der Zustand der Luft nicht zu ungünstig zu sein schien. In dieser Beziehung kommen alle Abstufungen von der vollkommenen Ruhe der Bilder im Fernrohre bis zu dem heftigsten Zittern und Wallen derselben vor, welches sehr häufig so stark wird, dass man das Beobachten aufgeben muss, wenn man sich nicht mit rohen Annäherungen begnügen will; heftiger Wind wird gleichfalls den Beobachtungen sehr nachtheilig, indem er dem Auge die vorzüglich bei dem Ablesen des Instruments nöthige Ruhe raubt. Es ist nicht zu bezweifeln, dass die Güte der Beobachtungen sich beträchtlich ändern müsse während des Ueberganges von den befriedigendsten äusseren Umständen zu denen, welche das Unterlassen derselben am rathsamsten erscheinen lassen und daher zur Folge haben; allein es ist schwer, oder wenigstens uns nicht ausführbar erschienen, einen Maassstab zu erlangen, welcher einer Beurtheilung des relativen Werthes der Beobachtungen unter verschiedenen Umständen zum Grunde gelegt werden könnte. Wir haben die Regel angenommen und ohne Ausnahme befolgt, die Anstellung einer Beobachtung selbst als die Anerkennung hinreichend günstiger äusserer Umstände anzusehen; d. h. wir haben jede gemachte Beobachtung, und zwar alle mit gleichem Gewichte, zu dem Resultate stimmen lassen, ohne das etwanige Zusammentreffen ungünstigerer Umstände mit der stärkeren Abweichung einer Beobachtung als einen Grund zu ihrer Ausschliessung gelten zu lassen. Wir haben geglaubt, nur durch die feste Beobachtung dieser Regel Willkür aus unseren Resultaten entfernen zu können. Wir unterdrücken die Bemerkung nicht, dass unter sehr günstigen Umständen gemachte Beobachtungen zwar oft eine vorzügliche Uebereinstimmung zeigten, dass aber auch Fälle vorgekommen sind, in welchen diese nicht grösser war, als die unter ungünstigeren Umständen erlangte. Es scheint, dass die längere Zeit, welche man in dem letzteren Falle auf die Beobachtungen verwenden muss und verwendet, die äusseren Nachtheile grossentheils compensirt und dass Ursachen von Beobachtungsfehlern, deren der Beobachter sich nicht bewusst ist, oft nicht weniger einwirken als die sich ihm aufdrängenden.

Die Berichtigung des Theodoliten besteht bekanntlich darin, dass die Collimationslinie des Fernrohrs senkrecht auf die Axe desselben, diese Axe senkrecht auf die Drehungsaxe, und die Drehungsaxe senkrecht auf die Ebene des Horizonts gestellt werden. Man wird ohne Zweifel nie mit einem Theodoliten beobachten, den man nicht berichtigt hätte; allein es ist ganz unnöthig, die Berichtigung bei jeder neuen Anwendung desselben zu wiederholen; es ist in jedem Falle sogar besser, kleine Aenderungen derselben, welche sich durch den Gebrauch oder durch Erschütterungen des Instruments eingefunden haben könnten, durch die Anordnung der Beobachtungen aus dem Resultate zu schaffen. Wir haben die dieses leistende Regel befolgt, zuerst die Drehungsaxe genau lothrecht zu stellen, was durch die auf die Axe des Fernrohrs gesetzte Wasserwage und durch die Fussschrauben des Instruments erlangt wird und dann wirklich stattfindet, wenn die Luftblase der Wasserwage ihren Ort in der Röhre durch die

Drehung des Instruments nicht verändert; dann aber die bei diesem Zustande des Instruments gemachten Beobachtungen, nach einer entgegengesetzten Auflegung des Fernrohrs, bei welcher die Enden der Axe nicht umgelegt werden, zu wiederholen. Man erspart hierdurch die jedesmalige Berichtigung der Wasserwage durch Umsetzung derselben auf der Axe, und ebenso die Berichtigung der Höhen der Träger der Axe und die Berichtigung der Collimationslinie; auch eine etwanige Ungleichheit der Dicken der Cylinder der Axe verliert allen Einfluss.

Die getroffene Anordnung unserer Beobachtungen ist folgende. Der getheilte Kreis des Instruments wurde festgeklemmt und die Drehungsaxe der Alhidade senkrecht gestellt; dann wurde das Fernrohr auf einen der zu beobachtenden Punkte gerichtet und die Angaben der vier Nonien abgelesen; die Einstellung und Ablesung wurden bei allen zu beobachtenden Punkten gleichfalls vorgenommen. Auf die Beendigung dieser ersten Beobachtungsreihe folgte eine Wiederholung derselben in umgekehrter Ordnung, wodurch man das Mittel aus beiden von der Voraussetzung der Unveränderlichkeit des Anfangspunktes der Theilungen des Instruments während der Dauer der Beobachtungen zu befreien beabsichtigte. Eine dritte und eine vierte Beobachtungsreihe waren von den beiden vorigen nur dadurch verschieden, dass man den Anfangspunkt der Theilungen um ohngefähr 15^0 veränderte; eine fünfte und sechste bezogen sich auf einen wieder um ohngefähr 15^0 veränderten Anfangspunkt. Darauf wurde das Fernrohr entgegengesetzt aufgelegt, die Alhidade um $180^0 + 15^0$ gedrehet und eine 7. und 8., sowie nach zwei ferneren Drehungen um 15^0 noch 2 Paare von Beobachtungsreihen gemacht. Der erste Anfangspunkt war ganz dem Zufalle überlassen; die folgenden wurden nur ohngefähr 15^0 von einander entfernt angenommen, ohne einige Minuten mehr oder weniger zu berücksichtigen; vor jedem zusammengehörigen Paare von Beobachtungsreihen wurde die senkrechte Stellung der Drehungsaxe der Alhidade aufs Neue untersucht und wenn es nöthig war berichtigt. Wenn diese Beobachtungen durch eintretendes zu starkes Zittern der Gegenstände, oder durch den Abend unterbrochen wurden, so suchte man das daran fehlende bei der nächsten Gelegenheit zu ergänzen.

Wenn man immer alle, auf einem Dreieckspunkte zu beobachtende Richtungen hätte einstellen können, so würde das Resultat aller daselbst gemachten Beobachtungen ganz einfach das Mittel aus allen Ablesungen jeder Richtung gewesen sein. Dieses war aber sehr selten möglich; man musste sich auf die Beobachtung derjenigen Punkte beschränken, welche gerade sichtbar waren und nicht zu unruhig erschienen. Wie wir in allen Fällen Resultate aus den Beobachtungen gezogen haben, muss jetzt angezeigt werden.

Wenn die Richtungen von einem Dreieckspunkte nach den daselbst zu beobachtenden anderen, von einem derselben an gezählt, durch $A, B, C, \ldots$ bezeichnet werden, die bei einer Beobachtungsreihe gemachten Ablesungen durch $m, m', m'' \ldots$, die willkürliche Entfernung des Anfangspunktes der Theilungen des Instruments von dem Anfangspunkte der Richtungen durch x, so gibt diese Beobachtungsreihe die Gleichungen:

$$0 = m - x, \quad 0 = m' - x - A, \quad 0 = m'' - x - B, \text{ u. s. w.}$$

welche Gleichungen alle, oder nur zum Theil vorhanden sind, je nachdem man alle zu bestimmende Richtungen oder nur einen Theil derselben beobachtet hat. Um alle Fälle unter Eine Form zu bringen, kann man diese Gleichungen mit Factoren $\sqrt{p}, \sqrt{p'}, \sqrt{p''} \ldots$ multipliciren, von welchen die den beobachteten Richtungen entsprechenden $= 1$, die den nicht beobachteten entsprechenden $= 0$ sind. Man hat also, ohne weitere Nebenbedingung, die Gleichungen:

$$0 = \sqrt{p}(m - x), \quad 0 = \sqrt{p'}(m' - x - A),$$
$$0 = \sqrt{p''}(m'' - x - B), \text{ u. s. w.}$$

Eine zweite Beobachtungsreihe gibt ebenso:

$$0 = \sqrt{p_,}(m_, - x_,), \quad 0 = \sqrt{p'_,}(m'_, - x_, - A),$$
$$0 = \sqrt{p''_,}(m''_, - x_, - B), \text{ u. s. w.,}$$

eine dritte

$$0 = \sqrt{p_{,,}}(m_{,,} - x_{,,}), \quad 0 = \sqrt{p'_{,,}}(m'_{,,} - x_{,,} - A),$$
$$0 = \sqrt{p''_{,,}}(m''_{,,} - x_{,,} - B), \text{ u. s. w.}$$

u. s. w. Die allen auf einem Dreieckspunkte gemachten Beobachtungen am meisten entsprechenden Werthe von $A, B, C \ldots$ sind die, welche den Ausdruck

$$\begin{aligned} 2\Omega = {} & p\,(m - x)^2 + p'(m' - x - A)^2 \\ & + p''(m'' - x - B)^2 + \ldots \\ & + p_,(m_, - x_,)^2 + p'_,(m'_, - x_, - A)^2 \\ & + p''_,(m''_, - x_, - B)^2 + \ldots \\ & + p_{,,}(m_{,,} - x_{,,})^2 + p'_{,,}(m'_{,,} - x_{,,} - A)^2 \\ & + p''_{,,}(m''_{,,} - x_{,,} - B)^2 + \ldots \\ & \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

so klein als möglich machen. Dieses wird geleistet, wenn man die unbekannten Grössen $x, x_,, x_{,,} \ldots A, B, C \ldots$ so annimmt, dass sie den Gleichungen

$$p\ m\ +p'\ m'\ +p''\ m''+\ldots=(p\ +p'\ +p''+\ldots)x+p'A+p''B+p'''C+\ldots\ *)$$
$$p_,\ m_,\ +p'_,\ m'_,\ +p''_,\ m''_,+\ldots=(p_,\ +p'_,\ +p''_,+\ldots)x_,+p'_,A+p''_,B+p'''_,C+\ldots$$
$$p_{,,}\ m_{,,}+p'_{,,}\ m'_{,,}+p''_{,,}\ m''_{,,}+\ldots=(p_{,,}+p'_{,,}+p''_{,,}+\ldots)x_{,,}+p'_{,,}A+p''_{,,}B+p'''_{,,}C+\ldots$$

u. s. w.

$$p'\ m'\ +p'_,\ m'_,\ +p'_{,,}\ m'_{,,}+\ldots=(p'\ +p'_,\ +p'_{,,}+\ldots)A+p'\ x+p'_,\ x_,+p'_{,,}x_{,,}+\ldots$$
$$p''\ m''+p''_,\ m''_,+p''_{,,}\ m''_{,,}+\ldots=(p''+p''_,+p''_{,,}+\ldots)B+p''\ x+p''_,\ x_,+p''_{,,}\ x_{,,}+\ldots$$
$$p'''\ m'''+p'''_,\ m'''_,+p'''_{,,}\ m'''_{,,}+\ldots=(p'''+p'''_,+p'''_{,,}+\ldots)C+p'''\ x+p'''_,\ x_,+p'''_{,,}\ x_{,,}+\ldots$$

u. s. w.

entsprechen. Wenn man x, $x_,$, $x_{,,}$ . . . aus dem zweiten Systeme von Gleichungen mittelst des ersten wegschafft, so erhält man eine der Zahl der Richtungen A, B, C . . . gleiche, nur diese enthaltende Zahl von Gleichungen, welche man, nach gewohnter Art,

$$(an)=(aa)\,A+(ab)\,B+(ac)\,C+\ldots$$
$$(bn)=(ab)\,A+(bb)\,B+(bc)\,C+\ldots$$
$$(cn)=(ac)\,A+(bc)\,B+(cc)\,C+\ldots$$

u. s. w.

bezeichnen kann. Diese Gleichungen sind das Resultat der Beobachtungen auf einem Dreieckspunkte. Durch ihre Auflösung erhält man diejenigen Werthe von A, B, C. . . ., welche anzunehmen sein würden, wenn nur auf dem einen Dreieckspunkte beobachtet worden wäre. Da aber auf allen Dreieckspunkten beobachtet worden ist, und die auf einem derselben stattfindenden Richtungen mit den auf den übrigen stattfindenden hierdurch in Verbindung gesetzt werden, so sind die Gleichungen, welche auf den an einem Dreieckspunkte gemachten Beobachtungen beruhen, für sich allein genommen, nicht hinreichend zu der Erfindung der die ganze Masse der Beobachtungen möglichst gut darstellenden Werthe von A, B, C. . . . Es wird aus der später zu entwickelnden Theorie der Berechnung aller Beobachtungen hervorgehen, dass ihre Verbindung untereinander den Werthen von A, B, C. . . ., welche aus den Beobachtungen auf einem einzigen Dreieckspunkte hervorgehen, noch Verbesserungen hinzusetzt, welche durch (1), (2), (3), . . . bezeichnet werden sollen, so dass die allen vorhandenen Beobachtungen möglichst gut entsprechenden, von einer der zu bestimmenden an gezählten Richtungen:

$$A+(1),\ B+(2),\ C+(3),\ \ldots$$

sind und dass zwischen diesen Verbesserungen und von den Verbindungen der verschiedenen Dreieckspunkte untereinander abhängigen Grössen P, Q, R . . ., die Gleichungen

$$P=(aa)\,(1)+(ab)\,(2)+(ac)\,(3)+\ldots$$
$$Q=(ab)\,(1)+(bb)\,(2)+(bc)\,(3)+\ldots$$
$$R=(ac)\,(1)+(bc)\,(2)+(cc)\,(3)+\ldots$$

u. s. w.

stattfinden. Etwas Weiteres als die Werthe von A, B, C . . . und die letzten Glieder dieser Gleichungen, ergeben die Beobachtungen auf jedem Dreieckspunkte nicht. Man bringt daher ihr vollständiges Resultat in seine einfachste Form, wenn man die aus ihnen folgenden Werthe von A, B, C . . . und die Gleichungen zwischen (1), (2), (3) . . . und P, Q, R . . . angibt. Dieses ist bei der folgenden Anführung der Beobachtungen auf jedem Dreieckspunkte geschehen.

Dass man die Berechnung von A, B, C . . . erleichtert, wenn man alle gleichen Combinationen unter ihnen zusammennimmt, und, um mit kleineren Zahlen zu thun zu haben, von jeder beobachteten Richtung eine willkürliche, ihr beinahe gleiche abzieht, bemerkt man ohne Erinnerung. Die Anführung der einzelnen Beobachtungen haben wir dadurch vereinfacht, dass wir die erste Ablesung jeder Reihe von allen folgenden Ablesungen abgezogen haben; diese Ablesung ist jedoch nicht immer der Zeit nach, sondern der Folge der Spalten unserer Tafeln nach die erste.

§ 16. Beobachtungsart mit dem 12-zolligen Theodoliten und Combination der damit gemachten Beobachtungen.

Auf den vier Dreieckspunkten, auf welchen der 12-zollige Theodolit angewandt worden ist, wurde er theils zur Wiederholung, theils zur einfachen Beobachtung der Winkel benutzt. Wir halten für unnöthig, zur Erläuterung beider Beobachtungsarten noch etwas zu sagen; allein es ist nöthig, zu zeigen, wie die Beobachtungen zu einem gemeinschaftlichen Resultate vereinigt worden sind, und welches Gewicht man demselben beigelegt hat.

*) [Im Original . . . $+pA+p'B+p''C+\ldots$, $+p_,A+p'_,B+p''_,C+\ldots$, $+p_{,,}A+p'_{,,}B+p''_{,,}C+\ldots$; corrigirt nach einer Bemerkung des Herrn Prof. Jordan.]

Die Theorie der Wiederholungsbeobachtungen, durch deren Verfolgung die richtige Combination derselben untereinander und die Bestimmung ihres Gewichtes allein erlangt werden können, ist in einer im J. 1834 bekannt gemachten Abhandlung*) des Herausgebers untersucht worden; die uns nöthigen Formeln zur Berechnung des Gesuchten werden wir daraus entnehmen.

Die Fehler der Beobachtungen einer Richtung haben zwei von einander völlig getrennte Ursachen, nämlich die Unsicherheit der Einstellung des Fernrohrs auf den die Richtung bestimmenden Punkt, und die Unsicherheit der Angabe und Ablesung der Theilungen. Bezeichnet man den mittleren, aus der ersten Ursache hervorgehenden Fehler durch α, den aus der zweiten hervorgehenden durch β, so ist der mittlere Fehler der einmaligen Beobachtung des Winkels zwischen zwei Punkten

$$= \sqrt{2\alpha\alpha + 2\beta\beta};$$

wenn nur solche einfache Winkelmessungen gemacht sind, so hat es kein Interesse, α und β abgesondert kennen zu lernen, indem der Werth des aus ihnen hervorgehenden mittleren Fehlers sich aus den Abweichungen der Beobachtungen untereinander ergibt und nur dieser bei der Schätzung des Gewichtes eines mittleren Resultates aus mehreren ähnlichen Beobachtungen in Betracht kömmt. Wenn aber sowohl einfache als auch wiederholte Beobachtungen gemacht sind, oder die letzteren nicht immer aus gleichmässig angeordneten, gleich zahlreichen Reihen bestehen, so wird die abgesonderte Kenntniss von α und β nothwendig, indem jede Verschiedenheit in dieser Hinsicht eine andere Combination von α und β in dem Ausdrucke des mittleren Fehlers zur Folge hat.

Wir werden zuerst die allgemeine Auflösung der Aufgabe anführen, welche nicht voraussetzt, dass die Ablesungen nur am Anfange und am Ende einer Reihe von Wiederholungen, oder in gleichen Zwischenräumen gemacht seien. Wenn die Beobachtungsreihe aus $f^{(n)}$ Wiederholungen besteht und nach den Anzahlen derselben:

$$0,\ f',\ f'',\ \ldots\ f^{(n-1)},\ f^{(n)}$$

die Ablesungen

$$m,\ m',\ m''\ \ldots\ m^{(n-1)},\ m^{(n)}$$

gemacht sind, zur Abkürzung aber

$$f' = h',\ f''-f' = h'',\ f'''-f'' = h'''\ldots f^{(n)}-f^{(n-1)} = h^{(n)}$$

und

$$\frac{\alpha\alpha}{\beta\beta} = e$$

gesetzt werden, so zeigt die am angeführten Orte gegebene Analyse der Aufgabe, dass man die wahrscheinlichste Bestimmung des Winkels x zwischen beiden Richtungen und das ihr beizulegende Gewicht aus der Auflösung der Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\left(2e+\tfrac{1}{h'}\right) u - \tfrac{1}{h'}u' = 2em - x\\
-\tfrac{1}{h'}u &+ \left(2e+\tfrac{1}{h'}+\tfrac{1}{h''}\right)u' - \tfrac{1}{h''}u'' = 2em'\\
-\tfrac{1}{h''}u' &+ \left(2e+\tfrac{1}{h''}+\tfrac{1}{h'''}\right)u'' - \tfrac{1}{h'''}u''' = 2em''\\
&\text{u. s. w.}\\
-\tfrac{1}{h^{(n-1)}}u^{(n-1)} &+ \left(2e+\tfrac{1}{h^{(n-1)}}+\tfrac{1}{h^{(n)}}\right)u^{(n-1)} - \tfrac{1}{h^{(n)}}u^{(n)} = 2em^{(n-1)}\\
-\tfrac{1}{h^{(n)}}u^{(n-1)} &+ \left(2e+\tfrac{1}{h^{(n)}}\right)u^{(n)} = 2em^{(n)} + x
\end{aligned}$$

und

$$\frac{f^{(n)}x}{2\alpha\alpha} - \frac{1}{2\alpha\alpha}(u^{(n)}-u) = X$$

erhält. Der Werth von x, welcher $X=0$ entspricht, ist der gesuchte wahrscheinlichste; der Divisor von X, bei der unbestimmten Auflösung, ist das Gewicht von x. Die Auflösung dieser Gleichungen erlangt man, indem man zuerst $u^{(n)}$, dann u, aus dem ersten Systeme derselben ableitet und dann beide in die letzte Gleichung substituirt. Wenn man die erste Gleichung durch h' und den Coefficienten von u dividirt und den Quotienten zu der zweiten addirt, so wird die Summe frei von u; dividirt man diese durch h'' und den Coefficienten von u' und addirt man den Quotienten zu der dritten, so wird die Summe auch frei von u'; indem man dieses Verfahren fortsetzt bis zu der letzten Gleichung, erhält man

$$Lu^{(n)} = M + Nx;$$

wendet man es aber in umgekehrter Ordnung an, so dass man bei der letzten Gleichung anfängt und bei der ersten endigt, so erhält man dadurch, analog bezeichnet:

*) Astron. Nachr. von Schumacher, XI. Band Nr. 256 [s. unter „Verschiedenes".]

$$L'u = M' + N'x$$

Die Substitution dieser Ausdrücke in die letzte Gleichung, verwandelt dieselbe in

$$\left\{f^{(n)} - \frac{N}{L} + \frac{N'}{L'}\right\}x - \left\{\frac{M}{L} - \frac{M'}{L'}\right\} = 2\alpha\alpha X$$

und ergibt also:

$$x = \frac{\frac{M}{L} - \frac{M'}{L'}}{f^{(n)} - \frac{N}{L} + \frac{N'}{L'}}$$

und das Gewicht dieser Bestimmung:

$$= \frac{1}{2\alpha\alpha}\left\{f^{(n)} - \frac{N}{L} + \frac{N'}{L'}\right\}$$

Um diese Auflösung anwenden zu können, muss man den Werth sowohl von α als von β für das Instrument, mit welchem man beobachtet hat, vorher ausgemittelt haben. Ein Weg, welcher zu der Kenntniss beider Werthe führen kann, ist a. a. O. gezeigt worden; seine wirkliche Betretung hat für dasselbe Instrument, von welchem hier die Rede ist, dort

$$\alpha = 0''{,}563, \quad \beta = 1''{,}872$$

ergeben; allein da die Einstellungen des Fernrohrs auf Dreieckspunkte weniger genau sind, als die Einstellungen auf die Fäden des Meridiankreises, auf welchen die eben angeführte Bestimmung von α beruhet, so erscheint es angemessen, den Werth von α zu vergrössern. Wir haben ihn $= 0''{,}837$ gesetzt, wodurch

$$\frac{\alpha\alpha}{\beta\beta} = e = \frac{1}{5}$$

wird. Auf diesen Annahmen von α und e beruhen also unsere Berechnungen der mit dem 12-zolligen Theodoliten gemachten Beobachtungen. Das dadurch herausgebrachte Gewicht derselben setzt das Gewicht einer Beobachtung, deren mittlerer Fehler $= 1''$ ist, als Einheit voraus.

Die Anwendung derselben Theorie wird einfacher, wenn die Ablesungen immer in gleichen Zwischenräumen gemacht sind, oder wenn h', h'', h'''. . . . $h^{(n)}$ sämmtlich gleiche Zahlen $= h$ sind. Bezeichnet man dann

$$m^{(n)} - m = d_n, \; m^{(n-1)} - m' = d_{n-2}, \; m^{(n-2)} - m'' = d_{n-4},$$

und

$$eh + 1 = k$$

$$\left\{k + \sqrt{kk-1}\right\}^i - \left\{k - \sqrt{kk-1}\right\}^i = [i]$$

so erhält man

$$x = \frac{1}{h} \cdot \frac{d_n[\frac{1}{2}n] + d_{n-2}[\frac{1}{2}n-1] + d_{n-4}[\frac{1}{2}n-2] + \ldots}{n[\frac{1}{2}n] + (n-2)[\frac{1}{2}n-1] + (n-4)[\frac{1}{2}n-2] + \ldots}$$

und das Gewicht dieser Bestimmung

$$= \frac{h}{2\alpha\alpha}\left\{\frac{n[\frac{1}{2}n+1] - (n+2)[\frac{1}{2}n]}{[\frac{1}{2}n+1] - [\frac{1}{2}n]}\right\}$$

Da die Wiederholungsbeobachtungen mit dem 12-zolligen Theodoliten meistens von 5 zu 5 abgelesen sind, so hat es einiges Interesse, die aus den mitgetheilten Vorschriften folgenden Formeln für diesen Fall hier anzuführen:

Anzahl d. Beobacht.	Ausdruck des Winkels.	Gewicht.
5	$5x = d_1$	1,783
10	$10x = d_2$	4,754
15	$80x = 5d_3 + d_1$	8,150
20	$90x = 4d_4 + d_2$	11,669
25	$555x = 19d_5 + 5d_3 + d_1$ . . .	15,222
30	$540x = 15d_6 + 4d_4 + d_2$ . . .	18,784
35	$3040x = 71d_7 + 19d_5 + 5d_3 + d_1$	22,349
40	$2780x = 56d_8 + 15d_6 + 4d_4 + d_2$	25,914

Das Gewicht der einzelnen Einstellung und Ablesung einer Richtung ist

$$= 0{,}2378.$$

Durch diese Bestimmungen werden die verschiedenen Anwendungen des Instruments auf den Fall der einfachen Beobachtungen der Richtungen zurückgeführt. Man erhält also ihre Zusammenziehung zu einem mittleren Resultat für jeden Dreieckspunkt durch die im vorigen § gegebenen Vorschriften, indem man das Resultat jeder Beobachtungsreihe als durch eine, dem Gewichte gleiche Anzahl von Beobachtungen gegeben annimmt. Welches Verhältniss die angenommene Einheit der Gewichte zu dem Gewichte der mit dem 15-zolligen Theodoliten gemachten Beobachtungen hat, muss später ausgemittelt werden, da man die Beobachtungen mit beiden Instrumenten, um das Endresultat der ganzen Operation zu erhalten, miteinander combiniren muss.

[Es folgen nun, §§ 17—33 (p. 78—128), die Winkelbeobachtungen auf den Stationen Trenk, Mednicken, Fuchsberg, Wargelitten, Haferberger Thurm, Galtgarben, Condehnen, Wildenhof, Trunz, Nidden, Lattenwalde, Leuchtethurm von Memel, Lepaizi, Algeberg, Kalleninken, Gilge, Legitten; z. B. für:]

§ 17. Beobachtungen in Trenk.

18 Richtungen (1832 Sept. 19, 1833 Mai 9 und 11) nach Mednicken, Fuchsberg, Wargelitten, Galtgarben*).

Art der Signalisirungen.

Mednicken . . . 1—3, 5, 6, 13—18 Signaltafel; 4, 7—12 Kugel.
Fuchsberg . . . 1—6, 13—18 Signaltafel; 7—12 Kugel.
Wargelitten . 1, 4—6, 13—18 Signaltafel; 2, 3, 7—12 Kugel.
Galtgarben . . 1—4, 13—18 Signaltafel; 5, 6 Eisernes Kreuz.

*) [Einzelbeobachtungen weggelassen.]

Die Beobachtungen der Kugeln und des eisernen Kreuzes auf Galtgarben, sind schon auf die Dreiecks-punkte reducirt.

Resultat.

Mednicken....	0°	0′	0,″000
Fuchsberg....	83	30	34,866 + (1)
Wargelitten ..	287	14	13,822 + (2)
Galtgarben ...	346	24	18,773 + (3)

Gleichungen zur Bestimmung der unbekannten Grössen (1) bis (3).

$$P = 12{,}75\,(1) - 4{,}25\,(2) - 3{,}25\,(3)$$
$$Q = -4{,}25\,(1) + 10{,}75\,(2) - 2{,}25\,(3)$$
$$R = -3{,}25\,(1) - 2{,}25\,(2) + 8{,}75\,(3)$$

[u. s. w.]

Dritter Abschnitt.

Berechnung des Dreiecksnetzes.

Die Aufgabe, aus gemachten Winkelmessungen zwischen Punkten auf der Erdoberfläche das ihnen am meisten entsprechende Resultat zu ziehen, ist früher bekanntlich nur in dem Falle aufgelöset worden, in welchem sich ein vollständig entsprechendes finden lässt. In diesem Falle wird jedes Dreieck als ein für sich abgeschlossenes Ganzes angesehen, und wiederholte Beobachtungen seiner drei Winkel werden nur so untereinander ausgeglichen, dass sie die beiden, zur Construction desselben erforderlichen bestimmen, welche dann als unmittelbar beobachtet angesehen werden. Wenn daher unter den Beobachtungen, aus welchen man die Construction eines Dreiecksnetzes ableiten wollte, ausser den zur Berechnung jedes einzelnen Dreieckes nothwendigen, noch andere vorkamen, welche eine Verbindung mehrerer Dreiecke untereinander ergaben, so konnte man durch die mehr oder weniger vollständige Erfüllung der hierdurch gegebenen Bedingungen zwar eine Bestätigung der Richtigkeit der gemachten Beobachtungen erhalten; man war aber nicht im Stande, dieselben Bedingungen zur Vermehrung der Genauigkeit des Resultates zu verwenden. Da aber die Annäherung an die Wahrheit, welche Beobachtungen allein ergeben können, im Allgemeinen desto grösser wird, je zahlreicher die Beobachtungen sind und je mehr ihre Anordnung einer Anhäufung ihrer unvermeidlichen Unvollkommenheiten entgegenwirkt, so ist es hier, wie in allen anderen Fällen, in welchen man die Erreichung der grössten den Beobachtungsmitteln angemessenen Sicherheit beabsichtigt, wesentlich, nicht nur aus den gemachten Beobachtungen allen Nutzen zu ziehen, welchen sie zu gewähren vermögen, sondern auch die zu machenden so anzuordnen, dass sie möglichst viele Verbindungen verschiedener Dreiecke gewähren.

Es war daher erforderlich, eine allgemeine Auflösung der Aufgabe, geodätische Beobachtungen zu berechnen, aufzusuchen. Diese Auflösung muss zwei Forderungen entsprechen: sie muss nämlich die gemachten unmittelbaren Beobachtungen so abändern, oder gegenseitig ausgleichen, dass sie in ein mögliches Dreiecksnetz passen, in ein nicht mit sich selbst im Widerspruche befindliches, oder für eine Seite oder einen Winkel zwei verschiedene Werthe ergebendes; sie muss ferner diese Abänderungen so bestimmen, dass die Summe ihrer Quadrate ein Minimum wird. — Dieses hat der Herausgeber durch eine Auflösung erlangt, welche durch eine Anwendung bekannt geworden ist, die Herr Professor Rosenberger davon gemacht hat*). Dieselbe Auflösung der Aufgabe haben wir zu der Berechnung unseres Dreiecksnetzes so angewandt, dass jeder einzelnen Einstellung eines der Instrumente genau gleiches Gewicht, beiden Instrumenten aber das ihnen zukommende gegeben worden ist. Wenn man die im vorigen Abschnitte mitgetheilten Beobachtungen ansieht, so bemerkt man leicht, dass sie die Richtungen von einem Punkte nach verschiedenen anderen mit sehr ungleichen Gewichten bestimmen. Der Fall welchen Herr Hofrath Gauss in seiner vortrefflichen Abhandlung über diesen Gegenstand**) vorausgesetzt hat, dass nämlich alle Richtungen unabhängig von einander bestimmt seien, findet bei unseren Beobachtungen nicht statt, indem sie bei verschiedenen Combinationen der zu bestimmenden Richtungen gemacht worden sind. Wenn man allen Richtungen ein gleiches Gewicht hätte geben wollen, so würde man die häufigeren Gelegenheiten zur Anstellung der von dem Zustande der Atmosphäre weniger abhängigen Beobachtungen haben versäumen müssen, um die selteneren abzuwarten, welche die Beobachtung aller Richtungen zugleich erlaubt haben würden. Es würde aber offenbar nicht zweckmässig gewesen sein, die Beobachtungen dieser Forderung unterzuordnen; eben so wenig würde es zweckmässig gewesen sein, durch die Wahl eines willkürlichen, nicht zum Dreiecksnetze gehörigen Punktes, zum Anfangspunkte aller Richtungen, die Unabhängigkeit derselben von einander

*) Schumacher, Astron. Nachr. Nr. 121. Altona Aug. 1827. [Abh. 129.]

**) Supplementum Theoriae combinationis observationum. Gottingae 1828.

durch einen Zeitverlust zu erkaufen. Da also beides nicht geschehen ist, so wird es nöthig, die Berechnung des Dreiecksnetzes nach Vorschriften zu führen, welche verstatten, die Beobachtungen so anzunehmen, wie sie den zufälligen Umständen gemäss gemacht worden sind.

§ 34. Entwickelung der angewandten Rechnungsvorschriften.

Wenn man die § 15 angewandten Bezeichnungen hier wieder anwendet, so ist die zu erfüllende Forderung, dass der auf alle Beobachtungen an allen Dreieckspunkten ausgedehnte Ausdruck der Summe der Quadrate der Fehler:

$$\begin{aligned} 2\Omega = \quad & p\,(m-x)^2 + p'(m'-x-A)^2 + p''(m''-x-B)^2 + \ldots \\ & + p_{,}(m_{,}-x_{,})^2 + p'_{,}(m'_{,}-x_{,}-A)^2 + p''_{,}(m''_{,}-x_{,}-B)^2 + \ldots \\ & + p_{,,}(m_{,,}-x_{,,})^2 + p'_{,,}(m'_{,,}-x_{,,}-A)^2 + p''_{,,}(m''_{,,}-x_{,,}-B)^2 + \ldots \end{aligned}$$

u. s. w.

ein Minimum werde. Die Verbindungen der Winkel eines Dreiecks und der verschiedenen Dreiecke untereinander machen aber $A, B, C\ldots$ von einander abhängig, indem sie Gleichungen zwischen diesen Grössen:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \mathfrak{A} + \alpha A + \alpha' B + \alpha'' C + \ldots \\ 0 &= \mathfrak{B} + \beta A + \beta' B + \beta'' C + \ldots \\ 0 &= \mathfrak{C} + \gamma A + \gamma' B + \gamma'' C + \ldots \end{aligned}\right\} \ldots . (\odot)$$

u. s. w.

ergeben, deren strenge Erfüllung durch die Bedingung der Möglichkeit des Dreiecksnetzes gefordert wird. Man erhält also, nach der bekannten Theorie der grössten und kleinsten Werthe der Functionen von mehreren veränderlichen Grössen, zwischen welchen Bedingungsgleichungen stattfinden, durch die Differentiirung von Ω in Beziehung auf jede derselben:

$$\begin{aligned} p\,m + p'm' + p''m'' + \ldots &= (p + p' + p'' + \ldots)x + p'A + p''B + p'''C + \ldots \\ p_{,}m_{,} + p'_{,}m'_{,} + p''_{,}m''_{,} + \ldots &= (p_{,} + p'_{,} + p''_{,} + \ldots)x_{,} + p'_{,}A + p''_{,}B + p'''_{,}C + \ldots \\ p_{,,}m_{,,} + p'_{,,}m'_{,,} + p''_{,,}m''_{,,} + \ldots &= (p_{,,} + p'_{,,} + p''_{,,} + \ldots)x_{,,} + p'_{,,}A + p''_{,,}B + p'''_{,,}C + \ldots \end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned} p'm' + p'_{,}m'_{,} + p'_{,,}m'_{,,} + \ldots + \alpha\,\mathrm{I} + \beta\,\mathrm{II} + \gamma\,\mathrm{III} + \ldots &= (p' + p'_{,} + p'_{,,} + \ldots)A + p'x + p'_{,}x_{,} + p'_{,,}x_{,,} + \ldots \\ p''m'' + p''_{,}m''_{,} + p''_{,,}m''_{,,} + \ldots + \alpha'\,\mathrm{I} + \beta'\,\mathrm{II} + \gamma'\,\mathrm{III} + \ldots &= (p'' + p''_{,} + p''_{,,} + \ldots)B + p''x + p''_{,}x_{,} + p''_{,,}x_{,,} + \ldots \\ p'''m''' + p'''_{,}m'''_{,} + p'''_{,,}m'''_{,,} + \ldots + \alpha''\mathrm{I} + \beta''\mathrm{II} + \gamma''\mathrm{III} + \ldots &= (p''' + p'''_{,} + p'''_{,,} + \ldots)C + p'''x + p'''_{,}x_{,} + p'''_{,,}x_{,,} + \ldots \end{aligned}$$

u. s. w.

wo I, II, III, ... unbestimmte Grössen bezeichnen. Diese Gleichungen und die Gleichungen (⊙) zusammengenommen bestimmen $x, x_{,}, x_{,,}, \ldots$; $A, B, C\ldots$ und I, II, III, ... Indem man $x, x_{,}, x_{,,}, \ldots$ durch die ersteren Gleichungen, durch $A, B, C\ldots$ ausdrückt und ihre Ausdrücke in die letzteren substituirt, erhält man, nach den Bezeichnungen des § 15:

$$\begin{aligned} (an) + \alpha\,.\mathrm{I} + \beta\,.\mathrm{II} + \gamma\,.\mathrm{III} + \ldots &= (aa)A + (ab)B + (ac)C + \ldots \\ (bn) + \alpha'.\mathrm{I} + \beta'.\mathrm{II} + \gamma'.\mathrm{III} + \ldots &= (ab)A + (bb)B + (bc)C + \ldots \\ (cn) + \alpha''.\mathrm{I} + \beta''.\mathrm{II} + \gamma''.\mathrm{III} + \ldots &= (ac)A + (bc)B + (cc)C + \ldots \end{aligned}$$

u. s. w.

wenn man aber, wie im 15. §, statt A, B, C u. s. w., $A+(1), B+(2), C+(3)$ u. s. w. setzt und unter $A, B, C\ldots$ jetzt die, im vorigen Abschnitte bereits angegebenen, den Gleichungen

$$\begin{aligned} (an) &= (aa)A + (ab)B + (ac)C + \ldots \\ (bn) &= (ab)A + (bb)B + (bc)C + \ldots \\ (cn) &= (ac)A + (bc)B + (cc)C + \ldots \end{aligned}$$

u. s. w.

entsprechenden Werthe versteht, so verwandeln sich diese Gleichungen in:

$$\left.\begin{aligned} \alpha\,.\mathrm{I} + \beta\,.\mathrm{II} + \gamma\,.\mathrm{III} + \ldots &= (aa)(1) + (ab)(2) + (ac)(3) + \ldots \\ \alpha'.\mathrm{I} + \beta'.\mathrm{II} + \gamma'.\mathrm{III} + \ldots &= (ab)(1) + (bb)(2) + (bc)(3) + \ldots \\ \alpha''.\mathrm{I} + \beta''.\mathrm{II} + \gamma''.\mathrm{III} + \ldots &= (ac)(1) + (bc)(2) + (cc)(3) + \ldots \end{aligned}\right\} (\mathfrak{D})$$

u. s. w.

Die zu befolgenden Rechnungsvorschriften gehen aus den Gleichungen ⊙ und $\mathfrak{D}$ hervor. Sie fordern:

1. die Aufsuchung der Gleichungen ⊙, in welchen, vorausgesetzt dass man die im vorigen Abschnitte angegebenen Werthe von $A, B, C\ldots$ der Aufsuchung zum Grunde legt, statt dieser Grössen (1), (2), (3),... geschrieben werden;

2. die Auflösung der Gleichungen), oder die Erfindung der Ausdrücke von (1), (2), (3),... durch I, II, III, ...;
3. die Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichungen ⊙;
4. die Auflösung dieser Gleichungen, oder die Erfindung der Werthe von I, II, III, ...;
5. die Substitution dieser Werthe in die (ad 2) gefundenen Ausdrücke von (1), (2), (3)....

Die auf diese Art gefundenen Richtungen, von jedem der Dreieckspunkte aus, sind von derjenigen derselben an gerechnet, in welche man willkürlich den Anfang verlegt hat. Für die Berechnung des Dreiecksnetzes bleibt es offenbar gleichgültig, von wo an die Richtungen auf jedem Dreieckspunkte gezählt werden; auch die Uebereinstimmung jeder einzelnen Beobachtungsreihe mit den aus allen zusammen hervorgehenden Werthen der Richtungen ist von der Wahl des Anfangspunktes unabhängig, indem dieselbe mit x, $x_,$, $x_{,,}$, ... zugleich verschwindet. Allein wenn man auch die Grösse des Einflusses, welchen die Ausgleichungen der Richtungen, oder die Verbesserungen (1), (2), (3), ... derselben, auf den Anfangspunkt haben, kennen lernen will, um dadurch zu erfahren, wie grosse Aenderungen dieselben an das Resultat der Beobachtungen aller Richtungen auf jedem Dreieckspunkte anzubringen nöthigen, so wird es erforderlich, auch die zum Anfange gewählte Richtung unbestimmt zu lassen, also alle Richtungen durch

$$z,\ z+A,\ z+B,\ z+C,\ \ldots$$

zu bezeichnen. Man erhält dann zur Bestimmung von z die Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} p\,m+p'm'+p''m''+\ldots \\ +p_,m_,+p'_,m'_,+p''_,m''_,+\ldots \\ +p_{,,}m_{,,}+p'_{,,}m'_{,,}+p''_{,,}m''_{,,}+\ldots \\ +\text{u. s. w.} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} (p+p'+p''+\ldots)x+p'A+p''B+p'''C+\ldots \\ +(p_,+p'_,+p''_,+\ldots)x_,+p'_,A+p''_,B+p'''_,C+\ldots \\ +(p_{,,}+p'_{,,}+p''_{,,}+\ldots)x_{,,}+p'_{,,}A+p''_{,,}B+p'''_{,,}C+\ldots \\ +\text{u. s. w.} \end{array}\right.$$
$$+z\{p+p'+p''+\ldots+p_,+p'_,+p''_,+\ldots+p_{,,}+p'_{,,}+p''_{,,}+\text{etc.}\ldots\}$$

Allein durch die Ausgleichung der Beobachtungen auf jedem einzelnen der Dreieckspunkte und durch die Beziehung von x, $x_,$, $x_{,,}$, ... auf den gewählten Anfangspunkt hat man:

$$p\,m+p'm'+p''m''+\ldots=(p+p'+p''+\ldots)x+p'A+p''B+p'''C+\ldots$$
$$p_,m_,+p'_,m'_,+p''_,m''_,+\ldots=(p_,+p'_,+p''_,+\ldots)x_,+p'_,A+p''_,B+p'''_,C+\ldots$$
$$\text{u. s. w.}$$

wo A, B, C... die aus dieser Ausgleichung hervorgegangenen Werthe der Richtungen bedeuten. Setzt man ihre vollständigen Ausdrücke $A+(1)$, $(B+(2)$, $C+(3)$, ... in die obige Gleichung für z, so reducirt sie sich also auf

$$0=z\{p+p'+p''+\ldots+p_,+p'_,+p''_,+\ldots+p_{,,}+p'_{,,}+p''_{,,}+\ldots+\text{etc.}\}$$
$$+(1)\{p'+p'_,+p'_{,,}+\ldots\}+(2)\{p''+p''_,+p''_{,,}+\ldots\}+(3)\{p'''+p'''_,+p'''_{,,}+\ldots\}$$
$$+\text{u. s. w.}$$

oder, wenn man die Zahl der Beobachtungen des Anfangspunktes und der folgenden Punkte durch h, h', h'' ... bezeichnet, auf

$$0=z\{h+h'+h''+\ldots\}+h'(1)+h''(2)+h'''(3)+\ldots$$

Diese Bestimmung von z für jeden Dreieckspunkt setzt den oben aufgezählten 5 Theilen der Ausgleichung noch einen sechsten hinzu. Wir werden alle 6 Theile zu Gegenständen eben so vieler §§ machen, vorher aber das mittheilen, was nöthig ist, um die Beobachtungen mit den Wiederholungstheodoliten mit denen in Verbindung zu bringen, welche mit dem 15-zolligen Theodoliten gemacht worden sind.

§ 35. Bestimmung des Verhältnisses des Werthes der mit den verschiedenen Instrumenten gemachten Beobachtungen.

Das im zweiten Abschnitte angenommene Gewicht der mit den kleineren Theodoliten gemachten Beobachtungen setzt das Gewicht einer Beobachtung, deren mittlerer Fehler $= 1''$ ist, als Einheit voraus; es ist unter der Annahme berechnet worden, dass die mittleren Fehler einer Einstellung des Fernrohrs und einer abgelesenen Angabe der Eintheilungen $= 0''{,}837$ und $1''{,}872$ seien (§ 16). Will man es dabei bewenden lassen, so ist nichts weiter nöthig, als den mittleren Fehler ε der Beobachtung einer Richtung mit dem 15-zolligen Theodoliten auszumitteln. Für diesen haben wir aus 355 auf den Dreieckspunkten Galtgarben, Con-

dehnen, Wildenhof, Trunz und Nidden gemachten Beobachtungen verschiedener Winkel $2.355.\varepsilon\varepsilon = 1210{,}28$, also

$$\log \varepsilon\varepsilon = 0{,}23163; \quad \varepsilon = \pm 1''{,}3056$$

gefunden.

Aber eine Vergleichung der mit dem 12-zolligen Wiederholungstheodoliten gemachten einzelnen Beobachtungsreihen untereinander zeigt, dass ihr Gewicht weit kleiner angenommen werden muss, als es unter der Voraussetzung der bei seiner Bestimmung angewandten Werthe von α und β (§ 16) ist. Wenn man nämlich die Unterschiede der einzelnen Beobachtungsreihen von dem mittleren Resultate aller durch

$$v,\ v',\ v'' \ldots v^{(n)}$$

bezeichnet, ihre angenommenen Gewichte durch

$$p,\ p',\ p'' \ldots p^{(n)},$$

die Anzahl der beobachteten Punkte durch $m+1$, so sollte

$$ppvv + p'p'v'v' + \ldots + p^{(n)}p^{(n)}v^{(n)}v^{(n)}$$

nahe $= n - m$ sein, wenn die zum Maasse der Gewichte angenommene Einheit wirklich ihre Einheit wäre. Wenn diese Summe beträchtlich von $n - m$ verschieden gefunden wird, so muss zugegeben werden, dass das zur Einheit angenommene Gewicht nicht zu einer Beobachtung gehört, welche den mittleren Fehler $= 1''$ besitzt, sondern zu einer, einen anderen mittleren Fehler ε' besitzenden. Man hat dann zur Bestimmung von ε' die Gleichung:

$$(n-m)\,\varepsilon'\varepsilon' = ppvv + p'p'v'v' + \ldots + p^{(n)}p^{(n)}v^{(n)}v^{(n)}$$

Diese Untersuchung der einzelnen, § 30—33 mitgetheilten Beobachtungsreihen auf den [4] Dreieckspunkten, auf welchen die Wiederholungstheodoliten angewandt worden sind, ergibt*) im Mittel aus allen Bestimmungen: $\log \varepsilon'\varepsilon' = 0{,}89352$. — Die Uebereinstimmung der aus den Beobachtungen auf jedem der 4 Dreieckspunkte folgenden Werthe von ε' mit dem mittleren Resultate aus allen ist gross genug, um nicht zweifelhaft zu lassen, dass äussere Umstände allgemein nachtheilig auf die Beobachtungen gewirkt haben. Man weiss nicht und hat auch kein Mittel zu erfahren, in welchem Verhältnisse sie jede der Fehlerursachen, nämlich die Einstellung des Fernrohrs und die Ablesung der Theilungen, vergrössert haben; man bleibt daher zweifelhaft über den wahren Werth des bei der Combination der Beobachtungen $= 1$ angenommenen Verhältnisses $\frac{\alpha\alpha}{\beta\beta}$. Da wir diesen Zweifel nicht haben heben können, so haben wir uns darauf beschränkt, das angenommene Gewicht der Beobachtungen mit dem 12-zolligen Theodoliten in dem Verhältnisse $\varepsilon'\varepsilon' : 1$ zu verkleineren. Das Gewicht einer Beobachtung mit dem grösseren Theodoliten muss, wenn es das Gewicht einer Beobachtung, deren mittlerer Fehler $= 1''$ ist, zur Einheit erhalten soll, im Verhältniss $\varepsilon\varepsilon : 1$ verkleinert werden; allein es ist bequemer, ihm das Gewicht einer Beobachtung, deren mittlerer Fehler $= \varepsilon$ ist, zur Einheit zu lassen, und die wenigeren Beobachtungen, welche nicht mit diesem Instrumente gemacht sind, auf dieselbe Einheit zu beziehen. Wir haben daher, um die § 30—33 erlangten Resultate mit allen übrigen vergleichbar zu machen, die Coefficienten der Gleichungen zur Bestimmung der Grössen (61) bis (70) mit $\frac{\varepsilon\varepsilon}{\varepsilon'\varepsilon'} = 0{,}21783$ multiplicirt, oder ihren Logarithmen 9,33811 hinzugefügt. Wir haben den auf dem Dreieckspunkte Legitten mit einem 8-zolligen Theodoliten gemessenen Winkel nach derselben Formel berechnet, welche für den 12-zolligen Theodoliten angewandt worden ist; eine Vergleichung beider Instrumente, welche im Herbste 1833 in Königsberg gemacht worden ist, hat nämlich gezeigt, dass die Resultate beider so nahe gleiche Güte besitzen, dass kein Unterschied derselben hat ausgemittelt werden können.

*) [Einzelwerthe weggelassen.]

§ 36. Bedingungsgleichungen zwischen den beobachteten Richtungen.

Da alle auf jedem der Dreieckspunkte gemachte Beobachtungen bereits in ein Resultat zusammengezogen sind, welches sämmtliche sie untereinander verbindende Bedingungen erfüllt, so können die noch zu erfüllenden nur aus Verbindungen entstehen, welche unter den auf verschiedenen Dreieckspunkten beobachteten Richtungen stattfinden. Sie können nur aus den Nothwendigkeiten entstehen, dass die Summe der Winkel jedes Dreiecks $= 180^0 +$ dem Excesse sein muss, und dass alle Richtungen nach einem Punkte sich wirklich in einem Punkte durchschneiden. Um abzukürzen werden wir die aus der ersten Nothwendigkeit hervorgehenden Gleichungen Winkelgleichungen, die aus der zweiten hervorgehenden Seitengleichungen nennen.

Man hat einige Schwierigkeit gefunden, diese Gleichungen sowohl vollständig als auch ohne Wiederholungen aufzufinden. Es wird daher nicht überflüssig sein, hier zu bemerken, dass keine Schwierigkeit vorhanden ist, wenn man die Aufgabe von ihrer rechten Seite betrachtet. Man muss die Entstehung des Dreiecksnetzes aus einer seiner Seiten und den sich an einander reihen-

den Beobachtungen der Richtungen verfolgen, um dadurch unmittelbar alle Bedingungen, und keine doppelt zu erhalten. Zu der Bestimmung eines Punktes N sind zwei Richtungen von zwei Punkten A und B aus, deren Lage als bekannt angenommen wird, erforderlich; liefern die Beobachtungen mehr als zwei Data zu seiner Bestimmung, so ist der Ueberschuss ihrer Zahl über 2 die Zahl der Bedingungsgleichungen, welche die Hinzufügung des Punktes N zu dem Dreiecksnetze ergibt. Ist ein noch nicht bestimmter Punkt N nur von zwei schon bestimmten Punkten A und B beobachtet, und sind am Punkte N die Richtungen nach A und B, welche wegen des willkürlich bleibenden Anfangspunktes derselben nur für ein Datum gelten, beobachtet, so sind 3 Data vorhanden, welche also eine Bedingungsgleichung und zwar eine Winkelgleichung ergeben. Ist der Punkt N von drei schon bestimmten Punkten ABC beobachtet, und sind diese 3 Punkte von N beobachtet, so sind 5 Data, also 3 Bedingungsgleichungen, nämlich zwei Winkelgleichungen und eine Seitengleichung vorhanden. Allgemein, wenn der Punkt N von m schon bestimmten Punkten beobachtet ist und diese wiederum von N beobachtet sind, so sind $2m-1$ Data, also $2m-3$ Bedingungsgleichungen, nämlich $m-1$ Winkelgleichungen und $m-2$ Seitengleichungen vorhanden. Indem man von einer beliebigen Seite des Netzes ausgeht und nach und nach alle übrigen Punkte desselben zu bestimmten Punkten macht, erhält man hierdurch offenbar alle Bedingungsgleichungen, und keine wiederholt. Welche Wahl man unter den verschiedenen Winkel- und Seitengleichungen, die sich bei der Bestimmung eines neuen Punktes darbieten können, treffen will, bleibt der Willkür überlassen; die Kenntniss ihrer Anzahl schützt vor Auslassung wie vor Wiederholung.

Unser Dreiecksnetz gibt 31 Bedingungsgleichungen, nämlich 22 Winkelgleichungen und 9 Seitengleichungen; es würde eine Winkelgleichung mehr ergeben haben, wenn auf dem Haferberger Thurme die Richtung nach Wildenhof beobachtet wäre, was nicht geschehen ist. Der Anblick der Abbildungen des Netzes Taf. III. zeigt dieses, der erklärten Entstehungsart der Bedingungsgleichungen zufolge, unmittelbar. Wir lassen diese Bedingungsgleichungen, so wie wir sie in Rechnung gebracht haben, hier folgen. Um die Seitengleichungen zu erhalten haben wir, dem Legendre'schen Satz zufolge, das Drittel des sphärischen Excesses jedes Dreiecks von den in Betracht kommenden Winkeln abgezogen. Dieses ist für die spätere Berechnung der Seiten des Netzes bequem, allein zur Construction der Bedingungsgleichungen selbst unnöthig. Denn aus diesen verschwinden die Sinusse der Seiten, wenn man die ihnen gegenüberstehenden wahren Winkel anwendet, eben so wohl, als die Seiten selbst aus ihnen verschwinden, wenn man die verminderten Winkel in die Rechnung bringt. Beruhete eine der Seitengleichungen auf der Vergleichung zweier gemessenen Grundlinien oder anderweitig bekannt gewordener, verschiedener Seiten, so würde man die Verminderung der Winkel eben so wohl unterlassen können, wenn man nur statt des in die Gleichung eingehenden Verhältnisses der beiden bekannten Seiten das Verhältniss ihrer Sinus anwenden wollte. Dieser Fall ist in unserem Netze nicht vorhanden und kann auch nur vorkommen, wenn mehrere Grundlinien gemessen sind, oder wenn das Netz so ausgeglichen werden soll, dass es sich an Bestimmungen anschliesst, welche ihm selbst fremd sind.

[Es folgen, p. 141—148, die 31 Bedingungsgleichungen zwischen den beobachteten Richtungen; z. B.]

I. Trenk-Mednicken-Fuchsberg.

Trenk	88°30′ 34,″866	+ (1)
Mednicken . . .	66 2 43,605	— (6)
Fuchsberg . . .	30 26 41,908	+ (7) — (11)
Summe . . .	180 0 0,379	
180° + ε . . .	180 0 0,015	
0 =	+ 0,″364	+ (1) — (6) + (7) — (11)

u. s. w.

§ 37. Ausdrücke der Grössen (1), (2), (3) ... bis (70), durch I, II, III, ... bis XXXI.

Durch die im vorigen § gegebenen Bedingungsgleichungen für unser Netz, verbunden mit den im 2. Abschnitte mitgetheilten Resultaten der Beobachtungen auf jedem Dreieckspunkte, erhält man unmittelbar die im §. 34 durch (D) bezeichneten Gleichungen:

$$(aa)(1)+(ab)(2)+(ac)(3)+\ldots=\alpha\ \mathrm{I}+\beta\ \mathrm{II}+\gamma\ \mathrm{III}+\ldots$$
$$(ab)(1)+(bb)(2)+(bc)(3)+\ldots=\alpha'\ \mathrm{I}+\beta'\ \mathrm{II}+\gamma'\ \mathrm{III}+\ldots$$
$$(ac)(1)+(bc)(2)+(cc)(3)+\ldots=\alpha''\mathrm{I}+\beta''\mathrm{II}+\gamma''\mathrm{III}+\ldots$$

u. s. w.

z. B. für den Dreieckspunkt Trenk, welcher in der Aufzählung der Beobachtungen den Anfang macht (§ 17):

$$\begin{aligned}
12{,}75\,(1) - 4{,}25\,(2) - 3{,}25\,(3) &= \mathrm{I} + \mathrm{III} + \mathrm{VI} - 45{,}279\ \mathrm{VIII} && [=[1]]\\
-\ 4{,}25\,(1) + 10{,}75\,(2) - 2{,}25\,(3) &= -\ \mathrm{II} - \mathrm{III} + 47{,}903\ \mathrm{VIII} && [=[2]]\\
-\ 3{,}25\,(1) - 2{,}25\,(2) + 8{,}75\,(3) &= -\ \mathrm{VI} - 2{,}624\ \mathrm{VIII} && [=[3]]
\end{aligned}$$

Um aber die Wiederholung der schon im zweiten Abschnitte mitgetheilten ersten, die Verbesserungen der auf den einzelnen Dreieckspunkten beobachteten Richtungen enthaltenden Glieder zu vermeiden, werden wir sie durch [1], [2], [3], ... [70] bezeichnen, so dass z. B. [51], dem § 27 zufolge

$$-5{,}833\,(49) - 7{,}350\,(50) + 42{,}650\,(51) - 6{,}767\,(52) - 6{,}850\,(53)$$

bedeutet. Dieser Bezeichnung gemäss sind die Gleichungen zwischen (1), (2), (3), ... (70) und I, II, III, ... XXXI die folgenden:

[Mittheilung der 70 Gleichungen [1] ... [70].]

Die Ausdrücke von (1), (2), (3) ... (70) durch I, II, III ... XXXI erhält man am leichtesten, wenn man ihrer Ableitung die Auflösung der Gleichungen:

$$\begin{aligned}(aa)(1)+(ab)(2)+(ac)(3)+\ldots &= P\\ (ab)(1)+(bb)(2)+(bc)(3)+\ldots &= Q \quad\ldots\quad (k)\\ (ac)(1)+(bc)(2)+(cc)(3)+\ldots &= R\end{aligned}$$

u. s. w.

nämlich:

$$\begin{aligned}(1) &= \mathfrak{A}P+\mathfrak{A}'Q+\mathfrak{A}''R+\ldots\\ (2) &= \mathfrak{B}P+\mathfrak{B}'Q+\mathfrak{B}''R+\ldots\ldots\ldots\quad (l)\\ (3) &= \mathfrak{C}P+\mathfrak{C}'Q+\mathfrak{C}''R+\ldots\end{aligned}$$

u. s. w.

vorangehen lässt. Indem man zuerst (l) in (k), dann (k) in (l) substituirt, erhält man, da die Gleichungen hierdurch identisch werden müssen:

$$\begin{aligned}1 &= (aa)\mathfrak{A}+(ab)\mathfrak{A}'+(ac)\mathfrak{A}''+\ldots\\ 0 &= (ab)\mathfrak{A}+(bb)\mathfrak{A}'+(bc)\mathfrak{A}''+\ldots\\ 0 &= (ac)\mathfrak{A}+(bc)\mathfrak{A}'+(cc)\mathfrak{A}''+\ldots\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned}0 &= (aa)\mathfrak{B}+(ab)\mathfrak{B}'+(ac)\mathfrak{B}''+\ldots\\ 1 &= (ab)\mathfrak{B}+(bb)\mathfrak{B}'+(bc)\mathfrak{B}''+\ldots\\ 0 &= (ac)\mathfrak{B}+(bc)\mathfrak{B}'+(cc)\mathfrak{B}''+\ldots\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned}0 &= (aa)\mathfrak{C}+(ab)\mathfrak{C}'+(ac)\mathfrak{C}''+\ldots\\ 0 &= (ab)\mathfrak{C}+(bb)\mathfrak{C}'+(bc)\mathfrak{C}''+\ldots\\ 1 &= (ac)\mathfrak{C}+(bc)\mathfrak{C}'+(cc)\mathfrak{C}''+\ldots\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned}1 &= (aa)\mathfrak{A}+(ab)\mathfrak{B}+(ac)\mathfrak{C}+\ldots\\ 0 &= (ab)\mathfrak{A}+(bb)\mathfrak{B}+(bc)\mathfrak{C}+\ldots\\ 0 &= (ac)\mathfrak{A}+(bc)\mathfrak{B}+(cc)\mathfrak{C}+\ldots\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned}0 &= (aa)\mathfrak{A}'+(ab)\mathfrak{B}'+(ac)\mathfrak{C}'+\ldots\\ 1 &= (ab)\mathfrak{A}'+(bb)\mathfrak{B}'+(bc)\mathfrak{C}'+\ldots\\ 0 &= (ac)\mathfrak{A}'+(bc)\mathfrak{B}'+(cc)\mathfrak{C}'+\ldots\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned}0 &= (aa)\mathfrak{A}''+(ab)\mathfrak{B}''+(ac)\mathfrak{C}''+\ldots\\ 0 &= (ab)\mathfrak{A}''+(bb)\mathfrak{B}''+(bc)\mathfrak{C}''+\ldots\\ 1 &= (ac)\mathfrak{A}''+(bc)\mathfrak{B}''+(cc)\mathfrak{C}''+\ldots\end{aligned}$$

u. s. w.

Da hieraus

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}=\mathfrak{A}', \quad \mathfrak{C}=\mathfrak{A}'', \quad \mathfrak{D}=\mathfrak{A}''', \ldots\\ \mathfrak{C}'=\mathfrak{B}'', \quad \mathfrak{D}'=\mathfrak{B}''', \ldots\\ \mathfrak{D}''=\mathfrak{C}''', \ldots\end{aligned}$$

hervorgeht, so kann man die Form der Auflösung der Gleichungen (k)

$$\begin{aligned}(1) &= (\alpha\alpha)P+(\alpha\beta)Q+(\alpha\gamma)R+\ldots\\ (2) &= (\alpha\beta)P+(\beta\beta)Q+(\beta\gamma)R+\ldots\\ (3) &= (\alpha\gamma)P+(\beta\gamma)Q+(\gamma\gamma)R+\ldots\end{aligned}$$

u. s. w.

bezeichnen*), wo $(\alpha\alpha)$, $(\alpha\beta)$, $(\alpha\gamma)$ ..., $(\beta\beta)$, $(\beta\gamma)$, ..., $(\gamma\gamma)$ ... aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}1 &= (aa)(\alpha\alpha)+(ab)(\alpha\beta)+(ac)(\alpha\gamma)+\ldots\\ 0 &= (ab)(\alpha\alpha)+(bb)(\alpha\beta)+(bc)(\alpha\gamma)+\ldots\\ 0 &= (ac)(\alpha\alpha)+(bc)(\alpha\beta)+(cc)(\alpha\gamma)+\ldots\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned}0 &= (aa)(\alpha\beta)+(ab)(\beta\beta)+(ac)(\beta\gamma)+\ldots\\ 1 &= (ab)(\alpha\beta)+(bb)(\beta\beta)+(bc)(\beta\gamma)+\ldots\\ 0 &= (ac)(\alpha\beta)+(bc)(\beta\beta)+(cc)(\beta\gamma)+\ldots\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned}0 &= (aa)(\alpha\gamma)+(ab)(\beta\gamma)+(ac)(\gamma\gamma)+\ldots\\ 0 &= (ab)(\alpha\gamma)+(bb)(\beta\gamma)+(bc)(\gamma\gamma)+\ldots\\ 1 &= (ac)(\alpha\gamma)+(bc)(\beta\gamma)+(cc)(\gamma\gamma)+\ldots\end{aligned}$$

u. s. w.

oder, nach der bekannten Gauss'schen Bezeichnungsart, aus

$$\begin{aligned}1 &= (aa)(\alpha\alpha)+(ab)(\alpha\beta)+(ac)(\alpha\gamma)+\ldots\\ 0 &= (ab)(\alpha\alpha)+(bb)(\alpha\beta)+(bc)(\alpha\gamma)+\ldots\\ 0 &= (ac)(\alpha\alpha)+(bc)(\alpha\beta)+(cc)(\alpha\gamma)+\ldots\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned}1 &= (bb\,.\,1)(\beta\beta)+(bc\,.\,1)(\beta\gamma)+\ldots\\ 0 &= (bc\,.\,1)(\beta\beta)+(cc\,.\,1)(\beta\gamma)+\ldots\end{aligned}$$

u. s. w.

$$1 = (cc\,.\,2)(\gamma\gamma)+\ldots$$

u. s. w.

hervorgehen. Indem dieselben Gleichungen, unter Annahme bestimmter Werthe von P, Q, R ... schon aufgelöset worden sind, um dadurch das Resultat der Beobachtungen auf jedem Dreieckspunkte zu erhalten, ist alles was die Rechnung auf der rechten Seite der Gleich-

*) Gauss, Supplementum theoriae etc. p. 12 et p. 28.

heitszeichen ergibt, schon bekannt, und man gelangt mit sehr geringer Mühe zu der Kenntniss von $(\alpha\alpha)$, $(\alpha\beta)$ ..., $(\beta\beta)$, ... u. s. w. Sobald die Werthe dieser Grössen gefunden sind, erhält man:

$$(1) = (\alpha\alpha)[1] + (\alpha\beta)[2] + (\alpha\gamma)[3] + \ldots$$
$$(2) = (\alpha\beta)[1] + (\beta\beta)[2] + (\beta\gamma)[3] + \ldots$$
$$(3) = (\alpha\gamma)[1] + (\beta\gamma)[2] + (\gamma\gamma)[3] + \ldots$$

u. s. w.

Aus dieser Rechnung sind die gesuchten Ausdrücke folgendermassen hervorgegangen: [Folgen nun die 70 Gleichungen (1) bis (70); ferner, § 38, die Substitution der Ausdrücke von (1), (2), (3) ... bis (70) in die 31 Bedingungsgleichungen des § 36, sowie dieselben nach vortheilhaftester Anordnung der Unbekannten I . . XXXI; § 39 die Auflösung der 31 Gleichungen; § 40 die numerischen Werthe der Grössen (1) bis (70); § 41 die Bestimmung der gemeinschaftlichen Verbesserungen aller, auf einem Dreieckspunkte beobachteten Richtungen.]

§ 42. Berechnung der Entfernungen der Dreiecks-punkte untereinander.

Nach der vollständigen Ausgleichung der beobachteten Richtungen, welche wir in diesem Abschnitte mitgetheilt haben, hat die Berechnung der Entfernungen der Dreieckspunkte untereinander keine Schwierigkeit mehr. Es versteht sich, dass wir bei der Rechnung die Erleichterung benutzt haben, welche der schöne Legendre'sche Satz gewährt, durch welchen man die Berechnung kleiner sphärischer oder sphäroidischer Dreiecke, durch die Verminderung jedes Winkels um den dritten Theil des Ueberschusses der Summe aller drei über 180°, auf die Berechnung ebener Dreiecke zurückführt. Die Rechnung ist mit Logarithmen von 8 richtigen Decimalstellen, welche aus Tafeln mit 10 Decimalstellen genommen sind, geführt und hat folgende Resultate gegeben.

Trenk.

		Entfernung.*)
Mednicken . . .	— 0″,0745	934,T993124
Fuchsberg . . .	83 30 35,1841	1686,2924
Wargelitten . .	287 14 13,7578	1330,0129
Galtgarben . .	346 24 18,4879	5480,8682

Mednicken.

Trenk	+ 0,0883	934,993124
Wargelitten . .	66 56 10,0591	1380,6331
Galtgarben . .	163 39 11,3636	4577,3505
Fuchsberg . . .	293 57 16,8390	1833,4015

*) [Die log. Entfernung weggelassen.]

Fuchsberg.

		Entfernung.
Wargelitten . . .	— 0″,3455	2952,T7839
Mednicken	20 0 8,9035	1833,4015
Galtgarben . . .	56 3 48,9896	5930,4060
Condehnen. . . .	226 52 18,6885	9284,2390
Haferberg	286 48 23,9980	6002,1249
Trenk	349 33 27,3964	1686,2924

Wargelitten.

Fuchsberg	+ 0,0265	2952,7839
Trenk	13 17 6,3511	1330,0129
Haferberg	78 2 17,3724	5873,2797
Galtgarben . . .	265 50 18,7679	4933,2189
Mednicken	332 59 2,4786	1380,6331

Haferberg.

Galtgarben . . .	0 0 39,1314	10781,6611
Fuchsberg	25 13 8,8574	6002,1249
Sternwarte Sign.	39 29 19,4357	
Condehnen. . . .	105 40 33,2138	8147,8574
Wargelitten . . .	356 27 1,6969	5873,2797

Galtgarben.

Haferberg	+ 0,0517	10781,6611
Wargelitten . . .	4 14 24,0496	4933,2189
Wildenhof	42 10 43,5592	27098,0923
Trunz	89 39 43,1290	40863,5004
Nidden	275 19 32,1292	37810,7532
Lattenwalde . . .	279 7 33,6870	23905,2391
Condehnen. . . .	328 51 14,7263	15168,1054
Fuchsberg	334 27 54,5033	5930,4060
Mednicken	348 6 9,0038	4577,3505
Trenk	350 51 16,3021	5480,8682

Condehnen.

Haferberg	+ 0,0859	8147,8574
Fuchsberg	39 36 30,8850	9284,2390
Galtgarben . . .	43 11 21,4932	15168,1054
Lattenwalde . . .	134 5 1,7989	18241,4958
Legitten	201 28 31,7750	11354,9230
Wildenhof	329 5 3,6157	26990,4914

Wildenhof.

Galtgarben . . .	— 0,3127	27098,0923
Sternwarte Sign.	19 42 45,7345	
Haferberg	20 44 58,3994	20433,6372
Condehnen. . . .	32 34 16,7710	26990,4914
Trunz	269 0 49,3546	30123,7481

Trunz.

Pfahl *A*	+ 0,0026	
Pfahl *B*	4 39 52,8756	
Pfahl *M*	2 19 55,5326	
Galtgarben . . .	36 52 42,8515	40863,5004
Wildenhof	78 24 40,8127	30123,7481

Nidden.

		Entfernung.
Kalleninken . . .	— 0,″0021	13573,T0715
Gilge	26 14 52,0583	18547,6674
Lattenwalde . . .	87 4 52,7847	14047,7228
Galtgarben . . .	93 33 27,3247	37810,7532
Leuchtethurm . .	239 54 17,9887	24349,4587
Memel Thurm .	243 22 58,7836	23536,9264
Lepaizi	279 55 15,5901	28297,4720
Algeberg	323 57 6,8689	18577,7549

Lattenwalde.

Legitten	+ 0,0998	17374,5449
Condehnen	37 4 53,8652	18241,4958
Galtgarben . . .	76 27 35,1862	23905,2391
Nidden	246 10 59,6654	14047,7228
Kalleninken . . .	291 36 24,6924	19030,1962
Gilge	318 59 58,4314	16952,6712

Leuchtethurm von Memel.

Lepaizi	— 0,0619	18391,0854
Memel Thurm .	22 34 7,9619	1664,7286
Nidden	81 37 47,1681	24349,4587
Jacubowa	304 31 45,5731	9288,3554

Lepaizi.

Memel Thurm .	0 0 1,4657	16865,9496
Leuchtethurm . .	2 10 17,0581	18391,0854
Jacubowa	32 24 43,6886	15193,7627
Algeberg	262 58 50,6738	19747,1766
Nidden	303 48 57,6206	28297,4720

Algeberg.

Kalleninken . . .	— 0,1492	11027,7196
Nidden	46 24 34,9292	18577,7549
Lepaizi	141 32 40,2237	19747,1766

Kalleninken.

Gilge	0 0 7,1960	8755,6826
Lattenwalde . . .	62 58 39,1942	19030,1962
Nidden	110 28 23,2153	13573,0715
Algeberg	208 0 56,4378	11027,7196

Gilge.

Legitten	+ 0,6686	12028,2188
Lattenwalde . . .	71 22 58,2989	16952,6712
Nidden	117 44 0,9987	18547,6674
Kalleninken . . .	161 0 53,9918	8755,6826

Legitten.

Lattenwalde . . .	— 0,3077	17374,5449
Condehnen	284 23 21,5927	11354,9230
Gilge	67 37 2,2555	12028,2188

Vierter Abschnitt.

Höhen der Dreieckspunkte über der Meeresfläche.

Die Bestimmung der Höhenunterschiede durch beobachtete Zenithdistanzen und bekannte Entfernungen setzt die Kenntniss der Strahlenbrechung voraus, eines Elementes, welches beträchtlichen Veränderungen unterworfen ist. Sie kann nur dann Sicherheit gewähren, wenn entweder Mittel vorhanden sind, welche zur Kenntniss der jedesmaligen Grösse der Strahlenbrechung führen, oder wenn die Beobachtungen so angeordnet werden, dass diese Kenntniss unnöthig wird. Wenn keins von beiden der Fall ist, so sind die Resultate, welche man durch beobachtete Zenithdistanzen erhält, nothwendig unvollkommen; sie werden desto unvollkommener, je grösser die Entfernungen der Punkte sind, deren Höhenunterschiede bestimmt werden sollen; die Unsicherheit wächst in einem grösseren Verhältnisse als die Entfernung (wie das Quadrat derselben) und wird daher vermindert, wenn eine grössere Entfernung in mehrere kleinere getheilt wird. Die Vermeidung gar zu grosser Entfernungen, vielleicht auch die Höhe der Stationen über der Meeresfläche und die weitere Entfernung der Gesichtslinien von der Oberfläche der Erde, scheinen das ausgezeichnete Gelingen der von Herrn Coraboeuf vorgenommenen Operation zur Bestimmung der Höhen in der Pyreneenkette*), sowohl über dem Oceane als über dem mittelländischen Meere, hervorgebracht zu haben.

Unsere Höhenbestimmungen haben wir als einen Gegenstand von untergeordnetem Interesse betrachtet und daher die Ergreifung besonderer Mittel, welche eine grössere Sicherheit als gewöhnlich hätten herbeiführen können, unterlassen. Das erfolgreichste Mittel, welches man hätte ergreifen können, würde in der gleichzeitigen, gegenseitigen Beobachtung der Zenithdistanzen zweier Dreieckspunkte bestanden haben; denn man erhält dadurch ihren Höhenunterschied allein abhängig von der Voraussetzung, dass der gekrümmte Weg des Lichtes die gerade Linie zwischen beiden Punkten an beiden in einem gleichen Winkel durchschneidet, welche Voraussetzung mehr Wahrscheinlichkeit für sich hat, als die Annahme einer an allen Punkten gleichen und bekannten Krümmung des Lichtstrahls. Ein anderes Mittel würde in dem Versuche bestanden haben, die von der Aenderung der Höhe ab-

*) Mémoire sur les Opérations Géodésiques des Pyrénées. Paris 1831.

hängige Aenderung der Wärme am Beobachtungsorte unmittelbar zu bestimmen; gelänge dieser Versuch, so würde man dadurch in den Stand gesetzt werden, die jedesmalige Grösse der Strahlenbrechung, unter der Voraussetzung, dass die Wärmeänderung auf dem ganzen Wege des Lichtstrahls dieselbe bleibe, zu berechnen. Ob diese Voraussetzung hinreichend nahe wahr ist, um einen ziemlich genäherten Werth der Strahlenbrechung zu ergeben, muss zwar noch durch wirkliche Anstellung des Versuches ausgemittelt werden, jedoch scheinen ähnliche Beobachtungen, welche BRANDES gemacht hat*), ihr günstig zu sein. Wenn man durch oft wiederholte gleichzeitige Beobachtungen mehrerer irdischen Punkte, in verschiedenen Richtungen liegend, fände, dass nahe dieselben Werthe der Strahlenbrechung allen zugleich entsprechen, so würde auch daraus hervorgehen, dass die Wärmeänderung der Luft nicht ganz örtlich, sondern sich in einem ziemlich gleichen Maasse über einen ausgedehnteren Raum erstreckend wäre.

Obgleich wir die Höhenbestimmungen nur als Nebensache betrachteten, so durften wir uns ihnen nicht gänzlich entziehen, indem die Höhe unserer Grundlinie über der Meeresfläche dadurch gegeben werden musste. Um diese mit der hinreichenden Sicherheit zu erhalten, war die Anwendung der eben erwähnten besonderen Mittel desto weniger nöthig, je kleiner die Entfernung der Endpunkte der Grundlinie von dem Haferberger Thurme ist, dessen Höhe über der Meeresfläche wir unmittelbar bestimmen und der Höhenbestimmung jener Punkte zum Grunde legen konnten. — Die Leichtigkeit der Anwendung des 15-zolligen, nach dem Schumacherschen Entwurfe gebaueten Theodoliten, auch zu der Messung der Zenithdistanzen, lud übrigens ein, diese Messung auf allen Punkten vorzunehmen, auf welche der Theodolit nach und nach gelangte; wir können also viele der Höhenunterschiede durch gegenseitige, aber nicht durch gleichzeitige Beobachtungen bestimmen, auch die Werthe der Strahlenbrechung, welche die gegenseitigen Messungen in Uebereinstimmung bringen, aufsuchen. Da wir an mehreren Dreieckspunkten die Ostsee sehen konnten, so haben wir auch durch Messungen der Zenithdistanzen ihres Horizonts Bestimmungen der Strahlenbrechung erhalten.

§ 43. Prüfung der Richtigkeit der durch das Instrument angegebenen Zenithdistanzen.

Man ist bekanntlich in neuerer Zeit darauf aufmerksam geworden, dass die Biegung der Fernröhre der Instrumente beständige Fehler in die Messung der Zenithdistanzen bringen kann; unser Theodolit wurde daher einer Prüfung unterworfen, wenn gleich die Construction seines Fernrohrs, welches aus zwei, mit ihren Grundflächen gegen einander gerichteten Kegeln besteht, keinen beträchtlichen Einfluss der Biegung fürchten liess.

Das leichteste Mittel bestand in der Vergleichung des Theodoliten mit dem Meridiankreise der Königsberger Sternwarte, dessen horizontal gerichtetes Fernrohr, nach einer im J. 1824 vorgenommenen Untersuchung, keine merkliche Biegung erfährt. Offenbar erhält man die Biegung des Fernrohrs des Theodoliten, wenn man die Fernröhre beider Instrumente gegen einander richtet und die Zenithdistanzen der Fäden in beiden gegenseitig misst. Die Summe dieser Zenithdistanzen muss $= 180^0$ sein, wenn auch das Fernrohr des Theodoliten keine Biegung besitzt; ihre Abweichung von 180^0 bestimmt die Grösse einer vorhandenen Biegung. Um dieses Mittel auszuführen, wurde der Theodolit auf demselben Pfeiler im Meridiane des Kreises aufgestellt, welcher für die Beobachtungen in Wildenhof und auf dem Haferberger Thurme signalisirt worden war. Als der Meridiankreis nach Osten gewandt war, wurden die gegenseitigen Zenithdistanzen der Absehenslinien beider Instrumente vier Mal beobachtet; am folgenden Tage, nachdem man den Meridiankreis umgelegt hatte, noch vier Mal; aus dem Mittel aller acht Beobachtungen verschwand der Ort des Scheitelpunktes auf dem Meridiankreise.

[Folgen die acht Beobachtungen.]

Der Scheitelpunkt entsprach der Angabe des Meridiankreises von $358^0\,27'\,56,''0$; nimmt man $358^0\,27'\,56,''0 + x$ dafür an, so erhält man die Zenithdistanzen und ihre Summe:

Meridiankreis.	Theodolit.	Summe.
$100^0\,29'\,10,''1 - x$	$79^0\,30'\,46,''3$	$180^0 - 3,''6 - x$
$30\;37,5 - x$	$29\;22,35$	$- 0,15 - x$
$33\;46,9 - x$	$26\;13,25$	$+ 0,15 - x$
$32\;11,5 - x$	$27\;51,4$	$+ 2,9 - x$
$100\;44\;13,6 + x$	$79\;15\;43,4$	$- 3,0 + x$
$46\;49,5 + x$	$13\;11,75$	$+ 1,25 + x$
$49\;6,5 + x$	$10\;53,0$	$- 0,5 + x$
$50\;2,9 + x$	$9\;58,6$	$+ 2,5 + x$
Mittel		$180 - 0,06$

Da der Theodolit $3,''0714$ südlich von dem Meridiankreise stand, so hätte die Summe der Zenithdistanzen $= 180^0 + 0,''19$ sein sollen, wenn der Theodolit keine Biegung zeigte. Es geht also aus diesen Beobachtun-

*) Beobachtungen u. s. w. über die Strahlenbrechung. Oldenburg 1807.

gen hervor, dass er die Zenithdistanzen 0″25 zu klein angibt, welche kleine Quantität jedoch weit innerhalb der Fehlergrenzen der Bestimmung liegt. Wir haben nach diesem Resultate die beobachteten Zenithdistanzen als unmittelbar richtig angenommen.

§ 44. Beobachtungen der Zenithdistanzen auf den verschiedenen Dreieckspunkten.

Das Instrument wurde nach und nach auf die Punkte eingestellt, deren Zenithdistanzen man beobachten wollte; wenn sie alle ein oder zwei Mal eingestellt und abgelesen waren, so wurde der Kreis des Theodoliten umgelegt und die Beobachtungsreihe in umgekehrter Reihenfolge der Punkte wiederholt. Durch diese Anordnung der Beobachtungen erlangte man nicht allein die Wegschaffung des Indexfehlers aus dem Resultate, sondern auch die sehr nahe Gleichzeitigkeit des Mittels aus den verschiedenen Beobachtungszeiten jedes Punktes; übrigens wurde während der Dauer einer solchen Beobachtungsreihe häufig schon eine Veränderung der Strahlenbrechung bemerkt, welche auf die Gleichzeitigkeit der Angaben nur unter der Voraussetzung der Zeit proportionaler Aenderungen zu rechnen erlaubt. — Der den Beobachtungen beigeschriebene Höhenunterschied ist die Höhe des Punktes, auf welchen das Fernrohr gerichtet wurde, weniger der Höhe des Fernrohrs, beide von den wagerechten Oberflächen der Beobachtungspfeiler an gerechnet; in dem Falle der drei in unserem Netze vorkommenden Kirchthürme, von deren Knöpfen die Zenithdistanzen beobachtet wurden, ist der angegebene Höhenunterschied die negativ genommene Höhe des Fernrohrs über der Fläche, auf welcher das Instrument stand. Durch Hinzufügung des Winkels, welchen dieser Höhenunterschied am Beobachtungspunkte einschliesst, werden also die beobachteten Zenithdistanzen auf die wagerechten Oberflächen beider Pfeiler reducirt; oder, in dem Falle der Beobachtungen der Thürme, auf die Oberfläche des Beobachtungspfeilers.

[Mittheilung der Zenithdistanzen auf den 13 Stationen; z. B.:]

Trenk.

1833.	W. Z.		Signalisirung.	Beob. Z.-D.	Höhenunterschied.	Reduction.
Mai 8.	$21^h\,35^m$	Mednicken .	Signaltafel . .	89°59′ 17″,0	— 0,T108	— 23″,8
		„ .	Kugel	59 43,5	— 0,2196	— 48,4
	33	Fuchsberg .	Signaltafel . .	89 24 19,5	— 0,109	— 13,8
		„ .	Kugel	24 45,25	— 0,213	— 26,0
	35	Wargelitten	Signaltafel . .	89 47 53,25	— 0,1085	— 16,8
		„	Kugel	48 9,0	— 0,214	— 33,2
	35	Galtgarben .	Signaltafel . .	89 38 23,5	— 0,109	— 4,1
		„ .	Heliotrop . . .	38 28,75	— 0,165	— 6,2

Die Gesichtslinie zwischen Trenk und Mednicken geht in der Mitte zwischen beiden Punkten sehr nahe über die Oberfläche des Bodens weg, wodurch eine Störung der allgemeinen Strahlenbrechung entstehen kann.

[u. s. w.]

§ 45. Zusammenstellung der auf die Höhen der Dreieckspunkte reducirten Zenithdistanzen.

§ 46. Formeln zur Berechnung der beobachteten Zenithdistanzen.

Wenn die Zenithdistanz, in welcher ein Punkt B von einem anderen Punkte A gesehen wird, durch z, die Strahlenbrechung durch Δz bezeichnet werden, so trifft die in der Zenithdistanz $z + \Delta z$, von A aus, in der Verticalebene des Punktes B gezogene gerade Linie diesen Punkt; ebenso trifft die von B aus in derselben Ebene und in der Zenithdistanz $z' + \Delta z'$ gezogene gerade Linie den Punkt A, vorausgesetzt dass z' und $\Delta z'$ dieselbe Bedeutung für den Punkt B haben, welche z und Δz für den Punkt A hatten. Beide gerade Linien sind eine und dieselbe, die dritte Seite des geradlinigen Dreiecks, dessen beide anderen Seiten die Entfernungen der Punkte A und B von dem Durchschnittspunkte ihrer Lothlinien sind. Dass ein solcher Durchschnittspunkt nur bedingungsweise in aller Schärfe vorhanden ist, kann hier ausser Acht gelassen werden. Bezeichnet man den Krümmungshalbmesser der Erdoberfläche in der durch beide Punkte gehenden Verticalebene durch r, die Höhen derselben über dieser Oberfläche durch h und h', den Winkel zwischen beiden Lothlinien am Mittelpunkte der Krümmung durch C, so ergibt das erwähnte Dreieck:

$$2r + h' + h : h' - h = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} C : \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \{z' + \Delta z' - z - \Delta z\}$$

oder, da

$$z' + \Delta z' + z + \Delta z = 180^0 + C$$

ist:

$$h'-h=\left(1+\frac{h'+h}{2r}\right)2r\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}C.\,\mathrm{cotg}\,(z+\Delta z-\tfrac{1}{2}C)$$
$$h-h'=\left(1+\frac{h'+h}{2r}\right)2r\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}C.\,\mathrm{cotg}\,(z'+\Delta z'-\tfrac{1}{2}C)$$

Nimmt man die ganze Brechung des Strahls $\Delta z+\Delta z'=kC$ an und setzt man $\Delta z=\Delta z'$, welches die gewöhnlichen Annahmen sind, so erhält man:

$$h'-h=\left(1+\frac{h'+h}{2r}\right)2r\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}C\,\mathrm{cotg}\left(z-\frac{1-k}{2}C\right);$$

allein wenn h' und h so wenig beträchtliche Höhen sind, wie sie in unserem Dreiecksnetze vorkommen, so kann man den ersten Factor mit 1 und $2r\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}C$ mit der Entfernung beider Punkte $=s$ verwechseln, also die Formel in

$$h'-h=s\,\mathrm{cotg}\left(z-\frac{1-k}{2}C\right)$$
$$=s\,\mathrm{cotg}\left(z-\frac{s\omega}{2r}(1-k)\right)$$

zusammenziehen, wobei $\omega=206264''{,}8$ ist.

Wenn die Krümmungshalbmesser der Erdoberfläche im Meridiane durch ϱ und senkrecht darauf durch ϱ' bezeichnet werden, so ist bekanntlich

$$\frac{\omega}{\varrho}=\frac{\omega\sqrt{(1-ee\sin\varphi^2)^3}}{a(1-ee)}$$
$$\frac{\omega}{\varrho'}=\frac{\omega\sqrt{1-ee\sin\varphi^2}}{a}$$

wo φ die Polhöhe des Punktes, für welchen die Krümmungshalbmesser gesucht werden, und a und e die halbe grosse Axe und die Excentricität der Erde bezeichnen; ferner ist für das Azimuth α:

$$\frac{\omega}{r}=\frac{\omega}{\varrho}\cos\alpha^2+\frac{\omega}{\varrho'}\sin\alpha^2$$
$$=\frac{\omega}{2}\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'}\right)+\frac{\omega}{2}\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho'}\right)\cos 2\alpha$$

Wendet man diese Formeln für die Polhöhe der Königsberger Sternwarte $\varphi=54^0\,42'\,50''{,}5$ an und setzt man

$$a=3271922''{,}1,\qquad ee=0{,}00660036,$$

so erhält man:

$$\frac{\omega}{\varrho}=0''{,}06297180+0''{,}00006973\cos 2\alpha.$$

Da aber, wegen der immer stattfindenden Unsicherheit über den Werth von k und über die Voraussetzung $\Delta z=\Delta z'$, eine grosse Genauigkeit der Rechnung überflüssig ist, so haben wir nur das erste Glied dieses Ausdruckes angewandt, und daher $\log\frac{\omega}{2r}=8{,}49812$ gesetzt.

Sind gegenseitige Beobachtungen zweier Punkte vorhanden, und will man annehmen, dass k, zur Zeit der einen wie der anderen, denselben Werth gehabt habe, so kann man k und $h'-h$ bestimmen. Man hat nämlich die beiden Gleichungen:

$$h'-h=s\,\mathrm{cotg}\left\{z-\frac{s\omega}{2r}(1-k)\right\}$$
$$h-h'=s\,\mathrm{cotg}\left\{z'-\frac{s\omega}{2r}(1-k)\right\}$$

woraus

$$z+z'-\frac{s\omega}{r}(1-k)=180^0$$

und

$$1-k=\frac{r}{s\omega}(z+z'-180^0)$$
$$h'-h=s\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(z'-z)$$

hervorgehen.

Aus der Beobachtung der Zenithdistanz des Meereshorizonts erhält man gleichfalls eine Bestimmung von k. In diesem Falle ist nämlich $z'=90^0$ und $h'=0$, wodurch die beiden Gleichungen sich in

$$-h=s\,\mathrm{cotg}\left\{z-\frac{s\omega}{2r}(1-k)\right\}$$
$$h=s\,\mathrm{cotg}\left\{90^0-\frac{s\omega}{2r}(1-k)\right\}$$

verwandeln und

$$1-k=\frac{r}{\omega h}(z-90^0)\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(z-90^0)$$

oder mit hinreichender Annäherung

$$1-k=\frac{r}{2h}\left(\frac{z-90^0}{\omega}\right)^2$$

ergeben. Bei der Anwendung dieser Formel sollte für h die Höhe des Beobachtungspunktes nicht über der mittleren Höhe des Meeres, sondern über den höchsten Wellen gesetzt werden; diese wird man jedoch zu erkennen selten Gelegenheit haben, ausser wenn beide übereinstimmen oder das Meer ruhig ist. Nimmt man für h die Höhe über der mittleren Fläche des Meeres, so erhält man k, im Allgemeinen, zu gross; ist am Horizonte Spiegelung vorhanden, wie es in unseren Gegenden gewöhnlich ist, so entsteht auch aus dieser eine Unrichtigkeit der Bestimmung von k.

§ 47. Bestimmung der mittleren Grösse der Strahlenbrechung.

Zur Untersuchung des Werthes von k sind alle diejenigen der § 45 zusammengestellten Beobachtungen benutzt worden, welche gegenseitig und in mehr als 14000 Toisen Entfernung gemacht sind.

	z und z'	k	Entfernung.	Gewicht.
Galtgarben . .	90°13′ 22,″2	0,1437	15168,T1	205
Condehnen . .	90 0 15,7			
Galtgarben . .	90 4 32,0	0,1397	27098,1	564
Wildenhof . .	90 19 56,1			
Galtgarben . .	90 14 24,3	0,1538	40863,5	323
Trunz	90 21 53,1			
Galtgarben . .	90 15 37,0	0,1406	23905,2	186
Lattenwalde .	90 5 56,7			
Sternwarte . .	89 52 42,9	0,1264	21327,0	692
Wildenhof . .	90 26 50,4			
Condehnen . .	90 9 2,1	0,1298	18241,6	405
Lattenwalde .	90 7 37,5			
Condehnen . .	90 0 48,5	0,1313	26990,5	329
Wildenhof . .	90 23 48,0			
Wildenhof . .	90 15 10,1	0,1456	30123,7	595
Trunz	90 11 50,7			
Nidden	90 7 37,0	0,1276	14047,7	222
Lattenwalde .	90 5 14,8			

Wie diese verschiedenen Bestimmungen von k zu einem mittleren Resultate zu vereinigen sind, kann nicht ohne einige Willkür entschieden werden. Wäre k eine beständige Grösse, und wären also nur Beobachtungsfehler möglichst unschädlich zu machen, so würde einer Bestimmung, welche auf a Beobachtungen an dem einen und b Beobachtungen an dem anderen Punkte gegründet ist, ein Gewicht beigelegt werden müssen, welches im zusammengesetzten Verhältnisse der Entfernung s und des Bruches $\frac{ab}{a+b}$, oder

$$\frac{abs}{a+b}$$

proportional ist; wäre dagegen die Veränderlichkeit von k die einzige Ursache der Unsicherheit, so würde das Gewicht einer Bestimmung von der Entfernung unabhängig, und unter der Voraussetzung, dass jede Beobachtung einem zufälligem Werthe von k zugehört,

$$\frac{ab}{a+b}$$

proportional sein. Es ist nicht zu bezweifeln, dass die aus der Veränderlichkeit von k hervorgehende Unsicherheit mehr zu fürchten ist, als die Beobachtungsfehler; allein um auch diesen einen Einfluss einzuräumen und um die Wahrscheinlichkeit, dass eine Vergrösserung der Entfernung eine mehr oder weniger vollständige Ausgleichung der die Veränderungen von k erzeugenden Ursachen hervorbringe, in die Schätzung des Werthes einer Bestimmung aufzunehmen, haben wir das Gewicht derselben

$$\frac{ab\sqrt{s}}{a+b}$$

proportional angenommen und das in der letzten Columne angegebene nach dieser Formel berechnet. Dieser Schätzung der Gewichte zufolge ist der mittlere Werth von

$$k = 0{,}1370.$$

Gauss hat aus seinen Beobachtungen 0,1306 dafür erhalten; Coraboeuf 0,1285; Struve 0,1237. Dass Delambre und Méchain einen grösseren Werth von k fanden ist vielleicht weniger seiner Veränderlichkeit, als dem bekannten Umstande zuzuschreiben, dass die Vervielfältigungskreise dieser Astronomen die Zenithdistanzen immer zu klein angaben. Dass in England ein noch grösserer Werth $= 0{,}2$ gefunden ist, rührt wahrscheinlich von der Beobachtung von Lichtsignalen während der Nacht her, indem dann die Wärmeabnahme der Atmosphäre kleiner und also die Strahlenbrechung grösser ist, als am Tage.

Da es am zweckmässigsten erscheint, zu der Berechnung unserer Beobachtungen den Werth von k anzuwenden, welchen die gegenseitigen unter ihnen ergeben haben, so werden wir $k = 0{,}1370$ annehmen und demzufolge nach der Formel

$$h' - h = s \operatorname{cotg}\{z - \beta s\},$$

in welcher $\log \beta = 8{,}43413$ ist, rechnen.

§ 48. Unmittelbare Messung der Höhen von vier Dreieckspunkten über der Meeresfläche.

Die Höhen des Haferberger Thurmes, der Dreieckspunkte Nidden und Lattenwalde und des Standpunktes des Instruments auf dem Leuchtethurme von Memel konnten durch Vergleichung mit der Oberfläche des Wassers in ihrer Nähe bestimmt werden; diese Bestimmungen fordern zwar auch die Berechnung von Zenithdistanzen, schliessen also die Unsicherheit der Strahlenbrechung mit ein, allein der Einfluss ist wegen der geringen Entfernungen dieser Punkte von dem Wasser so klein, dass die Unsicherheit als unmerklich zu betrachten ist.

[Mittheilung dieser vier Höhenbestimmungen.]

§ 49. Berechnung der Höhen der Dreieckspunkte.

[Höhenunterschiede zwischen den einzelnen Dreieckspunkten aus den beobachteten Zenithdistanzen.]

Die aus gegenseitigen Beobachtungen zweier Dreieckspunkte hervorgegangene doppelte Bestimmung ihres Höhenunterschiedes muss zu einem mittleren Resultate, mit Rücksicht auf die Anzahl der Beobachtungen an jedem Punkte, vereinigt werden; diese Rücksicht auf die Anzahl der Beobachtungen ist nöthig, da der angewandte Werth der Strahlenbrechung als das mittlere

Resultat aller Beobachtungen angesehen werden muss und demnach die Unterschiede der gegenseitigen Bestimmungen nur von Aenderungen der Strahlenbrechung, die als zufällig betrachtet werden müssen, und von gleichfalls zufälligen Beobachtungsfehlern herrühren. In der ferneren Combination der Höhenunterschiede lässt sich eine Willkür nicht vermeiden, indem man ausser Stande ist, das Gewicht jeder einzelnen Bestimmung richtig zu schätzen.

[Es folgen die Höhen von Trenk, Mednicken, Fuchsberg, Wargelitten und Galtgarben, relativ gegen das Mittel der Höhen der 5 Punkte, sowie über der Meeresfläche; ferner die Höhenbestimmungen der übrigen Punkte, nach dem directen Verhältniss der Beobachtungszahl der Vergleichungspunkte und dem umgekehrten der Entfernungen.]

Die Zusammenstellung aller bestimmten Höhen über der Meeresfläche ist folgende:

Sternwarte . .	Signalpfeiler .	$11^{T}180$
Haferberg . .	Thurmknopf .	42,422
Trenk	Dreieckspunkt	17,60
Mednicken . .	„	18,07
Fuchsberg . .	„	35,54
Wargelitten .	„	22,73
Galtgarben . .	„	56,57
Condehnen . .	„	28,14
Wildenhof . .	„	117,03
Trunz	„	102,91
Lattenwalde .	„	24,859
Nidden	„	29,420
Legitten . . .	Thurmknopf .	18,75
Gilge	Dreieckspunkt	6,21
Kalleninken .	Thurmknopf .	18,04
Algeberg . . .	Dreieckspunkt	19,21
Lepaizi	„ .	61,54
Leuchtethurm	Standpunkt . .	14,429

§ 50. Beurtheilung der Höhenbestimmungen.

Die Bestimmung des Höhenunterschiedes wird von zwei von einander unabhängigen Fehlerursachen beeinträchtigt, nämlich von der Unvollkommenheit der Beobachtungen und von der Unsicherheit des jedesmal anzuwendenden Werthes der Strahlenbrechung. Bezeichnet man den Fehler der Zenithdistanz durch p, den Unterschied des zur Zeit der Beobachtung stattfindenden Werthes von k von dem in der Rechnung angenommenen durch q, so ist der daraus entstehende Fehler des Höhenunterschiedes nahe

$$= \frac{sp}{\omega} + \frac{ss}{2r}\,q.$$

Den Fehler der Beobachtungen, durch Vermehrung ihrer Anzahl und durch die Anwendung eines guten Instruments, in die erforderlichen Grenzen zurückzuführen, ist die Sache des Beobachters; allein die Veränderlichkeit der Strahlenbrechung wird, wenn keine Mittel zur Erkennung ihres jedesmaligen Werthes angewandt werden können, dem Erfolge desto mehr entgegenwirken, je grösser die Entfernung s ist. Wenn man unter p und q die mittleren Unsicherheiten der Beobachtung und des Werthes von k versteht, so zeigt der eben gegebene Ausdruck, dass der mittlere Fehler einer Bestimmung eines Höhenunterschiedes

$$= s\sqrt{\frac{pp}{\omega\omega} + \left(\frac{sq}{2r}\right)^2}$$

ist, oder dass eine Beobachtung ihn so sicher bestimmt, als hätte sie den mittleren Fehler:

$$\sqrt{pp + \left(\frac{s\omega q}{2r}\right)^2}.$$

Man sieht hieraus, in welchem Maasse die Güte der Beobachtung von der Unsicherheit der Strahlenbrechung überwogen wird, wenn die Entfernung gross ist. Es scheint, dass die Veränderlichkeit (q) der Strahlenbrechung nicht in allen Ländern und unter allen Umständen gleich gross geschätzt werden könne. Wenigstens würde das ausgezeichnete Gelingen der Unternehmung des Herrn Coraboeuf sich nur durch die Annahme des seltensten Zufalls erklären lassen, wenn sich zwischen den hohen Gipfeln der Pyreneen eine so grosse Veränderlichkeit der Strahlenbrechung zeigte, als sie sich zwischen den höchsten Punkten von Preussen, an welchen sich unsere Dreieckspunkte befinden, gezeigt hat.

Hier haben wir sehr beträchtliche Aenderungen von k beobachtet, sowohl plötzlich entstehende, als mehrere Wochen anhaltende. Das auffallendste Beispiel der ersten Art zeigte sich bei denjenigen Beobachtungen in Condehnen, am 14. Sept. 1833, welche wir (§ 45) von dem Mittel ausgeschlossen haben. Die Vergrösserung des Werthes von k betrug, zur Zeit dieser Beobachtungen, vergleichungsweise mit dem Werthe, welcher bei den übrigen Beobachtungen stattgefunden hat, nicht weniger als 0,224, so dass k etwa $= 0{,}36$ gewesen sein muss. So grosse Veränderungen sind indessen ungewöhnlich; allein die ganz gewöhnlichen sind beträchtlich genug, um grosse Unterschiede bei sehr entfernten Punkten erwarten zu lassen. Wir haben z. B. aus acht Beobachtungen in Galtgarben und aus zwei Beobachtungen in Trunz den Höhenunterschied dieser beiden, 40863 Toisen von einander entfernten Punkte $8^{T}594$ verschieden gefunden, welches eine Aenderung von k von 0,0337 voraussetzt, so wie sie sehr häufig vorkömmt.

Um das Urtheil über die Veränderlichkeit der Strahlenbrechung, welche wir erfahren haben, zu ver-

vollständigen, führen wir die Werthe von k an, welche unsere Beobachtungen der Zenithdistanzen des Meereshorizontes ergeben haben [1833 Juli 7 — Aug. 29 und (Lattenwalde) 1834 Juni 21 — 28].

	Beob. Zeit.	Höhe.	$z - 90^0$	k
Galtgarben . .	$19^h 42^m$	$56^T,796$	17′ 14″,25	0,2750
Nidden	19 23	29,649	13 41,65	0,1235
„	20 39	—	13 53,35	0,0983
„	20 43	—	13 45,4	0,1155
„	4 30	—	13 51,6	0,1021
„	4 8	—	13 37,75	0,1318
„	19 10	—	13 57,5	0,0894
Leuchtethurm	19 18	14,658	9 31,05	0,1436
„	5 7	—	9 31,2	0,1431
„	6 5	—	9 33,1	0,1374
Lattenwalde .	21 15	25,088	12 20,4	0,1589
„ .	21 0	—	11 59,85	0,2049
„ .	18 45	—	12 35,3	0,1247
„ .	4 45	—	12 12,0	0,1778
„ .	20 30	—	12 38,6	0,1170

Aus den in Nidden beobachteten Werthen der Strahlenbrechung geht hervor, dass sie während der Dauer unseres dortigen Aufenthaltes fortwährend sehr klein war; dieses war auch unabhängig von den Beobachtungen zu bemerken, indem entfernte Gegenstände, welche sonst gewöhnlich über den Meereshorizont hervortreten, jetzt immer verborgen blieben; auch erschien das Heliotropenlicht von Galtgarben nur am 1. August und zwar auf kurze Zeit am Meereshorizonte. Wir schrieben diese kleine Strahlenbrechung beständigen, kalte Luft herbeiführenden und daher eine starke Wärmeabnahme der atmosphärischen Schichten erzeugenden Nordwinden zu. Auf der Königsberger Sternwarte hat man über die Sichtbarkeit am Horizonte erscheinender Gegenstände oft ähnliche Erfahrungen gemacht, indem man dieselben anhaltend über oder unter ihrer mittleren Höhe wahrgenommen hat. — Man muss also darauf gefasst sein, bei den gegenseitigen, aber nicht gleichzeitigen Beobachtungen zweier Punkte, beträchtlich verschiedene mittlere Werthe von k stattfinden zu sehen, welche den Vortheil der Gegenseitigkeit der Beobachtungen mehr oder weniger vernichten.

Diese Bemerkungen sind nicht geeignet, Zutrauen zu unseren Höhenbestimmungen einzuflössen. Wenn indessen die Entfernungen klein sind, so verdienen die Resultate grösseres Zutrauen; z. B. muss der Fehler des angenommenen Werthes von k schon 0,066 betragen, wenn er einen Höhenunterschied in 10000 Toisen Entfernung um eine Toise fehlerhaft machen soll. Da die Entfernungen von dem Haferberger Thurme nach Fuchsberg und Wargelitten, deren Höhen durch die Höhe des Thurmes bestimmt und der Höhenbestimmung der Grundlinie zum Grunde gelegt worden sind, nur etwa 6000 Toisen betragen, so wird die Unsicherheit dieser Höhenbestimmung noch weit geringer. Wir glauben daher, auf die angegebene Höhe der Grundlinie bis auf ein, höchstens zwei Zehntel einer Toise rechnen zu können und halten demgemäss die Höhenbestimmungen, so wenig Gewicht wir ihnen im Allgemeinen beilegen können, insofern sie Einfluss auf das Maass des Dreiecksnetzes haben, für genügend.

Fünfter Abschnitt.

Verbindung der astronomisch bestimmten Punkte mit dem Dreiecksnetze.

Die Punkte, deren astronomische Bestimmungen mit den durch das Dreiecksnetz erlangten geodätischen verglichen werden müssen, sind Trunz, Königsberg und Memel. Aus dem am Anfange des zweiten Abschnittes Angeführten geht hervor, dass, während nur in Trunz der Dreieckspunkt selbst astronomisch bestimmt worden ist, die Sternwarte in Königsberg und der Beobachtungspunkt in Memel noch durch besondere Winkelmessungen mit dem Dreiecksnetze in Verbindung gebracht werden müssen.

Die Sternwarte in Königsberg ist von Wildenhof und dem Haferberger Thurme beobachtet worden und es hatte keine Schwierigkeit, auch den Winkel zwischen diesen beiden Punkten auf der Sternwarte zu messen. Dieses Dreieck ist aber nicht vortheilhaft zu der Bestimmung der Lage der Sternwarte, indem der Winkel an derselben zu klein und ihre Entfernung von Wildenhof zu gross ist, als dass man hätte erwarten dürfen, die Uebertragung der Sternwarte in das Netz dadurch mit derjenigen Sicherheit zu erhalten, welche wir zu erreichen wünschten. Wir haben daher einen anderen Weg eingeschlagen, welcher zwar nicht der kürzeste ist, dagegen aber weiter führt, als zu der Bestimmung der Lage der Sternwarte allein. Da auf der Sternwarte mehrere der Königsberger Thürme sichtbar sind, so konnten wir unsere Absicht erreichen, indem wir dieselben von Punkten des Dreiecksnetzes aus bestimmten und die Winkel zwischen ihnen auf der Sternwarte maassen. Wir schlugen diesen Weg desto lieber ein, als er nebenbei zu Bestimmungen führte, welche in einer Stadt, welche der Sitz wissenschaftlicher Thätigkeit ist, ohne Zweifel Interesse haben. Die Bestimmung einer Anzahl Punkte in Königsberg gewährt das am leichtesten, nämlich durch blosse Winkelmessungen,

ausführbare Mittel, die Lage jedes anderen Punktes in oder neben der Stadt, beziehungsweise auf die Sternwarte, zu finden. Wir haben, um die Bestimmung der Thürme mit der gewünschten Genauigkeit zu erhalten, dieselben nicht nur auf dreien unserer Dreieckspunkte, nämlich Galtgarben, Fuchsberg und Haferberg beobachtet, sondern noch einen vierten Punkt, in der Nähe des Dorfes Quednau, durch ein eigenes Dreieck bestimmt und auch hier die Beobachtungen der Thürme angestellt. Auf der Sternwarte sind die Azimuthe der Punkte Wildenhof und Haferberg und der sichtbaren Thürme durch unmittelbare Vergleichungen mit dem Meridianzeichen bestimmt worden.

Den Punkt neben dem Leuchtethurme von Memel, auf welchem unsere astronomischen Beobachtungen gemacht worden sind, haben wir durch eine einfachere Operation mit dem Dreiecksnetze verbinden können.

[Es folgen nun, p. 211—242:]

§ 51. Beobachtungen auf der Sternwarte in Königsberg.

§ 52. Beobachtungen in Galtgarben zur Bestimmung der Königsberger Thürme.

§ 53. Beobachtungen auf dem Haferberger Thurme zur Bestimmung der Königsberger Thürme.

§ 54. Beobachtungen in Fuchsberg zur Bestimmung der Königsberger Thürme.

§ 55. Beobachtungen in Quednau zur Bestimmung der Königsberger Thürme.

§ 56. Beobachtungen zur Bestimmung des Punktes Quednau.

§ 57. Bestimmung des Punktes Quednau.

§ 58. Bestimmung der Königsberger Thürme.

§ 59. Bestimmung der Lage der Königsberger Sternwarte beziehungsweise auf das Dreiecksnetz.

§ 60. Verbindung des astronomisch bestimmten Punktes in Memel mit dem Dreiecksnetze.

Dieser Punkt ist der Mittelpunkt des zu den astronomischen Beobachtungen angewandten Passageninstruments, welches auf einem neben dem Leuchtethurme errichteten Steinpfeiler stand und welches zu der Bestimmung sowohl der Polhöhe als des Azimuths eines im nördlichen Meridiane befindlichen Zeichens benutzt worden ist. Da man von diesem Punkte weder Nidden noch Lepaizi sehen kann, auch kein anderer Punkt gewählt werden konnte, von welchem man die Richtung seines Meridians unmittelbar auf eine Dreiecksseite hätte übertragen können, so wurde eine besondere trigonometrische Verbindung jenes Punktes und der von ihm ausgehenden Richtung mit dem Dreiecksnetze nothwendig. Ausser der auf das Passageninstrument gegründeten Bestimmung des Azimuths ist noch eine andere, auf dem Dreieckspunkte selbst, durch Messung der Azimuthalunterschiede zwischen dem Polarsterne und einem der Dreieckspunkte oder dem Meridianzeichen gemacht worden.

Da der Kirchthurm in Memel, dessen Lage im Dreiecksnetze wir bestimmt haben, von den drei in Betracht kommenden Punkten, nämlich von dem Dreieckspunkte auf der Gallerie des Leuchtethurms (L), von dem Steinpfeiler (S) und von dem Meridianzeichen (N) sichtbar ist, so konnten der Steinpfeiler und sein Meridian durch Winkelmessungen auf diesen Punkten in vollständige Verbindung mit dem Dreiecksnetze gesetzt werden. Allein da der Standpunkt des Theodoliten auf der Gallerie des Leuchtethurms sich in einer Höhe von etwa 12 Toisen über dem Erdboden befindet, so trat der Zweifel hervor, ob Sonnenschein und Wind eine Biegung des Thurms und dadurch eine periodische Bewegung des Standpunktes hervorbringen könnten. Wenn es sich nur um den Einfluss einer Veränderlichkeit des Standpunktes auf die Richtungen der weit entfernten Dreieckspunkte Nidden und Lepaizi gehandelt hätte, so würde die nähere Untersuchung derselben unnöthig gewesen sein, indem man ihre Ausdehnung nicht so gross voraussetzen konnte, dass ihr Einfluss auf diese Richtungen hätte merklich werden können. Allein das Meridianzeichen, dessen Richtung in das Dreiecksnetz übertragen werden musste, war nur 610 Toisen entfernt und eine Veränderung des Standpunktes von einer pariser Linie erlangte einen Einfluss von $0''{,}4$ auf seine Richtung. Wir hielten daher für angemessen, ein Mittel anzuwenden, durch welches eine Veränderung des Standpunktes bemerkt, ihrer Grösse nach bestimmt und aus dem Resultate geschafft werden konnte.

Indem eine Veränderung des Standpunktes die Richtung eines Punktes desto mehr ändert, je näher er ist, so kam es nur darauf an, die Beobachtungen des Meridianzeichens gleichzeitig mit denen eines anderen, weit näheren, nahe in derselben Richtung liegenden

Punktes zu machen und aus der relativen Bewegung beider Punkte die Ursache derselben, nämlich die Veränderung des Standpunktes, zu erkennen oder aus der Rechnung zu schaffen. Wir machten daher auf einem in der Nähe des Leuchtethurms bis zu der Oberfläche des Bodens eingeschlagenen Pfahle ein deutliches Zeichen (n), welches sehr nahe in der Linie nach dem Meridianzeichen lag und also zur Bestimmung der Veränderungen des Standpunktes in der auf diese senkrechten Richtung diente. Hätte es ein Interesse gehabt, diese Veränderungen vollständig zu erkennen, so würden zwei ähnliche Zeichen, im rechten Winkel mit den vorigen errichtet, dasselbe befriedigt haben. Wir halten dieses Mittel, welches keine Einrichtungen voraussetzt, die nicht bei geodätischen Operationen ohnedies vorhanden wären, für empfehlenswerth in ähnlichen Fällen. Wir bemerken darüber nur noch, dass die Genauigkeit der Beobachtungen durch die Nothwendigkeit, der Ocularröhre des Theodoliten eine für beide Zeichen verschiedene Entfernung von dem Objective zu geben, nicht beeinträchtigt wird, wenn auch eine Verschiebung derselben nicht ohne Einfluss auf die Collimationslinie des Fernrohrs ist; dieser Einfluss verschwindet nämlich ganz, wenn man zwei Beobachtungen, sowohl des einen als des anderen Zeichens macht, zwischen welchen das Fernrohr umgelegt wird ohne eine Aenderung am Oculare zu erfahren.

Wenn man durch beide Zeichen eine lothrechte Ebene legt und die Entfernung des Standpunktes des Instruments von dieser Ebene, positiv genommen wenn sie auf der rechten Seite derselben (für einen zu den Zeichen gewandten Beobachter) ist, durch α bezeichnet; wenn man ferner die horizontalen Entfernungen der Zeichen N und n von dem Standpunkte durch R und r bezeichnet und die Zeichen und den Standpunkt nahe in Einer lothrechten Ebene liegend annimmt, so hat man die horizontalen Winkel mit der Ebene, in welcher die Zeichen erscheinen:

$$= \frac{-\alpha\omega}{R} \text{ und } = \frac{-\alpha\omega}{r}.$$

Wenn man die beobachteten Richtungen beider Zeichen, von einer festen Richtung an gezählt, durch N und n bezeichnet, so ist also die unveränderliche Richtung der Ebene

$$= N + \frac{\alpha\omega}{R} = n + \frac{\alpha\omega}{r}$$

und man erhält hieraus den jedesmaligen Werth von

$$\alpha = -\frac{(n-N)}{\omega} \cdot \frac{rR}{R-r},$$

also auch die Richtung der Ebene

$$= N - (n-N)\frac{r}{R-r}.$$

Nimmt man bestimmte, aus den Beobachtungen hervorgegangene Werthe von N und n an, und bezeichnet man sie durch N' und n', so kann man alle anderen beobachteten Richtungen auf den Ort des Standpunktes oder den Werth von α reduciren, welcher den angenommenen zugehört. Man hat nämlich

$$N' - (n' - N')\frac{r}{R-r} = N - (n-N)\frac{r}{R-r}$$

also auch

$$N' = N - \{(n-N) - (n'-N')\}\frac{r}{R-r}.$$

Die von uns angewandten Zeichen hatten die Entfernungen

$$R = 610^{T},573, \quad r = 49^{T},485;$$

wenn man diese in die Formeln setzt, erhält man:

$$\alpha - \alpha' = -\{(n-N) - (n'-N')\}\,0^{L},2256$$
$$N' = N - \{(n-N) - (n'-N')\}\,0,0882$$

Die Beobachtungen von $n - N$, welche immer gemacht worden sind, wenn die Richtung von N in Betracht kam, haben ergeben,*) im Mittel aus 66 Beobb. an 12 Tagen [1834 Juli 18—31]: $n - N = -21'',65$, [zwischen $-16'',0$ und $26'',0$; $\alpha - \alpha'$ zwischen $+0^{L},98$ und $-1^{L},17$ schwankend.]

Aus diesen Beobachtungen geht hervor, dass die Bewegung des Standpunktes des Instruments auf der Gallerie des Leuchtethurmes in enge, vielleicht nicht eine Pariser Linie überschreitende Grenzen eingeschlossen ist. Wir hatten grössere Bewegungen erwartet. Da wir sie so klein gefunden haben, die unvermeidlichen Fehler der Messungen auch eine Unsicherheit des Winkels $n - N$ von einigen Secunden erzeugen können, so haben wir die Beweglichkeit des Standpunktes nicht weiter berücksichtigt; destoweniger, da diese Beweglichkeit kaum einen Einfluss auf die mittleren Resultate der Beobachtungen behalten kann. Wir werden also im Folgenden auch den Standpunkt auf der Gallerie des Leuchtethurms als unveränderlich betrachten.

[Mittheilung der auf den Punkten L, S und N gemachten Winkelmessungen, p. 247—252].

§ 61. Bestimmung der Lage der Dreieckspunkte in Beziehung auf die astronomisch bestimmten Punkte.

Nachdem die Punkte, deren astronomische Bestimmung mit der geodätischen zu vergleichen ist, durch den

*) [Einzelbeobachtungen weggelassen.]

Inhalt dieses Abschnittes in das Dreiecksnetz eingeführt worden sind, steht der Berechnung der Entfernungen der Dreieckspunkte von der Sternwarte (Meridiankreis), ihrer Richtungen an der Sternwarte und der Richtungen, in welchen die Sternwarte von ihnen erscheint, nichts mehr im Wege. Wir werden die Entfernungen zweier Punkte des Dreiecksnetzes von der Sternwarte durch S und S', ihre Entfernung von einander durch s bezeichnen; die Richtungen beider Punkte an der Sternwarte durch a und a'; die Richtungen der Sternwarte und des zweiten Punkts am ersten durch b und b'; die Richtungen der Sternwarte und des ersten Punkts am zweiten durch c und c'. Diese Richtungen werden wir für die Sternwarte von der Richtung ihres Meridianzeichens, für die Dreieckspunkte von denselben Richtungen an zählen, auf welche die Angaben des § 42 und die Ergänzungen derselben durch § 59 und 60 sich beziehen. Wenn man sämmtliche Punkte als auf der Oberfläche einer Kugel liegend betrachtet, deren Halbmesser derselbe Aequatorealhalbmesser*) der Erde ist, welcher dem metrischen Systeme zum Grunde liegt, nämlich = 3271628^{T}89, so hat man die Rechnung nach den Formeln:

$$\varepsilon = -\mu S s \qquad \sin(b'-b)\ldots\ldots\log\mu = 1{,}98387$$
$$S'\sin\tfrac{1}{2}\{c'-c-a'+a\} = (S-s)\cos\tfrac{1}{2}\{b'-b+\tfrac{1}{3}\varepsilon\}$$
$$S'\cos\tfrac{1}{2}\{c'-c-a'+a\} = -(S+s)\sin\tfrac{1}{2}\{b'-b+\tfrac{1}{3}\varepsilon\}$$
$$\tfrac{1}{2}\{c'-c+a'-a\} = 90^0+\tfrac{1}{2}(b'-b)+\tfrac{1}{2}\varepsilon$$

zu führen, durch welche man von einem Punkte des Dreiecksnetzes zu anderen fortschreiten kann.

Die folgenden Resultate dieser Rechnung haben ausser den gesuchten Bestimmungen auch eine Bestätigung der Genauigkeit der Rechnungen, welche zu den Angaben des § 42 geführt haben, ergeben; die letztere durch die übereinstimmende Ableitung jedes Resultats von verschiedenen Ausgangspunkten aus.

	Richtung an d. Sternwarte.	Entfernung.*)	Richtung nach der Sternwarte.
Meridianzeichen . .	0° 0′ 0,″000	—	—
Wildenhof	7 33 33,212	21329,^{T}9429	19°42′ 41,″437
Trunz	48 56 53,169	42621,4873	50 29 47,059
Galtgarben	122 8 15,438	10050,3432	356 28 5,655
Memel Steinpfeiler	198 28 45,656	61204,0612	92 45 59,411
Dreiecksp..	198 29 19,976	61192,6920	92 46 33,725
Thurm . . .	198 58 8,057	60649,2093	—
Lattenwalde	200 28 50,982	23815,4332	52 8 40,440
Nidden	205 40 51,440	37598,3202	78 14 33,235
Lepaizi	214 58 21,481	64743,7226	291 25 41,519
Algeberg	226 12 7,297	48305,5452	1 13 11,017
Kalleninken	226 33 46,138	37281,0635	29 35 46,336
Gilge	234 51 19,257	29981,0470	18 54 4,697
Condehnen	237 52 46,777	7805,2248	6 32 43,080
Legitten	246 41 9,242	19005,0894	278 20 55,144
Haferberg	345 11 37,264	972,8410	39 32 6,627

*) [Die log. Entfernung weggelassen.]

Sechster Abschnitt.

Astronomische Beobachtungen.

Die Vielfältigkeit der Mittel, welche man bei dem jetzigen Zustande des mechanischen Theils der beobachtenden Astronomie anwenden kann, die Bestimmungen zu erhalten, welche wir für die beiden Endpunkte des von uns auf der Oberfläche der Erde gemessenen Bogens suchten, nämlich die Bestimmungen der Polhöhe und der Richtung des Meridians, sowohl für Trunz als für Memel, macht eine Wahl unter denselben nothwendig. Wir haben uns für das Passageninstrument entschieden und daher die Polhöhen durch die Beobachtung der Durchgangszeiten von Sternen durch einen auf den Meridian senkrechten, oder beinahe senkrechten Verticalkreis bestimmt. Die Richtungen der Meridiane beider Punkte haben wir durch dasselbe Instrument erhalten wollen, indem wir den Verticalkreis, welchen es beschrieb, in den Meridian oder in die Nähe desselben verlegten. Es traten aber Umstände ein, welche uns veranlassten, dieser Bestimmung der Richtungen der Meridiane noch eine andere hinzuzufügen, welche auf der Beobachtung der Azimuthalunterschiede zwischen dem Polarsterne und festen irdischen Punkten beruhet, zu welcher Beobachtung der nach Herrn Etatsrath Schumacher's Entwurfe von Herrn Ertel verfertigte, zu den Winkelbeobachtungen angewandte 15-zollige Theodolit, wie wir schon im zweiten Abschnitte bemerkt haben, vollkommen geeignet war.

*) [Herr Prof. Jordan schreibt hierüber dem H.: „Bei der Rechnung des sphärischen Excesses für die Polarcoordinaten nimmt Bessel unbegreiflicherweise den Aequatorhalbmesser der Erde statt den mittleren Halbmesser für die betreffende Breite. Da auf 3 Decimalen der Secunde gerechnet wird, ist der Einfluss dieses Fehlers gar nicht unbedeutend und ich vermuthe, dass der unaufgeklärte Fehler von S. 425 der Gradmessung in Ostpreussen, woselbst 105° 10′ 30,″3926 und 105° 10′ 30,″4024 identisch sein soll, hievon herrührt, wie ich auch in meinem „Taschenbuch der practischen Geometrie“ Seite 314 durch ein ? angedeutet habe.“]

Dem Passageninstrumente haben wir vor Instrumenten, welche Zenithdistanzen messen, den Vorzug gegeben, weil man durch dasselbe den Unterschied zweier Polhöhen bestimmen kann, ohne etwanige Abweichungen des Instruments von seiner mathematischen Idee in die Bestimmung zu übertragen. Wenn es richtig angewandt wird, so verschwinden eine Ungleichheit der Dicken der Zapfen seiner Axe, eine Abweichung derselben von der kreiscylindrischen Gestalt und jede Biegung des Instruments unmittelbar aus dem Resultate, sodass dieses durch jede vollständige Beobachtung, allein abhängig von dem zufälligen Fehler derselben, erlangt wird. Die Anwendung dieses Mittels fordert also nicht, dass man sich auf besondere Untersuchungen von Fehlerursachen einlasse, deren Vernachlässigung in anderen Fällen nicht nur Unsicherheit erzeugt, sondern auch mehr als einmal erhebliche Fehler hervorgebracht hat. Es ist ein höchst schätzbarer Vortheil, jeden möglichen Fehler eines Instruments unmittelbar aus der Beobachtung schaffen zu können; ein Vortheil, auf welchen man nur dann Verzicht leisten darf, wenn er durch so grossen Belang der zufälligen Fehler erkauft werden muss, dass die Anzahl der Beobachtungen, welche die Umstände zu machen erlauben, nicht gross genug ist, den Einfluss derselben auf das Resultat in hinreichend enge Grenzen einzuschliessen. In diesem Falle muss man den Vortheil allerdings aufopfern und die Fehlerursachen, welche bei einer anderen Beobachtungsart nicht unmittelbar aus dem Resultate verschwinden, der Art und Grösse ihrer Wirkung nach besonders bestimmen.

§ 62. Von den angewandten Instrumenten.

Das Passageninstrument ist von den Herren Georg und Adolph Repsold in Hamburg verfertigt. Sein Objectivglas hat 21 Linien Oeffnung und 21 Zoll Brennweite. Sein Ocular ist mit einem Prisma versehen, welches um die Axe des Rohrs gedreht werden kann und dadurch gleiche Bequemlichkeit der Beobachtungen auf beiden Seiten des Scheitelpunktes gewährt. Das Netz hat fünf Fäden, deren Erleuchtung durch die Axe geschieht und durch eine vor deren Oeffnung befestigte Convexlinse verstärkt und gleichförmig gemacht wird.

Die Zapfen, um welche das Instrument sich drehet, haben wir von vollkommen gleicher Dicke gefunden. Sie liegen auf gewöhnlichen, an einem Fussgestelle von Messing angebrachten Lagern. Ursprünglich war das Fussgestell so eingerichtet, dass man das Instrument nur durch seine Versetzung in andere Ebenen bringen konnte; später haben die Herren Repsold dasselbe gegen ein anderes vertauscht, welches um eine lothrechte Axe gedrehet werden kann und dadurch die Bequemlichkeit gewährt, den Verticalkreis, in welchem das Instrument sich bewegt, ändern zu können, ohne eine Ortsveränderung seines Mittelpunkts fürchten zu dürfen. Bei den Beobachtungen im Jahre 1832 in Trunz war noch das erste Fussgestell vorhanden, bei den Beobachtnngen in Memel schon das zweite. Bei jenen haben wir ein Mittel angewandt, durch welches der Mittelpunkt des Instruments trotz seiner häufigen Versetzungen bis auf ein Zehntel einer Linie unverrückt erhalten worden ist. Die Anwendung dieses Mittels war nicht überflüssig, indem wir die Zeichen, welche die verschiedenen Verticalkreise bestimmten, in welchen beobachtet werden sollte, nur etwa 190 Toisen weit entfernen konnten, in welcher Entfernung eine Secunde nur $0^{L}8$ beträgt.

Die mit Aether gefüllten Wasserwagen des Instruments sind vortrefflich geschliffen. Wir haben mehrere angewandt: die erste in Trunz bis zum 31. Juli 1832, die zweite ebendaselbst vom 1. August an, die dritte sowohl in Memel im Jahre 1834, als auch in Königsberg im Jahre 1836. Der Werth eines Theils der Scale dieser verschiedenen Wasserwagen ist resp. $2''{,}043$; $2''{,}2701$; $2''{,}083$, bestimmt worden; das dazu angewandte Mittel ist so sicher, dass es keinen in Betracht kommenden Fehler übrig gelassen haben kann. Da die innere Krümmung der Röhren Repsold'scher Wasserwagen nicht allein als höchst regelmässig erwartet werden kann, sondern auch bei der Bestimmung des Werthes der Scalentheile so gefunden worden ist, so glauben wir allen Grund zu haben, auf die Genauigkeit der durch die Wasserwage erlangten Kenntniss der jedesmaligen Neigung der Axe des Instruments gegen den Horizont rechnen zu können.

Indessen geht aus der Erwärmung, welche die die Fäden erleuchtende Lampe verursacht, eine Veränderlichkeit der Aufstellung und der Wasserwage hervor, welche nicht unberücksichtigt bleiben darf, wenn die Beobachtungen nicht von ihrer Sicherheit verlieren sollen. Am nachtheiligsten wirkt die Erwärmung auf die Wasserwage, indem sie den auf der Seite der Lampe befindlichen Fuss derselben ausdehnt und also zur Folge hat, dass die Axe auf dieser Seite höher erscheint als sie wirklich ist. Diese Wirkung wird aber durch eine kreisförmige Messingplatte verkleinert, welche sich am Ende der Axe zwischen der Lampe und der Wasserwage befindet und diese vor dem unmittelbaren Einflusse jener schützt; um sie noch mehr zu verkleinern, haben wir die Laterne, in welcher sich die Lampe be-

findet, mit Pappe bekleidet und die Füsse der Wasserwage in Papier eingehüllt. Ferner haben wir die Regel befolgt, zwischen jeder Aufsetzung der Wasserwage und ihrer Ablesung eine bestimmte Zeit (90ˢ) verstreichen zu lassen, sodass eine vollständige Nivellirung der Axe, ausser der zur Umsetzung der Wasserwage selbst nöthigen Zeit, drei Minuten erforderte. Wir haben hierdurch den verkleinerten Einfluss der Wärme bei allen Beobachtungen gleich zu machen gesucht; indem wir die Beobachtungen abwechselnd in beiden Lagen des Instruments und also auch der Lampe gemacht haben, ist dieser Einfluss der Wärme auf entgegengesetzte Seiten gekommen und aus dem mittleren Resultate der Beobachtungen verschwunden. Der Einfluss derselben Ursache auf das Fussgestell des Instruments wird unschädlich, wenn die Wasserwage so oft angewandt wird, dass man die Lage der Axe für die Beobachtungszeit jedes Sterns kennen lernt.

Zur Messung der Zeit haben wir zwei schöne Box-Chronometer, von Herrn KESSELS und von Herrn GEORGE MUSTON verfertigt, angewandt. Die Beobachtungen sind an dem ersteren gemacht worden; allein wir haben die Verschiedenheit des täglichen Ganges beider Chronometer, welche 10 bis 15ˢ betrug, benutzt, sie immer vor und nach jeder Reihe der Beobachtungen durch die Coincidenzen ihrer Schläge auf das Genaueste miteinander zu vergleichen. Hierdurch haben wir den Vortheil erlangt, aus den Beobachtungen doppelte Resultate ziehen zu können, deren eines auf dem einen, das andere auf dem anderen Chronometer beruhet.

§ 63. Vorrichtungen behufs der Beobachtungen und Anordnung derselben.

Das Passageninstrument ist in Trunz und Memel auf den für dasselbe errichteten Pfeilern aufgestellt worden. Um den nöthigen Schutz desselben vor der Witterung zu erhalten, haben wir eine tragbare Sternwarte von Holz verfertigen lassen und an beiden Orten aufgerichtet. Sie ist mit zwei Durchschnitten, sowohl in der Richtung des Meridians als senkrecht auf denselben, versehen und klein genug, um sie leicht von einem Orte nach dem anderen bringen zu können. Dieselben Sterne, welche in Trunz und Memel behufs der Polhöhenbestimmung beobachtet worden sind, sind später auch in Königsberg mit dem Passageninstrumente beobachtet; hier stand dieses Instrument auf einem Pfeiler in einem Gemache, welches mit einem Durchschnitte senkrecht auf den Meridian versehen ist. Der Mittelpunkt des Pfeilers liegt $5^{T}427$ nördlich von dem Meridiankreise. Die an allen drei Orten der Polhöhenbestimmungen wegen beobachteten Sterne, deren Anzahl acht ist, befinden sich sämmtlich in der Zone zwischen 49° 50′ und 53° 4′ der Abweichung; sie sind so ausgewählt, dass ihre 16 Durchgangszeiten durch den von Osten nach Westen gelegten Verticalkreis an keinem der drei Oerter so nahe zusammenfallen, dass eine derselben unbeobachtet bleiben müsste.

An allen drei Orten haben wir Zeichen errichtet, durch welche das Instrument nach jeder Unterbrechung einer Beobachtungsreihe oder nach einer aus anderen Ursachen hervorgegangenen Veränderung seiner Richtung wieder in die Richtung zurückgebracht worden ist, welche es früher besass. Alle unsere Beobachtungen in Einer Richtung sind also in den fünf parallelen Kreisen der Himmelskugel gemacht, welche die fünf Fäden des Instruments durch seine Drehung um die Axe beschrieben haben, während der mittlere dieser Kreise durch das seine Richtung im Horizonte bestimmende Zeichen ging.

Behufs der Polhöhenbestimmung standen die Zeichen in Trunz und Memel in Osten, in Königsberg in Westen. Sie erschienen in den Zenithdistanzen:

Trunz	$Z = 91^{0}\ 10'\ 45''$
Memel	89 52 0
Königsberg	90 21 45

Jedes derselben war auf einem hölzernen Pfahle aufgestellt; es bestand aus einer weiss angestrichenen Messingplatte mit einem kreisförmigen Loche von 18 Lin. Durchmesser versehen, welches für den Taggebrauch einen schwarzen Hintergrund hatte, und für den Nachtgebrauch durch eine Lampe erleuchtet wurde, deren Licht durch vorgelegtes geöltes Papier gedämpft war.

Die Beobachtungen zur Bestimmung der Zeit und der Richtung des Meridians in Trunz und in Memel machten die Errichtung anderer, ähnlicher Zeichen nöthig. An dem ersten Orte waren deren drei vorhanden, welche auch schon § 25 erwähnt worden sind, nämlich eins (M) nahe in Norden, ein zweites (A) etwa 2° 20′ westlich und ein drittes (B) eben so weit östlich von demselben. Ihre Zenithdistanzen waren:

A	$Z = 90^{0}\ 20'\ 0''$
M	90 17 45
B	90 22 30

Durch die Errichtung der Zeichen A und B wurde die Erlangung einer doppelten Bestimmung des Azimuths beabsichtigt. Wir beobachteten nämlich die Durchgänge des Polarsterns durch die Verticalkreise beider Zeichen und erhielten durch das Mittel aus beiden Bestimm-

ungen die Richtung des Meridians unabhängig von der Voraussetzung der Richtigkeit des in der Rechnung angewandten Ortes des Polarsterns. Wir müssen aber bedauern, dass der Zweck dieser Beobachtungen verfehlt worden ist. Sie wurden im Jahre 1832 gemacht, zu einer Zeit, zu welcher der 15-zollige Theodolit noch nicht angekommen und auch die Signalisirung der Dreieckspunkte noch nicht eingerichtet war, wir also nicht die Mittel besassen, die Richtung des Meridians in das Dreiecksnetz zu übertragen. Im nächsten Jahre, als diese Uebertragung vorgenommen werden sollte, zeigte sich, dass die hölzernen Pfähle, welche die Zeichen getragen hatten, aufgerissen und gekrümmt waren. Die Befestigungspunkte dieser Zeichen konnten dadurch um mehrere Linien verrückt sein, ohne dass wir ein Mittel hatten, die Grösse der Ortsveränderung zu erkennen. Wir konnten uns auch überzeugen, dass wirklich eine merkliche Bewegung der Zeichen stattgefunden hatte, denn wir hatten die Winkel zwischen ihnen, im Jahre 1832, mit einem 8-zolligen Theodoliten beobachtet und

$$A = 0^0\ 0'\ 0,''000$$
$$M = 2\ 19\ 57,061$$
$$B = 4\ 39\ 56,494$$

gefunden, wogegen die Beobachtungen des Jahres 1833 (§ 25)

$$A = 0^0\ 0'\ 0,''000$$
$$M = 2\ 19\ 55,530$$
$$B = 4\ 39\ 52,873$$

ergaben. Unser Meridian war also verloren und es blieb uns nichts anderes übrig, als ihn noch einmal zu suchen. Zu diesem Zwecke wurden die tragbare Sternwarte, der Theodolit und die Uhren noch einmal nach Trunz gebracht und eine Reihe von Beobachtungen über die Azimuthalunterschiede zwischen dem Polarsterne und dem Dreieckspunkte Galtgarben unternommen. Dieser Punkt wurde durch Heliotropenlicht signalisirt, allein um die Zeit nicht zu verlieren, in welcher der Polarstern in Trunz, nicht aber die Sonne in Galtgarben sichtbar war, wurde ein Zeichen in der ohngefähren Richtung des Meridians zu Hülfe genommen, dessen Richtung gegen Galtgarben durch Winkelmessungen bestimmt wurde.

In Memel war nur ein Zeichen (N) in Norden vorhanden, welches in der Zenithdistanz $Z = 90^0\,5'\,45''$ erschien und dessen Bestimmung in Beziehung auf das Dreiecksnetz wir im V. Abschnitte mitgetheilt haben. Wir konnten nur einen der Durchgänge, sowohl von α als auch von δ Ursae minoris, durch den Verticalkreis dieses Zeichens beobachten, also die Richtung des Meridians nur unter Voraussetzung der Kenntniss der Geradenaufsteigungen dieser Sterne erhalten; allein wir haben eine Anzahl Beobachtungen derselben, welche sich in den Tagebüchern der Königsberger Sternwarte findet und durch welche diese Geradenaufsteigungen etwa für die Zeit der Memeler Beobachtungen bestimmt werden können, benutzt, um dadurch die Voraussetzung unschädlicher zu machen. Ausser diesen Beobachtungen zur Bestimmung der Richtung des Meridians ist, wie wir schon § 60 erwähnt haben, noch eine zweite Reihe gemacht worden, welche durch die Azimuthalunterschiede zwischen dem Polarsterne und unseren Dreieckspunkten zu demselben Ziele geführt hat. Bei dieser Beobachtungsreihe stand der Theodolit auf dem Dreieckspunkte auf der Gallerie des Leuchtethurms, von welchem Punkte die mit dem Polarsterne verglichenen irdischen Gegenstände in den Zenithdistanzen

Nidden . . . . $Z = 90^0\ 9'\ 8''$
Zeichen N 90 57 30

erschienen.

Die Anordnung der Beobachtungen mit dem Passageninstrumente ist folgende. Zuerst wurde der mittlere Faden desselben auf das Zeichen gerichtet, in dessen Verticalkreise man beobachten wollte; dann wurde die Wasserwage aufgesetzt, während das Objectivende des horizontal gestellten Fernrohrs von dem das Kreisende der Axe zur rechten Hand habenden Beobachter abgewandt war; 90^s später wurde ihre Angabe abgelesen, worauf sie umgesetzt und wieder 90^s später aufs Neue abgelesen wurde; nun folgte die Beobachtung selbst, nach deren Beendigung die Nivellirung der Axe eben so wie an dem Anfange derselben wiederholt wurde. Nur wenn zwei oder mehr Beobachtungen so schnell aufeinander folgten, dass nicht zwischen denselben nivellirt werden konnte, wurde dieses so lange aufgeschoben, bis Zeit dazu vorhanden war. In allen Fällen sind die kleinen Unterschiede der Angaben der Wasserwage, welche man zwischen zwei vollständigen Anwendungen derselben fand, der Zeit proportional vertheilt worden. (In dem Verzeichnisse der Beobachtungen bedeutet das Zeichen + vor der Angabe der Wasserwage, dass das Kreisende der Axe das höhere, das Zeichen —, dass es das niedrigere war.)

Das Instrument ist häufig umgelegt worden, so dass etwa gleich viele Beobachtungen in jeder Lage der Axe gemacht worden sind; in dem Verzeichnisse der Beobachtungen sind diese beiden Lagen durch die Angabe der Himmelsgegend unterschieden, nach welcher der Höhenkreis des Instruments gewandt war. Die Numerirung der Fäden des Netzes bezieht sich auch

auf das Instrument selbst, nicht auf die Zeitfolge der Antritte eines Sterns; der Faden I ist der dem Höhenkreise am nächsten stehende. Diese Art die Angaben der Wasserwage und die Fäden zu bezeichnen ist die bequemste und schützt vollständig vor Verwechselungen.

Die Beobachtungen mit dem Theodoliten zur Bestimmung der Azimuthalunterschiede zwischen dem Polarstern und irdischen Punkten sind in Memel so angeordnet, dass zuerst der irdische Punkt, dann der Stern eingestellt und abgelesen wurden und darauf, nach der Umlegung des Instruments, eine zweite Beobachtung des Sterns und des irdischen Punktes folgten. In Trunz waren die Beobachtungen gleichfalls symmetrisch angeordnet, aber jede hatte doppelt so viele Momente, nämlich: irdischer Punkt, Stern, Stern, irdischer Punkt, dann Umlegung und wieder zwei Beobachtungen, sowohl des irdischen Punktes als des Sterns. Bei beiden Anordnungen wurde vor und nach jeder einzelnen Beobachtung des Sterns die Axe nivellirt. Man sieht aus diesen Anordnungen, dass wir jede Beobachtung des Sterns durch eine neue Nivellirung der Axe von den anderen haben unabhängig machen wollen. Jeder Theil der Scale der Wasserwage des Theodoliten ist = 3″,0653.

Die Correction der Uhrzeit, welche zu der Berechnung der Beobachtungen nothwendig war, ist sowohl während unserer ersten Beobachtungsreihe in Trunz als auch in Memel durch das Passageninstrument bestimmt worden; während der zweiten Beobachtungsreihe in Trunz durch den Theodoliten, und zwar durch Messung der Azimuthalunterschiede zwischen Fundamentalsternen in der Nähe ihrer Culminationen und demselben irdischen Punkte, auf welchen die Beobachtungen des Polarsterns bezogen worden sind. In Königsberg ist sie durch Vergleichungen des Chronometers mit der Meridianuhr der Sternwarte bekannt geworden.

Um die Bestimmung der Richtung des Meridians von der Voraussetzung der Richtigkeit des als bekannt angenommenen Ortes des Polarsterns unabhängiger zu machen, sind die Beobachtungen mit dem Theodoliten Morgens und Abends in einander beinahe entgegengesetzten Punkten der scheinbaren Bahn des Sterns gemacht worden.

[Es folgen nun, p. 265—304:]

§ 64. Beobachtungen in Trunz mit dem Passageninstrumente zur Bestimmung der Zeit und des Azimuths.

§ 65. Beobachtungen in Trunz mit dem Passageninstrumente zur Bestimmung der Polhöhe.

§ 66. Beobachtungen in Trunz mit dem Theodoliten zur Bestimmung des Azimuths.

§ 67. Vergleichung der beiden Chronometer in Trunz.

§ 68. Beobachtungen in Memel mit dem Passageninstrumente zur Bestimmung der Zeit und des Azimuths.

§ 69. Beobachtungen in Memel mit dem Passageninstrumente zur Bestimmung der Polhöhe.

§ 70. Beobachtungen in Memel mit dem Theodoliten zur Bestimmung des Azimuths.

§ 71. Vergleichung der beiden Chronometer in Memel.

§ 72. Beobachtungen in Königsberg mit dem Passageninstrumente zur Bestimmung der Polhöhe.

§ 73. Vergleichungen des Chronometers mit der Meridianpendeluhr der Sternwarte.

Siebenter Abschnitt.

Berechnung der astronomischen Beobachtungen.

Die Beobachtungen, deren Resultate wir in diesem Abschnitte mitzutheilen beabsichtigen, haben wir, wie aus dem vorigen bekannt geworden ist, durch zwei Instrumente erlangt, nämlich durch ein Passageninstrument und durch einen Theodoliten. Die von beiden Instrumenten gemachte Anwendung besteht in der Beobachtung der Durchgangszeiten der Sterne durch Kreise, welche die Fäden in ihren Fernröhren bei der Drehung derselben um eine Axe beschreiben, deren Lage gegen den Horizont entweder bekannt ist, oder aus der Rechnung geschafft werden kann.

Diese Lage der Axe ist durch den Ort des einen ihrer Pole an der Himmelskugel bestimmt, also durch seine Entfernung von dem Scheitelpunkte und durch das Azimuth des Verticalkreises, in welchem er liegt. Die erstere geht aus der Anwendung der Wasserwage hervor; das andere muss, da es in keinem Falle unmittelbar beobachtet werden kann, aus dem Resultate geschafft werden, was offenbar nicht durch eine einzelne

Beobachtung, sondern nur durch eine Verbindung wenigstens zweier Beobachtungen miteinander geschehen kann. Bei der Anwendung des Passageninstruments haben wir die eine dieser Beobachtungen an einem festen irdischen Zeichen gemacht, die andere an einem Sterne; die Verbindung beider mit einander wird durch die Voraussetzung der, während ihrer Zwischenzeit unveränderten Lage der Axe erlangt. Die Anwendung des Theodoliten ist nur dadurch von der des Passageninstruments verschieden, dass der Pol der Axe zwischen beiden Beobachtungen nicht unverändert geblieben ist, sondern eine Aenderung seines Azimuths erfahren hat, deren Grösse durch die abgelesenen Angaben des horizontalen Kreises des Instruments bekannt geworden ist. Hieraus geht hervor, dass alle unsere Beobachtungen nach einer Theorie berechnet werden müssen. Wie wir sie berechnet haben, werden wir gegenwärtig vollständig mittheilen.

§ 74. Theorie der Berechnung der Beobachtungen.

Wenn man das Azimuth und die Zenithdistanz des einen der beiden in der Richtung der Axe liegenden Punkte der Himmelskugel durch a und $90^0 - b$ bezeichnet, so ist das Azimuth und die Zenithdistanz des anderen $180^0 + a$ und $90^0 + b$; um Zweideutigkeiten zu vermeiden, muss bestimmt werden, welcher von beiden Punkten der sein soll, auf welchen die Angaben a und $90^0 - b$ sich beziehen. Wir nehmen den dafür an, welcher in der Richtung von dem Mittelpunkte des Instruments nach dem den Höhenkreis tragenden Ende der Axe liegt.

Bezeichnet man die Entfernung der Absehenslinie des Instruments von diesem Pole der Axe durch $90^0 + c$, die Entfernung eines der Fäden, an welchem man einen Gegenstand beobachtet hat, von der Absehenslinie durch f und nimmt man dieses f positiv wenn der Faden sich auf der Seite des Kreisendes der Axe befindet, so ist die beobachtete Entfernung des Gegenstandes von dem Pole der Axe $= 90^0 + c + f$. Bezeichnet man ferner das Azimuth und die Zenithdistanz des Gegenstandes durch e und z, so ergibt der trigonometrische Ausdruck der dem Scheitelpunkte gegenüber liegenden Seite des Dreiecks zwischen diesem, dem beobachteten Punkte und dem Pole der Axe die Gleichung:

$$-\sin(c+f) = \sin b \cos z + \cos b \sin z \cos(e-a),$$

wofür man aber, da c, f, b immer sehr kleine Grössen sind,

$$-(c+f) - b\cos z = \omega \sin z \cos(e-a) \ldots \omega = 206264,''8$$

schreiben kann.

Diese Gleichung ergibt:

$$e - a = \pm\left\{90^0 + \frac{c+f+b\cos z}{\sin z}\right\}$$

wo das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem $e-a$ positiv oder negativ ist, oder je nachdem das Kreisende der Axe sich auf der linken oder auf der rechten Seite des dem Gegenstande zugewandten Beobachters befindet. Wendet man diese Formel auf die Beobachtung des festen, irdischen Zeichens an und bezeichnet man sein Azimuth und seine Zenithdistanz durch E und Z, die Entfernung vom mittleren Faden, in welcher es gesehen worden ist, durch F, das Azimuth des Pols der Axe des Instruments durch A, so wird sie:

$$E - A = \pm\left\{90^0 + \frac{c+F+b\cos Z}{\sin Z}\right\};$$

wendet man sie ferner auf die Beobachtung des Sterns an und bezeichnet man sein Azimuth und seine Zenithdistanz durch e und z, die Entfernung vom mittleren Faden, in welcher er gesehen worden ist, durch f, das Azimuth des Poles der Axe des Instruments durch a, so wird sie:

$$e - a = \pm\left\{90^0 + \frac{c+f+b\cos z}{\sin Z}\right\}.$$

Durch die Combination dieser beiden Formeln erhält man die in jedem Falle anzuwendende. Für Beobachtungen mit dem Passageninstrumente ist $A = a$, und falls der mittlere Faden auf das Zeichen gerichtet gewesen ist, $F = 0$; man hat also:

$$E - a = \pm\left\{90^0 + \frac{c+b\cos Z}{\sin Z}\right\}$$

$$e - a = \pm\left\{90^0 + \frac{c+f+b\cos z}{\sin z}\right\}$$

oder

$$= \mp\left\{90^0 + \frac{c+f+b\cos z}{\sin z}\right\}$$

wo der erste oder der zweite der Ausdrücke von $e-a$ angewandt wird, je nachdem der Stern zwischen dem Zeichen und dem Scheitelpunkte, oder über diesen hinaus beobachtet worden ist. Ziehet man, um a fortzuschaffen, die erste Gleichung von der zweiten ab, so erhält man in beiden Fällen:

$$e - E = \pm\left\{c\frac{\sin Z - \sin z}{\sin Z \sin z} + \frac{f}{\sin z} + b\frac{\sin(Z-z)}{\sin Z \sin z}\right\}$$

und

$$e - E = 180^0 \mp\left\{c\frac{\sin Z + \sin z}{\sin Z \sin z} + \frac{f}{\sin z} + b\frac{\sin(Z+z)}{\sin Z \sin z}\right\}$$

welche Formeln man aber, da Z nie beträchtlich von 90^0 abweichen wird, mit

$$\left.\begin{aligned} e-E &= \pm\left\{c\frac{1-\sin z}{\sin z}+\frac{f}{\sin z}+b\frac{\sin(Z-z)}{\sin z}\right\} \\ \text{und}\quad e-E &= 180^0\mp\left\{c\frac{1+\sin z}{\sin z}+\frac{f}{\sin z}+b\frac{\sin(Z+z)}{\sin z}\right\} \end{aligned}\right\}(1)$$

verwechseln kann. Das hierin noch vorkommende doppelte Zeichen unterscheidet die beiden Lagen des Kreisendes der Axe; das obere oder das untere wird angewandt, je nachdem das Kreisende dem zu dem Zeichen gewandten Beobachter links oder rechts ist.

Für Beobachtungen mit dem Theodoliten ist A nicht $= a$, sondern der Unterschied $a - A$ ist durch den horizontalen Kreis des Instruments angegeben; ferner soll F nicht $= 0$ gesetzt werden, da unter unseren Beobachtungen einige vorkommen, bei welchen nicht die Absehenslinie, sondern einer der beiden Fäden, zwischen welchen sie in der Mitte liegt (§ 13), auf das Zeichen eingestellt wurde. Da das Fernrohr nicht bis zu dem Scheitelpunkte erhöhet, also auch nicht über ihn hinausbewegt werden kann, so kömmt unter den Beobachtungen mit dem Theodoliten der zweite der oben abgesonderten Fälle nicht vor, und man hat:

$$E-A = \pm\left\{90^0+\frac{c+F+b\cos Z}{\sin Z}\right\}$$

$$e-a = \pm\left\{90^0+\frac{c+f+b\cos z}{\sin z}\right\}$$

woraus folgt:

$$E = e-(a-A)\mp\left\{c\frac{1-\sin z}{\sin z}+\frac{f-F\sin z}{\sin z}+b\frac{\sin(Z-z)}{\sin z}\right\}\ldots.(2)$$

Diese Formeln sind unmittelbar anwendbar, wenn mit dem einen oder dem anderen der Instrumente ein Azimuth bestimmt werden soll. Die zu ihrer Anwendung nothwendigen e und z werden durch die Formeln

$$\sin z\cos e = \cos\varphi\sin\delta-\sin\varphi\cos\delta\cos t$$
$$\sin z\sin e = -\cos\delta\sin t$$
$$\cos z = \sin\varphi\sin\delta+\cos\varphi\cos\delta\cos t$$

ausgedrückt, in welchen φ, δ, t die Polhöhe, die Declination des Sterns und seinen Stundenwinkel bezeichnen, den letzteren von der oberen Culmination an, von 0 bis 360° gezählt. Das Azimuth ist im nördlichen Meridiane $= 0$ und wächst rechts herum bis zu 360°. — Der Einfluss von c auf E verschwindet fast ganz aus dem Mittel zweier, nur durch eine kurze Zwischenzeit von einander getrennter Beobachtungen, zwischen welchen man die Lage des Kreisendes der Axe verwechselt hat.

Soll dagegen das Passageninstrument zur Bestimmung der Zeit oder der Polhöhe angewandt werden, so können diese Formeln das Gesuchte nur mittelbar ergeben, weshalb die Anwendung anderer, aus denselben abgeleiteter, kürzer zum Ziele führt.

In den meisten Fällen kann die fernere Anwendung der Beobachtungen ohne Nachtheil dadurch erleichtert werden, dass man aus jeder beobachteten Zeit eines Durchganges eines Sterns durch einen Faden des Instruments seine Durchgangszeit durch den Verticalkreis des Zeichens ableitet. Man kann dadurch die bei Einem Durchgange beobachteten Zeiten in eine einzige Zeit vereinigen, welche die zufällige Neigung der Axe des Instruments gegen den Horizont nicht mehr enthält und welcher der Einfluss des Collimationsfehlers c ausdrücklich hinzugesetzt ist. Schreibt man, um abzukürzen, die beide mögliche Fälle enthaltenden Formeln (1):

$$e-E = \pm\frac{p}{\sin z}\quad\text{und}\quad e-E = 180^0\mp\frac{p'}{\sin z}$$

und statt derselben

$$\cos E\sin z\sin e-\sin E\sin z\cos e = \pm p,$$

welche Formel beiden Fällen entspricht, wenn in dem zweiten p' statt p geschrieben wird; oder nach der Einführung der Ausdrücke von $\sin z\sin e$ und $\sin z\cos e$

$$-\cos E\cos\delta\sin t$$
$$-\sin E(\cos\varphi\sin\delta-\sin\varphi\cos\delta\cos t) = \pm p$$

so hat man auch, falls t' den Stundenwinkel des Sterns im Augenblicke seines Durchganges durch den Verticalkreis des Zeichens bedeutet:

$$-\cos E\cos\delta\sin t'$$
$$-\sin E(\cos\varphi\sin\delta-\sin\varphi\cos\delta\cos t') = 0.$$

Der Unterschied beider Gleichungen:

$$2\sin\tfrac{1}{2}(t'-t)\cos\delta\{\cos E\cos\tfrac{1}{2}(t'+t)+\sin E\sin\varphi\sin\tfrac{1}{2}(t'+t)\} = \pm p$$

kann durch die Einführung von Hülfswinkeln h und H, welche nach den Formeln

$$\sin h\cos H = \cos E$$
$$\sin h\sin H = \sin E\sin\varphi$$
$$\cos h = \sin E\cos\varphi$$

bestimmt werden, in

$$2\sin\tfrac{1}{2}(t'-t)\cos\delta\sin h\cos\left(\frac{t'+t}{2}-H\right) = \pm p\ldots.(3)$$

verwandelt werden und gibt dann ein Mittel, $t'-t$ entweder indirect oder durch aufeinanderfolgende Annäherungen zu berechnen. Hiermit reicht man in den meisten Fällen aus; will man aber einen direct zur Kenntniss von $t'-t$ führenden Ausdruck haben, so kann man ihn dadurch erhalten, dass man $\frac{1}{2}(t'-t)$ aus dem vorigen eliminirt. Die hierzu nothwendige neue Gleichung erhält man durch die Summe der beiden angeführten:

$$-2\cos\tfrac{1}{2}(t'-t)\cos\delta\{\cos E\sin\tfrac{1}{2}(t'+t)-$$
$$-\sin E\sin\varphi\cos\tfrac{1}{2}(t'+t)\}=\pm p+2\sin E\cos\varphi\sin\delta,$$

welche durch die eingeführten neuen Bezeichnungen den Ausdruck

$$-2\cos\tfrac{1}{2}(t'-t)\cos\delta\sin h\sin\left(\frac{t'+t}{2}-H\right)$$
$$=\pm p+2\cos h\sin\delta$$

annimmt. Schafft man $\frac{t'+t}{2}-H$ aus beiden Gleichungen weg, so ergeben sie die neue Gleichung:

$$4\cos\delta^2\sin h^2=\frac{pp}{\sin\frac{1}{2}(t'-t)^2}+\frac{(2\cos h\sin\delta\pm p)^2}{\cos\frac{1}{2}(t'-t)^2}$$

wofür man, indem man

$$h+\delta=m,\quad h-\delta=n$$

einführt,

$$0=pp-2\{2\sin m\sin n\mp p(\sin m\sin n)\}\sin\tfrac{1}{2}(t'-t)^2$$
$$+(\sin m+\sin n)^2\sin\tfrac{1}{2}(t'-t)^4$$

schreiben kann. Ihre Auflösung ergibt:

$$\pm\sin\tfrac{1}{2}(t'-t)=\frac{\sqrt{\sin m(\sin n\mp p)}-\sqrt{\sin n(\sin m\pm p)}}{\sin m+\sin n}$$

$$\text{und}\ldots\ldots\ldots=\frac{\sqrt{\sin m(\sin n\mp p)}+\sqrt{\sin n(\sin m\pm p)}}{\sin m+\sin n}$$

Da der Verticalkreis, welchen das Instrument beschreibt, den Parallelkreis des Sterns, wenn er ihn einmal durchschneidet, auch zum zweiten Male durchschneiden muss, so hat t', falls es einen möglichen Werth hat, nothwendig auch einen zweiten; auf diese beiden Werthe von t' beziehen sich die beiden Formeln, deren erste offenbar angewandt werden muss, da man den kleinsten der beiden Werthe von $\frac{1}{2}(t'-t)$ sucht. Multiplicirt man den Zähler und den Nenner dieser Formel mit dem Zähler der zweiten, so erhält sie die zur Anwendung bequemere Form:

$$\pm\sin\tfrac{1}{2}(t'-t)=\frac{\mp p}{\sqrt{\sin m(\sin n\mp p)}+\sqrt{\sin n(\sin m\pm p)}}$$

oder auch

$$\pm\sin\tfrac{1}{2}(t'-t)=\frac{\mp p}{\sqrt{\sin m\sin n}\left\{\sqrt{1\mp\frac{p}{\sin n}}+\sqrt{1\pm\frac{p}{\sin m}}\right\}}.\quad(4)$$

Die doppelten Zeichen auf der rechten Seite beziehen sich auf die beiden Lagen der Axe; das obere wird angewandt, wenn das Kreisende der Axe sich links von dem, den Verticalkreis bestimmenden Zeichen befindet (§ 74). Die doppelten Zeichen auf der linken Seite beziehen sich aber auf die beiden Durchschnittspunkte der in Betracht kommenden Kreise; welches von beiden anzuwenden ist, ergibt sich aus der Vergleichung von (3) und (4). Wenn h in den beiden ersten Quadranten genommen wird, was immer geschehen kann, so geht aus dieser Vergleichung hervor, dass die Zeichen von

$$\frac{\pm p}{\cos\left(\frac{t'+t}{2}-H\right)}\ \text{und}\ \mp p$$

übereinstimmen müssen; man muss also $+\sin\frac{1}{2}(t'-t)$ annehmen, wenn $\frac{t'+t}{2}-H$ im 2. oder 3. Quadranten, $-\sin\frac{1}{2}(t'-t)$ wenn es im 1. oder 4. liegt.

Da p in den beiden Fällen, welche in den Formeln (1) unterschieden worden sind,

$$=c(1\mp\sin z)+f+b\sin(Z\mp z)$$

ist und c und b nicht über einige Secunden betragen werden, so kann ihr Einfluss auf den Nenner der Formel (4) als unerheblich angesehen werden; dann kann man die Theile von $t'-t$, welche von f, b und c herrühren, abgesondert berechnen, oder mit anderen Worten zuerst alle Fädenbeobachtungen auf die Absehenslinie reduciren und dem Mittel aus allen dadurch erhaltenen Durchgangszeiten durch dieselbe seine Reduction auf die horizontale Lage der Axe und den Einfluss des Collimationsfehlers hinzusetzen. Will man $t'-t$ in Secunden der Uhr, an welcher die Beobachtungen gemacht worden sind, ausdrücken, so muss man seinen in Bogensecunden gefundenen Werth durch $15(1+i)$ dividiren, wo $1+i$ den Werth einer Secunde der Uhr in Sternenzeit ausgedrückt bezeichnet.

Löset man die Gleichung, welche eben in Beziehung auf die unbekannte Grösse $\sin\frac{1}{2}(t'-t)$ aufgelöset worden ist, so auf, dass man p als unbekannte Grösse annimmt, so erhält man:

$$\mp p=\pm\sin\tfrac{1}{2}(t'-t)\sqrt{\sin m\sin n}$$
$$-2\sin\tfrac{1}{2}(t'-t)^2\sin\delta\cos h\ldots\ldots\quad(5)$$

Von den doppelten Zeichen auf der linken Seite wird das obere angewandt, wenn das Kreisende der Axe sich links von dem den Verticalkreis bestimmenden Zeichen befindet; von den doppelten Zeichen auf der rechten Seite gilt das obere, wenn $\frac{t'+t}{2}-H$ im 2. und 3., das untere wenn es im 1. und 4. Quadranten liegt. Wenn c und b sehr klein sind, kann man für $t'-t$ die Zwischenzeit zwischen den Durchgängen eines Sterns durch den mittleren Faden und einen Seitenfaden, in $15(1+i)$ multiplicirt, annehmen, und erhält dadurch das zu dem letzteren gehörige f. Diese Formel ist also die, welche man anwenden muss, wenn man aus den Verweilungszeiten der Sterne zwischen den Fäden die Entfernungen der letzteren von dem mittleren Faden berechnen will.

§ 75. Angewandte Art, den Gang beider Chronometer gegen Sternenzeit in Rechnung zu bringen.

Das was einer Zeitangabe des unmittelbar zu den Beobachtungen benutzten Kessels'schen Chronometers hinzuzufügen ist, um sie in Sternenzeit zu verwandeln, ist, weil diese Uhr beinahe der mittleren Zeit folgt, so schnellen Aenderungen unterworfen, dass seine Bestimmung aus verschiedenen Beobachtungen keine Uebersicht über die Uebereinstimmung derselben gewährt. Um diese Uebersicht zu erlangen, müssen alle einzelnen aus den Beobachtungen an einem Tage hervorgehenden Bestimmungen auf Ein Zeitmoment reducirt werden. Hierzu ist zwar die Kenntniss des Ganges der Uhr, welche erst durch die Vergleichung ihrer für verschiedene Tage gefundenen Verbesserungen erlangt werden kann, erforderlich; allein eine fehlerhafte Annahme desselben erhält keinen Einfluss auf das Mittel aus allen an Einem Tage gemachten und auf ein bestimmtes Zeitmoment reducirten Bestimmungen, wenn dieses Moment in der Mitte aller Beobachtungszeiten liegt. Wir haben daher der, jeder Beobachtungszeit k des Kesselsschen Chronometers hinzuzufügenden Reduction auf Sternenzeit die Form

$$\vartheta = \Theta + (k - K)\,i$$

gegeben, wo Θ diese Reduction für das Mittel K aller Beobachtungszeiten und $1 + i$ den Werth einer Secunde des Chronometers in Sternenzeit ausgedrückt bezeichnen. Wir haben also den Zeitangaben k die Aenderungen $(k - K)\,i$ hinzugesetzt und nicht ϑ, sondern Θ aus den Beobachtungen der einzelnen Sterne gesucht. Nachdem Θ auf diese Art für die verschiedenen Beobachtungstage gefunden war, haben wir seine Aenderungen zwischen zwei aufeinander folgenden Bestimmungen der Zeit proportional vorausgesetzt.

Da das Muston'sche Chronometer (II) in fortwährender Vergleichung mit dem vorigen (I) erhalten ist, so kann man offenbar alle an diesem beobachtete Zeichen auch nach der Zeit jenes Chronometers angeben und hierauf eine zweite, auf der Voraussetzung des gleichförmigen Ganges desselben beruhende Berechnung sämmtlicher Resultate gründen. Die Vergleichung beider Rechnungen gibt ein Mittel an die Hand, zu beurtheilen, inwiefern die Messung der Zeit durch die angewandten Uhren als genügend betrachtet werden kann. Man kann diesen nicht unerheblichen Vortheil erlangen, ohne die einmal gemachte Rechnung zu wiederholen; dieses soll jetzt weiter entwickelt werden.

Bezeichnet man die Verbesserungen, welche den Angaben

$$k,\ k',\ k'',\ldots.$$

des Chronometers I hinzugefügt werden müssen, um sie in Sternenzeit zu verwandeln, durch

$$\vartheta,\ \vartheta',\ \vartheta''\ldots.;$$

die gleichzeitigen Verbesserungen des Chronometers II durch

$$\vartheta_{,},\ \vartheta'_{,},\ \vartheta''_{,},\ldots.;$$

die Unterschiede der Angaben beider Chronometer durch

$$d,\ d',\ d'',\ldots.,$$

so genommen dass

$$\vartheta_{,} = \vartheta + d,\quad \vartheta'_{,} = \vartheta' + d',\quad \vartheta''_{,} = \vartheta'' + d'',\ldots.$$

ist, so kann man die Werthe von $d,\ d',\ d''\ldots.$ als bekannt ansehen, indem die fortgehende Vergleichung beider Chronometer sie ergeben hat. Hat man mehrere Verbesserungen des Chronometers I zu einem Mittel vereinigt, so erhält man das Mittel der gleichzeitigen Verbesserungen des Chronometers II, indem man jenem das Mittel aus den gleichzeitigen Unterschieden beider Chronometer hinznfügt; oder wenn man bezeichnet:

$$\frac{1}{n}\left\{k + k' + k'' + \ldots.\right\} = K$$

$$\frac{1}{n}\left\{\vartheta + \vartheta' + \vartheta'' + \ldots.\right\} = \Theta$$

$$\frac{1}{n}\left\{d + d' + d'' + \ldots.\right\} = D$$

$$\frac{1}{n}\left\{\vartheta_{,} + \vartheta'_{,} + \vartheta''_{,} + \ldots.\right\} = \Theta_{,}$$

so hat man zu der Zeit K des Chronometers I gehörig:

$$\Theta_{,} = \Theta + D.$$

Auf diese Art hat man für alle Werthe von K, für welche man die Verbesserung der Zeitangabe des Chronometers I bestimmt hat, auch diese Verbesserung für das Chronometer II. Wir wollen als zusammengehörig und in der hier beschriebenen Reihenfolge annehmen:

Zeitangabe des Chronometers I . . . . $K,\ K',\ K'',\ \ldots$

Verbesserungen derselben . . . . . $\Theta,\ \Theta',\ \Theta'',\ \ldots$

Unterschied beider Chronometer . . . $D,\ D',\ D'',\ \ldots$

Der Hypothese zufolge, dass das Chronometer I zwischen zwei Zeiten, für welche seine Correction auf diese Art bestimmt ist, gleichförmig gehe, erhält man die Sternenzeit, welche einer innerhalb dieser Grenzen beobachteten Zeitangabe k entspricht:

$$S = k + \Theta + \frac{k - K}{K' - K}(\Theta' - \Theta);$$

ebenso erhält man der Hypothese zufolge, dass das Chronometer II innerhalb derselben Grenzen gleichförmig gehe, die der Angabe k des Chronometers I entsprechende Sternenzeit:

$$S_{,} = k - d + \Theta_{,} + \frac{k-K}{K'-K}(\Theta'_{,} - \Theta_{,})$$

oder, da $\Theta_{,} = \Theta + D$, $\Theta'_{,} = \Theta' + D'$ ist,

$$S_{,} = S + D + \frac{k-K}{K'-K}(D' - D) - d.$$

Man hat also den in der ersten Hypothese berechneten Sternenzeiten

$$D + \frac{k-K}{K'-K}(D' - D) - d$$

hinzuzusetzen, wenn sie der zweiten entsprechen sollen. Offenbar kann dieses nach der gänzlichen Vollendung der Rechnung geschehen, sodass man in dem Laufe derselben nur dem Chronometer folgen darf, an welchem die Beobachtungen gemacht worden sind.

§ 76. Oerter der beobachteten Sterne.

Die Oerter der Fundamentalsterne und der beiden Polarsterne, auf welchen die Bestimmungen der Zeit und des Azimuths beruhen, haben wir so angenommen, wie die Tabulae Regiomontanae Reductionum etc. sie den Beobachtungen auf der Königsberger Sternwarte zufolge ergeben. Ausser den Fundamentalsternen sind noch zwei Sterne zur Bestimmung der Zeit benutzt worden, nämlich η Ursae maj. und γ Draconis; ihre Geradenaufsteigungen sind aus der Verbindung der Bestimmungen in der VI. Abtheilung der Königsberger Beobachtungen mit denen in den Fundamentis Astronomiae pro A°. 1755 abgeleitet worden. Da man aus dem zuerst angeführten Werke (p. XLIII) weiss, dass der Ort des Sterns α Ursae min. nicht alle wünschenswerthe Sicherheit besitzt, so haben wir nicht unterlassen, den aus den Beobachtungen desselben gezogenen Resultaten die Aenderungen beizusetzen, welche sie durch eine Aenderung der aus den Tafeln genommenen Geradenaufsteigung und Abweichung erfahren.

Die Oerter der 8 Sterne, auf welchen die Bestimmungen der Polhöhen beruhen, sind durch zwei neue Beobachtungsreihen bestimmt worden, deren eine auf der Sternwarte des Herrn Etatsrath SCHUMACHER durch Herrn PETERSEN, die andere auf der Königsberger Sternwarte durch Herrn Observator BUSCH gemacht worden ist. Beide haben für 1832 ergeben:

	Altona.		Königsberg.	
	AR.	Declination.	AR.	Declination.
β Draconis ..	$17^h26^m38^s,437$	52°25′ 43″,07	$17^h26^m38^s,410$	52°25′ 43″,21
γ „ ..	52 —	51 30 42,33	52 42,456	51 30 42,63
XVIII. 170 ..	18 36 1,170	52 2 26,84	18 36 1,111	52 2 26,78
$\varkappa$ Cygni....	19 13 13,117	53 3 41,06	19 13 13,070	53 3 40,93
7 „	23 19,095	51 58 51,46	23 19,051	51 58 52,10
ι „	25 28,153	51 22 28,89	25 28,140	51 22 29,28
ϑ „	31 —	49 50 —	31 56,133	49 50 7,52
ψ „	51 17,080	51 59 45,01	51 17,071	51 59 44,52

Wir haben das Mittel aus beiden Bestimmungen angenommen und aus seiner Vergleichung mit der in den Fundamentis Astronomiae enthaltenen Bestimmung die eigenen Bewegungen der Sterne abgeleitet. Hierdurch haben wir folgende Grundlage unserer Rechnungen über diese Sterne erlangt:

	AR. 1833.	Jährliche Veränderg.	Decl. 1833.	Jährliche Veränderg.
β Dracon.	261°39′ 56″,58	20″,232	52°25′ 40″,23	— 2″,914
γ „	268 10 57,72	20,884	51 30 41,80	— 0,675
XVIII. 170	279 0 37,76	20,661	52 2 29,70	+ 3,141
$\varkappa$ Cygni	288 18 37,24	20,828	53 3 47,41	+ 6,405
7 „	290 50 8,10	21,995	51 58 58,84	+ 7,060
ι „	291 22 24,92	22,723	51 22 36,52	+ 7,432
ϑ „	292 59 26,14	24,142	49 50 15,60	+ 8,079
ψ „	297 49 39,47	23,330	51 59 54,13	+ 9,359

Zur Berechnung der scheinbaren Oerter aller benutzten Sterne für die Beobachtungszeiten derselben sind die Formeln und Tafeln angewandt, welche sich in dem angeführten Werke befinden. Die tägliche Aberration fügt dem ohne ihre Berücksichtigung berechneten Stundenwinkel t eines Sterns $-\lambda \cos t \sec \delta$ und seiner Declination $+\lambda \sin t \sin \delta$ hinzu, wo für die Polhöhe φ und die Excentricität der Meridiane e:

$$\lambda = 0″,30847 \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - ee \sin \varphi^2}}$$

ist. Ihr Einfluss auf die aus unseren Beobachtungen abzuleitenden Resultate kann aber leichter berechnet werden, als durch die wirkliche Anbringung dieser Verbesserungen; da nämlich durch diese Beobachtungen nur die Durchgangszeiten der Sterne durch gegebene Verticalkreise bestimmt werden, so genügt es, den Einfluss der täglichen Aberration auf das Azimuth aufzusuchen. Wenn man die dasselbe ergebenden Formeln:

$$\sin z \cos e = \cos \varphi \sin \delta - \sin \varphi \cos \delta \cos t$$
$$\sin z \sin e = -\cos \delta \sin t$$

differentiirt und für die Differentiale von δ und t ihre

Aenderungen durch die tägliche Aberration setzt, erhält man:

$$\cos z \cos e\, dz - \sin z \sin e\, de = -\lambda \sin z^2 \cos e \sin e$$
$$\cos z \sin e\, dz + \sin z \cos e\, de = +\lambda - \lambda \sin z^2 \sin e^2$$

und es folgt daraus:

$$dz = \lambda \cos z \sin e$$
$$\sin z\, de = \lambda \cos e$$

Die zweite dieser Formeln, welche bei unseren Beobachtungen allein Anwendung findet, zeigt, dass der Einfluss der täglichen Aberration auf das Azimuth mit dem Cosinus desselben zugleich verschwindet; er darf also in der Berechnung der zur Bestimmung der Polhöhen, in den Azimuthen 90° und 270° gemachten Beobachtungen, gar nicht berücksichtigt werden. Bei allen übrigen Beobachtungen beschrieb das Instrument einen so wenig gegen den Meridian geneigten Verticalkreis, dass $\cos e$, je nachdem sie nördlich oder südlich von dem Scheitelpunkte gemacht worden sind, von $+1$ oder -1 nicht merklich verschieden ist. Man hat also den beiden Formeln (1) (§ 74) auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens

$$-\frac{\lambda}{\sin z} \quad \text{und} \quad +\frac{\lambda}{\sin z},$$

und dem Ausdrucke von E (2), je nachdem die Beobachtung auf der Nordseite oder der Südseite des Scheitelpunkts gemacht ist,

$$+\frac{\lambda}{\sin z} \quad \text{oder} \quad -\frac{\lambda}{\sin z}$$

hinzuzusetzen, um die tägliche Aberration dadurch zu berücksichtigen.

§ 77. Zeitbestimmungen in Trunz.

Die von uns angewandte Beobachtungsart ergibt die Bestimmung des Standes der Uhr gegen Sternenzeit, durch die Vergleichung der beobachteten Zeit des Durchganges eines Sterns durch den Verticalkreis eines errichteten Zeichens, mit der als bekannt angenommenen Sternenzeit desselben. Die letztere hängt von dem Orte des Sterns, von der Polhöhe des Beobachtungsortes und von dem Azimuthe des Zeichens ab. Wir werden zuerst mittheilen, auf welche Annahmen ihre Berechnung gegründet worden ist.

Der Stundenwinkel t' eines Sterns in dem Augenblicke seines Durchganges durch den Verticalkreis eines im Azimuthe E errichteten Zeichens geht aus der Gleichung

$$0 = \cos E \cos\delta \sin t' + \sin E \{\cos\varphi \sin\delta - \sin\varphi \cos\delta \cos t'\}$$

hervor, welche durch die Einführung von h und H (§ 74) die Form:

$$0 = \cos h \sin\delta + \sin h \cos\delta \sin(t' - H)$$

annimmt, also

$$\sin(t' - H) = -\frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg} h}$$

ergibt. Wenn man die in Theile des Kreises verwandelte Sternenzeit durch μ, die gerade Aufsteigung des Sterns durch α bezeichnet, so ist $t' = \mu - \alpha$, und wenn man G für $t' - H$ schreibt:

$$\mu = \alpha + G + H.$$

Aendert man E um ΔE und bezeichnet man die Zenithdistanz, welche der Stern bei seinem Durchgange durch den Verticalkreis des Zeichens hat, durch z, so ist die daraus entstehende Veränderung von μ

$$= \frac{\sin z \sec\delta}{\sin h \cos G} \Delta E;$$

der Einfluss einer Aenderung von δ ist

$$= \frac{-\sec\delta^2}{\operatorname{tg} h \cos G} \Delta\delta.$$

Die Wirkung der täglichen Aberration kann in die Berechnung von μ aufgenommen werden: aus dem letzten § geht nämlich hervor, dass sie, in dem hier vorhandenen Falle, das Azimuth um $+\frac{\lambda}{\sin z}$ ändert, oder dass sie berücksichtigt wird, wenn man $\Delta E = +\frac{\lambda}{\sin z}$ setzt; hierdurch erhält man ihren Einfluss auf μ

$$= \frac{\sec\delta}{\sin h \cos G} \lambda,$$

also den dadurch vervollständigten Werth von μ:

$$\mu = \alpha + G + H + \frac{\sec\delta \cdot \lambda}{\sin h \cos G}.$$

Die Berechnung von μ setzt voraus, dass man φ, E und δ kenne. Die Polhöhe von Trunz ist $= 54°\,13'\,11,''9$ angenommen; die Declinationen der Sterne gehen aus den Tabulis Regiomontanis hervor; E kann aber noch nicht als bekannt angenommen werden, indem die Azimuthe der verschiedenen, bei den Beobachtungen benutzten Zeichen sich erst aus den Beobachtungen des Sterns α Ursae min. ergeben sollen. Wir haben diese Azimuthe

$$A = 357°\,40'\,7'' + \Delta A$$
$$M = 0\ \ 0\ \ 0 + \Delta M$$
$$B = 2\ 20\ \ 2 + \Delta B$$

gesetzt und werden die den angenommenen Werthen derselben hinzuzufügenden Verbesserungen in Rechnung bringen, sobald ΔA, ΔM, ΔB bekannt geworden sein werden. Aus diesen Annahmen folgt:

	H	h	$\log \operatorname{tg} h$
Zeichen A	$-1°\,53'\,30,''254$	$91°\,21'\,46,''284$	$1{,}6235904\,n$
M	$0\ \ 0\ \ 0{,}000$	$90\ \ 0\ \ 0{,}000$	infinit.
B	$+1\ 53\ 37{,}559$	$88\ 38\ \ 8{,}456$	$1{,}6231249$

Ferner sind die Sternenzeiten der Durchgänge der beobachteten Sterne durch die Verticalkreise der verschiedenen Zeichen:

[Folgen die beobachteten Sternzeiten der Fundamentalsterne 1832 Juli 24 — Aug. 19.]

Mit diesen Sternenzeiten der Durchgänge durch die Verticalkreise der Zeichen müssen die Uhrzeiten derselben verglichen werden. Wenn t und t' die Stundenwinkel bedeuten, welche ein Stern hat, indem er durch einen Faden und durch diesen Verticalkreis geht, so wird die beobachtete Durchgangszeit durch den ersteren durch Hinzufügung von

$$\frac{t'-t}{15\,(1+i)}$$

auf den letzteren reducirt; die Formel (4) § 74 ergibt $\mp \sin \frac{1}{2}(t'-t)$ und damit, nachdem über die Zweideutigkeit entschieden ist, $t'-t$. Da im 74. § gezeigt worden ist, dass das obere oder das untere Zeichen genommen werden muss, je nachdem $\frac{t'+t}{2} - H$ im 2. und 3., oder im 1. und 4. Quadranten liegt, so ist hier, wo sowohl $\frac{1}{2}(t'+t)$ als H kleine, positive oder negative Winkel sind, der letztere Fall vorhanden, und man hat, wenn man den Sinus und den Bogen $\frac{1}{2}(t'-t)$ verwechselt, was ohne merklichen Fehler geschehen kann, die gesuchte Reduction:

$$= \frac{1}{15\,(1+i)} \cdot \frac{\pm p}{\sqrt{\sin m \sin n}\,\frac{1}{2}\left\{\sqrt{1 \mp \frac{p}{\sin n}} + \sqrt{1 \pm \frac{p}{\sin m}}\right\}}$$

Die hier noch stattfindende Zweideutigkeit bezieht sich auf die Lage des Kreisendes der Axe; das obere oder untere Zeichen wird genommen, je nachdem das Kreisende links oder rechts von dem, zu dem errichteten Zeichen gewandten Beobachter, oder, in dem gegenwärtigen Falle, je nachdem es in Westen oder in Osten liegt. Für diesen Fall, in welchem auch der Scheitelpunkt zwischen dem Zeichen und den beobachteten Sternen liegt, ist, der letzten der Formeln (1) § 74 zufolge

$$p = f + b \sin(Z+z) + c\,(1+\sin z).$$

Die Kenntniss von f', f'', f^{IV}, f^{V}, nämlich der Entfernungen der vier Seitenfäden von dem mittleren Faden haben wir durch die Verweilungen der acht in Osten und Westen beobachteten Sterne zwischen den Fäden erhalten (§ 65). Aus den Beobachtungen (jedes einzelnen) dieser acht Sterne hat sich [im Mittel] ergeben:*)

f'	f''	f^{IV}	f^{V}
$+660''{,}307$	$+330''{,}502$	$-332''{,}901$	$-661''{,}247.$

Die Neigung der Axe b findet man durch die Multiplication der Ablesung der Wasserwage § 64 in den § 62 angegebenen Werth eines Theils ihrer Scale. Die Zenithdistanzen Z der drei errichteten Zeichen sind § 63 angegeben. Der Collimationsfehler c bleibt vorläufig unbestimmt. Wegen der Nähe bei der Culmination, in welcher die Sterne beobachtet worden sind, kann $z = \varphi - \delta$ gesetzt werden.

Die Reduction der Durchgangszeit eines Sterns durch einen Faden, auf seine Durchgangszeit durch den Verticalkreis des Zeichens, wird, bei westlicher Lage des Kreisendes der Axe, durch die Formel

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{p}{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{1 - \frac{p}{\sin n}} + \sqrt{1 + \frac{p}{\sin m}}\right\}}$$

erlangt, bei östlicher Lage desselben durch die Formel:

$$-\frac{1}{k} \cdot \frac{p}{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{1 + \frac{p}{\sin n}} + \sqrt{1 - \frac{p}{\sin m}}\right\}}$$

wo k, zur Abkürzung, für

$$15\,(1+i)\sqrt{\sin m \sin n}$$

geschrieben ist. In den Nennern dieser Formeln reicht es hin, statt des vollständigen Ausdrucks von p nur f zu schreiben, indem der Einfluss der von b und c abhängigen Theile derselben, wegen der angenommenen Kleinheit dieser Grössen, unbedeutend ist. Dann kommen diese Theile nur in den Zählern vor, weshalb man sie, wie oben schon bemerkt ist, abgesondert in Rechnung bringen kann. Betrachtet man zuerst f allein, so erhält man dadurch die Zeit zwischen den Durchgängen des Sterns durch einen Seitenfaden und den mittleren Faden, nämlich:

Kreisende West ... $\frac{1}{k} \cdot \frac{f}{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{1 - \frac{f}{\sin n}} + \sqrt{1 + \frac{f}{\sin m}}\right\}}$

„ Ost ... $-\frac{1}{k} \cdot \frac{f}{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{1 + \frac{f}{\sin n}} + \sqrt{1 - \frac{f}{\sin m}}\right\}}$

Die Nenner beider Formeln sind einander gleich, wenn $\sin n = \sin m$, oder $\sin(h-\delta) = \sin(h+\delta)$ ist, was nur für $h = 90^0$, oder für den Fall der Bewegung des Instruments im Meridiane stattfindet. In jedem anderen Falle gehören Einem Faden zwei nach der Lage des Instruments verschiedene Zwischenzeiten zu. Man kann statt dieser Formeln auch die folgenden:

$$\sin\zeta = \frac{f}{\omega \sin m}; \quad \sin\zeta' = \frac{f}{\omega \sin n}$$

Kreisende West ... $\frac{f}{k \cos\frac{1}{2}(\zeta'+\zeta)} \cdot \frac{\sin 45^0}{\sin\left(45^0 - \frac{\zeta'-\zeta}{4}\right)}$

„ Ost .... $\frac{-f}{k \cos\frac{1}{2}(\zeta'+\zeta)} \cdot \frac{\sin 45^0}{\sin\left(45^0 + \frac{\zeta'-\zeta}{4}\right)}$

zur Berechnung derselben anwenden.

*) [Werthe aus den einzelnen Sternen weggelassen.]

[Folgt Tafel der Zwischenzeiten für die Aufstellung des Instruments im Verticalkreise des Zeichens A.]

Die Zahlen dieser Tafel dienen auch zur Reduction der Beobachtungen, welche im Verticalkreise des Zeichens B gemacht sind. Denn da die für beide Verticalkreise angegebenen Werthe von h sich bis auf wenige Secunden zu 180^0 ergänzen, so sind die Werthe von $\sin m$ und $\sin n$ für den einen Verticalkreis, den Werthen von $\sin n$ und $\sin m$ für den anderen so nahe gleich, dass ihr Unterschied hier nicht in Betracht kömmt. Es folgt hieraus, dass die zweite Abtheilung der Tafel für die westliche Lage des Kreisendes der Axe des im Verticalkreise von B aufgestellten Instruments anzuwenden ist; die erste Abtheilung für die östliche; jedoch betrifft diese Umänderung nur die Zahlen, nicht ihre Zeichen. Die wenigen, im Verticalkreise des Zeichens M gemachten Beobachtungen werden in beiden Lagen der Axe nach folgender Tafel auf den mittleren Faden reducirt:

	I $\pm$	II $\pm$	IV $\mp$	V $\mp$
α Tauri	45^s,714	22^s,881	23^s,047	45^s,779
η Ursae maj. .	68,533	34,303	34,551	68,631
α Bootis . . .	46,744	23,396	23,566	46,810
α Coronae . .	49,407	24,729	24,908	49,476

Nach diesen Angaben hat die Erfindung der Verbesserungen der Zeit des angewandten Chronometers kein Hinderniss mehr. In der folgenden, diese Verbesserungen enthaltenden Tafel ist auch die Chronometerzeit K angegeben, auf welche das was jeder einzelne Stern ergeben hat, bezogen worden ist (§ 75); den dabei angewandten Werth von i findet man oben schon angeführt, nämlich $= +0{,}0025787$.

[Folgt die Tafel für die verbesserten Chronometerzeiten Θ aus den einzelnen Sternen und eine zweite für die (24) Mittelwerthe der Θ an den (18) Beobachtungstagen.]

§ 78. Azimuthe der in Trunz errichteten Zeichen.

Wenn die Zeit, welche das Chronometer in dem Augenblicke zeigte, als der Stern α Ursae min. durch einen Faden des, nach einem im Azimuthe E aufgestellten Zeichen gerichteten Instruments ging, durch k bezeichnet wird, die Reduction derselben auf Sternenzeit durch ϑ (beide in Theilen des Kreises ausgedrückt), so ist der Stundenwinkel des Sterns $= k + \vartheta - \alpha$. Setzt man ihn, sowie auch die Declination und die Polhöhe als bekannt voraus, so kann man das Azimuth e und die Zenithdistanz z des Sterns berechnen, und man hat nach der ersten hier anzuwendenden der Formeln (1) § 74:

$$(e-E)\sin z = \pm\{f + b\sin(Z-z) + c(1-\sin z)\},$$

wo das obere Zeichen für die westliche, das untere für die östliche Lage des Kreisendes der Axe zu nehmen ist. Aendert man die in der Rechnung angewandten Werthe der geraden Aufsteigung und Abweichung des Sterns um $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$, so haben diese Aenderungen einen Einfluss auf e, welcher sich aus der Formel

$$\sin z\,\Delta e = -\{\sin\varphi\cos\delta - \cos\varphi\sin\delta\cos t\}\frac{\cos\delta}{\sin z}\Delta\alpha + \frac{\cos\varphi\sin t}{\sin z}\Delta\delta$$

oder, abgekürzt bezeichnet, aus

$$\sin z\,\Delta e = \mu\Delta\alpha + \nu\Delta\delta$$

ergibt und also die obige Formel in

$$(e-E)\sin z = \pm\{f + b\sin(Z-z) + c(1-\sin z)\} - \mu\Delta\alpha - \nu\Delta\delta$$

verwandelt.

Allein die Reduction der Chronometerzeit auf Sternenzeit ist noch nicht vollständig bekannt, sondern enthält die unbekannten Grössen c und ΔA oder ΔB. Bezeichnet man ihren bekannten Theil durch ϑ, den unbekannten durch $\Delta\vartheta$, welche beide man aus der Tafel am Ende des vorigen § erhält, und wendet man den ersten zur Berechnung von e an, so fügt der zweite der Formel $\mu\Delta\vartheta$ hinzu. Die tägliche Aberration erfordert ferner (§ 76) die Hinzufügung von $-\lambda$, so dass die vollständige Formel

$$(e-E)\sin z = \pm\{f + b\sin(Z-z) + c(1-\sin z)\} + \mu\Delta\vartheta - \lambda - \mu\Delta\alpha - \nu\Delta\delta$$

wird. Setzt man darin die Werthe von E für beide Zeichen A und B, nämlich:

$$357^0\,40'\,7'' + \Delta A \quad \text{und} \quad 2^0\,20'\,2'' + \Delta B$$

so erhält man:

$$\Delta A\sin z = \{e - 357^0\,40'\,7''\}\sin z \mp \{f + b\sin(z-Z) + c(1-\sin z)\} - \mu\Delta\delta + \lambda + \mu\Delta\alpha + \nu\Delta\delta$$

$$\Delta B\sin z = \{e - 2^0\,20'\,2''\}\sin z \mp \{f + b\sin(z-Z) + c(1-\sin z)\} - \mu\Delta\delta + \lambda + \mu\Delta\alpha + \nu\Delta\delta$$

Allein $\Delta\vartheta$ hängt von c und ΔA oder ΔB ab und sein Ausdruck durch diese Grössen:

$$15(m\Delta A + nc) \quad \text{oder} \quad 15(m\Delta B + nc)$$

geht aus der Tafel im vorigen §, unter der Annahme des gleichförmigen Ganges des Chronometers zwischen zwei aufeinanderfolgenden Bestimmungen seines Standes, hervor. Setzt man diesen Ausdruck in die Formel, so wird sie:

$$\Delta A\{\sin z + 15 m\mu\} = \{e - 357^0 40' 7''\}\sin z \mp \{f + b\sin(z - Z) + c(1 - \sin z)\} - 15 n\mu . c + \lambda + \mu\Delta\alpha + \nu\Delta\delta$$
$$\Delta B\{\sin z + 15 m\mu\} = \{e - \quad 2^0 20' 2''\}\sin z \mp \{f + b\sin(z - Z) + c(1 - \sin z)\} - 15 n\mu . c + \lambda + \mu\Delta\alpha + \nu\Delta\delta$$

Auf diese Art sind die § 64 verzeichneten Beobachtungen des Sterns α Ursae min., unter Anwendung seiner aus den Tabulis Regiomontanis genommenen Oerter berechnet worden. Eine zweite Berechnung auf die Voraussetzung der Gleichförmigkeit des Ganges des zweiten Chronometers zu gründen, haben wir für unnöthig gehalten, da die Zeitbestimmungen immer sehr nahe auf die Zeiten der zu berechnenden Beobachtungen fallen, und auch sehr kleine Fehler derselben hier ohne merklichen Einfluss bleiben. Jene Rechnung hat folgende Resultate ergeben.

[Folgen die numerischen Werthe für die beiden Durchgänge durch den Verticalkreis der Zeichen A und B; und Beobachtungen der gegenseitigen Richtungen der drei Zeichen A, M, B.]

Aus diesen, unter ausgezeichnet günstigen Umständen gemachten und uns daher, trotz des schwächeren angewandten Instruments, Vertrauen einflössenden Beobachtungen, folgt nach den Vorschriften des 16. §:

$$A = 0^0\ 0'\ 0{,}''000$$
$$M = 2\ 19\ 57{,}061$$
$$B = 4\ 39\ 56{,}494$$

Da wir die Azimuthe von A und B resp. $= 357^0 40' 7'' + \Delta A$ und $= 2^0 20' 2'' + \Delta B$ angenommen haben, so ist

$$\Delta B - \Delta A = +1{,}''494.$$

Bestimmt man ΔA, ΔB und c so, dass dieser Gleichung entsprochen und der Bedingung der kleinsten Quadrate der übrigbleibenden Fehler der acht oben mitgetheilten mittleren Resultate Genüge geleistet wird, so erhält man:

$$\Delta A = +0{,}''306 - 0{,}0009\,\Delta\alpha + 0{,}324\,\Delta\delta$$
$$\Delta B = +1{,}800 - 0{,}0009\,\Delta\alpha + 0{,}324\,\Delta\delta$$
$$c = -1{,}036 + 0{,}0080\,\Delta\alpha - 0{,}166\,\Delta\delta$$

Bei der Anordnung der Beobachtungen, welche zu diesen Resultaten geführt haben, war unsere Absicht, die letzteren von dem angenommenen Orte des Sterns fast oder ganz unabhängig zu machen. Dass wir sie nicht vollständiger erreicht haben, ist der Unbeständigkeit des Wetters zuzuschreiben, welche während unseres Aufenthaltes in Trunz sehr gross war und die gleichmässige Vertheilung der Beobachtungen der vier Durchgänge des Sterns durch die Verticalkreise der beiden Zeichen verhindert hat. Später, in einem günstigeren Jahre, noch einmal auf diese Beobachtungen zurückzukommen, unterliessen wir, indem wir statt derselben das Azimuth mit dem Theodoliten bestimmten (§ 66). Die Beobachtungen des Sterns α Ursae min., welche auf der Königsberger Sternwarte seit 1814 gemacht und, auf der XLIII. Seite der Tabularum Regiomont., mit den Tafeln verglichen worden sind, deuten an, dass diese gegenwärtig zu kleine gerade Aufsteigungen und zu grosse Abweichungen angeben; spätere Beobachtungen haben dieses bestätigt und uns zu der Annahme veranlasst, dass der Fehler der Tafeln im Jahre 1832 in der geraden Aufsteigung in Zeit etwa $-1{,}^s5$ und in der Abweichung $+0{,}''25$ betragen hat. Wir haben daher $\Delta\alpha = +22{,}''5$ und $\Delta\delta = -0{,}''25$ gesetzt, und demzufolge erhalten:

$$\Delta A = +0{,}''205$$
$$\Delta B = +1{,}699$$
$$c = -0{,}814$$

Verbindet man mit dieser Bestimmung von ΔA oder ΔB die Bestimmung des Winkels zwischen A oder B und dem Zeichen M, so erhält man das Azimuth des letzteren $= 0^0\ 0'\ 4{,}''266$, oder das in dem Verzeichnisse der Zeitbestimmungen (§ 77) vorkommende $\Delta M = +4{,}''266$.

[Verzeichniss der Θ, befreit von den Unbekannten ΔM und c, der Stände des zweiten Chronometers gegen das erste (D), und der täglichen Aenderungen beider Chronometer.]

§ 79. Polhöhe von Trunz.

Die im 65. § verzeichneten Beobachtungen sind zuerst auf den mittleren Faden des Instruments, und, durch Hinzufügung der aus der Neigung der Axe gegen den Horizont und aus dem Collimationsfehler hervorgehenden Verbesserungen, auf den Verticalkreis des Zeichens reducirt worden; ferner sind die Chronometerzeiten dieser Durchgänge, durch die Anwendung der im vorigen § gegebenen Tafel für den Stand und den Gang der Uhr, in Sternenzeiten verwandelt; endlich sind diese, durch Berücksichtigung des Unterschiedes zwischen den scheinbaren und den mittleren Oertern der Sterne für den Anfang des Jahres 1833, auf diese Epoche bezogen. Die auf diese Art erlangten, mit einander vergleichbaren Resultate der einzelnen Beobachtungen haben den Collimationsfehler des Instruments kennen gelehrt und also von dieser, bis dahin als unbekannt betrachteten Grösse befreiet werden können. — Wir haben also die Rechnung so angeordnet, dass sie die Sternenzeiten ergeben hat, welche den beiden Durchgängen des mittleren Ortes jedes Sterns für 1833 durch

den Verticalkreis des Zeichens entsprechen. Sie beruhet auf der Voraussetzung der Gleichförmigkeit des Ganges des Chronometers I zwischen aufeinanderfolgenden Bestimmungen seines Standes; allein durch Anwendung der Vorschrift des § 75 haben wir ihrem Resultate ein zweites hinzugefügt, welches auf derselben Voraussetzung für das Chronometer II beruhet. Wie beide Resultate angewandt worden sind, um daraus die Bestimmung der Polhöhe zu erhalten, wird man am Ende dieses §'s sehen.

Wir werden jetzt die nöthigen Nachweisungen über die einzelnen Theile dieser Rechnungen mittheilen.

[Scheinbare Oerter der beobachteten 8 Sterne.]

Die Reduction der Durchgangszeiten durch die Seitenfäden des Instruments auf die Durchgangszeit durch den mittleren Faden setzt, ausser f', f'', f^{IV}, f^{V} und der Declination des Sterns, noch den Hülfswinkel h (§ 74 und 77) als bekannt voraus. Die Werthe von f', f'' u. s. w. findet man § 77 angegeben; für die Declination des Sterns ist ihr Werth für den 3. August, welcher etwa in die Mitte aller Beobachtungen fällt, angenommen; für h ist $\varphi = 54^0\,13'\,11''{,}9$ gesetzt, indem $\cos h = \cos\varphi \sin E$ und E so wenig von 90^0 verschieden ist (es ist ohngefähr $89^0\,59'\,53''$), dass sein Sinus nicht merklich von 1 abweicht. Man hat also die Winkel, von welchen die gesuchte Reduction abhängt (§ 77):

$$m = \varphi + \delta, \qquad n = \varphi - \delta,$$

und die Reduction selbst, für den östlichen Durchgang eines Sterns durch den Verticalkreis des Zeichens:

Kreisende Nord ... $\dfrac{-f}{k\cos\frac{1}{4}(\zeta'+\zeta)} \cdot \dfrac{\sin 45^0}{\sin\left(45^0 - \frac{\zeta'-\zeta}{4}\right)}$

„ Süd .... $\dfrac{+f}{k\cos\frac{1}{4}(\zeta'+\zeta)} \cdot \dfrac{\sin 45^0}{\sin\left(45^0 + \frac{\zeta'-\zeta}{4}\right)}$

in welchen Formeln

$$k = 15(1+i)\sqrt{\sin(\varphi+\delta)\sin(\varphi-\delta)}$$

$$\sin\zeta = \frac{f}{\omega\sin(\varphi+\delta)} \qquad \sin\zeta' = \frac{f}{\omega\sin(\varphi-\delta)}$$

gesetzt worden sind. Für den westlichen Durchgang gelten offenbar dieselben Werthe mit umgekehrten Zeichen.

[Tafel der Reductionen.]

Nachdem die Durchgangszeiten durch den mittleren Faden, unter Anwendung dieser Tafel, gefunden und durch das Verzeichniss am Ende des vorigen §'s in Sternenzeiten verwandelt waren, sind diesen die Verbesserungen hinzugesetzt, welche aus der Neigung der Axe und dem Collimationsfehler des Instruments hervorgehen. Diese Verbesserungen für beide Durchgänge, für die nördliche Lage des Kreisendes der Axe sind:

$$-\frac{1+i}{k}\{b\sin(Z-z) + c(1-\sin z)\}$$

und $$+\frac{1+i}{k}\{b\sin(Z+z) + c(1+\sin z)\}$$

und für die südliche:

$$+\frac{1+i}{k}\{b\sin(Z-z) + c(1-\sin z)\}$$

und $$-\frac{1+i}{k}\{b\sin(Z+z) + c(1+\sin z)\}$$

Die Zenithdistanz des Zeichens ist $Z = 91^0\,10'\,45''$ (§ 63).

[Werthe der einzelnen Glieder für die 8 Sterne.]

Es ist nun nur noch zu zeigen, wie die beiden Durchgangszeiten eines Sterns durch den Verticalkreis des Zeichens auf seinen mittleren Ort für den Anfang des Jahres 1833 reducirt worden sind. Bezeichnet man die scheinbare Declination des Sterns und den Stundenwinkel, welcher einem seiner Durchgänge durch diesen Verticalkreis entspricht, durch δ und t, so ist zwischen beiden die Gleichung:

$$0 = \cos E\cos\delta\sin t + \sin E\{\cos\varphi\sin\delta - \sin\varphi\cos\delta\cos t\}$$

welche sich durch die Einführung von h und H (§ 74) in

$$0 = \cos h\sin\delta + \sin h\cos\delta\sin(t-H)$$

verwandelt; eine ähnliche Gleichung, nämlich:

$$0 = \cos h\sin\delta' + \sin h\cos\delta'\sin(t'-H)$$

verbindet die Declination δ' für den Anfang von 1833 mit dem Stundenwinkel t', welcher dann zu dem Durchgange durch denselben Verticalkreis gehört. Durch die Summe und den Unterschied beider Gleichungen erhält man:

$$2\,\mathrm{tg}\,h\sin\left(\frac{t'+t}{2} - H\right) = -\frac{\mathrm{tg}\,\delta' + \mathrm{tg}\,\delta}{\cos\frac{1}{2}(t'-t)}$$

$$2\,\mathrm{tg}\,h\cos\left(\frac{t'+t}{2} - H\right) = -\frac{\mathrm{tg}\,\delta' - \mathrm{tg}\,\delta}{\sin\frac{1}{2}(t'-t)}$$

und hieraus ferner:

$$4\,\mathrm{tg}\,h^2 = \left\{\frac{\mathrm{tg}\,\delta' + \mathrm{tg}\,\delta}{\cos\frac{1}{2}(t'-t)}\right\}^2 + \left\{\frac{\mathrm{tg}\,\delta' - \mathrm{tg}\,\delta}{\sin\frac{1}{2}(t'-t)}\right\}^2$$

Macht man $\sin\frac{1}{2}(t'-t)$ zur unbekannten Grösse dieser Gleichung, so nimmt sie die Form

$$0 = 4\sin\tfrac{1}{2}(t'-t)^4 - 4\sin\tfrac{1}{2}(t'-t)^2\left\{1 - \frac{\mathrm{tg}\,\delta'\,.\,\mathrm{tg}\,\delta}{\mathrm{tg}\,h^2}\right\} + \left\{\frac{\mathrm{tg}\,\delta' - \mathrm{tg}\,\delta}{\mathrm{tg}\,h}\right\}^2$$

an, und ergibt durch ihre Auflösung:

$$4\sin\tfrac{1}{2}(t'-t)^2 = \left\{\sqrt{\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\delta}{\mathrm{tg}\,h}\right)\left(1+\frac{\mathrm{tg}\,\delta'}{\mathrm{tg}\,h}\right)} \pm \sqrt{\left(1+\frac{\mathrm{tg}\,\delta}{\mathrm{tg}\,h}\right)\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,\delta'}{\mathrm{tg}\,h}\right)}\right\}^2$$

Das doppelte Zeichen ergibt die beiden Werthe, welche $t'-t$ durch die Combination eines Werthes des einen Stundenwinkels mit beiden Werthen des anderen erhält; wenn t und t' zu einem Durchgange des Sterns durch den Verticalkreis gehören sollen, wie in dem gegenwärtigen Falle, so wird nur der kleinste Werth von $t'-t$ verlangt, also der, welchen die Anwendung des unteren Zeichens ergibt. Man hat also:

$$\pm 2\sin\tfrac{1}{2}(t'-t) = \sqrt{\left(1-\frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}h}\right)\left(1+\frac{\operatorname{tg}\delta'}{\operatorname{tg}h}\right)} - \sqrt{\left(1+\frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}h}\right)\left(1-\frac{\operatorname{tg}\delta'}{\operatorname{tg}h}\right)}$$

oder, anders geschrieben:

$$\pm 2\sin\tfrac{1}{2}(t'-t) = \frac{2(\operatorname{tg}\delta'-\operatorname{tg}\delta)\operatorname{cotg}h}{\sqrt{\left(1-\frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}h}\right)\left(1+\frac{\operatorname{tg}\delta'}{\operatorname{tg}h}\right)}+\sqrt{\left(1+\frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}h}\right)\left(1-\frac{\operatorname{tg}\delta'}{\operatorname{tg}h}\right)}}$$

Ueber das anzuwendende Zeichen wird durch die Vergleichung dieses Ausdruckes mit dem obigen, noch $t'+t$ enthaltenden, nämlich mit:

$$2\sin\tfrac{1}{2}(t'-t) = \frac{-(\operatorname{tg}\delta'-\operatorname{tg}\delta)\operatorname{cotg}h}{\cos\left(\frac{t'+t}{2}-H\right)}$$

entschieden; es geht dadurch hervor, dass das obere oder das untere Zeichen angewandt wird, je nachdem der Cosinus im Nenner dieser Formel negativ oder positiv ist. Da in dem gegenwärtigen Falle der Stundenwinkel bei dem östlichen Durchgange im vierten, bei dem westlichen im ersten Quadranten liegt und da $H = 90^0$ ist, so ist für jenen das obere Zeichen, für diesen das untere anzuwenden. Man kann, nach einer leichten Umformung,

$$2\sin\tfrac{1}{2}(t'-t) = \frac{\pm\cos h(\sin\delta'-\sin\delta)}{\cos\delta'\sqrt{\sin(h+\delta')\sin(h-\delta')}} \times \frac{2}{\sqrt{\frac{\cos\delta}{\cos\delta'}}\left\{\sqrt{\frac{\sin(h+\delta)}{\sin(h+\delta')}}+\sqrt{\frac{\sin(h-\delta)}{\sin(h-\delta')}}\right\}}$$

schreiben, und wenn man

$$\frac{\cos h}{\cos\delta'} = \sin\psi$$

setzt und die Grössen der dritten Ordnung vernachlässigt:

$$t'-t = \pm\frac{\operatorname{tg}\psi}{\cos\delta'}(\delta'-\delta)\left\{1-\operatorname{tg}\delta'(1+\sec\psi^2)\frac{(\delta'-\delta)}{2\omega}\right\}$$

annehmen. Wenn die geraden Aufsteigungen durch α und α' bezeichnet werden, so muss der beobachteten Sternenzeit eines Durchganges des Sterns durch den Verticalkreis des Zeichens,

$$\tfrac{1}{15}(\alpha'-\alpha)+\tfrac{1}{15}(t'-t)$$

hinzugefügt werden, um sie auf 1833 zu reduciren. Nach diesen Formeln ist die folgende Tafel aus den mittleren Oertern der Sterne § 76 und der Ephemeride am Anfange des gegenwärtigen §'s berechnet.

[Es folgt nun (p. 343—352) die Reduction der beobachteten Durchgangszeiten auf 1833.]

Der Werth des Collimationsfehlers des Instruments, welcher angewandt worden ist, um die noch mit c behafteten Durchgangszeiten der Sterne durch den Verticalkreis des Zeichens, von dieser unbekannten Grösse zu befreien, ist $= -0''{,}359$.*) Er weicht $+0''{,}455$ von dem § 78 aus den Beobachtungen des Sterns α Ursae min. gefundenen Werthe ab; es ist aber dem Wesen der befolgten Methode angemessen, dass der jetzt gefundene Werth bei der Reduction der Beobachtungen der Zenithalsterne angewandt werde. Uebrigens hat der Unterschied beider Werthe keinen erheblichen Einfluss auf die endliche Bestimmung der Durchgangszeiten.

Aus den nun völlig bekannt gewordenen Sternenzeiten der Durchgänge der Sterne durch den Verticalkreis des Zeichens haben wir die Zenithdistanzen abgeleitet, in welchen ihre mittleren Oerter für 1833 durch den Meridian des Beobachtungspunktes gehen. Aus den beiden Gleichungen (§ 74):

$$0 = \cos E.\cos\delta\sin t+\sin E\{\cos\varphi\sin\delta-\sin\varphi\cos\delta\cos t\}$$
$$0 = \cos E.\cos\delta\sin t'+\sin E\{\cos\varphi\sin\delta-\sin\varphi\cos\delta\cos t'\}$$

in welchen t und t' die Stundenwinkel für den östlichen und den westlichen Durchgang bezeichnen, folgert man leicht:

$$\operatorname{tg}\delta\cos\frac{t'+t}{2} = \operatorname{tg}\varphi\cos\frac{t'-t}{2}$$
$$\operatorname{cotg}E = -\sin\varphi\operatorname{tg}\frac{t'+t}{2}$$

Bezeichnet man die in Kreistheilen ausgedrückten Sternenzeiten des östlichen und des westlichen Durchganges durch T und T', so ist

$$\frac{t'+t}{2} = \frac{T'+T}{2}-\alpha \qquad \frac{t'-t}{2} = \frac{T'-T}{2}.$$

Den Werth des ersten dieser Winkel findet man, für die verschiedenen beobachteten Sterne, in der Zusammenstellung ihrer Beobachtungen angeführt; nämlich wenn man aus den für beide Chronometer geführten Rechnungen das Mittel nimmt und die Zeitsecunden in Bogensecunden verwandelt**): im Mittel der 8 Sterne $-8''{,}73$. Er ergibt, der zweiten Formel zufolge, das Azimuth des Zeichens $= 89^0\,59'\,52''{,}92$; er ist so klein,

*) [Werthe aus den einzelnen Sternen weggelassen.]
**) [Werthe aus den einzelnen Sternen weggelassen.]

dass sein Cosinus nicht merklich von dem Radius verschieden ist und daher die erste Formel:

$$\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\varphi \cos\left(\frac{T'-T}{2}\right)$$

gesetzt werden kann. Formt man sie so um, dass sie unmittelbar die gesuchte Zenithdistanz ausdrückt, so wird sie:

$$\operatorname{tg}(\varphi-\delta) = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{T'-T}{4}\right)^2 \sin 2\varphi}{1+\operatorname{tg}\left(\frac{T'-T}{4}\right)^2 \cos 2\varphi}$$

und ergibt, bei gleicher Genauigkeit der Rechnung, ein genaueres Resultat. Eben so genau, aber etwas bequemer, rechnet man indirect nach der Formel:

$$\sin(\varphi-\delta) = \operatorname{tg}\left(\frac{T'-T}{4}\right)^2 \sin(\varphi+\delta).$$

Setzt man die noch unbekannte Polhöhe des Beobachtungspunktes $= 54^0\,13'\,12''{,}0 + \Delta\varphi$, so ist der Einfluss von $\Delta\varphi$ auf $\varphi-\delta$

$$= \frac{2\sin(\varphi-\delta)\cos(\varphi+\delta)}{\sin 2\varphi}\Delta\varphi.$$

Nach diesen Formeln sind die Werthe der Zenithdistanzen, welche wir als das eigentliche Resultat der zur Bestimmung der Polhöhe von Trunz gemachten Beobachtungen betrachten, berechnet*); deren Verbindung mit den § 76 angegebenen Declinationen der Sterne ergibt, unter der Voraussetzung der Richtigkeit derselben, die Polhöhe:

β Draconis . .	$54^0\,13'\,11''{,}08 - 0{,}019\,\Delta\varphi$
γ „ . .	$12{,}06 - 0{,}027\,\Delta\varphi$
XVIII. 170 . .	$11{,}67 - 0{,}022\,\Delta\varphi$
$\varkappa$ Cygni . . .	$12{,}13 - 0{,}013\,\Delta\varphi$
τ „ . . .	$12{,}45 - 0{,}023\,\Delta\varphi$
ι „ . . .	$11{,}68 - 0{,}028\,\Delta\varphi$
θ „ . . .	$12{,}13 - 0{,}039\,\Delta\varphi$
ψ „ . . .	$12{,}26 - 0{,}023\,\Delta\varphi$
Mittel . . .	$54\;13\;11{,}93 - 0{,}024\,\Delta\varphi$

§ 80. Azimuth von Galtgarben, in Trunz.

Die zu dieser Bestimmung dienenden Beobachtungen mit dem Theodoliten sind § 66 angegeben. Da sie Messungen der Unterschiede des Azimuths verschiedener Sterne, theils von Galtgarben, theils von einem Zeichen M sind, das Azimuth des ersten Punktes aber aus ihnen bestimmt werden soll, so ist zuerst erforderlich, dass der Winkel zwischen beiden Punkten ausgemittelt werde. Zur Erfindung desselben sind, gleichzeitig mit den Beobachtungen des Azimuths, 54 Messungen gemacht worden**), deren Resultat $= 34^0\,32'\,46''{,}606$. Die Signalisirung von Galtgarben geschah durch Heliotropenlicht; die des Zeichens M ist § 63 beschrieben. Die Zenithdistanz des ersteren ist $Z = 90^0\,21'\,53''$, des letzteren $Z = 90^0\,23'\,36''$. Wenn das sehr kleine Azimuth des nahe in Norden stehenden Zeichens durch E bezeichnet wird, so ist das Azimuth von Galtgarben $= 34^0\,32'\,46''{,}606 + E$.

Um E durch die Beobachtungen des Sterns α Ursae min. bestimmen zu können, muss die Ableitung der Reduction der Uhrzeit auf Sternenzeit aus den Beobachtungen der übrigen Sterne, nämlich α Canis maj. und α Bootis, vorangehen. Diese beziehen sich sämmtlich auf das Zeichen M, dessen Azimuth einen sehr kleinen Werth hat. Da auch die Entfernungen der Fäden von der Absehenslinie, die Neigungen der Axe und der Collimationsfehler, nur wenige Secunden betragen, so ist das Azimuth e des Sterns sehr nahe dem Winkel $a-A$ gleich, welcher zwischen dem Zeichen und dem Sterne durch den Theodoliten gemessen worden ist. Setzt man daher

$$e = a - A + q,$$

so ist q die kleine Grösse (2) § 74:

$$E \pm \left\{\frac{f-F\sin z}{\sin z} + b\frac{\sin(Z-z)}{\sin z} + c\frac{1-\sin z}{\sin z}\right\}$$

und wenn die tägliche Aberration damit vereinigt, dagegen aber in den scheinbaren Oertern der Sterne vernachlässigt wird (§ 76):

$$E \pm \left\{\frac{f-F\sin z}{\sin z} + b\frac{\sin(Z-z)}{\sin z} + c\frac{1-\sin z}{\sin z}\right\} - \frac{\lambda\cos e}{\sin z};$$

das obere oder das untere Zeichen wird angewandt, je nachdem das Kreisende der Axe links oder rechts liegt.

Schreibt man dieser Bezeichnung zufolge die beiden, das Azimuth bestimmenden Gleichungen:

$$\sin z\cos(a-A+q) = \cos\varphi\sin\delta - \sin\varphi\cos\delta\cos t$$
$$\sin z\sin(a-A+q) = -\cos\delta\sin t$$

und multiplicirt man sie mit $\sin(a-A)$ und $-\cos(a-A)$, so ergibt die Summe der Producte:

$$-q\sin z = \sin(a-A)\{\cos\varphi\sin\delta - \sin\varphi\cos\delta\cos t\} + \cos(a-A)\cos\delta\sin t$$

und wenn man

$$-\cos(a-A) = m\cos M$$
$$-\sin\varphi\sin(a-A) = m\sin M$$

setzt,

$$\sin(t-M) = -\frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\varphi}\sin M + \frac{q\sin z}{m\cos\delta}.$$

Berechnet man daher ψ nach der Formel:

*) [Meridian-Zenithdistanzen für 1833 weggelassen.]

**) [Einzelmessungen weggelassen.]

$$\sin\psi = -\frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\varphi}\sin M,$$

so hat man

$$t = \psi + M + \frac{q\sin z}{m\cos\psi\cos\delta},$$

und wenn man die Verbesserung der Zeit (k) der Uhr durch ϑ, also die Sternenzeit der Beobachtung durch $k+\vartheta$, beide in Kreistheilen ausgedrückt, bezeichnet und für q seinen Ausdruck schreibt:

$$\vartheta = \alpha + M + \psi - k + \frac{-\lambda\cos e \pm\{f - F\sin z + b\sin(Z-z) + c(1-\sin z)\} + E\sin z}{m\cos\psi\cos\delta}.$$

Nimmt man aber für k die unmittelbare Angabe der Uhr und drückt man ϑ und α in Zeit aus, so wird diese Formel:

$$\vartheta = \alpha + \frac{1}{15}(M+\psi) - k + \frac{-\lambda\cos e \pm\{f - F\sin z + b\sin(Z-z) + c(1-\sin z)\} + E\sin z}{15\,m\cos\psi\cos\delta}.$$

Da die Beobachtungen, zu deren Berechnung diese Formel angewandt werden soll, sämmtlich in nicht beträchtlichen Entfernungen von dem Meridiane gemacht sind, so können $-\cos e$ und $m\cos\psi$, insofern sie zur Berechnung des Einflusses der täglichen Aberration in Betracht kommen, $=1$ gesetzt werden, wodurch dieser, sowohl für α Canis maj. als auch für α Bootis $= +0^s,013$ wird.

Die Entfernungen der Fäden im Fernrohre des Theodoliten von einander ist, nach häufigen darüber angestellten Beobachtungen, $= 22''{,}2$. Da die Absehenslinie in die Mitte des Raumes zwischen beiden Fäden fällt, so ist für den Faden I $f = +11''{,}1$, und für den Faden II $f = -11''{,}1$. Der zur Berechnung von b nöthige Werth eines Theils der Scale der Wasserwage ist $= 3''{,}0653$ (§ 63); die eben dazu nothwendigen Werthe von z sind aus einem Verzeichnisse der Zenithdistanzen und Azimuthe der Sterne genommen, welches ihrer Auffindung wegen jedesmal vorhanden sein muss und auch in diesem Falle vor der Anstellung der Beobachtungen berechnet wurde; offenbar darf man sie nur mit geringer Annäherung kennen.

[Es folgen jetzt wieder die Beobachtungen in Trunz (1834 Aug. 27 — Sept. 17), die Reductionen der Uhrzeit auf Sternzeit (Θ), sowie die Beobachtungen des Azimuths von Polaris, nebst den Ausdrücken zur Bestimmung von E, welches sich nach Ermittelung der c und unter der früheren Annahme von $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ $= +1''{,}718$ ergab. — Es enthält ferner (p. 367—419):]

§ 81. Zeitbestimmungen in Memel.

§ 82. Azimuth des in Memel errichteten Zeichens.

[Resultat $= 0^0\,0'\,8''{,}959$; nach § 84 dagegen $7''{,}288$, der ersteren Bestimmung vorzuziehen.]

§ 83. Polhöhe von Memel.

§ 84. Azimuth von Nidden, in Memel.

[Resultat, auf den astronomisch bestimmten Punkt bezogen $= 187^0\,48'\,57''{,}077$.]

§ 85. Polhöhe von Königsberg.

Resultat der Polhöhenbestimmung:

Trunz, Dreieckspunkt ...	54° 13′ 11″,466
Königsberg, Meridiankreis	54 42 50,500
Memel, Steinpfeiler	55 43 40,446.

[Die Unterschiede der Polhöhen Trunz und Memel von der Polhöhe Königsberg sind in Abh. 73, Bd. II. angeführt.]

§ 86. Azimuth des Meridianzeichens der Königsberger Sternwarte.

Dieses Zeichen ist südlich von der Sternwarte, in einer Entfernung von 2133^T, im J. 1823 errichtet und seit dieser Zeit für den Meridiankreis benutzt worden. Indem die Richtung des Meridians aus der Verbindung der Beobachtungen eines Polarsterns, welche sowohl vor als nach einer Umlegung des Instruments gemacht werden, hervorgeht, haben die fortlaufenden Beobachtungen häufige Bestimmungen derselben herbeigeführt, welche immer mit der Richtung des Zeichens verglichen werden konnten, indem dieses so eingerichtet ist, dass man Abweichungen des mittleren Fadens des Instruments nicht nur erkennen, sondern auch ihrer Grösse nach messen kann. Von diesen Bestimmungen haben wir diejenigen ausgewählt, welche auf Beobachtungen der entgegengesetzten Durchgänge eines Polarsterns durch den Meridian, sowohl kurz vor einer Umlegung als auch bald nach derselben, gegründet werden konnten. Wenn eine Umlegung diese Vollständigkeit der Beobachtungen nicht gewährte, haben wir sie nicht benutzt; wenn dagegen zwei oder mehrere vollständige Beobachtungen eines Polarsterns kurz vor und nach einer Umlegung vorhanden, auch die Neigung der Axe des Instruments gegen den Horizont und die Abweichung seines mittleren Fadens von dem Zeichen, mit Sicherheit bekannt waren, so haben wir der darauf gegründeten Bestimmung doppelten Werth beigelegt. Auf diese Weise haben wir das Azimuth des Meridian-

zeichens erhalten*): im Mittel aus 34 Bestimmungen (1824 Jan. 29 — 1835 Febr. 12) $180^0 - 0''.837$.

Den im 61. § angegebenen Richtungen der verschiedenen, durch unsere Vermessung bestimmten Punkten muss also $179^0\ 59'\ 59''.163$ hinzugefügt werden, damit sie sich in Azimuthe verwandeln.

Achter Abschnitt.

Resultate.

Die geodätisch-astronomische Unternehmung, welche in den vorigen Abschnitten dargestellt worden ist, hatte zunächst den Zweck, ähnliche Unternehmungen in England, Frankreich, Italien, Oesterreich, Holland, Dänemark und Hannover, welche sämmtlich schon unter einander verbunden sind, auch mit denen in Verbindung zu setzen, welche im Russischen Reiche ausgeführt worden sind und noch fortgesetzt werden, so wie auch alle diese Unternehmungen an die Königsberger Sternwarte anzuschliessen. Von Westen her ist eine lange Dreieckskette durch den Königlichen General-Lieutenant Herrn VON MÜFFLING Exc. und seine Nachfolger, welche sich an die französischen und die hannövrischen Dreiecke anschliesst, durch Hessen, Thüringen, Brandenburg, Schlesien, Posen und Preussen bis zu unserer Dreiecksseite Trunz-Wildenhof geführt worden; von Osten her hat der Kaiserlich Russische General-Major Herr VON TENNER Exc. seine eigene Gradmessung und die des wirklichen Etatsraths Herrn VON STRUVE Exc. mit unserer Dreiecksseite Memel-Lepaizi in Verbindung gesetzt. Den Zwischenraum zwischen diesen beiden Seiten füllt unsere Arbeit aus. Wir haben uns nicht begnügt, diese beiden Dreiecksreihen durch blosse Winkelmessungen in Verbindung zu bringen; wir haben auch das Längenmaass ihrer angeführten Seiten durch die Messung einer eigenen Grundlinie aufs Neue bestimmt und hierdurch eine Controle erlangt, welche eine auch mit dem grössten Fleisse gemessene Dreieckskette nicht entbehren kann, wenn sie sehr weit fortgesetzt worden ist.

Der geodätische Theil unserer Unternehmung setzt jetzt alle in der neueren Zeit in Europa ausgeführten Gradmessungen in Verbindung mit einander. Es war unsere Absicht, diese Verbindung weiter zu verfolgen und daraus nicht nur die Längen der geodätischen Linien, von einem willkürlich zu wählenden Mittelpunkte, nach allen astronomisch bestimmten Punkten der verschiedenen Gradmessungen gezogen, und ihre Richtungen an beiden Endpunkten, abzuleiten und diese mit den astronomischen Bestimmungen der Polhöhen, Mittagsunterschiede und Azimuthe zu vergleichen, um darauf ein Urtheil über die Krümmung der Oberfläche von Europa zu gründen. Allein wir konnten diese Absicht jetzt noch nicht durchführen, indem einige Messungen noch nicht bekannt geworden sind und andere noch eine genauere Berechnung erwarten. Wir müssen uns also die Ausführung unserer Absicht für die Folgezeit vorbehalten und uns für jetzt begnügen, unsere Arbeit öffentlich bekannt zu machen und daraus diejenigen Resultate zu ziehen, welche sie selbstständig gewähren kann.

Um den vorher erwähnten weit grösseren Nutzen aus der nun zu Stande gebrachten Verbindung der verschiedenen vorhandenen geodätischen Arbeiten ziehen zu können, wird erfordert, dass man von allen, dabei in Betracht kommenden Vermessungen, die zu ihrer Verbindung nöthigen Angaben, oder wenigstens die Elemente besitze, aus welchen diese abgeleitet werden können. Diese sind nicht nur die Längen der beiden Dreiecksseiten, zwischen welchen eine Verbindung ausgeführt ist, sondern auch ihre Entfernung von einander und ihre Richtungen gegen ihre Verbindungslinie. Wenn die Vermessung Punkte enthält, an welchen die Polhöhe, der Mittagsunterschied und die Richtung des Meridians astronomisch bestimmt worden sind, so muss auch die Verbindung dieser Punkte untereinander und mit den erwähnten Dreiecksseiten angegeben werden. Die Form, welche uns dafür die passendste zu sein scheint, werden wir in dem folgenden § für unsere Vermessung beobachten.

§ 87. Zusammenstellung der aus den geodätischen und den astronomischen Arbeiten gezogenen Resultate.

Als Resultate der geodätischen Arbeit, insofern sie entweder bei der Vergleichung mit der astronomischen, oder bei der Verbindung mit anderen Dreiecksnetzen in Betracht kommen, kann man die folgenden annehmen:

I. Königsberg (Sternwarte)-Trunz.

a. Entfernung	$42621,^T4873$	§ 61.
b. Richtung in Königsberg, von d. Meridianzeichen an gezählt	$48^0 56' 53''.169$	§ 61.
in Trunz, v. Wildenhof an gezählt	332 5 6,2463	§ 42 u. 61.
c. Dreiecksseite Trunz-Wildenhof .	$30123,^T7481$	§ 42.

*) [Einzelbestimmungen weggelassen.]

II. Königsberg (Sternw.)-Memel (Steinpfeiler).

a. Entfernung	61204,T0612	§ 61.
b. Richtung		
in Königsberg, von d. Meridianzeichen an gezählt	198°28′ 45,″656	§ 61.
in Memel, von Lepaizi an gezählt	92 43 46,6586	§ 60 u. 61.
c. Dreiecksseite Memel-Lepaizi . .	18400T,7098	§ 60.

Will man die unmittelbare Verbindung von Trunz und Memel und die Richtung der diese Punkte verbindenden Linie mit den beiden, unserem und fremden Dreiecksnetzen gemeinschaftlichen Seiten kennen lernen, so kann man sie durch Rechnung aus den eben angeführten Angaben folgendermassen ableiten:

III. Trunz-Memel (Steinpfeiler).

a. Entfernung	100295,T678
b. Richtung	
in Trunz, v. Wildenhof an gezählt	314° 3′ 29,″746
in Memel, von Lepaizi an gezählt	105 10 30,398

Bei dem letzten Resultate ist jedoch zu bemerken, dass man es etwas verschieden erhält, je nachdem man es aus dem vorher mitgetheilten Dreiecke Trunz-Königsberg-Memel, oder aus den § 42 und 60 gegebenen gegenseitigen Lagen von Trunz, Galtgarben, Nidden und Memel, beide Male nach den Formeln der sphäroidischen Trigonometrie berechnet, welche man in Nr. 6. der Astron. Nachr. [Abh. 126] findet. Die erste Rechnung ergibt nämlich:

100295,T680 . 314° 3′ 29,″7521 . 105° 10′ 30,″3926,

die zweite:

100295,T676 . 314° 3′ 29,″7404 . 105° 10′ 30,″4024.

Der Unterschied beider Rechnungen entsteht vermuthlich aus den kleinen Vernachlässigungen, welche wir uns in der Berechnung der einzelnen Dreiecke erlaubt haben, indem wir sie als sphärisch angenommen haben*). Er ist von keiner Bedeutung für den Zweck und wir haben das Mittel aus beiden Rechnungen angenommen.

Als Resultate der astronomischen Arbeit kann man annehmen:

I. Die Polhöhen von Trunz, Königsberg und Memel:

Trunz	54°13′ 11,″466	§ 85.
Königsberg	54 42 50,500	
Memel	55 43 40,446	

*) [Vgl. indess hierüber die Bemerkung des Herrn Prof. Jordan p. 109.]

II. Die Azimuthe der Verbindungslinien dieser drei Punkte:

a. in Trunz ist gefunden:

Azimuth von Galtgarben	34°32′ 48,″324	§ 80.
Wink. Wildenhof-Trunz-Galtgarben	318 28 2,0388	§ 42.
Azimuth von Wildenhof	76 4 46,2852	
Wink. Wildenhof-Trunz-Königsberg	332 5 6,2463	§ 87.
„ Wildenhof-Trunz-Memel . . .	314 3 29,746	
Azimuth von Königsberg	48 9 52,532	
„ „ Memel	30 8 16,031	

b. in Königsberg ist gefunden:

Azimuth des Meridianzeichens . . .	179°59′ 59,″163	§ 86.
W. Mer.-Zeichen-Königsberg-Trunz	48 56 53,169	§ 87.
„ Mer.-Zeichen-Königsberg-Memel	198 28 45,656	
Azimuth von Trunz	228 56 52,332	
„ „ Memel	18 28 44,819	

c. in Memel ist gefunden:

Azimuth von Nidden	187°48′ 57,″077	§ 84.
Winkel Lepaizi-Memel-Nidden . . .	81 34 28,4345	§ 60.
Azimuth von Lepaizi	106 14 28,6425	
Winkel Lepaizi-Memel-Königsberg .	92 43 46,6586	§ 87.
„ Lepaizi-Memel-Trunz	105 10 30,398	
Azimuth von Königsberg	198 58 15,301	
„ „ Trunz	211 24 59,040	

Die Folgerungen, welche man in Beziehung auf die Figur der Erde auf unsere Arbeit gründen kann, müssen sämmtlich auf der Vergleichung der in diesem § mitgetheilten Resultate beruhen, nämlich auf der Vergleichung der drei Entfernungen, der sechs Azimuthe und der drei Polhöhen untereinander.

§ 88. Betrachtungen über die Resultate astronomisch-geodätischer Arbeiten im Allgemeinen.

Die Figur der Erde wird allein bestimmt durch die Kräfte, welche alle Theile ihrer Masse auf einen Punkt ihrer Oberfläche äussern, verbunden mit der Centrifugalkraft, welche derselbe durch die Umdrehung der Erde erfährt. Sie ist diejenige Oberfläche, in welcher sich die Oberfläche des Wassers eines mit dem Meere zusammenhängenden, die Erde bedeckenden Netzes von Kanälen befinden würde; also eine der Oberflächen, auf welcher die Zusammengesetzte aller Anziehungskräfte und der Centrifugalkraft allenthalben senkrecht steht. Die physische Oberfläche der Erde ist von dieser mathematischen sehr verschieden; die sichtbaren Unregelmässigkeiten der ersteren haben zwar Einfluss auf die Anziehungskräfte und dadurch auf die mathematische Figur der Erde, allein sie gehören dennoch nicht unmittelbar zu derselben. Der Unterschied beider Ober-

flächen würde in dem Falle, dass die erstere eine feste Kugel und ihr Inneres eine homogene Masse wäre, so weit gehen, dass sie als ein abgeplattetes elliptisches Rotationssphäroid erscheinen würde, dessen Axenverhältniss man durch Gradmessungen entweder = 432:431, oder = 576:575 finden würde; das erstere nämlich, wenn die Gradmessungen auf der Oberfläche der Kugel vorgenommen würden, das andere, wenn sie der mathematischen Oberfläche folgten. Geodätische Arbeiten, welche auf die Oberfläche des Meeres bezogen worden sind, folgen aber der mathematischen Oberfläche und daher kömmt diese allein in Betracht. Beiträge zur Bestimmung der Figur der Erde, welche man durch solche Arbeiten erlangen kann, können also auch allein zur Bestimmung der mathematischen Figur führen.

Wenn man auch diese Oberfläche der Erde im Ganzen als der Oberfläche eines elliptischen Rotationssphäroides nahe kommend betrachtet, so kann man doch nicht läugnen, dass beide nicht vollkommen zusammenfallen. Die vorhandenen Messungen von Meridianbögen zeigen nämlich entschiedene Unregelmässigkeiten des Fortschreitens der Polhöhen, welche man als Folgen kleiner Erhöhungen der Oberfläche der Erde über, oder ihrer Vertiefungen unter der Oberfläche des zur Vergleichung genommenen Rotationssphäroides ansehen muss, und welche auf die Polhöhen, sowie auch auf die Mittagsunterschiede und Azimuthe Einfluss erhalten, indem sie den Parallelismus der Ebenen der Horizonte der wahren Oberfläche und der Oberfläche jenes Rotationssphäroids beeinträchtigen. Die Vergleichung dieser astronomischen Bestimmungen für die beiden Endpunkte eines auf der Oberfläche der Erde gemessenen Bogens, mit den aus der geodätischen Verbindung derselben, unter der Voraussetzung der regelmässigen Figur der Erde abgeleiteten kann daher nur unter der Annahme stattfinden, dass die Horizonte beider Punkte und die diese Oberfläche berührenden Ebenen zusammenfallen, oder wenigstens parallel seien. Die Richtigkeit dieser Annahme kann allerdings für gewisse Punkte der Erde vorhanden sein; im Allgemeinen aber ist sie nicht vorhanden, wie aus dem angeführten Zeugnisse der Messungen der Meridianbögen hervorgeht. Man kann also auch nicht darauf rechnen, dass Genauigkeit, welche man sowohl in dem geodätischen als auch in dem astronomischen Theile einer Operation herbeizuführen bemüht gewesen ist, dem aus der Verbindung beider hervorgehenden Beitrage zur Bestimmung der Figur des der Erde im Ganzen nahe kommenden elliptischen Rotationssphäroids, ein dieser Genauigkeit angemessenes Gewicht verleihen werde; vielmehr kann man nicht zweifeln, dass die Unregelmässigkeiten der Figur selbst den Werth dieses Beitrages weit stärker vermindern können, als das Bestreben, die Genauigkeit der Operation zu vermehren, ihn vermehrt haben kann. Indessen erlangt man, wenn auch nur einen zweifelhaften Beitrag zur Bestimmung jenes elliptischen Sphäroides, doch einen Beitrag zur Kenntniss der unregelmässigen Figur der Erde, dessen Sicherheit dem auf seine Erlangung verwandten Fleisse allerdings angemessen ist. Ob dieser für einen bestimmten Theil der Oberfläche der Erde erlangten Kenntniss, von welcher man nicht auf die Beschaffenheit anderer Theile derselben schliessen kann, ein grösseres oder geringeres Interesse zu schenken ist, kann nicht im Allgemeinen entschieden werden. Gewiss hätte es ein Interesse, den Gang der Unregelmässigkeiten in gewissen Gegenden der Erde genau und vollständig zu erforschen, damit man über die Ausdehnung ihrer einzelnen Wellen das bis jetzt gänzlich fehlende Urtheil erhielte.

Soll eine Gradmessung als ein Beitrag zur Bestimmung des elliptischen Rotationssphäroids angesehen werden, von welchem sich die Erdoberfläche in dem Umfange des gemessenen Bogens nur in ihren kleinen Unregelmässigkeiten entfernt, so wird sie diesen Beitrag offenbar mit desto grösserer Sicherheit liefern, je grösser ihre Ausdehnung ist und je kleiner daher das Verhältniss der Unregelmässigkeiten an ihren Endpunkten zu dem Ganzen angenommen werden kann. Die Verbindung aller europäischen Gradmessungen untereinander wird also die Kenntniss der diesem Welttheile am meisten entsprechenden regelmässigen Oberfläche weit kräftiger fördern, als diese Unternehmungen abgesondert haben thun können. Es wird hierzu auch weit erfolgreicher sein, Anstrengungen und Fleiss auf das zu verwenden, was den vorhandenen Gradmessungen selbst und ihren Verbindungen untereinander noch fehlt, als neue abgesonderte hinzuzufügen. Vorzüglich wichtig wird es sein, an zweckmässig ausgewählten Punkten langer, diese Verbindungen herstellender Dreiecksketten, die Polhöhe und die Richtung des Meridians durch astronomische Beobachtungen festzusetzen; sowie auch einige der neueren Gradmessungen, wenn etwa die letztere Bestimmung, welche ohne die Absicht der Verbindung mit anderen ähnlichen Unternehmungen wirklich von geringerer Wichtigkeit ist, etwas zu wünschen übrig lassen sollte, durch Hinzufügung des Fehlenden zu ergänzen.

Soll dagegen eine Gradmessung die Krümmung der Oberfläche der Erde an einem bestimmten Punkte kennen lehren, so muss sie eine möglichst kleine Aus-

dehnung besitzen. Sie kann diese Kenntniss nur durch die zu beobachtende gegenseitige Neigung der Normalen an beiden Endpunkten des gemessenen Bogens gewähren, also nur durch einen Schluss von einem endlichen Bogen auf einen unendlich kleinen, welcher, da es sich um eine unregelmässige oder gesetzlose Krümmung desselben handelt, streng genommen nicht erlaubt ist. Wirklich würde das Resultat ohne alles Gewicht sein, wenn die Unregelmässigkeiten zwischen beiden Endpunkten durch mehrere Maxima und Minima gegangen wären. Will man also die Krümmung der Erdoberfläche an einem bestimmten Punkte zum Gegenstande der Untersuchung machen, so ist das Bestreben, alle Hülfsmittel der astronomischen Praxis zu erschöpfen, um dadurch die genauesten Bestimmungen zu erhalten, an seinem rechten Orte, weil die zur Erreichung eines beabsichtigten Grades der Sicherheit des Resultats erforderliche Ausdehnung des Bogens in demselben Verhältnisse kleiner wird, in welchem die möglichen Beobachtungsfehler eingeschränkt werden.

Die vollständige Kenntniss der Krümmung der Oberfläche der Erde an einem gegebenen Punkte fordert, dass man die Werthe von drei unbekannten Grössen für diesen Punkt durch Beobachtungen bestimme. Diese können entweder die grösste und die kleinste Krümmung und das Azimuth, in welchem die eine oder die andere stattfindet, sein, oder drei andere die Stelle derselben vertretende und mit ihnen in bekannter Verbindung stehende Grössen. Wie diese unbekannten Grössen gefunden werden können, muss hier im Allgemeinen erläutert werden, obgleich wir uns wegen der weiteren Ausführung dieses Gegenstandes auf eine Abhandlung des Herausgebers beziehen müssen, welche in Nr. 329 — 331 der Astronomischen Nachrichten des Herrn Etatsraths SCHUMACHER erschienen ist [Abh. 130].

Offenbar haben die Unregelmässigkeiten der Oberfläche der Erde schon Einfluss auf die Construction des Dreiecksnetzes. Denn die Winkel, welche aus der Beobachtung unmittelbar hervorgehen, sind nicht die Winkel der Dreiecke, sondern die Winkel, in welchen sich zwei durch die Lothlinie des Beobachtungspunktes und durch zwei andere Dreieckspunkte gelegte Ebenen durchschneiden; jene müssen aus diesen berechnet werden; allein hierzu fehlen die Elemente, da die Unregelmässigkeiten der Erdoberfläche, von welchen sowohl die Lage der Lothlinie des Beobachtungspunktes, als auch der Zug der geodätischen Linien von diesem zu anderen Dreieckspunkten abhängt, unbekannt sind. Man kann sich aber von der Kenntniss des Zuges der geodätischen Linie auf der unregelmässigen Oberfläche befreien, wenn man alle Dreieckspunkte durch ihre Normalen auf die Oberfläche eines elliptischen, von der Figur der Erde wenig verschiedenen Rotationssphäroides projicirt, die Projectionen durch geodätische Linien auf dieser Oberfläche verbindet und darauf ausgeht, das dadurch gebildete Dreiecksnetz statt des auf der Oberfläche der Erde selbst liegenden zu bestimmen. Man hat dann nur die an einem Punkte A der Oberfläche unmittelbar beobachtete Richtung nach einem anderen Punkte B auf die Richtung der geodätischen Linie von der Projection A, des ersten Punktes, nach der Projection B, des zweiten gezogen, zu reduciren und man darf die Unregelmässigkeiten der Erde nicht weiter kennen, als insofern sie in diese Reduction eingehen. Wenn die Oberfläche der Erde an einem unbestimmten Punkte von der Oberfläche des mit ihr zu vergleichenden Rotationssphäroids die Entfernung n besitzt (welche positiv oder negativ ist, je nachdem die erste Oberfläche sich über oder unter der zweiten befindet), so hängt die gesuchte Reduction der beobachteten Richtung offenbar von den Werthen von n für beide Punkte und seinen Veränderungen für den ersten Punkt ab; betrachtet man aber n als eine so kleine Grösse, dass man ihr Quadrat vernachlässigen kann, so enthält die Reduction nicht mehr sie selbst, sondern nur ihre Veränderung, oder die durch diese gegebene Entfernung der Scheitelpunkte des Punktes A und seiner Projection. In der That findet man, dass man der ohne Rücksicht auf die Unregelmässigkeit der Erde gemachten Reduction der beobachteten Richtung AB auf die Richtung der geodätischen Linie $A,B,$, um sie vollständig zu erhalten, eine Grösse hinzusetzen muss, welche sich zu der Entfernung des Scheitelpunktes von A, von der Verticalebene AB verhält, wie die Entfernung AB zu dem Durchmesser der Erde. Diese Grösse bleibt zwar unbekannt und muss daher in der Rechnung vernachlässigt werden; dass aber die daraus entstehenden Unvollkommenheiten der Winkel einen erheblichen Einfluss auf die Resultate der Rechnung äussern sollten, ist wegen der Kleinheit des Factors, in welchen sie multiplicirt sind, nicht zu erwarten. Wenn man alle Winkel des Netzes zwischen den Projectionen der Dreieckspunkte als bekannt annimmt, fordert seine Berechnung noch die Kenntniss einer seiner Seiten. Die Messung einer Grundlinie ergibt ihre Länge auf der wahren, d. h. unregelmässigen Oberfläche der Erde; sie ist aber nicht merklich verschieden von der Entfernung der Projectionen ihrer Endpunkte auf die Oberfläche eines elliptischen Rotationssphäroids, in Beziehung auf welche der

mittlere Werth von n, für die ganze Ausdehnung der Grundlinie genommen, verschwindet. Die Resultate, welche man durch die Berechnung eines Dreiecksnetzes erhält, in welcher man jede Rücksicht auf die Unregelmässigkeiten der Figur der Erde vernachlässigen muss, gelten also, wenigstens mit beträchtlicher Annäherung, für die Projectionen der Dreieckspunkte auf die Oberfläche eines der Figur der Erde nahe entsprechenden, elliptischen Rotationssphäroids, dessen Grösse so anzunehmen ist, dass die mittlere Höhe der Oberfläche der Erde in der Ausdehnung der gemessenen Grundlinie, beziehungsweise auf seine Oberfläche, verschwindet.

Durch die Annahme des Netzes zwischen den Projectionen der Dreieckspunkte, statt des zwischen den Dreieckspunkten selbst stattfindenden, gehen die der unregelmässigen Figur der Erde folgenden geodätischen Linien aus der Betrachtung und die richtige Berechnung desselben hat keine Schwierigkeit mehr. Man sieht jetzt ohne Mühe, von welcher Beschaffenheit der Einfluss ist, welchen die Unregelmässigkeiten der Erde auf die Vergleichung einer geodätischen Arbeit mit einer astronomischen äussern: durch die letztere wird nichts anderes bestimmt, als die Richtungen der Normalen der wahren Oberfläche an den Endpunkten des gemessenen Bogens; durch die erstere werden die Richtungen der Normalen der ellipsoidischen Oberfläche an den Projectionen der Endpunkte mit einander verglichen. Um beide in Uebereinstimmung zu bringen, müsste man die ersteren Richtungen in die anderen verwandeln können, welche Verwandlung aber die Kenntniss der gegenseitigen Lage der Ebenen der Horizonte eines jeden der Endpunkte und seiner Projection voraussetzt. Diese ist bekannt, sobald die Veränderungen von n für diesen Punkt nach zwei auf einander senkrechten Richtungen, etwa nach Norden und nach Osten genommen, bekannt sind; oder was dasselbe ist, sobald die Werthe der Differentialquotienten von n in Beziehung auf zwei horizontale, nach diesen Richtungen gezählte rechtwinklige Coordinaten ξ und η bekannt sind. Die Werthe, welche diese Differentialquotienten an beiden Endpunkten haben, sind also das, was auf die Vergleichung der geodätischen Operation mit der astronomischen Einfluss erhält; oder aus dieser Vergleichung kann nichts anderes hervorgehen, als Gleichungen zwischen diesen vier als unbekannt anzusehenden Grössen und den Werthen der beiden Axen des Rotationssphäroides, auf dessen Oberfläche sie sich beziehen. Da dieses Sphäroid immer näherungsweise bekannt ist, so können die kleinen Unterschiede zwischen den angenommenen und den wahren Werthen seiner Axen auch als in den vier unbekannten Grössen enthalten betrachtet werden, wodurch die Gleichungen auf Bedingungen zwischen diesen vier Grössen zurückkommen.

Wenn man die Unterschiede und die Summen der Differentialquotienten von n an beiden Endpunkten, sowohl in Beziehung auf ξ als in Beziehung auf η genommen, zu unbekannten Grössen dieser Gleichungen macht, so findet man, dass die Summen, wenigstens bei den in der Anwendung vorkommenden Ausdehnungen der Messungen, immer in so kleine Factoren multiplicirt sind, dass sie keinen Einfluss auf die Vergleichung erhalten, welchen man durch dieselbe auszumitteln hoffen könnte. Hierdurch kömmt die Zahl der unbekannten Grössen auf zwei herab, welche $\frac{dn}{d\xi} - \frac{dn'}{d\xi'}$ und $\frac{dn}{d\eta} - \frac{dn'}{d\eta'}$ sind, wo n' für den Anfangspunkt, n für den Endpunkt der Messung gelten mag. Eine Gleichung zwischen diesen beiden unbekannten Grössen erlangt man durch die geodätische Uebertragung einer beobachteten Polhöhe zu einer anderen gleichfalls beobachteten; eine zweite geht aus der Uebertragung zweier beobachteter Richtungen der Meridiane hervor; eine dritte aus der Uebertragung der astronomisch festgesetzten geographischen Längen beider Endpunkte. Jedoch können die beiden letzten dieser Gleichungen nicht als zwei verschiedene angesehen werden, indem beide sehr nahe dieselbe Combination der unbekannten Grössen enthalten und in ihrem unbekannten Theile kaum anders verschieden sind als dadurch, dass dieser Theil der dritten ein Product desselben Theils der zweiten in den Sinus der Polhöhe ist. Man kann also durch die geodätische Uebertragung der geographischen Länge von dem einen Endpunkte zu dem anderen keinen Beitrag zu der Kenntniss der Oberfläche der Erde erlangen, welchen man nicht auch durch die Uebertragung der Richtung des Meridians hätte erlangen können; man muss also beide nur als verschiedene Mittel zu demselben Ziele zu gelangen betrachten. Die Vergleichung einer Messung mit vollständigen astronomischen Bestimmungen für ihre Endpunkte gibt also nur zwei Gleichungen; oder gerade die zur Bestimmung der unbekannten Grössen erforderlichen.

Ist die Messung entweder in der Richtung des Meridians oder in der darauf senkrechten geführt, so enthält die erste dieser Gleichungen nur $\frac{dn}{d\xi} - \frac{dn'}{d\xi'}$, die zweite nur $\frac{dn}{d\eta} - \frac{dn'}{d\eta'}$; in anderen Fällen enthalten beide Gleichungen beide unbekannte Grössen vermischt. In dem ersten Falle verschwindet auch der Einfluss der Axen des Sphäroids, auf welches diese unbekannten

Grössen sich beziehen, aus dem Ausdrucke der zweiten derselben; in dem zweiten Falle verschwindet er aus dem Ausdrucke der ersten. Mit Ausnahme dieser besonderen Fälle bleibt er in beiden Ausdrücken und es geht hieraus hervor, dass, wenn diese Fälle nicht vorhanden sind, ein elliptisches Rotationssphäroid bestimmt werden kann, welches beiden Gleichungen ohne Rücksicht auf die Unregelmässigkeiten Genüge leistet. Dieses Sphäroid ist unter den elliptischen Rotationssphäroiden, deren Axen der Drehungsaxe der Erde parallel sind, dasjenige, dessen Oberfläche die Ebenen der Horizonte der beiden Endpunkte der Messung an diesen Punkten selbst berührt. Es entspricht der Messung vollständig, allein es darf offenbar nicht mit dem die unregelmässige Oberfläche der Erde vollständig berührenden regelmässigen Sphäroide verwechselt werden. Selbst den Bogen zwischen beiden Endpunkten der Messung wird es nur mehr oder weniger genau berühren, je nachdem die Differentialquotienten von n zwischen diesen Punkten sich mehr oder weniger gleichförmig, d. h. der Entfernung proportional ändern. Nur unter der Annahme der Gleichförmigkeit dieser Aenderung kann der Schluss von der Krümmung im Umfange dieses Bogens des regelmässigen Sphäroids auf die Krümmung des unregelmässigen in demselben Umfange erlaubt sein. So lange man über den Umfang der einzelnen wellenförmigen Unregelmässigkeiten der Oberfläche der Erde in der gegenwärtig stattfindenden Unwissenheit bleibt, so lange wird man diese Annahme, welche der Strenge nach nie erlaubt ist, nur in den Grenzen kleiner Entfernungen auf der Oberfläche als eine Näherung betrachten dürfen.

Allein wenn auch die Messung eine Ausdehnung hat, innerhalb welcher man die Annahme, welche allein zur Kenntniss der Krümmung der Erdoberfläche an einem bestimmten Punkte führen kann, für erlaubt hält, so bestimmt sie die Krümmung doch nur in einer Richtung. Will man dieselbe vollständig kennen lernen, so muss noch eine zweite in einer anderen Richtung vorgenommene Messung vorhanden sein, aus welcher sich, vorausgesetzt dass die astronomischen Beobachtungen auch an ihren Endpunkten vollständig gemacht sind, zwei neue Gleichungen ergeben. Unter der Annahme, dass die Differentialquotienten von n Veränderungen erfahren, welche dem Fortschreiten auf der Oberfläche der Erde proportional sind, oder, was etwa dasselbe ist, dass die Form von n

$$= n' + 2a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\sigma \{f \cos \alpha' + g \sin \alpha'\} \cdot$$
$$+ 2a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\sigma^2 \{h \cos \alpha'^2 + 2i \cos \alpha' \sin \alpha' + k \sin \alpha'^2\}$$

ist, wo n' für einen Punkt der Oberfläche gilt, von welchem ein anderer, im Azimuth α' liegender, die Entfernung $a\sigma$ besitzt, reichen drei Gleichungen hin, um h, i, k, oder den sich in der Krümmung der Oberfläche der Erde zeigenden Theil dieses Ausdruckes zu bestimmen. Die vierte vorhandene Gleichung gibt eine Controle für die Richtigkeit der Voraussetzung, oder, wenn man diese nicht bezweifeln will, für die Richtigkeit der Beobachtungen. Wenn man diese vollständige Bestimmung der Krümmung der Oberfläche der Erde für einen gegebenen Punkt versuchen will, so ist es am vortheilhaftesten, beide Messungen so zu legen, dass ihre vier Endpunkte etwa gleich entfernt von dem gegebenen Punkte sind, und dass sie selbst sich rechtwinklig durchschneiden. Ein Dreieck auf der Oberfläche der Erde, in dessen Mitte der gegebene Punkt liegt, und an dessen Winkelpunkten man vollständige astronomische Beobachtungen gemacht hat, ist jedoch etwa eben so vortheilhaft, vorausgesetzt dass es nahe gleichseitig ist. Das aus unseren Messungen folgende, im vorigen § mitgetheilte Dreieck, ist weit weniger vortheilhaft, indem es sich der Gleichseitigkeit nicht nähert. Ganz unstatthaft wird die Bestimmung des die Erdoberfläche an einem gegebenen Punkte osculirenden Sphäroids, wenn die durch die vierte Gleichung gegebene Controle zeigt, dass die Ausdehnung des Raumes, auf welchem die Messungen vorgenommen sind, zu gross ist, um die so weit ausgedehnte Anwendung der für einen Raum von gewisser Beschränkung immer richtigen Form von n zu rechtfertigen. Man muss also den Versuch, die Krümmung der Oberfläche der Erde an einem gegebenen Punkte, aus gegebenen Messungen in verschiedenen Richtungen zu bestimmen, als misslungen betrachten, wenn die Controle nicht innerhalb der Grenze der möglichen Beobachtungsfehler erfüllt wird. Dann aber ist jedesmal der Beweis vorhanden, dass ein die Oberfläche an dem gegebenen Punkte osculirendes elliptisches Sphäroid nicht hinreicht, die Krümmung dieser Oberfläche in dem ganzen Umfange der Messungen darzustellen.

§ 89. Vergleichung der geodätischen Bestimmungen mit den astronomischen.

Die im 87. § mitgetheilten Bestimmungen der Polhöhen, Entfernungen und Azimuthe von Trunz, Königsberg, Memel haben wir mit der Annahme verglichen, dass die Erde ein elliptisches Rotationssphäroid sei, dessen beide halbe Axen:

$a = 3271922{,}099$ $\quad \log a = 6{,}5148029550$
$b = 3261106{,}276$ $\quad \log b = 6{,}5133649523$

also:

$\frac{b}{a} = \frac{301{,}5126}{302{,}5126}$; $\log\sqrt{1-ee} = 9{,}9985619973$

angenommen sind.

Indem man resp. von Trunz, Königsberg und Memel nach Königsberg, Memel und Trunz übergeht, erhält man unter der Annahme dieser Figur der Erde:

Polhöhen.		Azimuthe.	
Königsberg..	54°42′ 50,″056	Königsberg-Trunz..	228°56′ 46,″620
Memel.....	55 43 44,389	Memel-Königberg ..	198 58 24,611
Trunz.....	54 13 7,878	Trunz-Memel.....	30 8 12,892

und durch die Vergleichung dieser Resultate der Berechnung der geodätischen Verbindung mit den durch die astronomischen Beobachtungen angegebenen, die Abweichungen der letzteren von den ersteren, sowie auch die Producte der Abweichungen der Azimuthe in die Cosinusse der Polhöhen:

Polhöhen.		Azimuthe.		
Königsberg .	+ 0,″444	Königsberg-Trunz..	+ 5,″712	+ 3,″300
Memel.....	− 3,943	Memel-Königsberg.	− 9,310	− 5,243
Trunz.....	+ 3,588	Trunz-Memel.....	+ 3,139	+ 1,835

Wenn sowohl die astronomischen für die drei Hauptpunkte unserer Messung erlangten Resultate, als auch die geodätische Verbindung dieser Punkte fehlerfrei sind, so rühren diese Unterschiede von der Verschiedenheit her, welche zwischen der wahren Figur der Oberfläche der Erde in dem Umfange der Messung und der der Rechnung zum Grunde gelegten stattfindet. Bezeichnet man die den angeführten Werthen der halben grossen Axe und der Excentricität der Meridiane hinzuzufügenden Verbesserungen durch δa und δe, ferner wie im vorigen §, die Entfernung beider Oberflächen durch n und ihre in Beziehung auf horizontale, nach Norden und nach Osten gelegte Coordinaten ξ und η, genommene Differentialquotienten durch $\frac{dn}{d\xi} = p$ und $\frac{dn}{d\eta} = q$, so entstehen die gefundenen Unterschiede aus den Werthen, welche δa und δe im Allgemeinen und p und q für beide Endpunkte jedes der gemessenen Bögen besitzen. Die Gleichungen zwischen ihnen und diesen Quantitäten sind in der schon angeführten Abhandlung (Astr. Nachr. Nr. 329—331 [Abh. 130 § 8]) entwickelt worden. Ihre Anwendung auf den gegenwärtigen Fall ergibt, wenn $p, q; p', q'; p'', q''$ resp. auf Trunz, Königsberg und Memel bezogen werden:

a. aus den Beobachtungen der Polhöhen:

$$+0{,}''444 = -1764{,}7\frac{\delta a}{a} + 41{,}6\frac{e\delta e}{\sqrt{1-ee}} + 0{,}9998\,p - 0{,}0136\,q - p'$$

$$-3{,}943 = -3648{,}2\frac{\delta a}{a} - 67{,}9\frac{e\delta e}{\sqrt{1-ee}} + 0{,}9998\,p' - 0{,}0086\,q' - p''$$

$$+3{,}588 = +5468{,}6\frac{\delta a}{a} + 63{,}8\frac{e\delta e}{\sqrt{1-ee}} + 0{,}9999\,p'' + 0{,}0226\,q'' - p$$

b. aus den Beobachtungen der Azimuthe:

$$+3{,}''300 = -1650{,}3\frac{\delta a}{a} - 1083{,}0\frac{e\delta e}{\sqrt{1-ee}} + 0{,}0168\,p + 0{,}8111\,q - 0{,}8163\,q'$$

$$-5{,}243 = -1034{,}3\frac{\delta a}{a} - 685{,}8\frac{e\delta e}{\sqrt{1-ee}} + 0{,}0105\,p' + 0{,}8162\,q' - 0{,}8264\,q''$$

$$+1{,}835 = +2569{,}7\frac{\delta a}{a} + 1772{,}9\frac{e\delta e}{\sqrt{1-ee}} - 0{,}0273\,p'' + 0{,}8261\,q'' - 0{,}8113\,q$$

Auf diese Gleichungen müssen alle Folgerungen gegründet werden, welche man in Beziehung auf die Figur der Erde aus den in diesem Werke dargestellten Arbeiten ziehen will. Setzt man darin $p, q; p', q'; p'', q'' = 0$, so ergeben sie die drei elliptischen Rotationssphäroide, deren Axen der Drehungsaxe der Erde parallel sind, und deren Oberflächen resp. Trunz-Königsberg, Königsberg-Memel, Memel-Trunz horizontal berühren. Man findet für diese Sphäroide, für das

erste	$\frac{\delta a}{a} = -0{,}0003122$;	$\frac{e\delta e}{\sqrt{1-ee}} = -0{,}002571$
zweite	$= +0{,}0009656$;	$= +0{,}006189$
dritte	$= +0{,}0006551$;	$= +0{,}0000855$

oder die halbe grosse Axe und ihr Verhältniss zu der halben kleinen

der ersten	3270901^{T};	816 : 815
zweiten	3275081;	80 : 79
dritten	3274066;	295 : 294

Diese Bestimmungen könnten nur zur Kenntniss des sich der Erde im Ganzen nähernden elliptischen Rotationssphäroids beitragen, wenn Grund vorhanden wäre, anzunehmen, dass $p, q; p', q'; p'', q''$ wirklich verschwänden, oder dass die Normalen der Oberfläche der Erde und die Normalen der Oberfläche des Rotationsellipsoides an den drei Punkten und an ihren Pro-

jectionen zusammenfielen. Da aber kein Grund vorhanden sein kann, dieses anzunehmen, so tragen sie nur zur Kenntniss der Oberfläche der Erde in dem Umfange unserer Messung bei; sie zeigen in dieser Beziehung, dass die drei astronomisch bestimmten Punkte nicht durch ein und dasselbe elliptische Rotationssphäroid mit einer der Drehungsaxe der Erde parallelen Axe horizontal berührt werden können.

Indessen ist die Annahme, dass die Axe des elliptischen Rotationssphäroids der Drehungsaxe der Erde parallel sei, eine willkürliche, deren Unrichtigkeit in dem gegenwärtigen Falle dadurch erwiesen wird, dass drei verschiedene Sphäroide durch die Verfolgung dieser Bedingung gefunden worden sind. Man muss also, wenn man das wahre Resultat der Messung kennen lernen will, die Untersuchung von dieser Annahme befreien.

Setzt man für n den im vorigen § angeführten Ausdruck, nämlich:

$$n = n' + 2a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\sigma \{f \cos \alpha' + g \sin \alpha'\} + 2a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\sigma^2 \{h \cos \alpha'^2 + 2i \cos \alpha' \sin \alpha' + k \sin \alpha'^2\}$$

welcher in unendlich kleiner Entfernung $= a\sigma$ von dem Punkte, für welchen die Entfernung der unregelmässigen Oberfläche von der regelmässigen $= n'$ gesetzt ist, für jede beliebige Beschaffenheit der ersteren richtig ist, so wird dadurch diese in dem ganzen Umfange der Messung mit einer Oberfläche der zweiten Ordnung verglichen; bestimmt man die willkürlichen Grössen in dem Ausdrucke von n den an den Endpunkten der Messung angestellten Beobachtungen gemäss, so zeigt die oft erwähnte Controle, in wiefern die Oberfläche der Erde in dem Umfange der Messung sich durch eine Oberfläche der zweiten Ordnung darstellen lässt. Hierdurch erhält man ein bestimmtes Resultat der Messung, welches wir jetzt für die unsrige aufsuchen wollen.

Bezeichnet man die Azimuthe, welche die Verbindungslinie zweier Punkte auf der Erde an beiden besitzt, durch α' und $180^0 + \alpha$, so findet man durch Differentiirung des Ausdruckes von n in Beziehung auf die nach Norden und nach Osten des zweiten Punktes gelegten Coordinaten ξ und η:

$$\frac{dn}{d\xi} \cos \tfrac{1}{2}\sigma^2 = \frac{dn'}{d\xi'} \cos(\alpha - \alpha') - \frac{dn'}{d\eta'} \sin(\alpha - \alpha') + 2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\sigma \cos(\alpha - \alpha') \{h \cos \alpha' + i \sin \alpha'\} - 2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\sigma \sin(\alpha - \alpha') \{i \cos \alpha' + k \sin \alpha'\}$$

$$\frac{dn}{d\eta} \cos \tfrac{1}{2}\sigma^2 = \frac{dn'}{d\xi'} \sin(\alpha - \alpha') + \frac{dn'}{d\eta'} \cos(\alpha - \alpha') + 2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\sigma \sin(\alpha - \alpha') \{h \cos \alpha' + i \sin \alpha'\} + 2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\sigma \cos(\alpha - \alpha') \{i \cos \alpha' + k \sin \alpha'\}$$

Diese Ausdrücke geben das Mittel, die vorher durch p, q; p'', q'' bezeichneten Werthe dieser Differentialquotienten für Trunz und Memel durch die für Königsberg geltenden p', q' und die 3 Grössen h, i, k auszudrücken. Man findet durch seine Anwendung:

$$\begin{aligned}
p &= 1{,}0000\,p' + 0{,}0137\,q' - 0{,}00838\,h - 0{,}01009\,i - 0{,}00014\,k \\
q &= -0{,}0137\,p' + 1{,}0000\,q' + 0{,}00012\,h - 0{,}00825\,i - 0{,}00997\,k \\
p'' &= 1{,}0000\,p' - 0{,}0086\,q' + 0{,}01774\,h + 0{,}00578\,i - 0{,}00005\,k \\
q'' &= +0{,}0086\,p' + 1{,}0000\,q' - 0{,}00015\,h + 0{,}01779\,i + 0{,}00593\,k
\end{aligned}$$

Wenn man diese Ausdrücke in den vorher entwickelten 6 Gleichungen substituirt und die δa und δe enthaltenden Glieder derselben weglässt, so dass n sich auf das bestimmte, zur Vergleichung angewandte elliptische Rotationssphäroid bezieht, so verwandeln sich diese Gleichungen in die folgenden:

$$\begin{aligned}
+0{,}''444 &= \text{---------} - 0{,}00838\,h - 0{,}00998\,i \text{ ---------} \\
-3{,}943 &= -0{,}0002\,p' \text{ ---------} - 0{,}01774\,h - 0{,}00578\,i + 0{,}00005\,k \\
+3{,}588 &= +0{,}0001\,p' + 0{,}0003\,q' + 0{,}02612\,h + 0{,}01627\,i + 0{,}00022\,k \\
+3{,}300 &= +0{,}0057\,p' - 0{,}0050\,q' - 0{,}00004\,h - 0{,}00686\,i - 0{,}00809\,k \\
-5{,}243 &= +0{,}0034\,p' - 0{,}0102\,q' - 0{,}00012\,h - 0{,}01470\,i - 0{,}00490\,k \\
+1{,}835 &= -0{,}0091\,p' + 0{,}0150\,q' - 0{,}00046\,h + 0{,}02123\,i - 0{,}01299\,k
\end{aligned}$$

Sowohl die drei ersten als auch die drei letzten dieser Gleichungen haben eine beinahe verschwindende Summe, wovon der Grund ist, dass unter den drei astronomischen Bestimmungen, welche die Gleichungen ergeben haben, nicht zwei, sondern drei Vergleichungen gemacht worden sind. Sie könnten also nur zur Bestimmung von vier unbekannten Grössen angewandt werden; allein p' und q' sind, aus dem im vorigen § angeführten Grunde, in zu kleine Coefficienten multiplicirt, als dass man die Gleichungen als einen Beitrag zu ihrer Bestimmung ansehen könnte. Wenn man h, i, k durch die Methode der kleinsten Quadrate aus ihnen bestimmt, muss man daher den kleinen Einfluss vernachlässigen, welchen p' und q' auf die Werthe die-

ser Grössen behalten. Man erhält auf diese Art durch die Auflösung der Gleichungen:

$$h = -\ 37{,}''46 = -0{,}000182$$
$$i = +\ 330{,}62 = +\ 0{,}001603$$
$$k = -\ 429{,}87 = -\ 0{,}002084$$

Allein diese Werthe der unbekannten Grössen sind weit entfernt, die einzelnen Gleichungen genügend darzustellen; sie lassen die Unterschiede:

$-\ 3{,}''430$	$-\ 2{,}''088$
$+\ 2{,}676$	$+\ 2{,}493$
$+\ 0{,}709$	$-\ 0{,}393$

übrig, welche ohne Zweifel zu gross sind, um sie durch die möglichen Fehler der Operation selbst erklären zu können. Am wenigsten können den Polhöhen, weder ihrer astronomischen Bestimmung noch ihrer geodätischen Vergleichung, so grosse Fehler zur Last gelegt werden. Von den Unterschieden der Azimuthe scheint uns wenigstens der erste, auf der, durch den einzigen Zwischenpunkt Wildenhof erlangten Vergleichung der Richtungen der Meridiane von Trunz und Königsberg beruhende, ausserhalb der Fehlergrenzen der Beobachtungen zu liegen; denn diese müssten sich in der Bestimmung des Azimuths in Trunz und in seiner einfachen Uebertragung nach Königsberg bis zu $2{,}''088 \sec\varphi = 3{,}''6$ angehäuft haben, was wenigstens unsere eigene Schätzung der Unsicherheit übertrifft. Die Richtungen der Meridiane von Königsberg und Memel haben zu ihrer Vergleichung 3 Zwischenpunkte, Wildenhof, Galtgarben und Nidden erfordert, deren beide letztere auch zu der Vergleichung der Richtungen der Meridiane von Memel und Trunz nothwendig gewesen sind. Wenn man aber auch aus den Vergleichungen der Azimuthe keine Unterstützung der Behauptung, dass die übrigbleibenden Unterschiede der Gleichungen einer anderen Ursache als den Beobachtungsfehlern zuzuschreiben seien, ziehen will, so kann man doch die Richtigkeit dieser Behauptung durch die Unterschiede der Polhöhen als erwiesen betrachten. Wenn man aber das Gewicht der auf der Vergleichung der Polhöhen beruhenden Gleichungen so vermehrt, dass die damit verbundene Vermehrung ihrer Uebereinstimmung die übrigbleibenden Unterschiede in die möglichen Grenzen der Beobachtungsfehler zurückführt, so vermindert sich dadurch die Uebereinstimmung der Richtungen der Meridiane so sehr, dass man sie als die Beobachtungsfehler sicher übersteigend betrachten muss. Verdoppelt man z. B. den Werth der Polhöhenbestimmungen oder multiplicirt man jede der drei ersten der oben angeführten Bedingungsgleichungen durch 2, so erhält man dadurch:

$$h = +\ 151{,}''97 = +\ 0{,}000736$$
$$i = -\ \ 4{,}17 = -\ 0{,}000020$$
$$k = +\ \ 95{,}78 = +\ 0{,}000464$$

Die nun in den drei ersten Gleichungen übrigbleibenden Unterschiede, nämlich $-\ 1{,}''676$; $+\ 1{,}''276$; $+\ 0{,}''335$, halten wir noch für zu gross, um sie den Polhöhenbestimmungen zur Last legen zu können; dennoch aber lassen die drei letzten Gleichungen schon die Unterschiede: $-\ 4{,}''052$; $+\ 4{,}''817$; $-\ 0{,}''749$ übrig. Wollte man diese den Beobachtungsfehlern zuschreiben, so müsste man das in Trunz bestimmte und durch einen Zwischenpunkt nach Königsberg übertragene Azimuth 7″ fehlerhaft annehmen; so wie das in Memel bestimmte, einschliesslich seiner Uebertragung durch drei Zwischenpunkte, 8,″4 fehlerhaft angenommen werden müsste.

Wir halten daher durch unsere Beobachtungen für erwiesen, dass die unregelmässige Oberfläche der Erde in dem Umfange unserer Messungen nicht mehr durch eine Oberfläche der zweiten Ordnung vollständig berührt werden kann. Dieses Resultat ist dem durch mehrere der neueren Messungen der Meridianbögen erlangten analog; es trägt bei, wahrscheinlich zu machen, dass die einzelnen Wellen der Unregelmässigkeiten oft oder gewöhnlich eine so geringe Ausdehnung besitzen, dass man von den an zwei, einen Grad von einander entfernten Punkten der Oberfläche stattfindenden Neigungen derselben gegen die Oberfläche eines der Erde im Ganzen sich nähernden elliptischen Rotationssphäroides, nicht mehr auf ihre Neigungen an anderen Punkten in ähnlichen Entfernungen schliessen kann.

Wäre der Erfolg dieser Untersuchung ein anderer gewesen, hätte sich nämlich die Oberfläche der Erde dem angenommenen Ausdrucke ihrer Unregelmässigkeit in dem Umfange unserer Messungen nicht widersprechend gezeigt, so würde zwar dadurch nicht bewiesen sein, dass die den gemachten Beobachtungen entsprechenden Werthe von h, i, k wirklich hinreichen, die Krümmung der Oberfläche im ganzen Umfange der Messungen zu bestimmen, allein man würde daraus, unter dieser Voraussetzung, die vollständige Bestimmung der Krümmung der Oberfläche für Königsberg haben ableiten können. Wenn man nämlich die Krümmungshalbmesser, so wie das zur Vergleichung angewandte elliptische Sphäroid sie für die Azimuthe 0 und 90^0 ergibt, durch ϱ und ϱ' bezeichnet, den kleinsten und den grössten Krümmungshalbmesser der wahren Oberfläche durch r und r', das Azimuth, in welchem die durch den ersteren gemessene Krümmung liegt, durch N, so hat man:

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'}-\frac{1}{a}(h+k)$$

$$\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)\cos 2N=\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho'}-\frac{1}{a}(h-k)$$

$$\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)\sin 2N=-\frac{2i}{\varrho}$$

Wir führen die Werthe von r, r' und N, welche vermittelst dieser Formeln aus den oben gefundenen Werthen von h, i, k folgen, hier nicht an, weil zugleich mit diesen Werthen die Ueberzeugung erlangt worden ist, dass Beobachtungen an den 3 Punkten Trunz, Königsberg und Memel keinen Schluss auf die Krümmung in dieser Gegend begründen können.

§ 90. Bestimmung der Entfernungen der Parallelen von Trunz, Königsberg und Memel.

Wir werden noch die Entfernungen der Parallelen der drei Punkte, deren Polhöhen wir bestimmt haben, aufsuchen, um dadurch aus unserer Messung ein Resultat zu ziehen, dessen Form dieselbe ist, welche die Resultate der Messungen der Meridianbögen besitzen.

Offenbar kann die Entfernung der Parallelen zweier Punkte A und B, welche nicht unter Einem Meridiane liegen, aus einer Messung ihrer Entfernung nicht abgeleitet werden, ohne über die Figur der Oberfläche, auf welcher sie sich befinden, etwas vorauszusetzen. Es muss daher untersucht werden, inwiefern ihre Ableitung von dieser Voraussetzung abhängig ist und mit welchem Rechte sie als ein unabhängiges Resultat angesehen werden kann [s. auch Abh. 130, § 11].

Wenn man, nach den Bemerkungen im 88. §, die beiden Punkte durch ihre Normalen auf die Oberfläche eines Rotationssphäroides projicirt, welche sich von der Oberfläche der Erde wenig entfernt, so ist die Entfernung der dadurch bestimmten Parallelkreise die gesuchte. Bezeichnet man diese Projectionen der beiden Punkte durch $A_,$ und $B_,$, so muss die Entfernung, welche man aus der geodätischen Operation abgeleitet hat, als die auf der Oberfläche des Rotationssphäroids liegende geodätische Linie $A_,B_,$ angesehen werden (§ 88). Die Winkel, in welchen diese Linie die Meridiane von $A_,$ und $B_,$ durchschneidet, sind von denen, welche man aus den in A und B beobachteten Richtungen der Meridiane, verbunden mit der geodätischen Operation, abgeleitet hat, dadurch verschieden, dass die Scheitelpunkte von $A_,$ und $B_,$ nicht mit den Scheitelpunkten von A und B zusammenfallen, wodurch sie von verschiedenen grössten Kreisen der Himmelskugel an gezählt werden, nämlich immer von dem grössten Kreise, welcher den Scheitelpunkt mit dem Pole der Himmelskugel verbindet. Bezeichnet man die ersteren Azimuthe durch α' und $\alpha+180^0$, die letzteren durch $\alpha'_,$ und $\alpha_,+180^0$, so sind $\alpha'_,-\alpha'$ und $\alpha_,-\alpha$ kleine Quantitäten von der Ordnung der Unregelmässigkeiten der Oberfläche, deren leicht zu erkennender Zusammenhang mit diesen, den früher angewandten Bezeichnungen gemäss,

$$\alpha'_,-\alpha'=\frac{dn'}{d\eta'}\operatorname{tg}\varphi';\quad \alpha_,-\alpha=\frac{dn}{d\eta}\operatorname{tg}\varphi$$

ist.

Wenn man die Entfernung $A_,B_,$ durch s bezeichnet, die Entfernung ihrer Parallelen durch S, so kann nur ein Ausdruck von S durch s, $\alpha'_,$ und $\alpha_,$ gefunden werden, in welchem man aber, wegen der stattfindenden Unkenntniss der Werthe von $\frac{dn'}{d\eta'}$ und $\frac{dn}{d\eta}$, bei der Anwendung $\alpha'_,$ und $\alpha_,$ mit α' und α verwechseln muss. Wir wollen aus diesem Grunde die ersteren Zeichen nicht in die Untersuchung einführen, sondern die Azimuthe $A_,B_,$ und $B_,A_,$ gleich Anfangs $=\alpha'$ und $\alpha+180^0$ annehmen; so dass der Einfluss der Unregelmässigkeiten der Oberfläche der Erde auf das Resultat gefunden wird, indem man in der Endformel zu α' und α die Quantitäten $\frac{dn'}{d\eta'}\operatorname{tg}\varphi'$ und $\frac{dn}{d\eta}\operatorname{tg}\varphi$ hinzusetzt.

Wenn man die Polhöhen von A und B durch φ' und φ, die Polhöhen von $A_,$ und $B_,$ durch $\varphi'_,$ und $\varphi_,$ bezeichnet, und

$$\operatorname{tg}u'_,=\operatorname{tg}\varphi'_,\sqrt{1-ee};\qquad \operatorname{tg}u_,=\operatorname{tg}\varphi_,\sqrt{1-ee}$$

annimmt, auch

$$\sin u=\sin u'_,\cos\sigma+\cos u'_,\cos\alpha'\sin\sigma$$

setzt, so ist bekanntlich der Ausdruck der auf der geodätischen Linie gemessenen Entfernung $A_,B_,$:

$$s=a\int d\sigma\sqrt{1-ee\cos u^2},$$

wo das Integral von $\sigma=0$ bis zu dem Werthe von σ, welcher $u=u_,$ macht, zu nehmen ist. Denselben Ausdruck hat die Entfernung S der Parallelen, nur ist $u=u'_,+\sigma$ und das Integral von $\sigma=0$ bis $\sigma=u_,-u'_,$ zu nehmen.

Indem beide Integrale zwischen gleichen Grenzen von u zu nehmen sind und u nur in ee multiplicirt vorkömmt, so sind sie sehr nahe in dem Verhältniss $\sigma:u_,-u'_,$; nämlich dieses Verhältniss kann von dem ihrigen nur um Grössen von der Ordnung $ee\,\sigma\sigma$ verschieden sein. In der That zeigt die Entwickelung der Integrale, wenn man den, immer gänzlich unbedeutenden Einfluss von e^4 u. s. w. weglässt, dass

$$\frac{S}{s}=\frac{u_,-u'_,}{\sigma}\left\{1-\frac{1}{12}ee\sigma^2\sin u'\sin u\sin\alpha'\sin\alpha\right\}$$

ist. Wegen der bekannten Eigenschaft der geodätischen

Linie, nach welcher die Sinusse von α' und α sich verhalten, wie die Cosinusse von u, und u', hat man zwischen $u, -u'$, σ, α' und α die Relationen, welche das sphärische Dreieck ergibt, dessen beiden Seiten $90^0 - u'$, und $90^0 - u$, die Winkel α' und $180^0 - \alpha$ anliegen und dessen dritte Seite σ ist. Man hat also:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(u, - u',) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\sigma \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \alpha')}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \alpha')}$$

und wenn man, um abzukürzen, k für das Verhältniss der beiden Cosinusse setzt, durch Entwickelung dieser Formel:

$$\frac{u, - u',}{\sigma} = k\left\{1 + \frac{\sigma^2}{12}(1 - k^2) + \right.$$
$$\left. + \frac{\sigma^4}{240}(1 - k^2)(2 - 3k^2) + \text{ u. s. w.}\right\}$$

Drückt man auf der rechten Seite σ durch s aus, oder setzt man mit hinreichender Annäherung

$$\sigma = \frac{s}{a}\frac{1}{\sqrt{1 - ee\cos u'\cos u}} = \frac{s}{a}\varrho$$

so wird

$$\frac{u, - u',}{\sigma} = k\left\{1 + \frac{1}{12}\left(\frac{s\varrho}{a}\right)^2(1 - k^2) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{240}\left(\frac{s\varrho}{a}\right)^4(1 - k^2)(2 - 3k^2) + \ldots.\right\}$$

Wenn man diese Formel mit der vorigen verbindet, nachdem man darin mit hinreichender Annäherung

$$\sin\alpha'\sin\alpha = 1 - k^2$$

gesetzt hat, so ergibt sie:

$$S = sk\left\{1 + \frac{1}{12}\left(\frac{s}{a}\right)^2(\varrho\varrho - ee\sin u'\sin u)(1 - k^2) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{120}\left(\frac{s\varrho}{a}\right)^4(1 - k^2)(2 - 3k^2) + \ldots.\right\}$$

und endlich, wenn man

$$\varrho'\varrho' = \varrho\varrho - ee\sin u'\sin u = 1 + ee\cos(u' + u)$$

setzt:

$$S = s\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha + \alpha')}{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \alpha')}\left\{1 + \frac{1}{12}\left(\frac{s\varrho'}{a}\right)^2\frac{\sin\alpha'\sin\alpha}{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \alpha')^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{240}\left(\frac{s\varrho'}{a}\right)^4\frac{\sin\alpha'\sin\alpha}{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \alpha')^2}(2 - 3kk) + \ldots\right\}$$

Man sieht hieraus, dass man die halbe grosse Axe und die Excentricität der Erdmeridiane nur insoweit kennen darf, als sie zur Berechnung der immer sehr kleinen Glieder, welche auf das erste Glied der Formel folgen, nöthig sind. Für unsere beiden Bögen Trunz-Königsberg und Königsberg-Memel beträgt der von a und e abhängige Theil dieser Formel nur $0^T,22$ und $0^T,17$; er wächst aber wie der Cubus der Entfernung. Wenn daher die Entfernung nicht grösser ist, als sie gewöhnlich zwischen den einander nächsten astronomisch bestimmten Punkten der Gradmessungen vorgekommen ist, kann man ihnen, auch wenn nur die Messung der Entfernung der Parallelen ihr Zweck ist, die Forderung, der Richtung des Meridians sehr nahe zu folgen, ohne Bedenken von dieser Seite erlassen. Die von den Unregelmässigkeiten der Oberfläche der Erde herrührende Verbesserung der Azimuthe, deren Einfluss auf S näherungsweise

$$-s\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha')\tfrac{1}{2}\left\{\frac{dn'}{d\eta}\operatorname{tg}\varphi' + \frac{dn}{d\eta}\operatorname{tg}\varphi\right\}$$

ist, muss man aber vernachlässigen, da man kein Mittel besitzt, den Werth des in die Klammer eingeschlossenen Theils dieser Formel zu erkennen; sein Einfluss ist für mehr gegen den Meridian geneigte Messungen grösser als für weniger geneigte, während er für dem Meridiane folgende verschwindet. Wenn dieser Fall nicht vorhanden ist, so besteht der Einfluss der Vernachlässigung darin, dass ein grösserer oder kleinerer Theil der Unregelmässigkeit der Parallelen auf die gemessenen Meridianbögen übertragen wird und sich mit ihrer eigenen Unregelmässigkeit vereinigt. Jedenfalls ist die Form der Angabe des Resultats einer Messung, welche wir im vorigen § beobachtet haben, die vorzuziehende, indem sie die Azimuthe und die Polhöhen, so wie sie beobachtet worden sind, getrennt lässt. Wirklich kann man jeder Anwendung eines aus beiden zusammengesetzten Resultates, ebensowohl die Bedingungsgleichungen des vorigen §'s zwischen den beobachteten Grössen und den Unbekannten, von welchen sie abhängen, zum Grunde legen.

Die unvermeidliche Verwechselung von α', und α, mit α' und α hat im Allgemeinen zur Folge, dass, wenn drei Punkte der Messung A, B, C astronomisch bestimmt worden sind und die Entfernungen ihrer Parallelen nach der hier entwickelten Formel berechnet werden, die Verbindungen AB und BC zusammengenommen einen anderen Werth für AC ergeben, als die unmittelbare Verbindung AC; sind noch mehr als drei Punkte vorhanden, so gilt dasselbe von ihren verschiedenen Verbindungen. In dem bei unserer Messung vorkommenden Falle ergibt sich z. B. die Entfernung der Parallelen von Trunz und Königsberg $= 28211^T,393$, von Königsberg und Memel $= 57965^T,250$, von Memel und Trunz $+ 86177^T,616$; deren letzte $0^T,973$ grösser ist als die Summe der beiden ersten. Man kann sie aber untereinander so ausgleichen, dass die Summe der Quadrate der den verschiedenen Punkten zugehörigen Werthe von $\frac{dn}{d\eta}$ ein Minimum wird. Dadurch erhält man:

	Polhöhen.	Entfernung derParallelen.
Trunz.....	54°13′ 11,″466	28211,T629
Königsberg..	54 42 50,500	
Memel.....	55 43 40,446	57965,346

[Es folgt noch:]

Anhang.

Beobachtung der Richtungen einiger Gegenstände [Kirchthürme], welche nicht zu dem Netze der Hauptdreiecke gehören.

[Literatur der Astron. Nachr. über Geodäsie, Gradmessungen, Längendifferenzen: Anger, Bestimmung der Längenunterschiede zweier Orte (Bd. 1), Dalby's Auflösung derselben Aufgabe (9); Gauss, Schumacher, Nachricht von der Hannover'schen Gradmessung (1); v. Müffling, Längengradmessung zwischen Seeberg u. Dünkirchen (2); Nicolai, Merid.-Differ. aus Mondsculminationen (2, 3), Baily, eben darüber (3), Nicollet, über dessen geod. Operationen mit Broussaud, Carlini, Plana (3); Gauss, Längenunterschiede durch Chronometer (5); Hassler, Vermessung der Küsten d. Verein. Staaten (s. a. 228 d. a. Verz.) (6); Schmidt, Grösse und Figur der Erde (vgl. Abh. 133) (7, 9); Egen, Längengradmessungen aus Zeitübertragungen (8); Hansen, Anwendung der Wahrsch.-Rechnung auf geodät. Vermessungen (9); Struve, Resultate d. Vereinigung von Bögen der russischen Längengradmessung (10); Eckhardt, Nachricht über die geodät. Operationen zwischen Göttingen, Seeberg, Darmstadt, Mannheim, Speier und Strassburg (12); Baeyer, Bestimmung der Höhe von Berlin, Gauss, Coeffic. der terrestr. Refraction, Fuss, P. H. v., Nachricht über die Exped. nach dem Caspischen Meer, Struve, Nachricht über die Gradmessung in Finnland (14); Struve, Bericht über die Expedition nach dem Schwarzen und Caspischen Meer (14, 15); (Baumann), Copien des preuss. Maasses (15—18); Gambey, über dessen Copie der Toise du Pérou (17); Gerling, Vergleichung der bei München u. in Holstein gemessenen Basis, Grunert, über trigonometrische Nivellements, Längenbest. durch Mond-Höhen u. -Azimuthe (18); Clausen, Bestimmung d. geogr. Längen aus Mond-Azimuthen u. -Höhen, Denzler, über terrestr. Refract. (19); Gerling, kurhessische Triangulation, Sawitsch, geogr. Längen aus Mondazimuthen (20); Clausen, Bestimmung der Abplattung des Erdsphäroids (21); Peters, zur Theorie der Erdrotation, Rümker, Längenbest. durch Mondsterne bei grossen Merid.-Diff. (22); Maclear, Resultate der Wiederholung der Lacaille'schen Breitengradmessung am Cap (24); Walker, Längendiff. Washington-Jersey City-Philadelphia durch electromagn. Telegraphen (27); Bache, telegr. Signalsystem bei der amerik. Küstenvermessung (28); Clausen, Einfluss der Refr. auf geodät. Höhenmessungen, Paschen, Längendiff. Altona-Schwerin durch Chronometer (31); Plana, sur la figure de la terre (35), Mém. sur la théorie mathem. de la figure de la terre, par Newton 1687, Werth der Erdabplattung (36); Peters, Längen- und Zeitbest.-Methoden (35); Prestel, einfaches Verfahren die geogr. Breite zu bestimmen (37); Baeyer, Copien d. Bessel'schen Toise, Encke, Längendiff. Frankfurt a/M.-Berlin durch electromagn. Telegr. (38); Jacobi, Formeln der Geodäsie, publicirt von E. Luther (41, 42); Bremiker, über Gradmessungen (43); Wichmann, Längendiff. Berlin-Königsberg durch electromagn. Telegr. (45); Andrae, Berechnung geodät. Breiten, Längen und Azimuthe (50, 53); Schubert, Einfluss der Localattract. auf geodät. Operationen (52), über die Figur der Erde (55); Baeyer, Abweichung der Lothlinie in Königsberg (s. Abh. 135) (57), Verhältniss der geodät. Linie gegen den verticalen Schnitt (60), Auflösung grosser sphärischer Dreiecke (61); Ibañez, Bericht über die span. Basismessung (61); Paschen, Drehen d. Beobachtungspfeiler auf trigonom. Stationen (63); Baeyer, v. Hesse, über die preussische Landestriangulation (zu Abh. 135) (68, 69); Wittstein, eben darüber (69); Repsold, Beschreibung eines Basismessapparats (70); Baeyer, Berechnung sphäroid. Dreiecke (71), Prondzynski, zur Ausgleichung geodätischer Dreiecksketten (71, 75); Steinheil, Basismessung mittelst rollenden Rades (72); Weingarten, über eine geodät. Aufgabe (73); Jordan, Andrae, über die Bestimmung der Genauigkeit wiederholter Beobachtungen einer Unbekannten (zu Abh. 135 § 12) (74), Zachariae, Bemerkungen dazu (80), Wittstein, Ablenkung der Lothlinie in grossen Höhen (74); Jordan, zur Auflösung einer Hauptaufgabe der Geodäsie (zu Abh. 127) (76); Zachariae, zur Theorie des Schlussfehlers geometr. Nivellements-Polygone (80); Helmert, Jordan, Zachariae, mittl. Fehler der Längenmessungen aus den Differenzen von Doppelmessungen, Helmert, zur Theorie des geometr. Nivellirens, Oudemans, Triangulation auf Java, Entfernung und Azimuthe zweier Orte auf dem Erdsphäroid (81); Wittstein, über den Schlussfehler grosser Nivellements (81), Zachariae, eben darüber (82), Oudemans (83); Baeyer, Einfluss lokaler Lothablenkungen auf Nivellements, Haupt, Ablenkung des Loths in der Höhe und daraus folgender Fehler geometr. Nivellements (84); Jordan, Inconsequenz in manchen Dreiecksnetzausgleichungen, Entwickelung abgekürzter convergirender Potenzreihen (zu Abh. 130), Helmert, über die Formeln für den Durchschnittsfehler (85). — Zu Abhh. 125, 126, 127, 135, vgl. auch: Baeyer, Das Messen auf der sphäroidischen Erdoberfläche, Berlin 1862. — Allgemeines: Gauss, Werke Bd. IV; Hansen, geodätische Untersuchungen, Leipzig 1865—69. — Bessel, s. noch allg. Verz. 119, 185, 249, 385.]

VII. Physik.

136. Ueber den Einfluss der Dichtigkeit der Luft auf den Gang der Uhren.*)

(Astron. Nachr. 2, p. 49.)

Ich weiss nicht, ob man bei den Pendeluhren einen Umstand schon berücksichtigt hat, welcher einen Einfluss auf ihren Gang haben muss, den die grossen Anstrengungen der Künstler nicht mehr zu vernachlässigen erlauben. Die Kraft, welche die Schwingungsdauer des Pendels regulirt, ist nämlich nicht ganz die Schwere, sondern die Schwere weniger dem Verhältnisse der Dichtigkeiten der Luft und des Pendels; also, wenn die Schwere $= 1$ gesetzt wird, und die Dichtigkeiten der Luft und des Pendels $= \Delta$ und Δ', so ist die Kraft

$$= 1 - \frac{\Delta}{\Delta'}.$$

Nimmt man nun $\frac{\Delta}{\Delta'}$ für den Barometerstand $0{,}76^m$ und und den Gefrierpunkt $= \frac{1}{8000}$, so wie es bei unseren aus Blei, Eisen und Messing zusammengesetzten Compensationspendeln etwa sein wird, so ist für die Temperatur von t Centesimalgraden und den Barometerstand b die Kraft

$$= 1 - \frac{b : 0{,}76}{8000\,(1 + t\,.\,0{,}00375)}.$$

Damit die Schwingungszeit stets gleich bleibe, ist es also nothwendig, dass

$$\frac{r}{1 - \frac{b : 0{,}76}{8000\,(1 + t\,.\,0{,}00375)}}$$

stets gleich erhalten wird (r = Entfernung des Aufhängepunkts vom Mittelpunkte des Schwunges), woraus folgt, dass das Pendel nicht vollständig compensirt werden darf, wenn die Uhr im Sommer und Winter gleich gehen soll. Ist sie vollständig compensirt, so wird ihr täglicher Gang, wenn man ihn beim Eispunkte $= 0$ setzt,

$$\frac{1 - \frac{b}{0{,}76} + t\,.\,0{,}00375}{16000\,(1 + t\,.\,0{,}00375)}$$

sein, also für $t = +25^0$ und -25^0, wenn man die kleinere Veränderung des Barometers nicht berücksichtigt, $+0^s{,}54$ und $-0^s{,}65$. Man würde diese Unregelmässigkeit vermeiden, wenn man die Compensation so einrichtete, dass das Pendel sich mit der Wärme verkürzte und mit der Kälte verlängerte, und zwar für jeden Grad des Centesimalthermometers um $\frac{3}{6400000}$ der ganzen Länge. Die Aenderung des Barometerstandes ist weniger bedeutend. — Ich weiss zwar nicht, ob alle andere störende Ursachen sich so werden wegnehmen lassen, dass die Uhren im Winter und Sommer gleich gehen; aber dennoch scheint es mir, dass die Künstler diese bestimmt wirkende Ursache berücksichtigen sollten. .....

*) [Aus 166 d. a. Verz. Aus einem Briefe an Schumacher vom 3. März 1823. — Vgl. auch Abhh. 66, 67 (Bd. II. p. 78, 83). — Br. m. O. II. 307 fl., 359.]

137. Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels.**)

(Abhandlungen der Berliner Akademie d. Wiss. 1826. Math. Cl. p. 1.) Mit 2 Tafeln.

Erster Abschnitt.

Bestimmung der Länge des einfachen Secundenpendels für die Königsberger Sternwarte.

1.

Die Bestimmung, welche ich hier mittheilen werde, ist auf einen Apparat gegründet, bei dessen Einrichtung ich beabsichtigte, sowohl jede über den Mittelpunkt der Bewegung des Pendels mögliche Unsicherheit, als

**) [219 d. a. Verz. — Der Akademie eingesandt am 25. Jan., gelesen am 28. Febr. 1828. — Auszug (von Bessel) in Poggendorff's Annalen XII, p. 337. — S. auch 290 d. a. Verz. (Länge des Secundenpendels für Berlin). — Br. m. O. II. 241. 274. 277. 281. 286 fl. 297 fl. 307 fl. 318 fl. 322. 324 (O.). 359. 361 (O.).]

jeden Fehler in der Messung der Länge desselben zu vermeiden. Dieses habe ich dadurch erlangt, dass ich nicht Schwingungszeit und Länge Eines Pendels, sondern die Schwingungszeiten zweier Pendel beobachtet habe, deren Längenunterschied nicht sowohl gemessen, als vielmehr der ganzen Toise du Pérou gleich gemacht wurde.

Die Einrichtung ist im Wesentlichen folgende: an einer lothrechten eisernen Stange ist eine einige Linien grosse wagerechte Ebene unwandelbar befestigt, auf welche die Toise mit einem ihrer Enden lothrecht gestellt werden kann; ferner ist eine Einrichtung vorhanden, von welcher das, aus einer Kugel an einem Faden bestehende Pendel herabhängt, und welche entweder auf der erwähnten festen Ebene, oder auf dem oberen Ende der auf dieselbe gestellten Toise ihren Ruhepunkt hat, so dass der Anfangspunkt des Pendels, in beiden Fällen, einen Höhenunterschied erhält, welcher der Länge der Toise genau gleich ist; endlich ist am unteren Ende der eisernen Stange eine Mikrometerschraube, durch welche kleine Unterschiede in der Höhe der herabhängenden Kugel gemessen werden können. Die Bestimmung der Pendellänge wird daher dadurch erlangt, dass man die Schwingungszeiten der an zwei verschiedenen Fäden befestigten Kugel beobachtet, deren Länge so nahe um eine Toise verschieden ist, dass der Höhenunterschied der Kugel an beiden Pendeln, nämlich an dem kürzeren wenn es von der festen Ebene, und an dem längeren wenn es von der oberen Fläche der Toise herabhängt, durch die Mikrometerschraube gemessen werden kann. Diese Schwingungszeiten zweier Pendel, deren Längen selbst unbekannt sind, deren Längenunterschied aber bekannt ist, sind offenbar hinreichend zur Bestimmung der Länge des einfachen Secundenpendels.

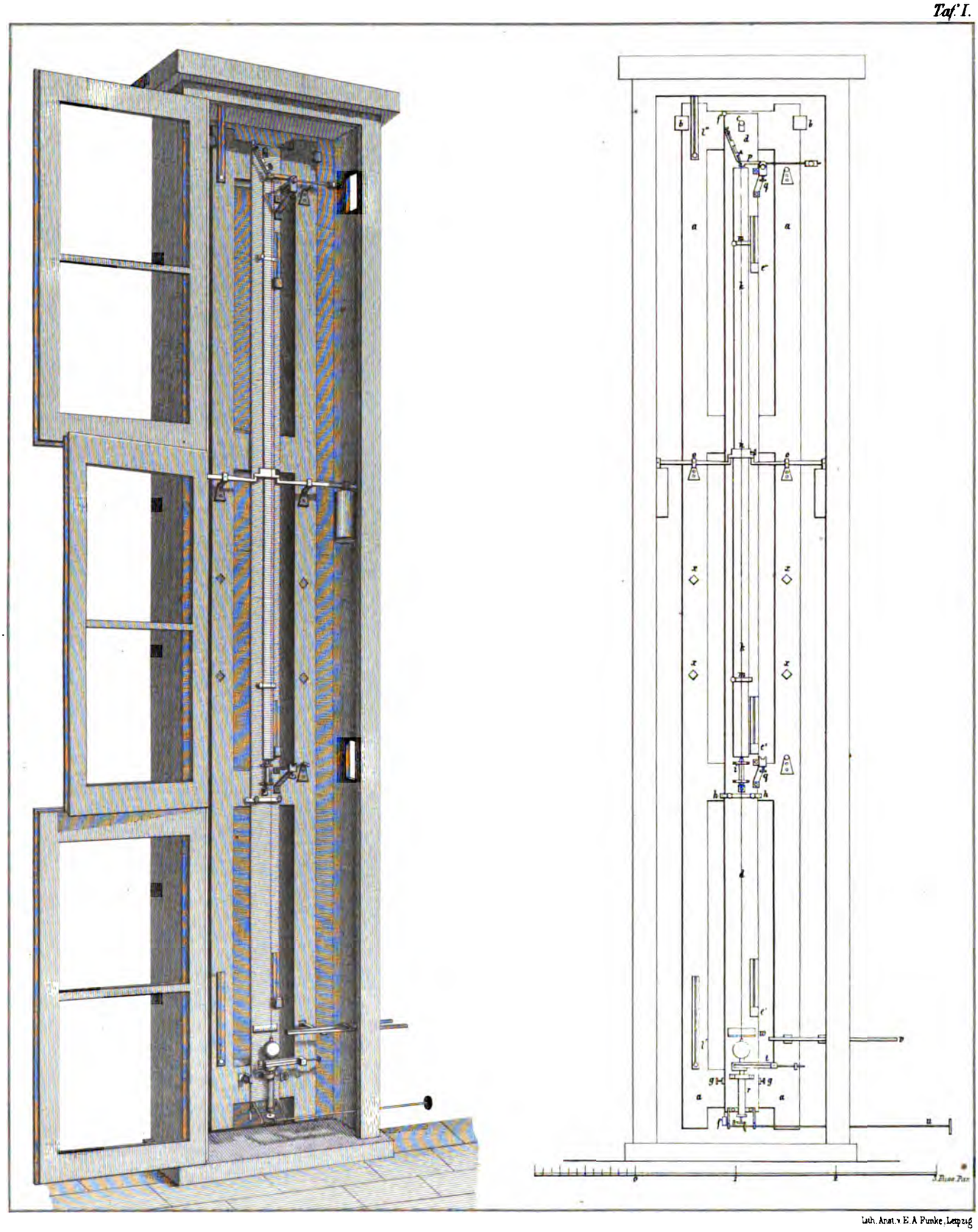
Diese Idee der anzuwendenden Methode, und die Art wie sie, meiner Meinung nach, so ausgeführt werden konnte, dass die Genauigkeit des Resultats nicht von dem Apparate, sondern allein von dem Fleisse, welchen man auf die Beobachtungen und ihre Wiederholung verwendet, begrenzt wird, theilte ich im Anfange des Jahrs 1823 Herrn REPSOLD in Hamburg mit; dieser grosse Künstler hatte die Güte, auf meine Vorschläge einzugehen, und einen Apparat auszuführen, welcher in allen seinen Theilen die Vollendung der Einrichtung und Arbeit besitzt, welche eines solchen Meisters würdig sind. Im Anfange von 1825 wurde das Instrument fertig und ich nahm es, vor seiner Absendung nach Königsberg, in der Werkstatt des Künstlers selbst in Empfang. Zugleich erhielt ich eine Toise von Herrn FORTIN in Paris, deren Bestellung Herr ARAGO gütigst übernommen hatte, und für deren sorgfältige Vergleichung mit dem Originale der Toise du Pérou ich diesem grossen Physiker und Astronomen, sowie Herrn Lieutenant ZAHRTMANN, welcher sich in Angelegenheiten der grossen Schumacher'schen Vermessungen in Paris befand, dankbar verpflichtet bin. Im August 1825 langte alles hier an und ich fing bald darauf die Versuche an, von welchen ich im Laufe dieser Abhandlung Rechenschaft geben werde.

2.

Zuerst werde ich den Apparat beschreiben. Die perspectivische Abbildung und der daneben befindliche Aufriss, deren Zeichnungen ich Herrn Hafenbau-Inspector HAGEN verdanke, stellen das Ganze so deutlich dar, dass ich nicht zweifle, es vollständig erklären zu können.

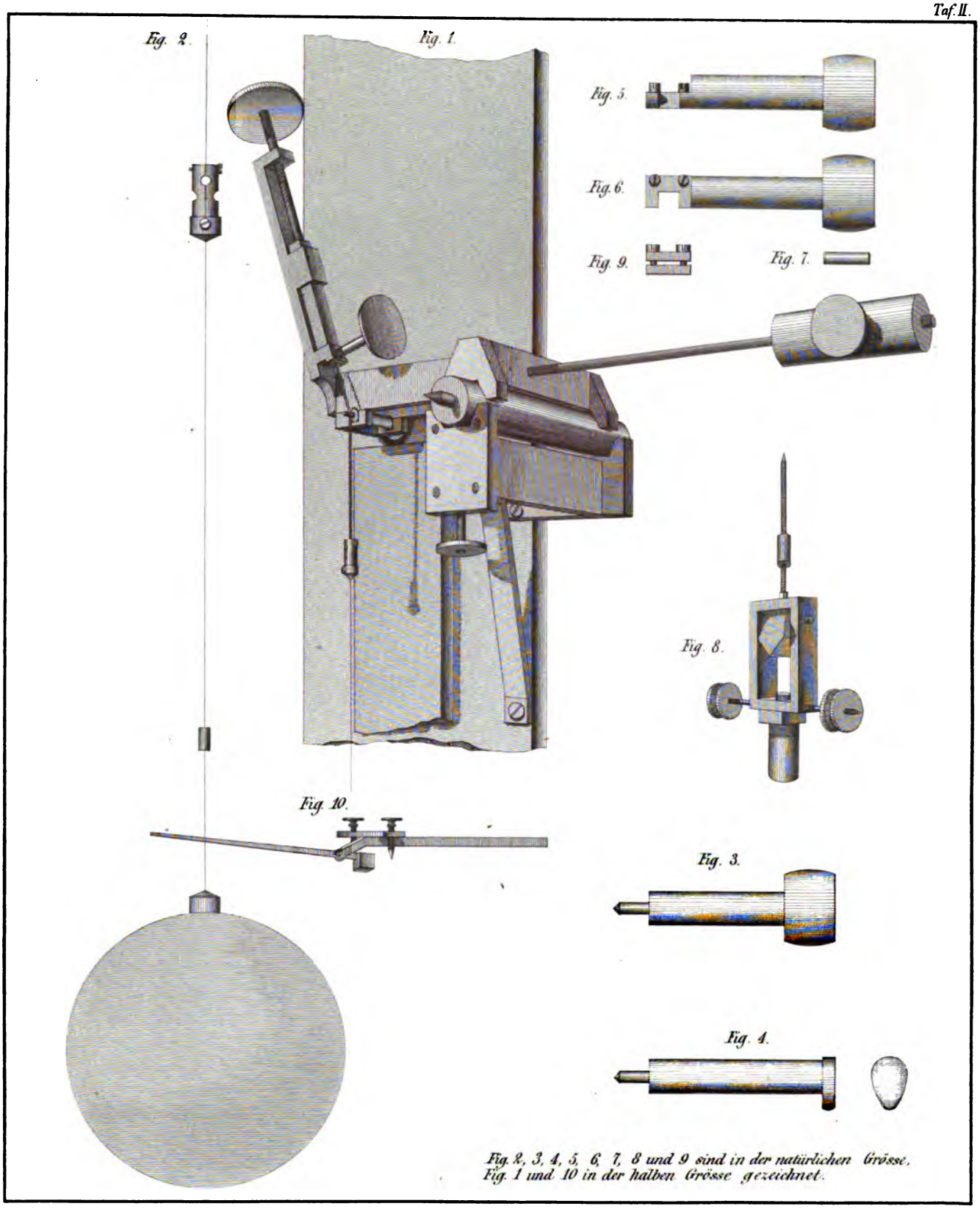
Der Apparat ist an einem Gebälke von Mahagoniholz *aaaa* aufgestellt, welches im nördlichen Zimmer der Sternwarte an der Mauer, welche dieses von dem südlichen trennt, befestigt ist; es ist nämlich in dieser Mauer, etwa 7 Zoll über dem Fussboden, ein starkes (in der Zeichnung nicht sichtbares) Eisen befestigt, auf welchem das untere Querholz des Gebälkes ruht; zwei andere Eisen *bb*, am oberen Ende in der Mauer befestigt, welche vorn hakenförmig gekrümmt sind, dienen zur Befestigung des Gebälks und durch Keile, welche zwischen ihnen und dem Gebälke eingeschoben sind, wird das letztere lothrecht gerichtet. Auf diese Art ist also das Gebälk und damit der daran aufgehängte Apparat von dem Fussboden getrennt. In dem oberen Querholze dieses Gebälks ist ein Bolzen *c* befindlich, auf welchem die 10 Fuss 2 Zoll lange, 4 Zoll breite und 4 Linien dicke eiserne Stange *dd* aufgehängt ist; um sie genau lothrecht zu stellen dienen das Loth *ff* und die Schrauben *gg*, *hh*, sowie drei Paare anderer Schrauben, welche sich in den Querhölzern des Gebälks befinden, und von der Rückseite desselben, mittelst eines Schlüssels, gedreht werden, aber in der Zeichnung nicht sichtbar sind.

An der grossen eisernen Stange befindet sich der lothrechte stählerne Cylinder *i*, dessen beide Enden kegelförmig sind; mit dem unteren, welches abgerundet ist, ruht er auf einem an der Stange festen Ansatze; das obere Ende ist senkrecht auf die Axe des Cylinders abgeschnitten, und bildet eine kreisförmige, polirte Ebene von 3 Linien Durchmesser, welche nach einem Herrn REPSOLD eigenthümlichen Verfahren ihre auf der



Lith. Anst. v. E. A. Funke, Leipzig

Bessel's Pendelapparat.



Lith. Anst. v. E. A. Funke, Leipzig

Bessel's Pendelapparat.

Ebene der grossen Stange senkrechte Stellung mit der grössten Schärfe erhalten hat.

Auf diese Ebene kann die Toise *kk* gestellt werden, und wird dann durch schwache Federn *mm* aufrecht erhalten; jedoch ist eine Hülse *n* in der Mitte derselben festgeklemmt, unter welche zwei, um die Unterlagen *oo* bewegliche Hebel greifen, an deren anderen Armen so schwere Gewichte wirken, dass sie die Toise genau tragen. Durch diese Einrichtung ist die Verkürzung der Länge aufgehoben worden, welche die Toise erfahren würde, wenn man sie aus der wagerechten Lage, in welcher sie mit ihrem Originale verglichen worden ist, brächte und auf eins ihrer Enden stellte: die obere Hälfte verkürzt sich nämlich um dieselbe Quantität um welche die untere sich verlängert.

Die Toise schwebt also frei und erlangt eine feste Stellung auf dem Cylinder *i* nur durch das Uebergewicht, welches sie bei dem Gebrauche des längeren Pendels dadurch erhält, dass der Apparat *p*, von welchem dieses herabhängt, auf ihrem oberen Ende ruht. Dieser Apparat, welchen ich den Aufhängungsrahmen des Pendels nennen werde, ist auf der zweiten Tafel Fig. 1 grösser dargestellt. An der rechten Seite der grossen eisernen Stange, in der Höhe sowohl des unteren als des oberen Endes der Toise, sind zwei Paare von Lagern *qq* angebracht, den Lagern eines Mittagsfernrohrs ähnlich; auf diese werden Cylinder von gehärtetem Stahl von 1 Zoll Durchmesser gelegt, so dass ihre Axen senkrecht auf die Ebene der grossen Stange gerichtet sind, und mittelst einer Wasserwage und einer an dem vorderen Lager befindlichen Schraubenbewegung genau horizontal gestellt werden. Bei den Versuchen mit dem längeren Pendel wird der Aufhängungsrahmen mit den umgekehrten, daran befindlichen Lagern auf den oberen Cylinder gelegt, bei den Versuchen mit dem kürzeren Pendel auf den unteren. In dem letzten Falle wird die Toise etwa einen Zoll in die Höhe geschoben, damit die horizontale Ebene des Cylinders *i* von derselben frei werde; dieses geschieht leicht und sicher, da die Toise von ihren Gegengewichten getragen wird.

Der Aufhängungsrahmen besteht, wie Fig. 1 Taf. II deutlich macht, aus einem eisernen Rahmen, unter dessen, den Lagern entgegengesetztem Ende ein Cylinder von Stahl befestigt ist, welcher durch Fig. 3 in seiner wahren Grösse besonders dargestellt wird. Dieser Cylinder hat an dem hinteren, der grossen Stange zugewandten Ende eine Kugel, von welcher zwei Segmente senkrecht auf die Axe des Cylinders abgeschnitten sind; an dem vorderen hat er einen kleineren Cylinder von 0,996 Lin. Durchmesser, welchen ich den Abwickelungscylinder nennen werde; dieselbe Benennung werde ich auch dem ganzen Cylinder mit der Kugel, wovon der eigentliche Abwickelungscylinder nur ein Theil ist, beilegen. An dem an den Aufhängungsrahmen befindlichen, schräg aufwärts gehenden Stücke wird der Pendelfaden festgeklemmt, dann über den Abwickelungscylinder geführt und nun durch die Kugel des Pendels gespannt. Sobald diese Kugel angehängt ist, zieht ihr Gewicht den Aufhängungsrahmen vorn herab, so dass die Kugel am hinteren Ende des Abwickelungscylinders bei den Versuchen mit dem langen Pendel auf die Mitte der oberen Fläche der Toise drückt und dieser die feste Stellung auf der wagerechten Ebene des Cylinders *i* gibt, wozu auch die Reibung der Hebel an ihren Ruhepunkten *oo* beiträgt; bei den Versuchen mit dem kurzen Pendel drückt diese Kugel auf die wagrechte Ebene des Cylinders *i* selbst. Das Gegengewicht an dem Aufhängungsrahmen, welches die Zeichnung darstellt, ist so geschoben, dass der Druck etwa 12 Unzen beträgt.

Bei den Versuchen werden die auf den Lagern *qq* liegenden Cylinder nivellirt; indem sie dadurch horizontal werden, wird auch die Axe des Abwickelungscylinders entweder horizontal, oder sie macht wenigstens mit dem Horizonte stets denselben Winkel. Hieraus geht hervor, dass der Höhenunterschied des Anfangspunkts zweier Pendel die der Temperatur des Versuchs zugehörige Länge der Toise ist. Man bemerkt leicht, dass die Construction des Abwickelungscylinders, welcher am hinteren Ende eine Kugel hat, die Untersuchung, ob die beiden Lager *qq* genau eine Toise von einander entfernt sind, unnöthig macht; doch hat Herr Repsold dafür gesorgt, dass die Axe, um welche der Aufhängungsrahmen sich dreht und die Axe des Abwickelungscylinders, bei dem Gebrauche beider Pendel sich in einer Horizontalebene befinden, wodurch auch die strenge Richtigkeit des Parallelismus beider Axen unnöthig wird. Ich erwähne dieses, nicht weil ich glaubte, dass die Construction hier weniger vollkommen wäre als in ihren übrigen Theilen, sondern nur um dadurch bemerklich zu machen, dass die Anbringung eines besonderen Prüfungsmittels für den Parallelismus beider Axen überflüssig gewesen sein würde.

Die auf diese Art aufgehängten Pendel beschreiben keine Kreise, sondern die Curve, deren Evolute der Kreis ist.

Um den Höhenunterschied der Kugel in beiden zusammengehörigen Versuchen zu messen, ist an dem unteren Ende der grossen eisernen Stange die Vorrichtung *r* befindlich. Sie besteht aus einem Hohl-

cylinder von Glockenmetall, am Eisen der Stange befestigt, in welchem sich ein Cylinder von Stahl, von 7 Linien Durchmesser, auf- und abwärts schieben und auch um seine Axe drehen lässt; von diesem Cylinder ist ein kleines Stück am oberen Ende in der Zeichnung sichtbar. Unter das untere Ende dieses Cylinders wirkt die Schraube *s*, so dass er durch Drehung derselben erhöhet und erniedrigt und die Quantität dieser Veränderungen durch die Revolutionen dieser Schraube gemessen werden kann. Das obere Ende des Cylinders wird indessen nicht unmittelbar mit der Kugel in Berührung gebracht, sondern es ist darauf ein sechszig Mal vergrössernder doppelter Fühlhebel *t* befestigt, dessen kürzerer Arm eine horizontale polirte Stahlebene trägt. Die Schraube *s* wird so weit gedreht, bis die die Kugel berührende Stahlebene am kurzen Arme des Fühlhebels, den längeren bis zu einem Zeichen an seinem Gehäuse erhebt; hierdurch kann man die Höhenunterschiede der Kugel genauer beobachten, als ohne Fühlhebel möglich sein würde.

Da es wesentlich ist, zufällige Veränderungen der Temperatur von dem Apparate zu entfernen, so ist derselbe in ein Gehäuse mit Spiegelplatten eingeschlossen, und man dreht die Schraube *s* nicht unmittelbar, sondern bei verschlossenen Fenstern mittelst der Handhabe *u*, welche durch ein Stirnrad auf die Schraube wirkt. Auch wird das Pendel bei verschlossenem Gehäuse sowohl in Bewegung gesetzt als angehalten; dieses geschieht durch die Zange *v*, welche sich vor- und rückwärts schieben lässt, und durch welche man also das Pendel beliebig weit von der Lothlinie entfernen kann, ehe man es seiner Bewegung überlässt. In *w* ist eine Scale, welche die Schwingungsweiten misst. In das Eisen der grossen Stange eingelassen sind die Kugeln der Thermometer e', e'', e'''; zwei andere Thermometer l' und l''' hängen frei im Gehäuse und zeigen die Temperatur der Luft; das erstere, dessen Kugel sich in der Höhe der Pendelkugel befindet, bleibt immer an seinem Orte, das letztere hat seine Kugel stets in der Höhe des Aufhängepunkts der Pendel und befindet sich also an dem in der Zeichnung angegebenen Orte, wenn mit dem langen Pendel experimentirt wird; wird aber das kurze Pendel angewandt, so wird das Thermometer so tief gehängt als dann erforderlich ist. In dieser Lage bezeichne ich dasselbe Thermometer durch l''.

Endlich erwähne ich noch, dass sowohl das Gebälk von Mahagoniholz als auch die grosse eiserne Stange so eingerichtet sind, dass sie, des leichteren Transports wegen, in der Mitte auseinander genommen werden können. Dazu dienen für das Gebälk die in der Zeichnung sichtbaren Schrauben *xxxx*; die Zusammensetzungsart der Stange, welche eben so sicher als kunstreich ist, konnte in der Zeichnung nicht angegeben werden.

3.

In dieser Beschreibung habe ich, um die Uebersicht des ganzen Apparats nicht zu erschweren, die Anführung aller Einzelnheiten vermieden, werde aber, so wie ihre Kenntniss nothwendig wird, darauf zurückkommen. Auch habe ich bei keinem der Theile der Vollendung erwähnt, welche alle besitzen. Dieses ist bei einer Arbeit von REPSOLD unnöthig, allein ich kann dennoch nicht verschweigen, dass die genaue Untersuchung des Apparats sowohl meinem hochgeehrten Freunde SCHUMACHER als mir selbst die Bewunderung abgenöthigt hat, welche wahrer Vollendung gebührt.

Ich kann indessen nicht unterlassen, von der Mikrometer-Vorrichtung am unteren Ende des Apparats noch einiges zu sagen, indem die mehr oder weniger gute Ausführung dieses Theils unmittelbaren Einfluss auf die Messungen der Höhenunterschiede hat. Der Cylinder nämlich, welcher sich in der Hülse von Glockenmetall bewegt, füllt den Raum dieser letzten so genau aus, dass, wenn man diese Hülse unten luftdicht verschliesst, vorher aber den Cylinder etwas in die Höhe hebt, derselbe auf der in der Hülse befindlichen Luft ruht, dennoch aber Spielraum genug hat, um eine Axendrehung welche man ihm gibt (nachdem der Fühlhebel, welcher der Drehung im Wege sein würde, abgeschraubt worden ist), mehrere Minuten lang fortzusetzen. Dabei sind der Cylinder und seine Hülse vollkommen trocken, ohne Oel, so dass die Bewegung des ersteren, bei den Messungen der Pendel, auch nicht durch die Klebrigkeit des Oels gestört werden kann, und er in der That der kleinsten Drehung der Schraube, welche ihn trägt, nachgibt. Durch diese fast völlige Gleichheit der Durchmesser des Cylinders und seiner Hülse erhält man die Versicherung, dass der erstere bei der Erhöhung und Erniedrigung sich parallel bleibt; dieses wird bestätigt wenn man auf das Gehäuse des Fühlhebels eine Wasserwage setzt, welche ihren Stand nicht verändert, wenn man den Cylinder erhöhet oder erniedrigt. Die dagegen stattfindende Beschränkung des Gebrauchs des Apparats auf Temperaturen, welche nicht niedriger sind als einige Grade unter dem Gefrierpunkte, ist unbedeutend; die grössere Zusammenziehung des Glockenmetalls durch die Kälte vernichtet nämlich den kleinen Zwischenraum dann ganz und der Cylinder verliert seine Beweglichkeit.

Ein anderer Punkt von unmittelbarem Einflusse auf die Resultate ist die Unbeweglichkeit des Aufhängungsrahmens während der Schwingungen. Um diese zu prüfen, habe ich das kleine, von Herrn HARDY erfundene Instrument, welches auch Herr KATER zu demselben Zwecke angewandt hat, nachdem es vorher den Pendelschwingungen gleichzeitig gemacht war, sowohl bei dem langen als bei dem kurzen Pendel, auf den Aufhängungsrahmen gestellt, aber keine Bewegung bemerkt. Um aber eine noch directere Prüfung der Richtigkeit der Versuche in dieser Hinsicht zu erhalten, habe ich den Rahmen, nahe an dem Punkte, von welchem das Pendel herabhängt, durch mehrere stark angespannte Fäden auf das stärkste befestigt und das Pendel schwingen lassen, dann diese Befestigung weggenommen und die Schwingungen des Pendels fortgesetzt; beide Reihen von Versuchen haben aber weder bei dem langen noch bei dem kurzen Pendel einen Unterschied gezeigt. Uebrigens wäre bei einem Apparate von meiner Einrichtung die absolute Unbeweglichkeit des Aufhängepunkts vielleicht weniger wesentlich, als bei einem anderen, indem der Einfluss einer kleinen Bewegung auf die Längen beider Pendel wahrscheinlich gleich sein und dann aus dem Unterschiede, worauf es allein ankömmt, verschwinden würde.

4.

Ich werde jetzt das Pendel selbst näher beschreiben. Der Stahlfaden, welcher die Kugel trägt, ist nicht selbst in Berührung mit dem Abwickelungs-Cylinder, sondern es ist an dem Aufhängungsrahmen ein 1,4 Lin. breites, etwa 0,008 Lin. dickes Messingblättchen festgemacht*), welches über den Abwickelungs-Cylinder gelegt ist und einige Linien unter demselben eine Klemme von Messing trägt, welche 20,77 Gran des Preussischen Pfundes wiegt. Der Pendelfaden ist an beiden Enden in kleine Schraubenklemmen befestigt, welche dem Gewichte nach vollkommen gleich sind, jede 19,72 Gran schwer. Von diesen Klemmen wird eine in die mit einer Schraubenmutter versehene Klemme am Messingblättchen, die andere in eine gleiche in die Kugel eingebohrte Schraubenmutter eingeschraubt, durch welche Einrichtung man auch in den Stand gesetzt wird, den Faden leicht umzukehren. Endlich ist ein 2 Lin. hoher und 1,25 Lin. Durchmesser habender, in der Axe durchbohrter Cylinder von Messing, der für das lange Pendel 3,81 Gran und für das kurze 3,69 Gran wiegt, auf den Faden geschoben; dieser ist erforderlich, um die Beobachtung der Schwingungszeiten genau zu machen, wie aus der unten vorkommenden Beschreibung der Beobachtungsart hervorgehen wird; ich werde ihn den Coincidenz-Cylinder nennen. Die zweite Fig. Taf. II zeigt alles dieses in wahrer Grösse; die erste macht die Befestigung des Messingblättchens anschaulich.

Wenn das Messingblättchen vollkommen biegsam wäre, so würde der Mittelpunkt der Kugel einen Bogen der Curve beschreiben, deren Evolute der Durchschnittskreis des Abwickelungs-Cylinders (Durchmesser = $0^{L},996$) ist. Es lässt sich leicht zeigen (Beilage I.), dass die Zeit einer ganzen Schwingung in dieser Curve von derjenigen Zeit nicht merklich verschieden ist, in welcher ein einfaches Pendel eine Schwingung machen würde, dessen Länge der Länge des sich abwickelnden Pendels im Zustande der Ruhe, oder der mittleren Länge desselben gleich ist. Wenn man aber die Federkraft des Fadens nicht ausser Acht lässt, so wird klar, dass derselbe zwischen dem Abwickelungs-Cylinder und der Kugel keine gerade Linie, sondern in der Nähe des ersteren gekrümmt ist, welche Krümmung aber mit der wachsenden Entfernung vom Abwickelungs-Cylinder geringer und sehr bald unmerklich wird. Man kann nicht daran zweifeln, dass diese Federkraft einen Einfluss auf die Schwingungszeit des Pendels haben müsse, allein da die Krümmung nur ganz nahe am Abwickelungs-Cylinder merklich ist, so ist zu erwarten, dass sie nur den Mittelpunkt der Bewegung ändert, entweder um eine beständige, oder mit dem Schwingungswinkel veränderliche, nicht aber von der Länge des Pendels abhängige Quantität.

Da aber die gegenwärtige Methode nicht auf die Länge eines Pendels, sondern auf den Längenunterschied zweier Pendel gegründet ist, und daher alles was beide gleichmässig ändert, keinen Einfluss auf das Resultat hat, so wird auch die Federkraft des Fadens unschädlich, falls man die Ueberzeugung erlangen kann, dass sie für beide Pendelfäden, oder vielmehr für die Theile derselben, welche sich in der Nähe des Abwickelungs-Cylinders und in Berührung mit demselben befinden, genau gleich ist, und falls man beide Pendel in gleichen Schwingungswinkeln beobachtet. Die erste dieser Bedingungen ist durch die Einrichtung des oberen Theils der Pendel, welcher für beide derselbe bleibt und daher die Gleichheit der Federkraft vollkommen verbürgt, erfüllt worden; die andere ist dadurch erfüllt, dass die Versuche mit beiden Pendeln bei gleichen Winkeln gemacht sind.

Die Veränderung der Bewegung, welche aus der

*) Ein Quadratzoll desselben wiegt 1,801 Gran, also eine Linie der Länge eines Streifens von 1,4 Lin. Breite 0,01759 Gran.

Federkraft entsteht, habe ich (Beilage II.) durch Rechnung verfolgt, vorzüglich um kennen zu lernen, welchen Einfluss die Schwingungswinkel darauf haben; denn wenn ein solcher Einfluss merklich ist und man darauf ausgeht, alle bei einem Versuche beobachteten Coincidenzen des Pendels und der Uhr durch eine und dieselbe Formel möglichst nahe darzustellen, wie es geschehen muss, wenn man den grössten Vortheil aus den Beobachtungen ziehen will, so wird auch der Einfluss der Federkraft in der Reductionsformel auf unendlich kleine Winkel nicht fehlen dürfen. Ich habe gefunden, dass, wenn die Tiefe der als ein Punkt betrachteten Kugel unter der Axe des Abwickelungs-Cylinders im Zustande der Ruhe durch ϱ bezeichnet wird, das Pendel in derselben Zeit schwingt, in welcher ein einfaches schwingen würde, dessen Länge

$$= \varrho + 11\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\mu}{4aa}}\right)\sqrt{\mu} \,.\, \sin\tfrac{1}{2}u'^2$$

ist. In dieser Formel bedeutet μ die elastische Kraft des Fadens, die Kraft, welche den Faden spannt, als Einheit angenommen, a den Halbmesser des Abwickelungs-Cylinders und u' den Schwingungswinkel. Sie setzt einen wenig steifen Faden voraus, so dass derselbe auf einem Bogen des Abwickelungs-Cylinders ganz aufliegt; wird er steifer angenommen, so dass er den Cylinder nur in einem Punkte berührt, so wird diese Formel

$$= \varrho + \frac{a}{2}\sin\frac{\omega'}{2} - \frac{\sqrt{\mu}}{2}\cos\frac{\omega'}{4}$$
$$+ \left\{\frac{3}{16}a\sin\frac{\omega'}{2} + \sqrt{\mu}\left(11 - \frac{735}{64}\cos\frac{\omega'}{4}\right)\right\}\sin\tfrac{1}{2}u'^2$$

wo ω' den Winkel bezeichnet, welchen der Theil des Fadens über dem Abwickelungs-Cylinder mit der Lothlinie macht; bei meinem Apparate ist ω' etwa $= 19^0$. Es ist noch ein dritter Fall möglich, nämlich wo die beiden vorigen während der Schwingung in einander übergehen; ich habe aber die Rechnung nicht auf ihn ausgedehnt.

Das Messingblättchen, welches ich angewandt habe, hat so wenig Federkraft, dass bei meinen Versuchen der erste Fall stattfindet, und sogar eine Krümmung desselben, da wo es den Abwickelungscylinder verlässt, nicht auffallend ist. Es war meine Absicht, aus der Vergleichung der bei grösseren und kleineren Schwingungswinkeln beobachteten Coincidenzen μ abzuleiten und es dann bei der Reduction zu berücksichtigen, sowie auch die aus der Dehnbarkeit des Fadens hervorgehende, von den Herren PAOLI und POISSON untersuchte, gleichfalls dem Quadrate des Schwingungswinkels proportionale Aenderung. Allein theils stimmen meine Beobachtungen, ohne Berücksichtigung dieser Verbesserungen, so nahe mit der gewöhnlichen Reductionsformel überein, dass das etwa daran fehlende sich fast ganz unter den zufälligen Fehlern versteckt hat, und daher die Uebereinstimmung der einzelnen Coincidenzen einer Beobachtungsreihe durch seine Berücksichtigung nicht merklich vermehrt wird; theils hat sich später gefunden, dass auch die Luft, in welcher das Pendel sich bewegt, auf die Reductionsformel einen Einfluss haben kann, so dass beide Ursachen vermischt erscheinen und daher der Einfluss, welchen die Beobachtungen etwa verrathen möchten, nicht einer allein zugeschrieben werden darf. Die nahe Uebereinstimmung der Beobachtungen mit der, alles dieses nicht berücksichtigenden Reductionsformel zeigt übrigens, dass die Gleichheit der Schwingungswinkel beider Pendel nicht gar zu ängstlich gefordert werden darf.

Trotz dem Resultate der Rechnung in der zweiten Beilage darf diese Aufhängungsart des Pendels in einem Falle nicht angewandt werden, wo es auf die absolute Länge desselben ankömmt. Denn theils berücksichtigt die Rechnung die Dicke des Fadens nicht, theils möchte es schwer sein, die Ueberzeugung zu erlangen, dass nicht zwischen dem Cylinder und dem Faden (Messingblättchen) eine kleine Anziehung stattfindet. Allein auf den Unterschied zweier Pendellängen hat alles dieses keinen Einfluss und daher wählte ich diese Aufhängungsart als die einfachste. Später wurde eine Aenderung am Aufhängungsrahmen angebracht, so dass auch mit anderen Aufhängungsarten Versuche gemacht werden konnten; hierauf werde ich unten zurückkommen.

5.

Die Beobachtungsart der Schwingungszeit eines Pendels durch Coincidenzen, welche, so viel ich weiss, BORDA erfunden hat, ist jeder anderen so weit vorzuziehen, dass es sich von selbst versteht, dass ich sie angewandt habe; doch werde ich die Art wie dieses geschehen ist auseinandersetzen müssen.

Es war dabei die Absicht, jeden gegenseitigen Einfluss der Bewegungen des Pendels der Uhr und des Pendels am Apparate zu vermeiden, wie dieses auch schon Herr CARLINI gethan hat. Dieses erlangte ich dadurch, dass ich die Uhr nicht nahe vor oder hinter dem Apparate aufstellte, sondern in einer Entfernung von 8 Fuss 6,65 Zoll vor dem schwingenden Pendel; zwischen beide wurde ein Cometensucher von FRAUNHOFER von 24,36 Zoll Brennweite, aus welchem die Oculare herausgenommen waren, gestellt; das Objectiv

desselben war 39,77 Zoll vom Pendel am Apparate und 62,88 Zoll von dem der Uhr entfernt, so dass das Bild des ersteren genau auf das Uhrpendel fiel, und beide durch ein etwa 15 Fuss entferntes, 30zölliges Fernrohr von FRAUNHOFER völlig deutlich erschienen.

An der Scale des Pendelapparats (w) ist ein schwarzer Streifen in horizontaler Richtung befestigt, in dessen Mitte eine 0,5 Linien breite Stelle weiss gelassen ist; diese wird, wenn das Pendel in Ruhe ist, von dem Faden desselben genau bissectirt und, wenn dem im vorigen Art. erwähnten Coincidenz-Cylinder die gehörige Stelle auf dem Faden gegeben wird, von diesem völlig verdeckt. An dem untersten Ende des Uhrpendels dagegen befindet sich ein geschwärztes Stück Papier, in welches ein etwa 0,3 Lin. breites Loch eingeschnitten ist, welches, wenn das Uhrpendel in Ruhe ist, mit dem Bilde der weissen Stelle auf dem schwarzen Streifen genau zusammenfällt. Es geht hieraus hervor, dass, im Zustande der Ruhe beider Pendel durch das Fernrohr gesehen, der Coincidenz-Cylinder durch das Loch am Uhrpendel sichtbar wird, dass er aber die weiss gelassene Stelle auf dem schwarzen Streifen verdeckt, so dass diese nicht gesehen wird und alles schwarz erscheint, da auch der Coincidenz-Cylinder geschwärzt ist. Im Zustande der Bewegung beider Pendel aber wird die weiss gelassene Stelle bei jedem Schlage der Uhr sichtbar, ausser wenn beide Pendel in demselben Momente vorübergehen und daher der Coincidenz-Cylinder sie verdeckt. Die Breiten der weissen Stelle am Apparate und des Lochs am Uhrpendel sind so gewählt, dass auch am Anfange der Versuche, wenn die Geschwindigkeit am grössten ist, die erstere ganz unsichtbar wird; es sind daher immer die Zeiten der Verschwindung und Wiedererscheinung des Weissen beobachtet, die eine bei der Bewegung des Pendels von der Rechten zur Linken, die andere bei der entgegengesetzten; das Mittel aus beiden, welches das bei den Versuchen mit dem kurzen Pendel angegebene Moment ist, fällt daher nie auf eine ganze, sondern immer auf eine halbe Secunde der Uhr. Die Deutlichkeit, womit das durch das Objectivglas des Cometensuchers gemachte Bild und das Pendel der Uhr durch das Fernrohr gesehen werden, erlaubt die Coincidenzen auch bei kleinen Schwingungen etwa eben so genau zu beobachten, wie bei grösseren.

Die Schwingungszeit des langen Pendels könnte auf dieselbe Art beobachtet werden wie die des kurzen, wenn man eine Uhr besässe, deren Schläge nahe dieselbe Dauer hätten; allein das Pendel derselben, auf gewöhnliche Art eingerichtet, müsste etwa 10 Fuss lang sein, was Unbequemlichkeiten und Schwierigkeiten herbeiführen würde. Ich versuchte daher, die Uhr mit einem Pendel von einer neuen Construction zu versehen, welches nicht länger ist als ein gewöhnliches Uhrpendel: es ist dasselbe aus einer Eisenstange und einer Messingstange zusammengesetzt, deren erstere sich über dem Aufhängepunkte, die andere darunter befindet; beiden sind solche Dimensionen und Massen gegeben, dass das Pendel nicht nur in der erforderlichen Zeit (1″,72) schwingt, sondern auch die Einwirkungen der Wärme und Kälte compensirt. Allein ich war gezwungen, diesen Versuch aufzugeben, indem der Gang der Uhr zu unregelmässig wurde, was ich wenigstens zum Theil den Aenderungen der Wärmeverschiedenheit oben und unten am Pendel, gegen welche diese Constructionsart sehr empfindlich ist, zuschreibe. Indessen ist dieses oder ein ähnliches Hülfsmittel nicht eigentlich nothwendig, denn die Bestimmtheit und Deutlichkeit, womit die Coincidenzen bei der beschriebenen Beobachtungsart sich zeigen, ist hinreichend zur Beobachtung nicht allein derjenigen, welche im Falle der nahen Gleichheit der Schwingungszeiten durch allmälige Annäherung der Durchgangszeiten beider Pendel durch die Lothlinie entstehen, sondern auch derjenigen, welche sich, im Falle beide Pendel ganz verschiedene Bewegungen haben, zutragen, ohne vorher erwartet zu sein. Auf diese Art wurden die Coincidenzen beider Pendel an einer und derselben Uhr beobachtet.

Man bemerkt indessen leicht einen wesentlichen Unterschied zwischen beiden Methoden: bei der ersteren beobachtet man beide Grenzen der Verdeckung des Weissen und setzt die wahre Coincidenz in die Mitte derselben; bei der anderen nimmt man jeden innerhalb dieser Grenzen gelegenen Punkt für die Mitte an. Es ist daher klar, dass die erste Beobachtungsart jede einzelne Coincidenz genauer gibt als die zweite; allein, wenn man bei der letzteren mehre aufeinanderfolgende Coincidenzen beobachtet und aus allen das Mittel nimmt, so ist im Allgemeinen zu erwarten, dass ein Theil davon vor dem wahren Coincidenzmomente ist, der andere Theil nach demselben; es wird dabei vortheilhaft sein, wenn man vermeidet, dass das Verhältniss der Schwingungszeiten beider Pendel sich durch kleine Zahlen mit grosser Annäherung ausdrücken lässt. Findet aber dieses statt, so würde man die Beobachtungen auf eine ganz ähnliche Weise machen können wie in dem Falle, wo die Schwingungszeiten beider Pendel nahe gleich sind; man hat nur die Periode, in welcher die Gleichheit der Schläge wieder eintritt, statt der einzelnen Schläge in jenem Falle zu nehmen.

Bei dem langen Pendel, welches in etwa 1;725 Uhrzeit eine Schwingung macht, habe ich die Regel befolgt, zuerst alle innerhalb 5 oder 6 Minuten vorfallenden Coincidenzen zu beobachten; dann etwa $14^m\ 22^s$ nach der ersten (in welcher Zeit das Pendel 500 Schwingungen vollendet) eine zweite Reihe, gleichfalls 5 oder 6 Minuten lang zu observiren, und so fort bis das Pendel über 4000 Schwingungen gemacht hatte. Es ist dabei eben so wenig nöthig, wie bei der ersten Methode, die Schwingungen zu zählen; denn die kleineren Zwischenzeiten, in welchen Coincidenzen erfolgen, reichen hin, ihre Dauer mit so grosser Annäherung zu geben, dass über die Anzahl der entfernteren nie ein Zweifel bleiben kann. — Man findet sowohl jedes einzelne Moment, als die daraus abgeleiteten Mittel in den (dieser Abhandlung beigelegten) Originalbeobachtungen angegeben, und zugleich findet man daselbst diejenigen Fehler dieser Mittel, welche man annehmen muss, damit die Summe ihrer Quadrate ein Minimum werde. Da die ähnliche Fehlerangabe auch bei den mit dem kurzen Pendel, also nach der ersten Methode gemachten Versuchen vorkömmt, so ist es leicht, die Genauigkeit beider Methoden mit einander zu vergleichen. Ich habe dazu die erste Reihe von Beobachtungen benutzt, welche 32 Versuche mit dem langen Pendel, jeder von 9 Momenten, und 16 Versuche mit dem kurzen Pendel, jeder von 11 Momenten, enthält. Die Summen der Quadrate der Fehler, diese in Zehntausendtheilen der Secunden der Uhr ausgedrückt, finden sich für beide

$$= 416779 \quad \text{und} \quad 60676;$$

man erhält den mittleren Fehler eines der angegebenen Momente, wenn man diese Summen resp. mit 7,32 und 9,16 dividirt und aus den Quotienten die Quadratwurzel auszieht

$$= 0;00431 \quad \text{und} \quad 0;00205,$$

oder in Theilen einer Schwingung der beiden Pendel ausgedrückt

$$= 0{,}00250 \quad \text{und} \quad 0{,}00205.$$

Hieraus geht hervor, dass die Beobachtungen des kurzen Pendels genauer sind als die des langen; allein auch, dass die Fehler dieser letzteren noch so klein sind, dass die mit demselben gemachten Versuche sehr genaue Resultate verheissen.

6.

Die Uhr, auf welche die Beobachtungen der Pendelschwingungen sich beziehen, ist die von Herrn Repsold verfertigte Hauptuhr der Sternwarte, deren vortrefflicher Gang sich schon viele Jahre hindurch bewährt hat, wie die Tagebücher der Sternwarte zeigen. Jedoch würde es unpassend gewesen sein, sie ihrer Bestimmung zu den Beobachtungen der Culminationen der Gestirne zu entziehen und sie vor dem Pendelapparate aufzustellen. Daher wurde diese Uhr nicht unmittelbar, sondern mittelbar angewandt, indem die vor dem Pendelapparate aufgestellte fortwährend mit ihr verglichen wurde.

Der Verfertiger der Uhr, an welcher die Coincidenzen unmittelbar beobachtet wurden, ist mir unbekannt; sie ist ein Eigenthum des Herrn Repsold, welcher die Güte hatte, sie mir zu diesen Versuchen zu leihen. Sie ist an einem pyramidalischen Gestelle von Holz mit hinreichender Festigkeit aufgestellt; sie ist mit dem Fussboden in keiner Verbindung, indem die Füsse ihres Gestells auf Pfählen ruhen, welche durch denselben hindurch in das Erdreich eingetrieben sind. Das Pendel dieser Uhr habe ich so geschraubt, dass sie in etwa einer Stunde eine Secunde hinter der Sternzeit zurückbleibt, wodurch also in ohngefähr so langen Zwischenzeiten die Schläge derselben mit denen der Hauptuhr zusammentreffen. Da die Uhr so gestellt ist, dass man sie, wenn man die Thür zwischen dem nördlichen und dem Meridianzimmer der Sternwarte öffnet, zugleich mit der Repsold'schen Uhr hören kann, so erlangt man durch die Coincidenzen der Schläge beider Uhren eine genaue Vergleichung derselben, welche selten bis auf 0;02 zweifelhaft bleibt. Auf diese Weise wurde die Uhr vor dem Pendelapparate, welche ich in der Angabe der Beobachtungen stets durch P bezeichnen werde, einige Stunden vor und nach den Versuchen mit der Repsold'schen Uhr (R) verglichen, und daraus die Zwischenzeit der Coincidenzen nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet; diese Zwischenzeit, verbunden mit dem aus den astronomischen Beobachtungen gefolgerten Gange der Uhr R, ergab den Werth eines Pendelschlages von P, in mittlerer Zeit ausgedrückt.

Da indessen Stand und Gang einer Uhr unbekannte Functionen der Zeit sind, und die Anwendung von Beobachtungen zur Bestimmung unbekannter Grössen nur dann von jeder Willkür frei ist, wenn die mathematische Form der beobachteten Quantitäten gegeben ist, so wird es nothwendig, dass ich die Art näher angebe, wie ich aus den Vergleichungen der Uhren untereinander und mit den astronomischen Beobachtungen den Werth eines Pendelschlages von P abgeleitet habe.

Wenn man die Zeit der Uhr R, welche zu einer der Coincidenzen mit der Uhr P gehört, durch t bezeichnet, die Zeiten der a^{ten}, b^{ten}, ... vor oder nach ihr durch $t^{(a)}$, $t^{(b)}$, ..., und wenn man den Unterschied der

von beiden Uhren angegebenen Zeit nicht als gleichförmig sich verändernd annimmt, sondern von der Reihe

$$A + B(t^{(n)} - t) + C(t^{(n)} - t)^2 + \ldots.$$

welche ihn allgemein ausdrückt, das in die 3. Potenz der Zeit multiplicirte Glied und die höheren vernachlässigt, so erhält die Zeit einer der beobachteten Coincidenzen den Ausdruck:

$$t^{(n)} = i + kn + l.nn$$

und die Beobachtung derselben gibt die Gleichung:

$$0 = -t^{(n)} + i + kn + l.nn$$

Löset man alle durch die Beobachtungen gegebenen Gleichungen dieser Art nach der Methode der kleinsten Quadrate auf, so dass man l unbestimmt lässt, so findet man:

$$k + l\left\{\frac{m(n^3) - (n)(nn)}{m(nn) - (n^2)}\right\} = \frac{m(nt) - (n)(t)}{m(nn) - (n)^2}$$

wo (n), (nn), (n^3) . . . die Summen

$$(n) = a + b + c + \ldots.$$
$$(nn) = aa + bb + cc + \ldots.$$
$$(nt) = at^{(a)} + bt^{(b)} + ct^{(c)} + \ldots.$$

u. s. w.

bezeichnen, m aber die Anzahl der Beobachtungen ist. Man hat aber die Zwischenzeit zweier Coincidenzen, deren Mitte auf die Zeit $t + k\tau$ fällt,

$$= k + 2l\tau,$$

woraus hervorgeht, dass

$$\tau = \frac{1}{2}\left\{\frac{m(n^3) - (n)(nn)}{m(nn) - (n)^2}\right\}$$

angenommen werden muss, damit l unbestimmt bleibe. Hat man daher aus den durch die Beobachtungen gegebenen Gleichungen k abgeleitet ohne l oder die Ungleichförmigkeit des Ganges zu berücksichtigen, so gilt diese Bestimmung der Zwischenzeit zweier Coincidenzen für die Zeit

$$t + \frac{k}{2}\left\{\frac{m(n^3) - (n)(nn)}{m(nn) - (n)^2}\right\}$$

Auf diese Art habe ich nicht nur den Werth von k, welcher aus den gemachten Vergleichungen der Uhren folgt, sondern auch die Zeit für welche er gültig ist, berechnet und in den Originalbeobachtungen angeführt. Fällt diese Zeit mit der Mitte des Versuchs bis auf wenige Minuten zusammen, wie es meistens der Fall ist, indem die Beobachtungen danach eingerichtet wurden, so habe ich sie ungeändert zur Bestimmung des relativen Ganges beider Uhren angewandt; ist sie aber stärker verschieden, so habe ich eine zweite Bestimmung von k für eine andere Zeit zu erhalten gesucht, und aus beiden, unter Annahme einer der Zeit proportionalen Aenderung, den Werth von k für die Mitte des Versuchs gefolgert.

Den täglichen Gang der Uhr R gegen Sternenzeit habe ich durch die, gleichfalls bei den Originalbeobachtungen angeführten, aus den Tagebüchern der Sternwarte ausgezogenen Correctionen derselben, abgeleitet, und dabei den aus zwei aufeinanderfolgenden Bestimmungen hervorgehenden Werth desselben für die Mitte der Zeit gültig angenommen; die verschiedenen Bestimmungen dieser Art sind, ebenfalls unter der Annahme der Zeit proportionaler Aenderungen, auf die Mitten der einzelnen Versuche reducirt.

Bezeichnet man die so bestimmte tägliche Aenderung der Correction der Uhr R durch s, so erhält man den in mittlerer Zeit ausgedrückten Werth eines Pendelschlages von P aus der Formel:

$$\frac{365{,}2422577}{366{,}2422577} \cdot \frac{86400}{86400 - s} \cdot \frac{k}{k-1}$$
$$= \left\{0{,}997269567 + s.0{,}000011543\right\}\frac{k}{k-1}$$

Die Beilage III enthält eine nach dieser Formel berechnete Tafel [hier weggelassen].

7.

Die Temperatur des Pendelapparats wird durch drei Thermometer e', e'', e''' bestimmt, deren Kugeln folgende Höhen über dem Boden des Gehäuses haben:

$e' = 196$ Lin.; $e'' = 584$ Lin.; $e''' = 1292$ Lin.

Die Kugeln dieser Thermometer sind in das Eisen der grossen Stange eingelassen und mit Deckeln von demselben Metalle verdeckt, so dass angenommen werden kann, dass sie die wahre Temperatur derselben und auch der Toise, welche mit der Stange eine gleiche Dicke hat, zeigen. Sie sind von Herrn Fortin in Paris verfertigt und mir von Herrn Professor Schumacher gütigst überlassen. Sie haben die hunderttheilige Scale, wurden aber wiederholt von dem Apparate abgenommen und mit zwei Thermometern verglichen, welche ich nach der in der VII. Abtheilung meiner Beobachtungen gegebenen Methode [s. auch Abh. 141] berichtigt hatte. Hieraus ging die Verbesserungstafel für die unmittelbaren Angaben dieser Thermometer hervor, welche ich in der IV. Beilage mittheile. Die bei den Versuchen angeführten Temperaturen sind die schon berichtigten.

Da die Temperatur in der Sternwarte und in dem Gehäuse für den Apparat in verschiedenen Höhen oft sehr ungleich war, vorzüglich bei grosser Wärme, und durch keines der von mir versuchten Mittel gleich gemacht werden konnte, so wird es nöthig, die Temperatur der Theile des Apparats, welche nicht gleich hoch

mit den Thermometern sind, aus den Angaben zweier derselben der Höhe proportional zu bestimmen. Ich habe daher die Temperatur für die Höhe h, wenn diese grösser ist als die Höhe des Thermometers e'',

$$= \frac{1292 - h}{703} e'' + \frac{h - 584}{703} e'''$$

angenommen, wenn sie kleiner ist

$$= \frac{534 - h}{388} e' + \frac{h - 196}{388} e''.$$

Hieraus folgt, wie aus der IV. Beilage hervorgeht, die mittlere Temperatur der Toise

$$\tau = 0{,}4095 . e'' + 0{,}5905 . e''';$$

und unter der Annahme, dass sie 0,0008 Lin. kürzer ist als die Toise du Pérou und dass das Eisen sich für jeden Grad des hunderttheiligen Thermometers, Borda's Angabe zufolge, um 0,0000114 seiner Länge ausdehnt, ihre jedesmalige Länge

$$= 863^{L}{,}9992 \cdot \frac{1 + \tau . 0{,}0000114}{1 + 16{,}25 \times 0{,}0000114}$$

$$= 863^{L}{,}839174 + \tau . 0^{L}{,}00984777$$

Ferner erhält man die Temperatur, welche zur Berechnung der um den Halbmesser der Pendelkugel verminderten Entfernung des Fühlhebels von dem Aufhängepunkte des kurzen Pendels angewandt werden muss,

$$\tau' = 0{,}6494 . e' + 0{,}3506 . e''$$

und diese Entfernung selbst, die für $\tau' = 0$ stattfindende durch F bezeichnet,

$$= F + \tau' . 0^{L}{,}0054132,$$

wobei zu bemerken ist, dass eine etwanige Unsicherheit des Coefficienten von τ' keinen erheblichen Einfluss auf das Resultat der Versuche haben kann, indem es sich ohnehin von selbst versteht, dass man die zusammengehörigen Beobachtungen beider Pendel in nicht sehr verschiedenen Temperaturen macht.

Die Temperatur der Luft im Gehäuse des Apparats ist durch die Thermometer l' und l'' (oder l''') beobachtet und in den Originalbeobachtungen in wahren Centesimalgraden angeführt. Die Angabe des mit der Pendelkugel in gleicher Höhe befindlichen Thermometers l' dient zur Berechnung der Reduction auf den leeren Raum. Allein von der halben Summe der Temperaturen an beiden Enden des Fadens hängt auch die Länge desselben ab; wenn nämlich zur Zeit der Messungen der Höhe der Kugel, welche immer am Anfange und am Ende eines Versuchs gemacht sind, die mittlere Temperatur der Luft durch L bezeichnet wird, zur Zeit einer Schwingung des Pendels durch L', so ist die Länge des schwingenden Pendels zu der gemessenen im Verhältnisse

$$1 + L' . 0{,}000011898 : 1 + L . 0{,}000011898$$

wo die Ausdehnung des Stahlfadens nach Herrn Troughton's Angabe genommen ist. Die Schwingungszeit, welche das Pendel gehabt haben würde, wenn es die aus den Messungen folgende Länge unverändert beibehalten hätte, muss daher sehr nahe mit

$$1 + (L' - L)\, 0{,}000005949$$

multiplicirt werden, um die wirkliche Schwingungszeit zu ergeben.

8.

Die Mikrometerschraube, durch welche die Höhenunterschiede der Kugel in zusammengehörigen Versuchen gemessen werden, erhebt oder erniedrigt, wie ich schon in der Beschreibung des Apparats angeführt habe, den Cylinder von Stahl, auf welchem der Fühlhebel befestigt ist. Dieser Cylinder lässt sich um seine Axe drehen, so dass man messen kann sowohl wenn der Fühlhebel nach der rechten Seite, als auch wenn er nach der linken gewandt ist; das erstere ist der in der Zeichnung dargestellte Fall. Durch diese Einrichtung hat Herr Repsold einen doppelten Zweck erreicht. Es ist nämlich klar, dass die polirte Stahlebene am Fühlhebel, welche mit der Kugel in Berührung gebracht wird, nicht genau horizontal gemacht werden kann, weil sie sich um die Axe des Fühlhebels drehen muss; daher muss ein Fehler entstehen, wenn beide Pendel, zwischen welchen der Höhenunterschied gemessen werden soll, nicht genau auf denselben Punkt der Ebene treffen; dieser verschwindet aber gänzlich, wenn man die Messung mit dem umgewandten Fühlhebel wiederholt, und es war daher unnöthig eine Vorrichtung anzubringen, wodurch man sich überzeugen könnte, dass beide Pendel genau in derselben Lothlinie hängen. Ferner kann man dadurch, dass man eine Wasserwage auf das Gehäuse des Fühlhebels setzt und den Cylinder dann um seine Axe dreht, prüfen ob er genau lothrecht steht; ich habe ihn auf diese Art vollkommen scharf berichtigen können.

Die Mikrometerschraube, welche den Fühlhebel erhöhet und erniedrigt, zeigt auf einer Scale die ganzen Drehungen und auf ihrer Trommel die Hunderttheile derselben. Den Werth ihrer Revolutionen habe ich nicht durch directe Messung, sondern durch die Schwingungen des kurzen Pendels bestimmt. Zu diesem Zwecke wurden acht Versuche gemacht, zwischen welchen ich die Länge des Pendels durch Drehung der Schraube am Aufhängungsrahmen veränderte. Die gefundenen und gehörig reducirten Schwingungszeiten gaben, unter Annahme der Länge des einfachen Secundenpendels

= 440^{L},81, folgende Werthe von F, d. i. der bei der Temperatur = 0 stattfindenden Entfernung des Aufhängepunkts von dem einen Halbmesser der Kugel über dem Fühlhebel liegenden Punkte, wenn die Mikrometerschraube den Ort einnimmt, welcher dem Anfangspunkte ihrer Scale entspricht:

	Werthe von F
1. Versuch....	441^{L},1619 + 15,051.p
2. „	441,8469 + 7,424.p
3. „	442,4982 + 0,197.p
4. „	442,4966 + 0,209.p
5. „	441,8402 + 7,493.p
6. „	441,1527 + 15,141.p
7. „	440,4219 + 23,211.p
8. „	440,4254 + 23,156.p

Hier bedeutet p den Werth einer Drehung der Schraube, welche sich aus diesen Bestimmungen = 0^{L},0902 ergibt. Die übrigbleibenden Fehler sind dann:

+ 0^{L},0031
— 0,0004
— 0,0004
— 0,0009
— 0,0003
+ 0,0020
— 0,0009
— 0,0023

Obgleich man noch bedeutend grössere Höhenunterschiede mit der Mikrometerschraube messen kann, so sind die bei diesen Versuchen vorkommenden doch völlig hinreichend zur Bestimmung von p, indem bei den zusammengehörigen Versuchen mit beiden Pendeln immer nur sehr kleine Höhenunterschiede von wenigen Hunderttheilen einer Linie vorkommen. Wegen dieses geringen Einflusses von p wird auch das Resultat dieser Abhandlung nicht merklich an Authenticität verlieren, indem ich die Originalbeobachtungen der angeführten acht Versuche nicht bekannt mache.

9.

Wenn man die Mikrometerschraube so weit aufwärts dreht, dass der lange Arm des Fühlhebels bis zu seinem Zeichen am Gehäuse steigt, so wirkt das Uebergewicht des Fühlhebels dem Gewichte der Kugel entgegen und vermindert dadurch die Spannkraft und auch die Länge des elastischen Fadens. Ein Uebergewicht des Fühlhebels ist aber nothwendig, indem er ohne dieses nicht sicher gegen die Kugel drücken würde; man kann dasselbe verkleinern oder vergrössern durch ein Gegengewicht welches sich verschieben lässt. Ich habe dieses Gegengewicht so gestellt, dass die Stahlplatte des Fühlhebels in Gleichgewicht gesetzt wurde, wenn man ihren Mittelpunkt mit einem Gewichte von 32,84 Gran belastete. Ein gleiches Gewicht drückt also der Kugel, während die Pendellänge gemessen wird, entgegen. Um die daraus entstehende Verkürzung des Fadens kennen zu lernen, habe ich die Kugel mit verschiedenen Gewichten belastet und die dadurch entstandenen Verlängerungen mit der Mikrometerschraube gemessen. Da kleinere und grössere Gewichte immer übereinstimmten, so führe ich hier nur das Resultat des grössten von allen an; dieses wog 678,5 Gran und verlängerte das lange Pendel mit der Kugel von Messing um 0,968 p, das kurze um 0,311 p, oder jenes um 0^{L},0873, dieses um 0^{L},0281. Hieraus folgt die Verkürzung, welche der Gegendruck des Fühlhebels verursacht und um welche die unmittelbar gemessenen Längen vergrössert werden müssen,

= 0^{L},0042 und 0^{L},0014.

Für das Pendel mit der leichteren Elfenbeinkugel, welches einen schwächeren Faden hatte, fand ich auf dieselbe Art

0^{L},0082 und 0^{L},0026.

Indessen folgt aus der Elasticität des Fadens noch eine andere Erscheinung, welche ich, obgleich sie keinen Einfluss auf die Resultate hat, doch nicht unerwähnt lassen darf. Wenn man nämlich den Fühlhebel sowohl durch Vorwärts- als Rückwärtsdrehen der Mikrometerschraube einstellt, so zeigt sich jedesmal im ersten Falle eine kleinere Pendellänge als im zweiten; der Unterschied beträgt nach einem Mittel aus allen Versuchen für das lange Pendel mit der Messingkugel 0,045 p und für das kurze 0,020 p, oder 0^{L},0041 und 0^{L},0018. Aus der Ungleichheit dieser Zahlen geht hervor, dass er nicht die Folge eines todten Ganges der Schraube sein kann, welcher nach Herrn Repsold's Versicherung bei so feinen, mit gehöriger Vollkommenheit gearbeiteten Schrauben auch unmerklich ist. Seine Ursache ist vielmehr die Reibung welche der Fühlhebel in seinen Axen erleidet (deren er zwei hat, indem er aus zwei Hebeln zusammengesetzt ist, wovon der erste den zweiten bewegt); nimmt man an, dass man ein Gewicht m auf die Stahlplatte am kurzen Arme des Fühlhebels legen müsste, um die Reibung zu überwinden, so ist die Kraft, welche er gegen die Kugel äussert, beim Aufwärtsschrauben = 32,84 + m, beim Abwärtsschrauben = 32,84 — m, also die Verkürzung des Pendels diesen Kräften proportional und das Pendel beim Aufwärtsschrauben wirklich kürzer als beim Abwärts-

schrauben. Aus der angeführten Grösse der Unterschiede geht hervor, dass m nahe die Hälfte des Uebergewichts von 32,84 Gran betragen muss; in der That erlangt der Fühlhebel, wenn man ihn mit einem Gewichte von dieser Schwere belastet, noch kein freies Spiel. Diese Erklärung des Unterschiedes stimmt mit der Verschiedenheit seiner an beiden Pendeln beobachteten Grösse so nahe überein, dass das Wenige was daran fehlt, wohl den Beobachtungsfehlern oder kleinen zufälligen Aenderungen in der Grösse der Reibung zugeschrieben werden kann, also nicht zu der Annahme eines todten Ganges der Schraube nöthigt. — Die wahre Pendellänge ist das Mittel aus zwei Messungen beim Auf- und Abwärtsschrauben, sowohl wenn der Unterschied von der angegebenen Ursache allein herrühret, als auch wenn ein kleiner todter Gang der Schraube dabei mitwirkt.

10.

Ich habe oben schon gesagt, dass ich die Vergleichung der Toise mit der Toise du Pérou der Güte der Herren ARAGO und ZAHRTMANN verdanke. Ein darüber von diesen Herren angefertigtes Certificat, welches ich in der V. Beilage mittheile, gibt an, dass die Länge um eine sehr kleine Quantität, nämlich $0^{L},0008$ kürzer ist als das Original der Toise.

Die Toise ist 19 Lin. breit und 4,2 dick und mit Sorgfalt gearbeitet. Ihr Gebrauch bei den Pendelversuchen setzt voraus, dass die Entfernung der Endflächen, in der Axe der Stange gemessen, die wahre Länge ist; denn die Kugel am Abwickelungscylinder liegt immer auf dieser Mitte und mit der Mitte steht die Toise auf der horizontalen Ebene am Cylinder (i). Da ich aber nicht weiss, ob die Vergleichung mit der Toise du Pérou sich gleichfalls auf die Mitte bezieht, so habe ich für nöthig gehalten, zu untersuchen, ob die beiden Endflächen senkrecht auf der Axe der Toise stehen. Dieses hat sich wirklich so gezeigt, durch eine Prüfungsart, welche über ein Tausendtheil einer Linie keinen Zweifel lässt. Das Mittel was ich zu dieser Untersuchung der Toise angewandt habe, bot der Pendelapparat selbst dar. Es kommt nämlich nur darauf an, die Berührungspunkte der Kugel am Abwickelungscylinder und der Toise durch Verschiebung des Aufhängungsrahmens zu verändern und durch die Mikrometerschraube zu prüfen, ob die Kugel des angehängten Pendels immer eine gleiche Höhe behält, oder ob diese sich durch das Verschieben verändert. Um die der Ausführung dieser Prüfung im Wege stehende Schwierigkeit zu beseitigen, welche darin liegt, dass die Kugel am Abwickelungscylinder nicht weit über die Mitte der Toise hinaus zurückgeschoben werden kann, indem die grosse eiserne Stange dieses verhindert, ersuchte ich Herrn REPSOLD, einen Abwickelungscylinder zu verfertigen, welcher statt der Kugel eine abgerundete Spitze hat, so dass sein Berührungspunkt mit der Toise weiter rückwärts liegt. Fig. 4, Taf. II ist derselbe dargestellt.

Mittelst dieser Einrichtung habe ich fünf Punkte auf jeder Endfläche der Toise untersucht, nämlich den Mittelpunkt und die 0,8 Lin. und 1,6 Lin. nach beiden Seiten von ihm entfernten Punkte. Um die Art wie dieses geschah deutlich angeben zu können, werde ich die beiden Punkte, welche zwischen dem Mittelpunkte und derjenigen Seite der Toise liegen, auf welcher die Aufschrift und ein eingetheilter halber Fuss befindlich sind, durch ihre positiv genommenen Entfernungen von der Axe, also durch + 0,8 und + 1,6; die nach der entgegengesetzten Seite liegenden durch — 0,8 und — 1,6 bezeichnen; die Endfläche, welche sich an dem eingetheilten Ende der Toise befindet, werde ich die erste, die entgegengesetzte die zweite Fläche nennen.

Als die Toise so aufgestellt war, dass die Eintheilung sich unten und die Aufschrift vorn befand, zeigte die Mikrometerschraube (in entgegengesetzten Lagen des Fühlhebels im Mittel), indem die Spitze des Abwickelungscylinders mit den verschiedenen Punkten der zweiten Fläche in Berührung gebracht wurde:

+ 1,6	$0^{R},201$
+ 0,8	0,198
0,0	0,189
— 0,8	0,175
— 1,6	0,171

Darauf wurde die Toise umgewandt, so dass die Aufschrift hinten war; in diesem Zustande fanden sich, für dieselben Punkte, die Angaben des Mikrometers:

+ 1,6	$0^{R},182$
+ 0,8	0,179
0,0	0,158
— 0,8	0,144
— 1,6	0,144

Dann wurde sie umgekehrt, so dass die Eintheilung oben und die Aufschrift vorn war, wodurch der Abwickelungscylinder mit den Punkten der ersten Fläche in Berührung kam, für welche das Mikrometer angab:

+ 1,6	$0^{R},353$
+ 0,8	0,345
0,0	0,336
— 0,8	0,333
— 1,6	0,330

Endlich wurde sie umgewandt, so dass die Aufschrift hinten war; das Mikrometer zeigte für

+ 1,6	0,946
+ 0,8	0,939
0,0	0,937
— 0,8	0,938
— 1,6	0,935

Durch das Umwenden der Toise wird ein Fehler im Parallelismus derselben mit dem Cylinder, welcher den Fühlhebel trägt, unschädlich, sowie dasselbe ihn in doppelter Grösse zeigen muss. Daher gibt das Mittel aus den beiden ersten Versuchen die wahre Bestimmung der Punkte auf der zweiten Fläche gegen die Axe, das Mittel aus den beiden letzten dasselbe für die erste Fläche. Man erhält also die Höhen über dem Mittelpunkte ($p = 0,0902$):

	Erste Fläche.	Zweite Fläche.
+ 1,6	+ 0,0012	+ 0,0016
+ 0,8	+ 0,0005	+ 0,0014
— 0,8	— 0,0001	— 0,0013
— 1,6	— 0,0004	— 0,0014

So klein diese Abweichungen sind, darf man sie doch nicht als Fehler in der Construction der Toise annehmen; sie rühren, wenigstens zum Theil, von einer kleinen Krümmung her, welche die aufgestellte Toise zeigte. Es wurden nämlich die Entfernungen beider Enden und der Mitte der Toise von dem vor ihr herabhängenden Pendelfaden gemessen und auf diese Weise gefunden, dass die Seite der Aufschrift convex, die entgegengesetzte concav war. Die Entfernung der Mitte von der geraden Linie durch beide Endpunkte fand ich dadurch:

1. Versuch	0,18	Lin.
2. „	0,14	„
3. „	0,11	„
4. „	0,05	„

in welchen Angaben aber einige Hunderttheile der Linie unsicher sein können. Diese Krümmung der Toise muss Höhenunterschiede der verschiedenen Punkte der beiden Endflächen geben, welche in demselben Sinne sind wie die beobachteten. Nimmt man die Sagitte für die beiden ersten Versuche über die erste Fläche = 0,08, für die über die zweite Fläche = 0,16, und betrachtet man die Seitenflächen der Toise als concentrische Cylinderflächen, so werden die Endflächen, falls sie senkrecht auf den Seitenflächen stehen, verlängert in der Axe des Cylinders zusammentreffen, und hieraus werden Höhenunterschiede der Punkte auf den Endflächen entstehen, welche für die erste + 0,0006, + 0,0003, — 0,0003, — 0,0006, und für die zweite + 0,0012, + 0,0006, — 0,0006, — 0,0012 betragen und mit dem Resultate der Versuche ziemlich nahe übereinstimmen. Man könnte eine noch grössere Uebereinstimmung erlangen, wenn man, ohne die Sagitte zu ändern, eine andere Krümmung annähme. Allein die Versuche selbst sind nicht so sicher, als man mit der Mikrometerschraube messen kann; denn da es nothwendig war, das Gehäuse des Apparats bei dem Verschieben des Aufhängungsrahmens zu öffnen, so kann ein Einfluss der Temperatur übrig geblieben sein, obgleich ich ihn so viel als möglich zu vermeiden suchte. Ich glaube daher nicht, dass man aus diesen Versuchen etwas anderes folgern darf, als dass der Parallelismus der Endflächen, wenn die Toise auf eine Ebene gelegt und dadurch vollkommen gerade geworden ist, nirgends einen 0,001 übersteigenden Fehler hat.

11.

Die Schwingungsweiten beider Pendel sind auf einer Scale gemessen, welche eine in halbe Linien getheilte gerade Linie, und 1276,5 Lin. von dem Aufhängepunkte des langen Pendels, 412,5 Lin. von dem des kurzen entfernt ist. Die Entfernung der Grenzen der Bewegung der Pendel auf dieser Scale, in Pariser Linien gemessen, ist in der mit dem Buchstaben μ überschriebenen Columne der Originalbeobachtungen angegeben.

Indessen darf bei der Berechnung des Einflusses der Grösse der Schwingungen auf die Zeit derselben nicht unberücksichtigt bleiben, dass die Scale sich nicht in der Schwingungsebene des Pendels, sondern 18 Lin. hinter derselben befindet, woraus folgt, dass man die Weiten grösser sieht als sie wirklich sind. Bei dem langen Pendel wurde μ mit einem Fernrohre beobachtet, welches 18 Fuss = 2592 Lin. von der Scale entfernt und etwas seitwärts gestellt war, so dass man damit neben dem Uhrpendel vorbeisehen konnte; die wahre Schwingungsweite ist daher

$$= \mu \cdot \frac{2574}{2592} = \frac{143}{144} \cdot \mu$$

wodurch man die grösste Entfernung des Pendels von der Lothlinie (u') aus der Formel

$$\operatorname{tg} u' = \frac{143 . \mu}{2 \times 144 \times 1276,5} = \frac{143 . \mu}{367632}$$

erhält. Drückt man die Schwingungszeit durch diese Tangente aus, so erhält man sie

$$= t\left\{1 + \frac{1}{16}\operatorname{tg} u'^2 - \frac{37}{1024}\operatorname{tg} u'^4 + \text{u. s. w.} \ldots\right\}$$

oder, da bei meinen Versuchen nur das vom Quadrate abhängige Glied merklich ist,

$$= t\{1 + \alpha.\mu\mu\}$$

wo $\alpha = \left(\frac{143}{1470528}\right)^2$ und $\log\alpha = 1{,}97574 - 10$ ist.

Bei dem kurzen Pendel lagen die Grenzen der Schwingungen noch in dem Raume, welchen man durch das zwischen dem Apparate und der Uhr befindliche Objectiv übersehen konnte und wurden daher durch dasselbe Fernrohr beobachtet, welches die Coincidenzen angab. Hierbei ist der Einfluss der Entfernung der Scale vom Pendelfaden weit grösser und es fand sich durch eine zweite Scale, welche in die Ebene der Bewegung gebracht wurde, dass 10 Lin. derselben 11 Lin. der entfernteren deckten. Man hat also für das kurze Pendel die wahre Schwingungsweite

$$= \frac{10}{11}\mu,$$

ferner $$\text{tg}\, u' = \frac{10\mu}{2 \times 11 \times 412{,}5} = \frac{2\mu}{1815}$$

und die Schwingungszeit

$$= t\{1 + \alpha.\mu\mu\},$$

wo $\alpha = \frac{1}{(3630)^2}$, $\log\alpha = 2{,}88018 - 10$ ist.

12.

Nachdem ich alle Einrichtungen und Umstände, deren Kenntniss nöthig zu sein scheint, angezeigt habe, werde ich jetzt die Art der Berechnung der Versuche angeben; zuerst wie die Dauer einer Schwingung in Secunden der Uhr P bestimmt wurde.

Ich fange mit dem langen Pendel an. Im 5. Art. ist die Beobachtungsart schon beschrieben und es ist dort angeführt, wie mehrere einzelne Beobachtungen zu 9 arithmetischen Mitteln vereinigt worden sind, deren jedes etwa 500 Schwingungen von dem vorhergehenden oder folgenden entfernt ist. Diese Mittel wurden zuerst auf runde Zahlen von Schwingungen, immer genau um 500 von einander verschieden, reducirt, wobei die Dauer einer Schwingung so angenommen wurde, wie sie aus der Vergleichung des ersten und letzten Mittels folgt; man findet die Resultate dieser Reduction unter der Aufschrift „Reducirte Mittel der Beobachtungen" angeführt und ich habe dabei nur zu erinnern, dass die Annahme gleichzeitiger Schwingungen bei der Reduction auf die runden Zahlen keinen merklichen Fehler erzeugt, wenn auch der Strenge nach die früheren Schwingungen wegen der grösseren Winkel etwas länger dauern als die späteren. Die bei diesen reducirten Mitteln angegebenen Schwingungsweiten und Temperaturen sind nicht unmittelbar beobachtet, indem in derselben Zeit, für welche diese Angaben gelten, die Coincidenzen wahrgenommen werden mussten; allein sie sind immer aus zwei Beobachtungen am Anfange und am Ende dieser Coincidenzen interpolirt und dadurch noch etwas genauer geworden, als eine einzelne sie gegeben haben würde. Durch diese Werthe von μ, l' und l''' wurden, nach den Formeln des 7. und 11. Art., der Unterschied y der Dauer einer Schwingung von der für $u' = 0$ und die mittlere Temperatur der Messung der Länge des Pendels $= L$ stattfindenden, diese letztere als Einheit angenommen, nämlich

$$y = \alpha.\mu\mu + 0{,}000005949\left(\frac{l' + l'''}{2} - L\right)$$

für jedes der 9 Momente berechnet. Der Einfluss dieses Unterschiedes auf jedes der 8 Intervalle $= \int y\,dt = Y$, wurde durch mechanische Quadratur bestimmt, wobei aber die zweiten und folgenden Differenzen die letzte in die Rechnung aufgenommene Decimale oft nicht mehr ändern, so dass dann Y geradezu dem Producte der Zwischenzeit in die halbe Summe der Werthe von y, für den Anfang und das Ende des Intervalls, gleich wird.

Wenn daher t die Dauer einer Schwingung des Pendels für einen unendlich kleinen Schwingungswinkel und die mittlere Temperatur der beiden Messungen der Länge bezeichnet, Y, Y', Y'', u. s. w. . . . die Werthe von $\int y\,dt$ für die verschiedenen Intervalle, so sind die Ausdrücke der Zwischenzeiten:

$$500\,t + Y$$
$$500\,t + Y'$$
$$500\,t + Y''$$
u. s. w.

oder wenn der Bequemlichkeit wegen $500\,t = h + x$ gesetzt wird, wo h ein genäherter Werth von $500\,t$, also x eine kleine, durch die Beobachtungen zu bestimmende Verbesserung ist,

$$h + Y + x$$
$$h + Y' + x$$
$$h + Y'' + x$$
u. s. w.

Bezeichnet man ferner durch T die Uhrzeit des ersten Moments und durch z ihren Beobachtungsfehler, so hat man, wenn man zuerst $h + Y + x$ zu $T + z$, dann $h + Y' + x$ zu der Summe u. s. w. addirt, die Ausdrücke der Uhrzeiten der 9 beobachteten Momente, und wenn man die wirklich beobachteten davon abzieht, die 9 Gleichungen:

$$0 = z$$
$$0 = n^{(1)} + z + x$$
$$0 = n^{(2)} + z + 2x$$
$$\cdots\cdots$$
$$0 = n^{(8)} + z + 8x$$

deren Auflösung nach der Methode der kleinsten Quadrate

$$x = -\frac{1}{60}\left\{4n^{(8)} + 3(n^{(7)} - n^{(1)}) + 2(n^{(6)} - n^{(2)}) + n^{(5)} - n^{(3)}\right\}$$

$$z = -\frac{1}{9}\left\{n^{(1)} + n^{(2)} + \ldots + n^{(8)}\right\} - 4x$$

ergibt. Die Substitution der gefundenen Werthe von x und z in die Ausdrücke der 9 Zeiten gibt die Zahlen, welche in der „Rechnung" überschriebenen Columne der Versuche vorkommen, und die Vergleichung derselben mit den beobachteten die am vortheilhaftesten vertheilten Fehler. Ich erinnere noch, dass man die angewandten Werthe von Y, Y', Y''...., welche ich besonders anzuführen für unnöthig hielt, leicht aus der „Rechnung" überschriebenen Columne herausbringt, wenn man von den Zwischenzeiten, welche sie ergibt, $500\,t$ abzieht.

Für das kurze Pendel habe ich die Rechnung in derselben Form geführt; nur enthalten hier die Intervalle die zwischen zwei unmittelbar beobachteten Coincidenzen liegende Anzahl der Schwingungen, also eine Zahl, welche theils wegen der Beobachtungsfehler, theils wegen der abnehmenden Schwingungswinkel nicht ganz gleich bleibt. Dieses macht indessen keine Aenderung in der Art die Rechnung zu führen, wenn man nur die Aufmerksamkeit anwendet, den Näherungswerth der Schwingungszeit, mit welchem man die oben durch h bezeichnete Grösse berechnet, dem endlichen Resultate so nahe anzunehmen, dass die der Schärfe nach für alle Intervalle nicht ganz gleichen Werthe von x nicht mehr um solche Grössen verschieden sind, bis auf welche die Rechnung richtig geführt werden soll. Da bei Versuchen mit dem kurzen Pendel 11 Momente vorkommen, so sind die Formeln:

$$x = -\frac{1}{220}\left\{5n^{(10)} + 4(n^{(9)} - n^{(1)}) + 3(n^{(8)} - n^{(2)}) + 2(n^{(7)} - n^{(3)}) + n^{(6)} - n^{(4)}\right\}$$

$$z = -\frac{1}{11}\left\{n^{(1)} + n^{(2)} + \ldots + n^{(10)}\right\} - 5x$$

anzuwenden.

Diese Vorschriften beziehen sich auf die mit der Kugel von Messing gemachten Versuche. Bei der Anwendung der Kugel von Elfenbein nahmen aber die Schwingungswinkel so schnell ab, dass mit dem langen Pendel nur 3, mit dem kurzen nur 5 Momente beobachtet werden konnten. Für jenes hat man daher:

$$x = -\frac{1}{2}n^{(2)}$$

$$z = -\frac{1}{3}(n^{(1)} + n^{(2)}) - x$$

für dieses:

$$x = -\frac{1}{10}\left\{2n^{(4)} + n^{(3)} - n^{(1)}\right\}$$

$$z = -\frac{1}{5}\left\{n^{(1)} + n^{(2)} + n^{(3)} + n^{(4)}\right\} - 2x$$

Allgemein ist für $m+1$ Momente:

$$x = -\frac{6}{m.m+1.m+2}\left\{m.n^{(m)} + (m-2)(n^{(m-1)} - n^{(1)}) + (m-4)(n^{(m-2)} - n^{(2)}) + \text{u. s. w.}\ldots\ldots\right\}$$

$$z = -\frac{1}{m+1}\left\{n^{(1)} + n^{(2)} + \ldots + n^{(m)}\right\} - \frac{m}{2}x.$$

13.

Die auf diese Art gefundenen und der Vorschrift im 6. Art. gemäss in mittlerer Zeit ausgedrückten Schwingungszeiten der Pendel müssen von dem Einflusse befreit werden, welchen die Luft darauf äussert.*) Wenn man die Masse eines in einer Flüssigkeit sich bewegenden Körpers durch m, die Masse der durch denselben aus dem Wege gedrängten Flüssigkeit durch m' bezeichnet, so hat man die beschleunigende Kraft, welche der Körper erfährt, seit NEWTON,

$$= \frac{m - m'}{m}$$

angenommen und dieser Annahme gemäss auch die Pendelversuche reducirt.

Diese Annahme gründet sich darauf, dass man die bewegende Kraft welche der Körper erfährt, und welche $= m - m'$ ist, auf die im Körper befindliche Masse m vertheilt hat. Sie muss aber nicht nur auf diese, sondern auf alle Massentheile welche mit dem Körper in Bewegung gesetzt werden, also auch auf die bewegten Theile der Flüssigkeit vertheilt werden, wodurch der Nenner der Formel, welche die beschleunigende Kraft ausdrückt, nothwendig grösser wird als m.

Ich werde die Drehung eines Körpers um eine horizontale Axe betrachten und die Entfernung seines Schwerpunkts von derselben durch s bezeichnen; seine Masse durch m; die Summe aller Massentheile in das Quadrat ihrer Entfernung von der Axe multiplicirt durch $m(\mu + ss)$, wo also $m\mu$ das Moment der Trägheit für den Schwerpunkt ist; den Winkel der durch die Drehungsaxe und den Schwerpunkt gelegten Ebene mit der Lothlinie durch u; die Länge des einfachen Secundenpendels durch λ. Nach diesen Bezeichnungen hat man bekanntlich, durch den Satz von der Erhaltung der

*) [Vgl. auch die Bemerkungen Astron. Nachr. 6, p. 149 (221 d. a. Verz.), sowie Beilage VI und Abh. 138.]

lebendigen Kraft, die Differentialgleichung der Bewegung im leeren Raume:

$$c = m(\mu + ss)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 2\pi^2\lambda . ms . \cos u.$$

Bewegt sich aber der Körper in einer Flüssigkeit, so gehört auch diese zum bewegten Systeme und es ist einleuchtend, dass alle drei Glieder der Gleichung dadurch Veränderungen erfahren. Zuerst bewirkt der Stoss des Körpers gegen immer andere Theile der Flüssigkeit in jedem Punkte des Raums durch welchen der Körper sich bewegt, einen Verlust an lebendiger Kraft des ganzen Systems, also eine Verminderung von c, welche von der Geschwindigkeit und der äusseren Figur des Körpers abhängt und welche ich durch $\varphi\left(\frac{du}{dt}\right)$ andeuten werde; während des Zeittheilchens dt aber bewegt sich der Körper um du, wodurch die Verminderung von c, in diesem Zeittheilchen $= du\,\varphi\left(\frac{du}{dt}\right)$ wird, also c selbst, nach einer endlichen Zeit, sich in $c - \int du\,\varphi\left(\frac{du}{dt}\right)$ verwandelt. Ferner kommt zum zweiten Gliede der Gleichung die Summe aller Theilchen der Flüssigkeit, jedes mit dem Quadrate seiner Geschwindigkeit multiplicirt, oder $\int v v\,dm'$ hinzu. Endlich wird dem dritten Gliede die Summe der Producte des auf jeden Punkt der Oberfläche wirkenden, nach der Richtung der Schwere zerlegten Drucks, in die Entfernung von der durch die Drehungsaxe gelegten horizontalen Ebene und in $2\pi^2\lambda$ multiplicirt, hinzugefügt; von dieser Summe kann man leicht zeigen, dass sie

$$= 2\pi^2\lambda . m's' \cos u$$

ist, wo s' die Entfernung des Schwerpunkts der äusseren Figur des Körpers von der Axe und m' die aus dem Wege gedrängte Flüssigkeit bezeichnet. Liegen die Schwerpunkte der Masse und der Figur des Körpers und die Drehungsaxe in einer Ebene, welches ich der Kürze wegen annehmen werde, indem der entgegengesetzte Fall sich leicht darauf reduciren lässt, so vereinigen sich das letzte Glied und das was die Flüssigkeit ihm hinzusetzt, und man erhält die Differentialgleichung der Bewegung des Körpers in der Flüssigkeit:

$$c - \int du\,\varphi\left(\frac{du}{dt}\right) = m\{\mu + ss\}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \int v v\,dm' - 2\pi^2\lambda(ms - m's')\cos u.$$

Bisher hat man nur die von der Flüssigkeit herrührenden Theile des ersten und letzten Gliedes dieser Gleichung in Rechnung gebracht. Jener erzeugt den Widerstand, von welchem gezeigt worden ist, dass er auf die Schwingungszeit keinen Einfluss hat, sondern nur den Winkel verkleinert. Im letzten Gliede aber hat man bisher $s = s'$ gesetzt, obgleich dieses nur dann erlaubt ist, wenn das Pendel aus homogenen Theilen besteht. Der richtige Ausdruck von $ms - m's'$ ist aber, wenn M, M', M''... die Massen der einzelnen Theile, δ, δ', δ''... ihre specifischen Schweren, S, S', S''... die Entfernungen ihrer Schwerpunkte von der Axe, Δ die specifische Schwere der Flüssigkeit bezeichnen:

$$ms\left\{1 - \frac{\frac{MS}{\delta} + \frac{M'S'}{\delta'} + \frac{M''S''}{\delta''} + \text{u. s. w.}\ldots}{MS + M'S' + M''S'' + \text{u. s. w.}\ldots} \cdot \Delta\right\}$$

Das was dem zweiten Gliede hinzugefügt werden muss, ist allgemein vernachlässigt worden.

Die vollständige Theorie der Bewegung eines Pendels in einer Flüssigkeit setzt die über die ganze Masse derselben ausgedehnte Integration von $v v\,dm'$ voraus, welche man aber bekanntlich nicht erhalten kann, indem sie auf die allgemeine Schwierigkeit zurückkömmt, welche die Fortschritte der Hydrodynamik gehemmt hat. Wenn man voraussetzen wollte, dass jedes Theilchen der Flüssigkeit nur so lange in Bewegung ist als der schwingende Körper, sodass es seine Bewegung augenblicklich verliert, wenn dieser in Ruhe versetzt wird, so würde die Geschwindigkeit offenbar der des Körpers proportional, übrigens aber von der Figur des Körpers und dem Orte des Theilchens abhängig sein; in diesem Falle erhielte man also:

$$\int v v\,dm' = m'K\left(\frac{du}{dt}\right)^2$$

wo K eine beständige Grösse ist, und die Schwingungszeit würde man durch Integration der Gleichung

$$c = m\left\{\mu + ss + \frac{m'}{m}K\right\}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 2\pi^2\lambda(ms - m's')\cos u$$

erhalten, oder das Pendel würde sich bewegen wie ein einfaches, dessen Länge

$$= \frac{\mu + ss + \frac{m'}{m}K}{s - \frac{m'}{m}s'}$$

ist; der bisher vernachlässigte Theil würde also nur das Moment der Trägheit vermehren.

Obgleich diese Annahme der wirklichen Bewegung der Flüssigkeit, selbst für kleine Geschwindigkeiten, wahrscheinlich nicht entspricht, so kann man dasselbe Resultat welches sie gegeben hat, doch durch eine Voraussetzung über die Form des Integrals $\int v v\,dm'$ erhalten, welche so allgemein ist, dass man das Resultat

nicht mehr als hypothetisch betrachten darf. Von welcher Beschaffenheit nämlich auch dieses Integral sein mag, so lässt sich immer annehmen, dass der Werth welchen es allgemein zur Zeit t hat, nach der Vollendung zweier Schwingungen, wenn Ort und Bewegung des Pendels wieder dieselben geworden sind, wiederkehrt; dieses muss dann stattfinden, wenn die Umstände der anfänglichen Bewegung durch die Widerstände verschwunden sind und Alles in den Beharrungszustand gekommen ist. Ist nun die Schwingungszeit diejenige, in welcher der Winkel nt um 180^0 wächst, wo n eine Constante, so hat das Quadrat der Geschwindigkeit der Flüssigkeit in jedem Punkte des Raums einen Ausdruck, welcher seinen Werth wiedererlangt, wenn nt um 360^0 wächst; ich werde ihn durch

$$u'u'nn\{a^{(0)}+a^{(1)}\cos(nt+A^{(1)})+a^{(2)}\cos(2nt+A^{(2)})+ \\ +\text{u. s. w.}\ldots\ldots\}$$

bezeichnen, wo u' den Schwingungswinkel des Pendels bedeutet und $a^{(0)}, a^{(1)}, \ldots A^{(1)}, A^{(2)}\ldots$, im Falle der Proportionalität der Oscillationen der Flüssigkeit und des Pendels beständige Grössen, im entgegengesetzten Falle von u' abhängig sein werden. Das über den ganzen durch die Flüssigkeit gefüllten Raum ausgedehnte Integral $\int vv\,dm'$ muss also die Form

$$m'u'u'nn\{b^{(0)}+b^{(1)}\cos(nt+B^{(1)})+b^{(2)}\cos(2nt+B^{(2)}) \\ +\text{u. s. w.}\ldots\ldots\}$$

annehmen, wo $b^{(0)}, b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots$ von der Figur des Körpers, und, allgemein zu reden, auch von dem Schwingungswinkel abhängen. Wenn aber der schwingende Körper von beiden Seiten gleichförmig ist, so dass er bei der Bewegung nach beiden Seiten der Flüssigkeit eine gleiche Oberfläche darbietet, so muss $\int vv\,dm'$, auch nachdem nt um 180^0 gewachsen ist, denselben Werth wiedererlangen und hierdurch wird man den gegebenen Ausdruck abkürzen können, indem diese Bedingung durch die Construction des Pendels immer erreicht werden kann. In diesem Falle müssen nämlich die von nt, $3nt$, $5nt$, u. s. w.... abhängigen Glieder verschwinden, weshalb der Ausdruck:

$$\int vv\,dm' = m'u'u'nn\{b^{(0)}+b^{(2)}\cos(2nt+B^{(2)})+ \\ +b^{(4)}\cos(4nt+B^{(4)})+\text{u.s.w.}\}$$

übrig bleibt.

Die Einwirkung dieses Ausdrucks auf die Bewegung des Pendels habe ich in der VI. Beilage untersucht und gefunden, dass sie im Falle $\frac{m'}{m}$ eine kleine Grösse ist, deren Quadrat u. s. w. man vernachlässigen darf, auf die Ausdehnung der Schwingungen keinen Einfluss hat, aber die Länge des einfachen Pendels, welches mit dem sich in der Flüssigkeit bewegenden zusammengesetzten gleichzeitig schwingt,

$$=\frac{\mu+ss+\frac{2m'}{m}\left\{b^{(2)}\cos B^{(2)}-2b^{(4)}\cos B^{(4)}+3b^{(6)}\cos B^{(6)}-\text{etc.}\ldots\right\}}{s\left\{1-\frac{m's'}{ms}\right\}}=\frac{\mu+ss+\frac{m'}{m}K}{s\left(1-\frac{m's'}{ms}\right)}$$

ergibt.

Ob die Grösse K, welche hier zum Momente der Trägheit des Pendels hinzugekommen, constant oder mit den Schwingungswinkeln veränderlich ist, hängt davon ab, ob die Ausdehnung der Bewegungen der Flüssigkeit den Schwingungswinkeln proportional ist oder nicht. Die Beobachtungen müssen darüber entscheiden; sie werden zeigen, dass der Einfluss der Luft constant ist, wenn Reihen von Coincidenzen, welche bei grösseren Schwingungswinkeln anfangen und bei kleineren enden, sich durch die gewöhnliche Reduction auf unendlich kleine Winkel vollständig darstellen lassen. Man wird weiter unten sehen, dass dieses wenigstens mit starker Annäherung der Fall ist.

Für ein Pendel welches an einem Faden aufgehängt und dessen Masse in einem kleinen Raume vereinigt ist, kann die Ausdehnung der Bewegung aller Theile $= su'$ angenommen werden; im Falle der Proportionalität enthalten die Coefficienten $b^{(2)}$, $b^{(4)}$ ... dann den Factor ss, welcher für ein solches Pendel weit grösser ist als μ, sodass das Verhältniss $ss:ss+\mu$ sehr nahe $=1$ ist. Dadurch wird die Einwirkung der Flüssigkeit von der Länge des Pendels unabhängig, oder es hat das im Ausdrucke des gleichzeitig schwingenden einfachen Pendels, welchen ich nun durch

$$\frac{\mu+ss}{s-\frac{m'}{m}s}\left(1+\frac{m'}{m}k\right)$$

bezeichnen werde, vorkommende k für verschiedene Längen sehr nahe einen gleichen Werth.

14.

Dieses k hat man bisher als verschwindend angenommen, allein es geht aus der gegebenen Darstellung hervor, dass kein Grund dazu vorhanden ist; da die Grösse dieses Coefficienten unbekannt ist, so kann man nur durch Versuche, welche auf seine Erfindung gerichtet sind, entscheiden, wie gross sein Einfluss auf das Resultat der Pendelversuche ist.

Das sich am ersten darbietende Mittel, aus den Versuchen richtige Resultate zu erhalten, wäre vielleicht, das Pendel im leeren Raume schwingen zu lassen; allein ich fürchte, dass dieses Schwierigkeiten haben würde, welche Zweifel anderer Art erzeugen könnten. Ein zweites Mittel ist, zwei Pendel schwingen zu lassen, welche ihrer Figur nach gleich, aber ihrer Masse nach sehr verschieden sind. In diesem Falle wird, da der Coeffieient k für beide gleich ist, die Reduction auf den leeren Raum, welche der Masse umgekehrt proportional ist, sehr verschieden sein und man wird sie aus beiden Versuchsreihen eliminiren können.

Diese Mittel habe ich angewandt, indem ich ausser der Kugel von Messing eine von Elfenbein von gleicher Grösse schwingen liess, welche 4,6 Mal so leicht ist, und daher dem Coefficienten k eine bedeutend grössere Einwirkung auf das Resultat gibt.

Der Berechnung der Versuche mit beiden Kugeln habe ich die Form gegeben, welche die vollständigste Uebersicht über das Verhalten der einzelnen gegeneinander gewährt. Wenn die in mittleren Secunden ausgedrückte beobachtete Schwingungszeit für einen unendlich kleinen Schwingungswinkel t genannt wird, die Länge des einfachen Secundenpendels λ, so ist die Länge des einfachen Pendels, welches in derselben Zeit schwingen würde,

$$l = \lambda tt;$$

hätte man aber die Beobachtungen im leeren Raume gemacht, so würde man eine kleinere Länge gefunden haben, nämlich:

$$l' = \lambda tt \cdot \frac{1 - \frac{m's'}{ms}}{1 + \frac{m'}{m}k}.$$

Die Länge des Pendels ist aber von der, im 8. Art. durch F bezeichneten, unbekannten Entfernung abhängig gemessen; sie ist nämlich für das lange Pendel gleich der Summe der Längen dieses F und der Toise, beide für die Temperatur des Versuchs genommen, um die Wirkung der Elasticität des Fadens vermehrt und um die Angabe der Mikrometerschraube vermindert; für das kurze gleich der Summe derselben Quantitäten mit Ausschluss der Toise; ich bezeichne beide durch $F + h$ und $F + h'$. Fügt man dieser Länge die Reduction des zusammengesetzten Pendels auf das einfache $= c$ hinzu, so erhält man

$$F + h + c,$$

welches dieselbe aber noch von den unbekannten λ und k abhängige einfache Pendellänge l' ist, welche die Schwingungszeit ergeben hat. Man hat also:

$$F + h + c = \lambda tt \cdot \frac{1 - \frac{m's'}{ms}}{1 + \frac{m'}{m}k};$$

oder wenn man, um mit kleineren unbekannten Grössen zu rechnen, $\lambda = 440^{L}81 + \varepsilon$ setzt:

$$F = 440{,}81\,tt - h - c + 440{,}81\,tt.\varepsilon\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) - 440{,}81\,tt \cdot \frac{m's'}{ms} - (F + h + c)\frac{m'}{m}k.$$

Aus den Beobachtungen mit dem kurzen Pendel erhält man einen ähnlichen Ausdruck für F, und aus der Vergleichung beider ε abhängig von k. Allein bei den Versuchen mit der Kugel von Messing ist der Einfluss von k auf die Länge des einfachen Secundenpendels, $440^{L}81 + \varepsilon$, weit kleiner, als bei denen mit der Kugel von Elfenbein; die aus beiden gefundenen Werthe von ε werden also k mit Vortheil ergeben, und man wird dadurch das Endresultat frei von diesem unbekannten Coefficienten erhalten.

Die in den eben angeführten Formeln vorkommenden Coefficienten von $\frac{m'}{m}k$, welche übrigens nur näherungsweise bekannt sein dürften, finden sich aus der Verbindung zweier Beobachtungen mit beiden Pendeln, unabhängig von der Einwirkung der Luft; nämlich:

$$F + h + c = \frac{(h + c - h' - c')}{tt - t't'} \cdot tt;$$

$$F + h' + c' = \frac{(h + c - h' - c')}{tt - t't'} \cdot t't'.$$

Ich muss nun noch anführen, welche Bestimmungen der Berechnung von $\frac{m'}{m}$ zum Grunde gelegt worden sind.

15.

Die Dichtigkeit der Luft welche ich angewandt habe, gründet sich auf die schönen Versuche der Herren Biot und Arago, welche fanden, dass Quecksilber 10475,6 Mal schwerer ist als atmosphärische Luft bei dem Barometerstande $= 0^{m}76$ und der Temperatur des schmelzenden Eises. Brisson fand Quecksilber 13,59995 Mal schwerer als Wasser, beide in der Temperatur des Eispunkts angenommen*). Endlich fand Hällström**) die Dichte des Wassers für den Eispunkt $= 0{,}9997143$, die des dichtesten $= 1$ gesetzt. Hieraus folgt, dass

*) Hällström. De pondere corporum specifico, ad normalem gradum caloris reducendo. Aboae 1809, p. 9.

**) Hällström. Dissertatio de mutationibus voluminis aquae destillatae. Aboae 1802.

das dichteste Wasser 770,488 Mal schwerer ist als Luft bei $0^m,76$ Barometerhöhe und der Temperatur des schmelzenden Eises; oder die Dichte der Luft im Allgemeinen für die auf den Eispunkt reducirte Barometerhöhe b und die Temperatur x

$$= \frac{1}{770,488} \cdot \frac{b}{0,76} \cdot \frac{1}{1+x.0,00375}.$$

Da das Barometer der Sternwarte, dessen wegen der Capillarität und des Theilungsfehlers berichtigte Höhen bei den Originalbeobachtungen angegeben sind, eine in Pariser Linien getheilte Scale besitzt, so ist, wenn β seine angegebene Höhe und τ seine Temperatur bezeichnen,

$$b = \frac{\beta\{1+(\tau-16,25)\,0,000018782\}}{443,296\left(1+\frac{\tau}{5550}\right)}$$

und daher die Dichte der Luft am schwingenden Pendel, wo l' für x (Art. 7) zu setzen ist,

$$\Delta' = \frac{\beta}{337,006\times 770,488\,(1+\tau.0,0001614)\,(1+l'.0,00375)}.$$

Die specifische Schwere des Pendels mit der Kugel von Messing habe ich für die Temperatur des schmelzenden Eises 8,18955 Mal so gross gefunden als die des dichtesten Wassers; bei der Temperatur l' ist sie daher:

$$\Delta = \frac{8,18955}{\{1+l'.0,000018782)\}^3}.$$

Man erhält daher, da für dieses Pendel $1-\frac{m's'}{ms}$ von $1-\frac{m'}{m}$ nicht merklich verschieden ist,

$$\frac{m's'}{ms} = \frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{\alpha\beta\,(1+l'.0,0000564)}{(1+\tau.0,0001614)\,(1+l'.0,00375)}$$

wo

$$\alpha = \frac{1}{337,006\times 770,488\times 8,18955};\quad \log\alpha = 3,67234-10$$

ist.

Die specifische Schwere der Kugel von Elfenbein ist in derselben Temperatur, in welcher die Versuche damit gemacht sind, $= 1,78337$ gefunden worden; hier ist aber wegen der Verschiedenheit der Materien aus welchen das Pendel besteht, $\frac{s'}{s}$ etwas von der Einheit verschieden, weshalb ich nach der im 13. Art. gegebenen Formel gerechnet, dabei die Massen und Schwerpunkte der einzelnen Theile der VII. Beilage gemäss angenommen und die specifische Schwere der Theile von Messing $= 8,4$, des Fadens $= 7,6$ gesetzt habe. Auf diese Weise habe ich für das lange Pendel

$$\log\frac{m's'}{ms} = 9,74608 + \log\Delta',$$

für das kurze

$$\log\frac{m's'}{ms} = 9,74636 + \log\Delta'$$

erhalten. Setzt man für Δ' seinen Ausdruck durch die Angabe der meteorologischen Instrumente, so erhält man:

$$\frac{m's'}{ms} = \frac{\alpha\beta}{(1+\tau.0,0001614)\,(1+l'.0,00375)},$$

wo der Logarithme von α für das lange Pendel $= 4,33168-10$, für das kurze $= 4,33196-10$ ist.

Der Werth von $\frac{m'}{m}$ im Coefficienten von k ist für die Pendel mit der Elfenbeinkugel aus der specifischen Schwere der Kugel, mit Inbegriff der eingeschraubten Klemme von Messing, $= 1,79443$ berechnet worden. Er ist also

$$= \frac{\alpha\beta}{(1+\tau.0,0001614)\,(1+l'.0,00375)}$$

angenommen, wo

$$\alpha = \frac{1}{337,006\times 770,488\times 1,79443};\quad \log\alpha = 4,33167-10$$

ist.

16.

Um den Unterschied der Längen der einfachen und der zusammengesetzten gleichzeitig schwingenden Pendel des Apparats berechnen zu können, ist eine genaue Kenntniss der Gewichte beider Fäden nothwendig, weshalb ich nicht unbemerkt lassen zu dürfen glaube, dass ich die Abwiegungen derselben so vorsichtig als es mir möglich war und durch verschiedene Verbindungen mit den übrigen kleinen Theilen der Pendel gemacht habe, so dass ich sie bis auf ein Hunderttheil eines Grans für sicher halte. Obgleich ich aber auch bei dem Gewichte der Kugel die Hunderttheile des Grans angegeben habe, so ist dasselbe doch weniger sicher, vielleicht nur bis auf zwei bis drei Zehntel eines Grans, welche Unsicherheit aber auf die Reduction der Beobachtungen keinen merklichen Einfluss hat.

Die kleinen Körper womit die Pendel belastet sind, könnten geradezu als Punkte angenommen werden, und der Halbmesser der Kugel darf nur genähert bekannt sein, so weit als es nöthig ist, um die Entfernung der Mittelpunkte der Figur und der Schwingung mit der erforderlichen Genauigkeit berechnen zu können. Genauer als zu diesem Zwecke nothwendig, hat ihn die Abwägung der Kugeln in Luft und in Wasser gegeben, wodurch man das Gewicht des gleichen Raums Wasser erhält, aus welchem der Halbmesser der Kugeln abgeleitet werden kann, da der Raum, welchen ein gegebenes Gewicht Wasser einnimmt, durch das Kilogramm bekannt ist. Die Momente der Trägheit

der kleinen, an den Pendeln befindlichen Körper aber, habe ich aus ihren Figuren und Gewichten abgeleitet; sie sind genau genug, da man sie hätte ganz vernachlässigen können.

Diese Abwiegungen, sowie die Angabe aller zur Berechnung der Reduction der zusammengesetzten auf die einfachen Pendel nöthigen Abmessungen habe ich in der VII. Beilage mitgetheilt. Es geht aus derselben Beilage hervor, dass die Verbesserung der Pendellänge, welche aus der Drehung der Kugel um den Punkt, wo sie an dem Faden befestigt ist, entsteht, und auf welche LAPLACE aufmerksam gemacht hat, für meinen Apparat nicht ganz unmerklich ist; sie wurde daher mit in Rechnung gebracht.

Die Berechnung des Einflusses der Zusammensetzung der Pendel setzt die Fäden als gleichförmig voraus. So viel ich weiss, ist bisher nicht näher untersucht worden, welchen Einfluss ihre Ungleichförmigkeit haben kann; ich habe daher diese Untersuchung in der VIII. Beilage gemacht und das Resultat erhalten, dass man die Ungleichheiten nicht fürchten darf, dass aber durch das Umkehren der Fäden, selbst wenn sie sehr ungleich wären, nichts erhebliches gewonnen werden würde.

17.

Nachdem durch das Vorhergehende die Art wie die Beobachtungen gemacht und berechnet wurden, erläutert worden ist, werde ich die Versuche selbst näher angeben können.

Die erste Reihe von Versuchen wurde im April, Mai und Juni 1826 gemacht. Sie besteht aus acht von einander unabhängigen Bestimmungen, deren jede vier Versuche mit dem langen Pendel und zwei mit dem kurzen enthält. Bei jeder dieser Bestimmungen ist der 1. Versuch (a) mit dem langen Pendel und rechts gewandten Fühlhebel, der 2. (b) gleichfalls mit dem langen Pendel, umgekehrten Faden und links gewandten Fühlhebel gemacht; der 3. und 4. Versuch (c) und (d) sind mit dem kurzen Pendel, (c) mit rechts, (d) mit links gewandtem Fühlhebel angestellt, (d) mit umgekehrtem Faden; der 5. und 6. Versuch (e) und (f) endlich sind wie (a) und (b) gemacht, mit dem Unterschiede, dass der zwischen diesen umgekehrte Faden bei (e) umgekehrt blieb und erst bei (f) wieder in dieselbe Lage kam, die er bei dem Versuche (a) hatte. Zwischen solchen sechs zusammengehörigen Versuchen ist die obere Befestigung des Messingblättchens immer völlig ungeändert geblieben, so dass bei allen genau dieselbe Stelle desselben den Abwickelungscylinder berührte. Vor dem Anfange einer neuen Bestimmung aber habe ich das Messingblättchen durch die Schraube am Aufhängungsrahmen meistens etwas verkürzt oder verlängert. — Dass zu einer vollständigen Messung der Höhe der Kugel die Umwendung des Fühlhebels nothwendig ist, habe ich schon im 8. Art. bemerkt; ich habe aber vorgezogen, sie nicht bei jedem Versuche vorzunehmen, sondern dagegen zwei aufeinander folgende Versuche bei entgegengesetzten Wendungen zu machen. Der Grund hiervon ist, dass das Umwenden nicht geschehen kann ohne das Gehäuse zu öffnen, wodurch eine Aenderung der Temperatur hätte entstehen und die Messungen unsicher machen können. Doch habe ich, durch mehrere schnell nach einander wiederholte Umwendungen zwischen jedem der Paare ab, cd, ef der Versuche, den sehr kleinen Unterschied der Höhen, welchen der Fühlhebel in beiden Wendungen angab, der Wahrheit nahe bestimmt und durch die Hälfte davon, mit gehörigem Zeichen genommen, die einzelnen Versuche verbessert. Dieses hat auf das Resultat jedes Paars der Versuche keinen Einfluss und ist nur geschehen, damit die Abweichung der einzelnen Versuche von einander unmittelbar vor Augen liegen sollte. Dabei, dass ich zwei Versuche mit dem langen Pendel vor und nach zweien mit dem kurzen machte, beabsichtigte ich, der Voraussetzung der Unveränderlichkeit von F während einer Bestimmung weniger Einfluss auf das Resultat einzuräumen. Dass mit dem langen Pendel eine doppelt so grosse Anzahl von Versuchen gemacht ist, wie mit dem kurzen, hat seinen Grund in dem ungleichen Einflusse, welchen die Beobachtungsfehler auf die Bestimmung von F bei beiden Pendeln äussern.

Die Resultate dieser Reihe von Versuchen, deren Originale dieser Abhandlung beigelegt [hier weggelassen] sind, sind folgende:*)

1. Bestimmung.

Mittel $(abef)$ $F = 442{,}^{L}5824 + 2{,}9605\,.\,\varepsilon - 0{,}2022\,.\,k$
„ (cd) „ $= 442{,}4644 + 1{,}0011\,.\,\varepsilon - 0{,}0683\,.\,k$
$\varepsilon = -0{,}^{L}0602 + 0{,}^{L}0683\,.\,k$

2. Bestimmung.

Mittel $(abef)$ $F = 442{,}^{L}5867 + 2{,}9608\,.\,\varepsilon - 0{,}2056\,.\,k$
„ (cd) „ $= 442{,}4727 + 1{,}0014\,.\,\varepsilon - 0{,}0696\,.\,k$
$\varepsilon = -0{,}^{L}0582 + 0{,}^{L}0694\,.\,k$

3. Bestimmung.

Mittel $(abef)$ $F = 442{,}^{L}5818 + 2{,}9615\,.\,\varepsilon - 0{,}1995\,.\,k$
„ (cd) „ $= 442{,}4633 + 1{,}0020\,.\,\varepsilon - 0{,}0675\,.\,k$
$\varepsilon = -0{,}^{L}0605 + 0{,}^{L}0674\,.\,k$

*) [Einzelne Versuche a, b, e, f; c, d weggelassen.]

4. Bestimmung.

Mittel $(abef)$ $F = 442{,}^{L}5706 + 2{,}9615 \cdot \varepsilon - 0{,}1981 \cdot k$
„ (cd) „ $= 442{,}4584 + 1{,}0020 \cdot \varepsilon - 0{,}0671 \cdot k$
$\varepsilon = -0{,}^{L}0573 + 0{,}^{L}0669 \cdot k.$

5. Bestimmung.

Mittel $(abef)$ $F = 442{,}^{L}5723 + 2{,}9618 \cdot \varepsilon - 0{,}1939 \cdot k$
„ (cd) „ $= 442{,}4547 + 1{,}0022 \cdot \varepsilon - 0{,}0656 \cdot k$
$\varepsilon = -0{,}^{L}0600 + 0{,}^{L}0655 \cdot k.$

6. Bestimmung.

Mittel $(abef)$ $F = 442{,}^{L}5694 + 2{,}9617 \cdot \varepsilon - 0{,}1929 \cdot k$
„ (cd) „ $= 442{,}4551 + 1{,}0021 \cdot \varepsilon - 0{,}0656 \cdot k$
$\varepsilon = -0{,}^{L}0583 + 0{,}^{L}0650 \cdot k.$

7. Bestimmung.

Mittel $(abef)$ $F = 442{,}^{L}5707 + 2{,}9617 \cdot \varepsilon - 0{,}1953 \cdot k$
„ (cd) „ $= 442{,}4590 + 1{,}0021 \cdot \varepsilon - 0{,}0655 \cdot k$
$\varepsilon = -0{,}^{L}0570 + 0{,}^{L}0662 \cdot k.$

8. Bestimmung.

Mittel $(abef)$ $F = 442{,}^{L}5746 + 2{,}9614 \cdot \varepsilon - 0{,}1935 \cdot k$
„ (cd) „ $= 442{,}4548 + 1{,}0017 \cdot \varepsilon - 0{,}0652 \cdot k$
$\varepsilon = -0{,}^{L}0611 + 0{,}^{L}0655 \cdot k.$

18.

Dieser Reihe von Versuchen habe ich im April 1827 eine zweite von drei Bestimmungen, gleichfalls mit der Kugel von Messing, hinzugefügt. Die Absicht dabei war nicht sowohl die schon erlangte Genauigkeit des Resultats zu vermehren, als das gegenseitige Verhalten dreier verschiedenen Aufhängungsarten des Pendels kennen zu lernen.

Ich wünschte nämlich zu erfahren, welchen Einfluss es auf den Mittelpunkt der Bewegung hat, wenn das Pendel, statt auf vorbeschriebene Art, durch Abwickelung von einem Cylinder zu schwingen, sich um eine Schneide und an einem am oberen Ende festgeklemmten Faden bewegt. Da aber aus dem Unterschiede der Längen beider Pendel des Apparats, worauf die Bestimmung der Länge des einfachen Secundenpendels nach der befolgten Methode gegründet wird, die Einwirkung der Aufhängungsart auf den Mittelpunkt der Bewegung verschwindet, so erlangen auch diese drei neuen Bestimmungen dasselbe Recht zum Endresultate zu stimmen, welches die früheren haben.

Die Einrichtungen zu diesen vergleichenden Versuchen der verschiedenen Aufhängungsarten, deren Ausführung ich Herrn Repsold verdanke, ist folgende. Statt des Fig. 3, Taf. II abgebildeten Abwickelungscylinders wird ein ähnlicher, welchen die 5. Figur von der Seite und die 6. von oben gesehen darstellt, unter dem Aufhängungsrahmen befestigt, so dass die durch die Axe desselben gehende Ebene, durch welche sein vorderes Ende ausgeschnitten ist, horizontal wird. Auf dieser Ebene ruhten sowohl der Abwickelungscylinder als die Schneide und die Klemme, mit welchen die Versuche, von welchen hier die Rede ist, gemacht worden sind.

Der Abwickelungscylinder selbst ist in der 7. Fig. dargestellt; er hat $0{,}^{L}996$ Durchmesser. Bei seinem Gebrauche liegt er auf der Ebene und wird von dem durch das Gewicht der Pendelkugel angespannten Messingblättchen, für welches der in beiden Figuren 5 und 6 sichtbare Einschnitt der Ebene gemacht ist, an die beiden über diese Ebene hervorragenden Schraubenköpfe angedrückt, wodurch er seine feste Lage erhält. Die Schneide ist Fig. 8 gezeichnet; Herr Repsold hat ihr, wie aus der Abbildung hervorgeht, die schöne Einrichtung gegeben, dass man durch kleine Gegengewichte an zwei horizontalen Armen ihren Schwerpunkt genau unter den Aufhängepunkt bringen kann, sodass sie vertical hängt; das Gegengewicht am dritten verticalen Arme dient, ihr eine beliebige Schwingungszeit zu geben; sie ist vom feinsten Stahl gemacht und ausgezeichnet schön angeschliffen. Die Klemme endlich, Fig. 9, besteht aus zwei Stahlstücken, welche durch zwei Schrauben zusammengepresst werden und dann so genau schliessen, dass man die Trennungslinie beider Stücke nicht sehen kann. Auch diese Klemme, in welcher ein Messingblättchen befestigt wird, liegt bei dem Gebrauche auf der horizontalen Ebene, und das Messingblättchen, woran das Pendel auf dieselbe Art wie bei dem Gebrauche des Abwickelungscylinders befestigt wird, hat in dem Einschnitte der Ebene freien Spielraum.

Aus dieser Beschreibung der Einrichtung geht hervor, dass die Aufhängepunkte der Pendel an der Schneide und Klemme gleich hoch, allein $0{,}^{L}498$ niedriger sind als am Abwickelungscylinder. Versuche mit den drei Pendeln mussten also zeigen, ob die Verschiedenheit der Aufhängungsarten Einfluss auf den Mittelpunkt der Bewegung hatte. Damit dieses aus den Versuchen desto sicherer hervorgehen sollte, habe ich dieselben so angeordnet, dass die drei Aufhängungsarten stets miteinander abwechselten, und auf diese Art die drei neuen Bestimmungen nicht eine nach der anderen, sondern alle gleichzeitig gemacht wurden. Die erste derselben, oder die 9. nach fortgehender Zählung, ist mit der Schneide,

die 10. mit der Klemme, die 11. mit dem Abwickelungscylinder gemacht; jede enthält 6 Versuche, nämlich (*a*) mit dem langen Pendel, (*b*) mit dem kurzen und rechts gewandten Fühlhebel, (*c*) mit dem ersteren und links gewandten Fühlhebel; dann mit umgekehrten Fäden, (*d*) mit dem langen, (*e*) mit dem kurzen Pendel und links gewandten Fühlhebel, endlich (*f*) mit dem ersteren und wieder rechts stehenden Fühlhebel. Alle diese Versuche sind mit denselben Fäden gemacht; die näheren Angaben der einzelnen Theile der Pendel und die Berechnung ihrer Zusammensetzung findet man in der VII. Beilage.

Die Beobachtungen in ihrer ursprünglichen Form sind, sowie die früheren, dieser Abhandlung beigelegt. Ihre Resultate sind folgende:*)

9. Bestimmung. Schneide.

Mittel $(acdf)$ $F = 442{,}^{L}6495 + 2{,}9606\,.\,\varepsilon - 0{,}2034\,.\,k$

„ (be) „ $= 442{,}5335 + 1{,}0012\,.\,\varepsilon - 0{,}0690\,.\,k$

$\varepsilon = -0{,}^{L}0592 + 0^{L}0686\,.\,k.$

10. Bestimmung. Klemme.

Mittel $(acdf)$ $F = 442{,}^{L}6165 + 2{,}9608\,.\,\varepsilon - 0{,}2035\,.\,k$

„ (be) „ $= 442{,}4981 + 1{,}0013\,.\,\varepsilon - 0{,}0688\,.\,k$

$\varepsilon = -0{,}^{L}0604 + 0{,}^{L}0687\,.\,k.$

11. Bestimmung. Abwickelungscylinder.

Mittel $(acdf)$ $F = 443{,}^{L}1090 + 2{,}9616\,.\,\varepsilon - 0{,}2041\,.\,k$

„ (be) „ $= 442{,}9972 + 1{,}0022\,.\,\varepsilon - 0{,}0686\,.\,k$

$\varepsilon = -0{,}^{L}0571 + 0{,}^{L}0692\,.\,k.$

Da der Einfluss des noch unbekannten Coefficienten k auf alle drei Bestimmungen sehr nahe gleich ist, so kann man schon beurtheilen, dass sie im Endresultate bis auf unerhebliche Kleinigkeiten untereinander und eben so mit den früheren acht übereinstimmen. Die Werthe von F aber, welche sie ergeben, sind für

die Schneide . . . . . $442{,}^{L}4742 - 0{,}^{L}0003\,.\,k$

die Klemme . . . . . $442{,}4376$

den Abwickelungscylinder $442{,}9400 + 0{,}0007\,.\,k$

Zieht man von dem letzten Resultate den Halbmesser des Abwickelungscylinders $= 0{,}^{L}498$ ab, so bleibt derjenige Werth von F übrig, welchen man erhalten haben würde, wenn die Axe des Abwickelungscylinders sich in derselben Ebene befunden hätte, in welcher die beiden anderen Aufhängungspunkte lagen; er ist $= 442{,}^{L}4420$. Dass die beiden letzten ziemlich nahe übereinstimmenden Werthe von F von dem ersten verschieden sind, zeigt dass die Schneide den Mittelpunkt der Bewegung merklich höher ergibt, als die beiden anderen Aufhängungsarten. Eine weitere Erläuterung dieses Gegenstandes werde ich in dem zweiten Abschnitte geben; hier verweile ich nicht länger dabei, da sie auf das Resultat keinen Einfluss hat.

*) [Einzelne Versuche, *a*, *c*, *d*, *f*; *b*, *e* weggelassen.]

19.

Die dritte Reihe von Versuchen machte ich im November 1827 mit der Kugel von Elfenbein. Sie besteht aus vier Bestimmungen, bei deren jeder sowohl der Fühlhebel umgewandt, als auch die Fäden umgekehrt wurden. Bei den beiden ersten wurde das Pendel am Abwickelungscylinder aufgehängt, bei den beiden letzten an der Schneide. Da diese Kugel weit weniger wiegt als die Kugel von Messing und beide dieselbe Grösse haben, so ist die Einwirkung des Widerstandes auf die Schwingungswinkel für dieselbe weit grösser als für die letztere. Die Versuche mussten daher weit früher geschlossen werden als die vorigen; dieses theils, weil bei dem langen Pendel die Grenzen, innerhalb welchen das Weisse durch den Coincidenzcylinder ganz verdeckt wird (Art. 5), für kleine Schwingungen zu weit werden, theils aber auch weil es wesentlich war, alle Versuche mit nahe gleichen Schwingungswinkeln anzufangen und zu endigen. Aus diesen Gründen umfassen die Versuche mit dem langen Pendel nur 1000 Schwingungen, die mit dem kurzen etwa 2500, welches letztere völlig hinreichend ist, jedem einzelnen Resultate alle wünschenswerthe Genauigkeit zu geben; bei dem langen Pendel ist dieses nicht so der Fall, allein es blieb nichts anderes übrig, als die Versuche zu wiederholen, um dadurch zu ersetzen was jedem einzelnen an Genauigkeit abgeht. Ferner muss ich bemerken, dass, um die Unsicherheit zu vermeiden, welche aus den Veränderungen des bekanntlich sehr hygroscopischen Elfenbeins im Halbmesser der Kugel entstehen kann, stets zwei zusammengehörige Versuche unmittelbar nacheinander gemacht wurden, so dass auf einen Versuch mit dem langen Pendel sogleich einer mit dem kurzen folgt. Die um die Zeit dieser Versuche sehr gleichförmige Temperatur der Sternwarte begünstigte diese Anordnung, indem sie unnöthig machte, zwischen dem Oeffnen des Gehäuses und den Versuchen eine lange Zeit verstreichen zu lassen. Jede Bestimmung enthält also vier Versuche mit jedem Pendel, deren zusammengehörige ich durch gleiche Buchstaben aa', bb', ... bezeichnet habe. Wegen der Zusammensetzung der Pendel mit der Kugel von Elfenbein verweise ich auf die VII. Beilage. Die Resultate der vier damit gemachten Bestimmungen sind folgende:

12. Bestimmung. Abwickelungscylinder.*)

Mittel $(abcd)$ $F = 443^{L},7157 + 2,9607 \cdot \varepsilon - 0,9122 \cdot k$

„ $(a'b'c'd')$ „ $= 443,1539 + 1,0011 \cdot \varepsilon - 0,3081 \cdot k$

$\varepsilon = -0^{L},2867 + 0^{L},3083 \cdot k.$

13. Bestimmung. Abwickelungscylinder.

Mittel $(abcd)$ $F = 443^{L},7274 + 2,9606 \cdot \varepsilon - 0,9178 \cdot k$

„ $(a'b'c'd')$ „ $= 443,1528 + 1,0010 \cdot \varepsilon - 0,3098 \cdot k$

$\varepsilon = -0^{L},2932 + 0^{L},3103 \cdot k.$

14. Bestimmung. Schneide.

Mittel $(abcd)$ $F = 443^{L},2898 + 2,9608 \cdot \varepsilon - 0,9418 \cdot k$

„ $(a'b'c'd')$ „ $= 442,7051 + 1,0009 \cdot \varepsilon - 0,3182 \cdot k$

$\varepsilon = -0^{L},2983 + 0^{L},3182 \cdot k.$

15. Bestimmung. Schneide.

Mittel $(abcd)$ $F = 443^{L},2721 + 2,9608 \cdot \varepsilon - 0,9331 \cdot k$

„ $(a'b'c'd')$ „ $= 442,7087 + 1,0009 \cdot \varepsilon - 0,3152 \cdot k$

$\varepsilon = -0^{L},2875 + 0^{L},3153 \cdot k.$

Der Werth von F, welchen diese vier Bestimmungen ergeben, ist für

den Abwickelungscylinder . $442^{L},8631 + 0^{L},0007 \cdot k$

die Schneide . . . . . $442,4109 + 0,0003 \cdot k$

Zwischen beiden ist der Unterschied $= 0^{L},4522 + 0^{L},0004 k$; die beiden Bestimmungen im 18. Art. ergaben denselben $= 0^{L},4658 + 0^{L},0010 k$. Es scheint nicht nothwendig zu sein, dass Versuche mit schwereren und leichteren Pendeln, bei welchen das Messingblättchen mit verschiedener Kraft an den Abwickelungscylinder angedrückt wird, in dem Unterschiede der Mittelpunkte der Bewegung beider Aufhängungsarten völlig übereinstimmen. Das leichtere Pendel mit der Kugel von Elfenbein hat übrigens, sowie das schwerere ergeben, dass der Mittelpunkt der Bewegung bei der Schneide höher liegt als bei dem Abwickelungscylinder; hier ist der Unterschied $0^{L},045$, bei dem anderen Pendel $0^{L},032$ gefunden.

20.

Die in den drei letzten Artikeln mitgetheilten Resultate sind aus den Beobachtungen unter der Voraussetzung berechnet, dass der durch k bezeichnete, von der Bewegung der Luft abhängige Coefficient für alle Schwingungswinkel, bei welchen beobachtet worden ist, denselben Werth besitzt. Ob dieses wirklich der Fall ist, erlaubt die der Berechnung der Versuche gegebene Form leicht zu prüfen. Man darf nur die mittleren Fehler in der „Rechnung" überschriebenen Columne (Art. 12), für jedes einzelne Moment der Versuche durch die ganze Reihe derselben hindurch aufsuchen, um dadurch sogleich beurtheilen zu können, ob nur zufällige Fehler oder gesetzmässig fortgehende Abweichungen der der Rechnung zum Grunde gelegten Formel von den Beobachtungen vorhanden sind.

Diese mittleren Fehler aus allen ähnlichen Versuchen findet man folgendermassen:

1) 44 Versuche mit der Kugel von Messing und dem langen Pendel.

1tes	Moment	$-0^{L},0010$
2tes	„	$-0,0014$
3tes	„	$+0,0008$
4tes	„	$+0,0012$
5tes	„	$+0,0010$
6tes	„	$+0,0011$
7tes	„	$+0,0001$
8tes	„	$-0,0007$
9tes	„	$-0,0011$

2) 22 Versuche mit der Kugel von Messing und dem kurzen Pendel.

1tes	Moment	$+0^{L},0005$
2tes	„	$+0,0005$
3tes	„	$-0,0003$
4tes	„	$-0,0005$
5tes	„	$-0,0007$
6tes	„	$-0,0003$
7tes	„	$+0,0005$
8tes	„	$+0,0004$
9tes	„	$-0,0005$
10tes	„	$0,0000$
11tes	„	$+0,0004$

3) 16 Versuche mit der Kugel von Elfenbein und dem langen Pendel.

1tes	Moment	$-0^{L},0015$
2tes	„	$+0,0030$
3tes	„	$-0,0015$

4) 16 Versuche mit der Kugel von Elfenbein und dem kurzen Pendel.

1tes	Moment	$-0^{L},0017$
2tes	„	$+0,0012$
3tes	„	$+0,0016$
4tes	„	$0,0000$
5tes	„	$-0,0011$

Man sieht hieraus, dass am Anfange und am Ende der Versuche kleine negative Abweichungen, in der Mitte ähnliche positive vorherrschen, welche zwar weit

*) [Einzelversuche wieder weggelassen.]

kleiner sind als die möglichen Fehler der Coincidenzen, aber doch durch die Wiederholung der Versuche und durch ihren regelmässigen Gang, ein gewisses Gewicht erlangen; selbst das entgegengesetzte Resultat der Versuche mit der Messingkugel am kurzen Pendel schwächt die Annahme, dass die Abweichungen die angegebene Regel befolgen, nicht so sehr als es auf den ersten Blick scheint; denn bei den Versuchen mit dieser Kugel müssen sie, im Fall sie wirklich von der Luft herrühren, nur $^2/_9$ der Grösse haben, welche sie bei der Kugel von Elfenbein erreichen. Da überdies die grösseren Abweichungen bei den Versuchen mit der letzten Kugel vorkommen, so kann man annehmen, dass alle Beobachtungen zusammengenommen einen kleinen Einfluss des Schwingungswinkels auf den Werth des Coefficienten k wahrscheinlich machen. Dieses angenommen, so folgt daraus, dass, indem am Anfange die Schwingungszeit etwas kleiner, am Ende etwas grösser beobachtet als berechnet ist, der Coefficient k mit abnehmenden Schwingungswinkeln zunimmt.

Um das Mittel der Beobachtungen vollständiger darzustellen, müsste man die Reductionsformel auf unendlich kleine Winkel etwas ändern, wodurch man Schwingungszeiten für diese grösser herausbringen würde, als sie berechnet worden sind. Allein es ist leicht zu übersehen, dass dieses auf das Endresultat keinen Einfluss haben kann: denn da alle Versuche bei nahe gleichen Winkeln gemacht sind, und die Aenderung für beide Kugeln in demselben Verhältnisse ist, in welchem die ihnen zukommenden Coefficienten von k sind, so muss sie, wenn man k selbst aus dem Resultate eliminirt, zugleich mit verschwinden. Die Resultate bedürfen daher keiner Verbesserung.

21.

Das arithmetische Mittel aus den 11 Bestimmungen mit der Kugel von Messing ist:

$$\varepsilon = -0^L,05903 + 0^L,06734 \,.\, k,$$

aus den 4 Bestimmungen mit der Kugel von Elfenbein:

$$\varepsilon = -0^L,29143 + 0^L,31303 \,.\, k.$$

Aus der Vergleichung beider folgt:

$$k = 0{,}9459$$
$$\varepsilon = +0^L,0047$$

oder die Länge des einfachen Secundenpendels für die Königsberger Sternwarte:

440,8147 Linien.

Substituirt man den gefundenen Werth von k in die durch die einzelnen Bestimmungen gegebenen Bedingungsgleichungen, so erhält man aus jeder derselben die Länge des einfachen Secundenpendels:

Beobachtungen mit der Kugel von Messing.

		Unterschied vom Mittel.	Temperatur der Toise.
1. Bestimmung ...	$440^L,8144$	$-0^L,0003$	$+5^\circ,88$ C.
2. „ ...	8174	+0,0027	5,06
3. „ ...	8133	−0,0014	9,00
4. „ ...	8160	+0,0013	11,43
5. „ ...	8120	−0,0027	18,54
6. „ ...	8132	−0,0015	19,45
7. „ ...	8156	+0,0009	18,20
8. „ ...	8109	−0,0038	21,88
9. „ ...	8157	+0,0010	5,50
10. „ ...	8146	−0,0001	6,04
11. „ ...	8184	+0,0037	5,94

Beobachtungen mit der Kugel von Elfenbein.

		Unterschied vom Mittel.	Temperatur der Toise.
12. Bestimmung ...	$440^L,8149$	$+0^L,0002$	$+5^\circ,00$ C.
13. „ ...	8103	−0,0044	3,83
14. „ ...	8127	−0,0020	3,12
15. „ ...	8207	+0,0060	4,09

Die Höhe, in welcher die Kugel des Pendels sich befand, ist einen Fuss über dem Fussboden der Sternwarte, oder 67,2 Fuss = 11,2 Toisen über dem mittleren Wasserstande des Pregels, welches als die Höhe über der Fläche der Ostsee angesehen werden kann, da der Strom kein erhebliches Gefälle hat. Die dieser Höhe zukommende Verminderung der Pendellänge ist $0^L,0032$. Man hat daher die Länge des einfachen Secundenpendels auf die Oberfläche der Ostsee reducirt:

= 440,8179 Linien.

22.

Ueber den wahrscheinlichen Fehler dieses Resultats wage ich keine Meinung zu äussern, indem man zwar wohl den Einfluss einzelner Fehlerursachen schätzen kann, allein dadurch selten ein richtiges Urtheil über das Resultat einer zusammengesetzten Operation erhält. Einzelne Ursachen werde ich etwas näher betrachten.

Der Einfluss der zufälligen Fehler der Vergleichungen des Pendels mit der Uhr ergibt, nach den im 5. Art. vorkommenden Angaben, den mittleren Fehler der aus jedem Versuche abgeleiteten Schwingungszeit:

Kugel von Messing	langes Pendel ...	$0^\circ,00000111$
	kurzes „ ...	0,00000033
Kugel von Elfenbein	langes Pendel ...	0,00000609
	kurzes „ ...	0,00000105

Hieraus folgt der mittlere Fehler der Länge des gleichzeitig schwingenden einfachen Pendels:

Kugel von Messing	langes Pendel ...	$0^{L},00168$
	kurzes „ ...	0,00029
Kugel von Elfenbein	langes Pendel ...	0,00923
	kurzes „ ...	0,00093

und der mittlere Fehler des aus jeder Bestimmung abgeleiteten Werthes von ε für die Messingkugel $= 0^{L},00044$, für die Elfenbeinkugel $= 0^{L},00237$. Das mittlere Resultat der 11 ersten Bestimmungen hat also den mittleren Fehler $0^{L},00013$, das der vier letzten $0^{L},00119$; der aus dieser Ursache hervorgehende mittlere Fehler des Endresultats, nach der Elimination von k, ist $= 0^{L},00035$.

Der Einfluss der Fehler der Vergleichungen der beiden Uhren ist schwer zu schätzen, weil die Abweichungen der beobachteten Coincidenzen derselben nicht von den Beobachtungsfehlern allein, sondern auch von den Ungleichheiten im Gange der Uhren, namentlich der vor dem Pendelapparate aufgestellten, herrühren. Dasselbe gilt von dem Einflusse der Fehler der astronomischen Beobachtungen auf den Gang der Hauptuhr. Allein es ist nicht wahrscheinlich, dass diese Ursachen im Endresultate, welches auf vielen von einander unabhängigen Zeitbestimmungen beruht, einen einigermassen erheblichen Einfluss behalten haben; denn der mittlere Fehler jeder einzelnen ist, wenn er sich auch nicht bestimmt angeben lässt, ohne Zweifel sehr klein. Für noch kleiner und sogar für ganz unmerklich halte ich den Einfluss der Fehler in der Messung der Höhenunterschiede der Kugel, indem diese sich wirklich mit bewundernswürdiger Genauigkeit ausführen lässt.

Dagegen glaube ich, dass man noch besser übereinstimmende Beobachtungen erhalten haben würde, wenn die vor dem Pendelapparate aufgestellte Uhr nicht oft im Laufe eines Tages ihren Gang merklich geändert hätte, so dass der Werth ihrer Pendelschläge, vorzüglich bei grosser Wärme, in der Zwischenzeit weniger Stunden, um mehrere Einheiten der sechsten Decimale variirte; denn man kann nicht annehmen, dass die befolgte Regel, die Bestimmung des Ganges dieser Uhr für das Zeitmoment zu machen, auf welches die Mitte der Versuche fällt, den Einfluss der Unregelmässigkeit ganz vernichtet hat. Den grössten Einfluss hat aber vielleicht das zuweilen starke Zunehmen der Temperatur mit der Höhe, welches durch die Annahme, dass es den Höhenunterschieden selbst proportional sei, wahrscheinlich nicht ganz unschädlich geworden ist.

Indessen gehören alle diese Fehler zu den zufälligen, und ich glaube, dass die Beobachtungen oft genug wiederholt sind, um sie ziemlich unschädlich zu machen. Constant wirkende Fehler, welche nicht vermieden worden wären, sind mir unbekannt, ausser der möglichen Unsicherheit in der angenommenen Wärmeausdehnung der Toise. Wenn man die Zusammenstellung der bei verschiedenen Temperaturen der Toise gemachten Bestimmungen, welche ich im vorigen Artikel gegeben habe, betrachtet, so sieht man, dass durch eine von der angewandten Borda'schen verschiedene Annahme der Ausdehnung, nämlich durch 0,00001167 statt 0,0000114 für jeden Centesimalgrad des Thermometers, die Fehler noch kleiner werden würden; allein auch dieses hat keinen erheblichen Einfluss auf das Endresultat, indem die mittlere Temperatur der Versuche mit der Kugel von Messing auf $11^{0},54$ C., und mit der Kugel von Elfenbein auf $4^{0},01$ C. fällt, wodurch die Temperatur der Toise, welche dem Endresultate, nach der Elimination der unbekannten Grösse k, zum Grunde liegt, $= 13^{0},60$ wird und also nur $2^{0},65$ niedriger ist als die Normaltemperatur der Toise. Unter der Voraussetzung, dass der den Pendelversuchen am besten entsprechende Werth der Ausdehnung der wahre ist, ist die Länge der Toise für $13^{0},60$ um $0^{L},00064$ zu gross berechnet worden, also die gefundene Länge des Secundenpendels auch, und zwar um $0^{L},0003$ zu gross.

Zweiter Abschnitt.

Vergleichung der Bestimmung der Pendellänge für Königsberg mit anderen, und Untersuchung verschiedener, bei den Pendelversuchen zu berücksichtigender Umstände.

23.

Herr General-Lieutenant VON MÜFFLING und Herr ARAGO haben ein unveränderliches, von Herrn FORTIN verfertigtes Pendel von Messing, im Jahre 1818 in Paris, beinahe an demselben Orte schwingen lassen, wo BORDA seine, durch scharfsinnige Anordnung der Methode und durch Genauigkeit ihrer Ausführung berühmt gewordenen Versuche machte. Dieses Pendel hatte Herr General-Lieutenant VON MÜFFLING die Güte, mir anzuvertrauen, und ich habe dadurch eine Vergleichung des Resultats von BORDA, sowie des späteren der Herren BIOT und ARAGO, mit dem meinigen zu erhalten gesucht.

Die Beobachtungen mit diesem Pendel in Paris hat Herr ANGER nach derselben Methode, welche ich bei meinen Versuchen angewandt habe, neu berechnet.

Es sind vier Reihen von Coincidenzen, deren erste und letzte Herr ARAGO mit beobachtete, und woraus sich die Schwingungszeiten dieses Pendels, auf unendlich kleine Winkel bezogen, folgendermassen ergeben:

	Schwingungszeit. M. Z.	Barometer.	Thermometer.	Temperatur des Pendels.
1818 April 16	$0^s,9907283$	$0^m,7432$	$11^0,45$	$11^0,50$
17	0,9907370	0,7379	12,2	12,17
18	0,9907119	0,7394	12,0	12,05
18	0,9907199	0,7406	12,15	12,15

Um diese Schwingungszeiten auf den leeren Raum zu reduciren, muss man sie nach dem 13. Art. mit

$$\sqrt{\frac{\mu+ss}{s}\cdot\frac{s\left(1-\frac{m'}{m}\right)}{\mu+\frac{m'}{m}K+ss}}$$

multipliciren, oder wenn man $(\mu+ss)k$ für K schreibt und das Quadrat von $\frac{m'}{m}$ vernachlässigt, mit

$$1-\frac{m'}{2m}(1+k),$$

wo k also den zu diesem Pendel gehörigen unbekannten Coefficienten bezeichnet. Nimmt man das Pendel 6388 Mal dichter an als atmosphärische Luft bei der Barometerhöhe von $0^m,76$ und der Temperatur des schmelzenden Eises, und die Ausdehnung des Metalls für jeden Centesimalgrad des Thermometers $=0{,}0000178$, beide nach der Mittheilung des Herrn General-Lieutenants VON MÜFFLING, so folgen die Schwingungszeiten im leeren Raume und bei der Temperatur 0^0:

$0^s,9905543 - 0{,}0000726\,.\,k$
$0{,}9905578 - 0{,}0000719\,.\,k$
$0{,}9905336 - 0{,}0000721\,.\,k$
$0{,}9905406 - 0{,}0000722\,.\,k$

Die Gewichte dieser Versuche, welche verschiedene Anzahlen von Coincidenzen nicht in ununterbrochener Reihe enthalten, sind den Zahlen

181, 428, 62, 88,

proportional; mit Berücksichtigung derselben ist das mittlere Resultat:

$0^s,9905529 - 0{,}0000721\,.\,k.$

Auf der Königsberger Sternwarte wurde dieses Pendel unmittelbar neben dem Apparate, worauf meine Bestimmung beruht, aufgestellt. Da aber die Umstände der Pariser Aufstellung mir nicht so genau bekannt waren, dass ich die völlige Gleichheit hätte wieder hervorbringen können, so zog ich eine Beobachtungsart vor, welche der im 5. Art. beschriebenen ganz ähnlich ist, so dass das Pendel sich 8 Fuss von der Uhr entfernt bewegte. Auf diese Art beobachtete ich im August und September 1826, bei sehr hoher Temperatur, 6 Reihen, jede von 21 Coincidenzen; im November, als die Temperatur weit niedriger war, ersuchte ich die Herren Dr. ERMAN und ANGER noch 6 ähnliche Versuche zu machen, so dass das mittlere Resultat der hiesigen Beobachtungen fast genau zu der Temperatur gehört, bei welcher die Schwingungszeit in Paris bestimmt wurde. Diese 12 Versuche geben nach der Berechnung des Herrn ANGER folgende Resultate:

		Schwingungszeit. M. Z.	Barometer.	Thermometer.	Temperatur des Pendels.	Schwingungszeit im leeren Raume für 0^0 Temperatur.		Beobachter.
1826	Aug. 25	$0^s,9905001$	$339^L,25$	$+23^0,7$	$21^0,20$	$0^s,9902404$	$-0{,}0000720\,.\,k$	BESSEL
	25	5084	340,56	22,7	21,21	2492	$723\,.\,k$	„
	26	5061	340,43	23,8	21,58	2437	$722\,.\,k$	„
	26	5018	340,43	21,6	20,80	2461	$724\,.\,k$	„
	28	5012	338,78	23,3	21,59	2391	$718\,.\,k$	„
	Sept. 1	5053	338,59	22,8	21,88	2407	$717\,.\,k$	„
	Nov. 9	3891	332,70	7,7	7,32	2503	$744\,.\,k$	ANGER
	10	3852	332,55	7,1	7,37	2458	$744\,.\,k$	„
	11	3694	334,50	5,7	5,84	2427	$752\,.\,k$	„
	13	3643	333,37	4,5	4,53	2490	$754\,.\,k$	ERMAN
	14	3554	333,79	4,9	4,86	2372	$754\,.\,k$	„
	15	3613	333,09	4,2	4,39	2473	$753\,.\,k$	ANGER

Das mittlere Resultat ist

$$0{,}9902443 - 0{,}0000735\,.\,k$$

und es folgt hieraus die Schwere in Königsberg, die in Paris $= 1$ gesetzt,

$$= \left\{\frac{0{,}9905529 - 0{,}0000721\,.\,k}{0{,}9902443 - 0{,}0000735\,.\,k}\right\}^2 = 1{,}0006234 + 0{,}0000028\,.\,k.$$

Um auch die Schwere in London mit der in Paris zu vergleichen, habe ich die Versuche angewändt, welche die Herren BIOT, ARAGO und VON HUMBOLDT mit zwei unveränderlichen Pendeln in Paris und auf der Greenwicher Sternwarte angestellt haben. Diese Versuche haben im Mittel ergeben:

		Zahl der Schwingungen in einem Tage.	Barometer.	Thermometer.	Schwingungszeit.
P. Nr. 1	Paris . .	87671,785	0^{m},7568	10°,675	0^{s},9854938
	Greenw.	87685,358	0,7602	7,975	0,9853412
P. Nr. 2	Paris . .	87030,794	0,7533	14,505	0,9927521
	Greenw.	87044,195	0,7632	8,850	0,9925992

Reducirt man die Schwingungszeiten auf den leeren Raum und auf die Temperatur des schmelzenden Eises, unter Anwendung derselben Zahlen für die Dichte und Ausdehnung des Pendels, welche ich oben benutzt habe, so erhält man:

Pendel Nr. 1 { Paris .... 0^{s},9853265 — 0,0000737 . k
Greenwich 0,9851965 — 0,0000748 . k

Pendel Nr. 2 { Paris .... 0,9925596 — 0,0000731 . k
Greenwich 0,9924456 — 0,0000754 . k

und hieraus die Schwere in Greenwich, die in Paris = 1 gesetzt:

Pendel Nr. 1 = 1,0002679 + 0,0000023 . k

Pendel Nr. 2 = 1,0002315 + 0,0000047 . k

also das mittlere Resultat dieser Versuche

= 1,0002497 + 0,0000035 . k.

Da die Erhöhung über der Meeresfläche für die Sternwarte in Greenwich nicht angegeben ist, so muss die Schwere von dort, nach Herrn KATER's Beobachtungsorte, ohne Rücksicht darauf übertragen werden; man erhält dadurch für den letzteren Ort:

1,0002533 + 0,0000035 . k.

Aus der Verbindung beider Bestimmungen folgt die Schwere in Königsberg, die in London = 1 gesetzt, wenn man für alle 3 Pendel k gleich annimmt,

$$= \frac{1{,}0006234 + 0{,}0000028 \,.\, k}{1{,}0002533 + 0{,}0000035 \,.\, k} = 1{,}0003701 - 0{,}0000007 \,.\, k.$$

Für das unbekannte k habe ich, indem es für ein Pendel von der Construction der verglichenen wahrscheinlich kleiner ist als für eine Kugel, den Werth $^3/_4$ gesetzt, und dadurch die drei beobachteten Pendellängen auf Königsberg übertragen:

	Beobachtete Pendellänge.	für Königsberg.
BORDA	440^{L},5593	440^{L},8349
BIOT und ARAGO . .	440,5674	440,8430
KATER	440,6872	440,8501

Diese Pendellängen sind sämmtlich grösser als die von mir bestimmte; die erste um 0^{L},0202, die andere um 0^{L},0283, die dritte um 0^{L},0354. Man darf aber nicht übersehen, dass die Richtigkeit dieser Unterschiede auf der ungeprüften Voraussetzung beruht, dass das Pendel, wodurch die Schweren in Paris und Königsberg verglichen worden sind, in der Zwischenzeit dieser Vergleichungen unverändert geblieben sei. Die Bemerkung des Herrn SABINE, welche er aus seiner grossartigen, auf Anordnung des Board of Longitude ausgeführten Unternehmung gefolgert hat, dass nämlich die auf die Meeresfläche reducirten Pendellängen seiner Formel*) nahe folgen, wenn die geologische Beschaffenheit der Beobachtungsörter gleich ist, könnte einiges Misstrauen gegen die Richtigkeit dieser Voraussetzung erregen. Denn da die geologische Beschaffenheit von London und Königsberg nahe gleich zu sein scheint, und die auf die Meeresfläche bezogene Pendellänge am ersteren Orte = 440^{L},6896, mittelst der Sabine'schen Formel auf Königsberg übertragen 440^{L},8117 ergibt, und diese um 0^{L},0062 kleiner ist als ich sie gefunden habe, so zeigt sich zwischen der Uebertragung durch die unveränderlichen Pendel und der Formel ein Unterschied von 0^{L},0416, welcher grösser ist als ihn Herr SABINE bei gleichen geologischen Verhältnissen irgendwo gefunden hat.

Indessen geht aus dieser Uebertragung nicht der wirkliche Unterschied der früheren Bestimmungen und der neueren hervor, weil jene nicht die vollständige Reduction auf den leeren Raum erhalten haben. Für die Versuche der französischen Geometer und Astronomen wird sich die Reduction nachholen lassen, wenn eine neue Reihe von Versuchen, mit einer leichteren Kugel von derselben Grösse der dabei angewandten Kugel von Platina, hinzugefügt wird. Will man, um eine vorläufige Uebersicht zu erhalten, denselben Werth des Coefficienten k annehmen, welchen ich für eine Kugel von grösserem Durchmesser gefunden habe, so wird man die aus dieser Ursache entstehende Vergrösserung der in Paris bestimmten Pendellängen etwa = 0^{L},025 finden, wodurch dieselben, nach der Vergleichung durch die unveränderlichen Pendel, 0^{L},045 und 0^{L},053 grösser werden, als die in Königsberg beobachtete. Ueberträgt man dagegen die Pariser Pendellängen durch die Vergleichungen der unveränderlichen Pendel auf London, und von da durch die Formel auf Königsberg, so findet man das ihnen hinzuzufügende:

Verbesserung wegen der Luft	+ 0^{L},0250
Reduction auf London	+ 0,1127
Reduction auf die Meeresfläche daselbst	+ 0,0024
Unterschied zwischen London und Königsberg, nach SABINE's Formel	+ 0,1221
	+ 0,2622

*) In Pariser Linien = 439^{L},2975 + 2^{L},28174 (sin Polhöhe)^2.

und hiermit wird die erste Bestimmung für Paris 0,0036, die andere um 0,0117 grösser, als in Königsberg beobachtet worden ist. Diese nahe Uebereinstimmung ist jedoch nicht eher anzunehmen, als bis die Anwendbarkeit des von mir gefundenen Werthes von k auf eine Kugel von kleinerem Durchmesser durch Versuche geprüft, und die Uebertragung von Paris nach Königsberg durch unveränderliche Pendel bestätigt sein wird, denn die schon vorhandene ähnliche Uebertragung gibt das vorher angeführte, stark abweichende Resultat.

Die Verbesserung des Kater'schen Resultats nach der neuen Theorie über die Einwirkung der Luft kann, nach unserer jetzigen Kenntniss dieses Gegenstandes, nicht ohne neue Versuche gefunden werden. Wie man aber, bei der Anwendung eines Pendels mit reciproken Axen, diese Schwierigkeit ganz vermeiden kann, werde ich unten zeigen.

24.

Alles was ich im vorigen Art. gesagt habe, beruht auf der Ansicht, welche ich über die Einwirkung der Luft aufgestellt habe. Da aber die bisherige Theorie von dem unsterblichen NEWTON herrührt, und spätere Geometer an ihrer Richtigkeit nicht gezweifelt haben, so hielt ich für nothwendig, die neue, ehe ich sie auf die Pendelversuche anwandte, durch Experimente zu prüfen, welche den Zweck hatten, die Richtigkeit oder Unrichtigkeit der Newton'schen Theorie ins Licht zu setzen. Ich liess daher im October 1827 verschiedene Körper in Wasser und in Luft schwingen und führe die Resultate davon hier an.

Es ist bekannt, dass ein in Wasser schwingender Körper durch den Widerstand, welchen er erfährt, sehr bald zur Ruhe kömmt; aus diesem Grunde können die Beobachtungen nur geringe Genauigkeit erlangen. Allein wenn die Genauigkeit der Schwingungszeit bis auf etwa ein Tausendtheil einer Secunde hinreichend ist, so wird ihre Beobachtung leichter als es auf den ersten Blick erscheint. Ich habe, um Resultate von dieser Annäherung zu erhalten, zwei Verfahrungsarten brauchbar gefunden. Die erste besteht darin, dass man die Secunden der Uhr ununterbrochen fortzählt, und z. B. bei jeder 10. oder 12. derselben den Bruch der Schwingung anmerkt, welcher diesen Pendelschlägen entspricht; die ganzen Schwingungen werden später hinzugefügt. Nach der zweiten werden diejenigen Secunden der Uhr angemerkt, welche mit gerade vollendeten Schwingungen des Pendels zusammentreffen; dieses zweite Verfahren scheint den Vorzug zu verdienen, wenn die Schwingungszeiten von 1^s, 2^s, ... wenig verschieden sind.

Die Pendel, mit welchen diese Versuche gemacht worden sind, wurden sämmtlich ausser dem Apparate aufgehängt, so dass sie in die Mitte eines runden Wassergefässes von 3 Fuss Durchmesser und 10 Zoll Höhe trafen; die Schwingungswinkel fingen bei etwa 2^0 an und endigten sich bei den kleinsten, welche noch gehörig gesehen werden konnten.

1. Das lange Pendel mit der Kugel von Messing machte eine Schwingung in etwas weniger als 2 Secunden, weshalb ich das zweite Verfahren anwandte, und aus zwei Reihen von Schwingungen, jede 10 Mal wiederholt, die Zeiten der Coincidenzen folgendermassen fand:

Coincidenz.	Secunden.	
0	0,0	0,0
1	22,5	21,9
2	45,5	43,6
3	65,8	66,7
4	88,9	89,3
5	112,1	111,1
6	133,5	132,9
7	153,0	153,8
8	176,5	176,1
9	198,9	198,3
10	221,3	—
11	240,9	—
12	265,6	—
13	287,1	—

Die erste Reihe gibt, nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt, den wahrscheinlichsten Werth der Zwischenzeit zweier Coincidenzen = 22,003, die zweite = 22,033. Das Mittel aus beiden ergibt die Schwingungszeit des Pendels

$$= \frac{2 \times 22{,}018}{23{,}018} = 1{,}9131 \text{ Uhrz.} = 1{,}9085 \text{ M. Z.}$$

Die Schwingungszeit desselben Pendels in der Luft war 1,7217 M. Z.

2. Das kurze Pendel mit derselben Kugel ergab in zwei Reihen, jede 10 Mal wiederholt, folgende Schwingungen:

Secunden.	Schwingungen.	
0	0,00	0,00
12	10,82	10,81
24	21,63	21,57
36	32,44	32,39
48	43,26	43,17
60	54,10	54,02
72	64,89	64,80
84	75,69	75,61
96	86,53	86,41
108	97,28	97,26
120	108,10	108,05

Aus der ersten Reihe folgt die Schwingungszeit = 1″,1100, aus der zweiten = 1″,1104; das Mittel also = 1″,1102 Uhrzeit = 1″,1078 M. Z.; in der Luft war sie = 1″,0020 M. Z.

Um diese Versuche zu berechnen hat man, wenn Δ, Δ', Δ'' die Dichtigkeiten der Pendelkugel, des Wassers und der Luft bezeichnen, und $\Delta\delta'$, $\Delta\delta''$ für Δ', Δ'' geschrieben werden, nach dem 13. Art.:

$$\lambda tt \,.\, s(1-\delta') = \mu + \delta' \,.\, K + ss$$
$$\lambda t't' \,.\, s(1-\delta'') = \mu + \delta'' \,.\, K + ss$$

Schreibt man $(\mu + ss)k$ für K, so folgt hieraus, unter der Voraussetzung, dass der Werth von K für Wasser und Luft gleich sei, welche, wegen der geringen Dichtigkeit der Luft, keinen bei diesen Versuchen in Betracht kommenden Fehler erzeugen kann,

$$k = \frac{tt(1-\delta') - t't'(1-\delta'')}{\delta' t't'(1-\delta'') - \delta'' tt(1-\delta')}.$$

Für diese beiden Versuche ist $\Delta' = 8{,}18955$; $\Delta' = 0{,}99990$; $\Delta'' = 0{,}00126$, und es folgt damit aus dem ersten Versuche $k = 0{,}648$, aus dem zweiten 0,602. Um beide übereinstimmend zu machen, dürfte man die Schwingungszeit des kurzen Pendels in Wasser nur um 0″,0029 vermehren, was mit den Hindernissen, welche sich bei diesen Versuchen der Genauigkeit entgegensetzen, wohl vereinbar zu sein scheint.

3. An die Pendel wurde statt der Kugel ein hohler Cylinder von Messing, von 36 Lin. Höhe und 32 Lin. Durchmesser, gehängt, welcher eben so schwer ist als die Kugel, dessen specifische Schwere aber nur 2,0788 beträgt. Mit dem langen Pendel wurde folgendes beobachtet:

Secunden.	Schwingungen.	
0	0,00	0,00
10	3,52	3,56
20	7,10	7,13
30	10,66	10,69
40	14,20	14,28
50	17,81	17,88
60	21,36	21,42
70	24,95	24,98
80	28,51	28,57
90	32,10	32,15
100	35,66	35,77

Hieraus folgt die Schwingungszeit = 2″,7947 und 2″,7972, im Mittel = 2″,7960 Uhrzeit = 2″,7892 M. Z.; in der Luft war sie = 1″,7244 M. Z.

4. Am kurzen Pendel aufgehängt, machte derselbe Hohlcylinder folgende Schwingungen:

Secunden.	Schwingungen.	
0	0,00	0,00
12	7,27	7,28
24	14,60	14,56
36	21,88	21,86
48	29,21	29,18
60	36,56	36,46
72	43,84	43,76
84	51,17	51,06
96	58,50	58,39

woraus man für die Schwingungszeit 1″,6406 und 1″,6442 erhält; im Mittel 1″,6424 Uhrzeit = 1″,6385 M. Z.; in der Luft fand ich 1″,0104 M. Z.

Diese beiden Versuche gaben, nach der bei den vorigen angeführten Formel berechnet, $k = 0{,}747$ und 0,761 und zeigen daher, wenn man sie mit der vorigen Bestimmung vergleicht, einen merklichen Einfluss der Figur des schwingenden Körpers.

5. Um diesen Einfluss aber noch viel grösser an den Tag zu legen, nahm ich aus dem Hohlcylinder, mit welchem die beiden vorigen Versuche gemacht worden sind, den ihn unten verschliessenden Boden heraus, wodurch er die specifische Schwere des Metalls selbst, etwa = 8,3 erhielt. Wenn die Figur keinen Einfluss hätte, so hätte der Cylinder nun nahe wie die Kugel schwingen müssen; allein er machte am langen Pendel folgende Schwingungen:

Secunden.	Schwingungen.
0	0,00
10	3,86
20	7,72
30	11,66
40	15,52
50	19,40
60	23,27
70	27,17
80	31,05
90	34,97
100	38,84

woraus die Schwingungszeit = 2″,5737 Uhrzeit = 2″,5675 M. Z. folgt; in der Luft war sie 1″,7199 M. Z.

6. Derselbe Cylinder ohne Boden bewegte sich am kurzen Pendel folgendermassen:

Secunden.	Schwingungen.	
0	0,00	0,00
10	6,61	6,56
20	13,23	13,26
30	19,84	19,88
40	26,50	26,55

Hieraus geht die Schwingungszeit = 1″,5099 und 1″,5056 hervor; im Mittel = 1″,5078 Uhrzeit = 1″,5042 M. Z.; in der Luft war sie = 1″,0019 M. Z.

Diese beiden Versuche ergeben $k = 7{,}99$ und $8{,}21$, woraus also ein sehr grosser Einfluss der Figur des schwingenden Körpers hervorgeht. Die Wassertheile sind gezwungen worden, mehr Bewegung anzunehmen als in den vorigen Fällen, weil hier ein leer werdender Raum an der äusseren Seite des Cylinders durch das Wasser im Inneren ersetzt werden musste, oder umgekehrt.

Vergleicht man dieselben 6 Versuche mit der bisherigen Theorie, so erhält man die Schwingungszeit im Wasser $= t$, aus der in der Luft $= t'$, nach der Formel

$$t = t' \sqrt{\frac{1-\delta''}{1-\delta'}}$$

		Rechnung.	Beobachtung.
Kugel von Messing	langes P.	1″,8373	1″,9085
	kurzes „	1,0693	1,1078
Hohlcylinder	langes „	2,3928	2,7892
	kurzes „	1,4021	1,6385
Hohlcyl. ohne Boden	langes „	1,8339	2,5675
	kurzes „	1,0683	1,5042

Man sieht also, dass jene Theorie mit den Versuchen nicht übereinstimmt. Hätte NEWTON bei den Versuchen, welche er über die Abnahme der Schwingungswinkel in Wasser und Quecksilber anstellte, die Schwingungszeiten angemerkt, so hätte ihm die Unzulänglichkeit der Theorie nicht entgehen können.

Endlich liess ich noch ein Pendel mit reciproken Axen, welches ich unten näher beschreiben werde, und welches in der Luft um beide Axen gleichzeitige Schwingungen von 1″,0002 M. Z. machte, in einem hohen Gefässe voll Wasser, so dass das Pendel ganz davon überdeckt wurde, schwingen. Wenn das grosse Gewicht unten war, war die Schwingungszeit $= 1″,1177$ M. Z., wenn es oben war $= 1″,1450$; die Gleichzeitigkeit der Schwingungen ging also verloren, was man auch erwarten musste.

Vergleicht man den aus der Bewegung der Kugel von Messing in Wasser hervorgehenden Werth von k mit dem aus der Vergleichung der Schwingungen dieser Kugel und der gleich grossen von Elfenbein, im 21. Art. gefolgerten, so sieht man, dass derselbe weit kleiner ist als der in der Luft stattfindende, etwa im Verhältnisse 2 : 3. Hieraus geht hervor, dass man die zur Reduction der Pendelversuche nothwendige Kenntniss von K nicht aus Schwingungen des Pendels in einer tropfbaren Flüssigkeit ableiten darf. Auch erinnere ich, dass das Resultat, dass die Wirkung der Flüssigkeit nur das Moment der Trägheit vermehrt, nur für Flüssigkeiten von geringer Dichte allgemein erwiesen worden ist.

25.

Da durch das was ich im 13. Art. gesagt habe, die Möglichkeit einer, von der bisherigen Theorie verschiedenen Einwirkung der Flüssigkeiten auf die Bewegung der Körper klar wird, und alle Versuche, welche ich angeführt habe, das was die Hydrodynamik hier noch unentschieden lässt, dahin entscheiden, dass die stets durch k bezeichnete Grösse keineswegs unerheblich ist, so halte ich die von der bisherigen verschiedene Reduction der Pendelbeobachtungen, welche ich angewandt habe, für gerechtfertigt, und werde nun die Resultate anderer Prüfungen angeben, welche ich über die Bewegung der Pendel vorgenommen habe.

Den Einfluss der cylindrischen Figur der Schneiden eines Pendels hat zuerst Herr LAPLACE erkannt und entwickelt. Die theoretische Untersuchung desselben beruht auf der Annahme, dass die cylindrische Schneide, bei der Bewegung des Pendels, auf der untergelegten Ebene rollt, und dass die Ebene diesem Rollen kein Hinderniss in den Weg legt. Man bemerkt leicht, dass die Breite der cylindrischen Abstumpfung einer Schneide allein nicht hinreichend ist, den Einfluss der Abstumpfung auf die Schwingungszeit zu geben; dieser hängt vielmehr, wie auch die Herren BIOT und ARAGO bemerkt haben, von der Krümmung desjenigen Theils der Schneide ab, welcher nach und nach mit den Ebenen in Berührung kömmt und welcher, bei kleinen Schwingungswinkeln, so wie sie bei den Versuchen zur Bestimmung der Pendellängen vorzukommen pflegen, immer sehr klein ist. Wäre z. B. der Krümmungshalbmesser ein Zehntel einer Linie, so würde die Abstumpfung der Schneide, bei einer ganzen Schwingungsweite von $2\frac{1}{2}^0$, welches die grösste bei Herrn KATER'S Versuchen vorkommende ist, nur ein Bogen des Cylinders von 0,1 L. Halbmesser von $2\frac{1}{2}^0$ sein, oder eine Breite von 0″,0043 haben dürfen, um einen Einfluss von einem Zehntel einer Linie auf die Pendellänge erhalten zu können. Bemerkt man aber wirklich eine Abstumpfung von dieser Breite, so werden doch alle optischen Hülfsmittel den Halbmesser ihrer Krümmung unsicher lassen, und man wird nicht im Stande sein, sich völlig zu versichern, ob nicht diese kleine Abstumpfung einen bedeutenden Einfluss auf die Pendellänge erlangt. Dieses Beispiel zeigt, dass es der Mühe werth ist, den Einfluss der Abstumpfung der Schneiden genauer zu erörtern, als bisher geschehen ist.

Ueber die Figur des Cylinders, welcher die Schneiden begrenzt, kann als bekannt vorausgesetzt werden, dass die abgeschliffenen Ebenen des Prismas, welches die Schneiden bildet, Berührungsebenen an dieselbe

sind, oder, wenn der Winkel dieser Ebenen durch $2i$ bezeichnet wird, dass Tangenten an die Grenzen der Cylinderflächen gezogen, den Winkel $2i$ einschliessen; ferner kann man die Entfernung der Ebenen, da wo sie mit der Cylinderfläche zusammentreffen, als bekannt annehmen, indem sie mikroskopisch messbar ist; ich werde sie durch b bezeichnen. Die Krümmung der Oberfläche bleibt aber unbekannt und man muss sie in der Rechnung willkürlich lassen. Ich habe darüber angenommen, dass der auf die Axe des Cylinders senkrechte Durchschnitt desselben ein Kegelschnitt sei, dessen eine Axe mit der des Pendels zusammenfällt; seine Figur ist dann durch i, b und eine willkürliche Excentricität, welche ich durch ε bezeichnen werde, gegeben. Durch die Aenderung der letzteren geht der Cylinder von der mit den Ebenen des Prismas zusammenfallenden Hyperbel, also von einer Winkelspitze, durch alle Zwischenstufen hindurch, in eine auf die Axe des Pendels senkrecht stehende Ebene über.

Diese Annahme habe ich in der IX. Beilage durch Rechnung verfolgt und führe hier die Resultate davon an. Wenn man die Länge des einfachen Pendels, mit welchem das sich auf der cylindrischen Schneide bewegende gleiche Schwingungszeit hat, durch l' bezeichnet; die Länge eines zweiten einfachen Pendels, welches mit dem Schneidenpendel gleiche Zeit halten würde, wenn dieses sich um den Scheitelpunkt der Schneide drehete, durch l, so findet sich:

$$l' = l - \frac{l}{s} \cdot b \cdot q,$$

wo s die Entfernung des Schwerpunkts von der Schneide und q eine von der Figur des Cylinders und dem Schwingungswinkel abhängige Quantität ist.

Der Werth von q, für unendlich kleine Schwingungen, ist

$$= \frac{\sqrt{1 - \varepsilon \cos i^2}}{2 \cos i};$$

für $\varepsilon = \sec i^2$ verwandelt der Kegelschnitt sich in eine Winkelspitze, und q wird $= 0$, so wie b willkürlich; von $\sec i^2$ bis 1 ist der Kegelschnitt eine Hyperbel; für 1 eine Parabel; zwischen 1 und 0 eine Ellipse mit aufrecht stehender grosser Axe; für 0 ein Kreis; zwischen 0 und $-\infty$ eine Ellipse mit aufrechter kleinen Axe. Durch diesen Uebergang von ε von $\sec i^2$ bis $-\infty$ wird q immer grösser, und für den letzten Werth sogar unendlich gross, was mit dem gänzlichen Aufhören der unendlich kleinen Schwingungen in diesem Falle übereinstimmt. Ist aber der halbe Schwingungswinkel u' nicht unendlich klein, so hat q die Grenze

$$\frac{2}{\pi \sin u'}.$$

Für sehr grosse Werthe von ε nimmt q schnell ab, wenn die Schwingungswinkel wachsen; für kleinere ist es von dem Werthe, welchen es für unendlich kleine Schwingungen hat, wenigstens bei den Winkeln, bei welchen man Pendelversuche anzustellen pflegt, nicht mehr merklich verschieden. Damit man dieses vollständiger übersehen könne, habe ich für einige Werthe von ε, und für $u' = 0$, 1^0, 2^0 den Werth von q nach Anleitung der IX. Beilage berechnet, und in folgende zwei Tafeln gebracht, deren erste für $2i = 90^0$ gilt, die andere für $2i = 120^0$; dieser letzte Winkel fand bei Herrn Kater's Versuchen statt.

Winkel $i = 45^0$.

ε	Natur des Kegelschnitts.	Axenverhältniss.	Werthe von q. $u' = 0$	$u' = 1^0$	$u' = 2^0$
+ 2	Hyperbel . .	. . . . .	0	0	0
+ 1	Parabel . . .	. . . . .	0,50	0,50	0,50
0	Kreis	1 : 1 . .	0,71	0,71	0,71
— 10	Ellipse . . .	1 : 3,32	1,73	1,73	1,72
— 100	„ . . .	1 : 10,05	5,05	4,99	4,84
— 1000	„ . . .	1 : 31,64	15,83	14,30	11,58
— 10000	„ . . .	1 : 100,00	50,00	28,38	16,68
— 100000	„ . . .	1 : 316,23	158,11	34,94	18,00
$-\infty$	Ebene	1 : ∞	∞	36,48	18,24

Winkel $i = 60^0$.

ε	Natur des Kegelschnitts.	Axenverhältniss.	Werthe von q. $u' = 0$	$u' = 1^0$	$u' = 2^0$
+ 4	Hyperbel . .	. . . . .	0	0	0
+ 1	Parabel . . .	. . . . .	0,87	0,87	0,87
0	Kreis	1 : 1 . .	1,00	1,00	1,00
— 10	Ellipse . . .	1 : 3,32	1,87	1,87	1,86
— 100	„ . . .	1 : 10,05	5,10	5,04	4,88
— 1000	„ . . .	1 : 31,64	15,84	14,32	11,59
— 10000	„ . . .	1 : 100,00	50,01	28,38	16,68
— 100000	„ . . .	1 : 316,23	158,12	34,94	18,00
$-\infty$	Ebene	1 : ∞	∞	36,48	18,24

Diese Tafeln geben nur den von der Lage des Schwerpunkts des Pendels unabhängigen Theil des vollständigen in der IX. Beilage entwickelten Ausdrucks von q; der andere ist unbedeutend.

Wenn die Voraussetzung, worauf diese Rechnung gegründet ist, nämlich dass die cylindrische Schneide auf den Ebenen wirklich rollt, wahr ist, so zeigen diese Tafeln, dass die Figur der Schneide einen merklichen Einfluss auf die Pendellängen haben kann, selbst wenn die Abstumpfung b nur einige Tausendtheile einer Linie beträgt. Wenn nicht ein genügender Grund vorhanden ist anzunehmen, dass grosse negative Werthe von ε, oder sehr stark abgeplattete Ellipsen mit horizontaler grossen Axe, bei der Operation des Abschleifens

der Schneiden, oder durch die Abnutzung derselben durch den Gebrauch, nicht entstehen können, so wird man diese Ursache als die Quelle einer so grossen Unsicherheit ansehen müssen, dass man nicht wagen darf, die Bestimmung der Pendellänge auf einen Apparat mit Schneiden zu gründen, ehe man Mittel gefunden hat, den Fehler entweder zu bestimmen, oder aus dem Resultate zu eliminiren.

Es ist in der That behauptet worden, dass der Einfluss der Cylindricität der Schneiden aus dem Resultate der Beobachtungen mit einem Pendel von Herrn BOHNENBERGER's Erfindung verschwinde; allein diese sehr elegante Eigenschaft eines solchen Apparats findet nur statt, wenn beide Schneiden durch gleiche Cylinder begrenzt sind. Setzt man dieses nicht voraus, die beobachteten Schwingungszeiten um beide Schneiden aber als gleich, so hat man für die eine

$$l' = l - \frac{l}{s} bq; \quad l = \frac{\mu + ss}{s};$$

für die andere

$$l' = l_{,} - \frac{l_{,}}{s_{,}} b_{,}q_{,}; \quad l_{,} = \frac{\mu + s_{,}s_{,}}{s_{,}};$$

und wenn man l, $l_{,}$, μ eliminirt,

$$l' = s + s_{,} - \frac{s + s_{,}}{s - s_{,}}(bq - b_{,}q_{,}).$$

Also ist die Länge des gleichzeitig schwingenden einfachen Pendels nur dann der Entfernung der Scheitel der cylindrischen Schneiden gleich, wenn bq und $b_{,}q_{,}$ gleich sind. Es ist aber ein leichtes Mittel vorhanden, den Einfluss der Cylindricität ganz zu eliminiren: man richtet das Pendel so ein, dass die Schneiden mit einander verwechselt werden können, und macht die Versuche sowohl vor als nach der Verwechselung. Dadurch kömmt der Fehler in gleicher Grösse auf entgegengesetzte Seiten und das Mittel ist frei davon.

26.

Es ist bekannt, dass Herr BIOT die Einwirkung der Cylindricität ganz bezweifelt hat, indem er bemerkt, dass das Pendel nicht mit der ganzen Schneide, sondern nur mit einzelnen hervorstehenden, als unendlich klein zu betrachtenden Punkten auf der Ebene aufliege, und sich bei der Schwingung um diese drehe. Man könnte noch hinzufügen, dass eine der Voraussetzungen der Rechnung, nämlich die der völligen Härte der Unterlagen, nie in mathematischer Strenge erfüllt wird, indem dieselben immer mehr oder weniger elastisch sind. Indessen können diese Bemerkungen uns über eine Fehlerquelle nicht völlig beruhigen, deren sehr grosser Einfluss auf die Versuche, der Rechnung zufolge, möglich ist; deren Nichtvorhandensein aber durch directe Beweise dargethan werden müsste, ehe man die Sicherheit von Versuchen, auch wenn sie nicht durch ihre Anordnung davon befreit sind, behaupten kann.

Es schien mir also nothwendig, Versuche über die Einwirkung der Figur der Schneiden anzustellen. Dieses geschah mit einem Pendel mit reciproken Axen, welches aus einer cylindrischen Stange von Messing, von 5,1 Lin. Durchmesser und 635 Lin. Länge, mit einem festen grösseren und einem beweglichen kleineren Gewichte besteht. Wenn das grössere Gewicht unten ist, das kleinere oben, so ist die obere Schneide 96,4 Lin. vom oberen Ende der Stange entfernt, die untere 97,6 Lin. vom unteren Ende; das grosse Gewicht ist ein Cylinder von Messing von 36,7 Lin. Durchmesser und 3,9 Lin. Höhe, und die auf die Stange senkrechte Axe desselben ist 58,6 Lin. unter der unteren Schneide. Das kleine Gewicht ist dann über der oberen Schneide und wurde bei den Versuchen, welche ich mit diesem Apparate machte, so befestigt, dass sein Mittelpunkt 64,3 Lin. von derselben entfernt war, wodurch die Schwingungszeiten um beide Schneiden nahe gleich wurden. In diesem Zustande fand ich die Entfernung der einen Schneide vom Schwerpunkte = 305,32 Lin., der anderen = 135,70 Lin., so dass die Entfernung beider durch den Schwerpunkt im Verhältnisse 9 : 4 getheilt wurde. Die Schneiden von Stahl sind ziemlich nahe im rechten Winkel abgeschliffen, der Figur und dem Gewichte nach gleich und so eingerichtet, dass man sie leicht herausnehmen und, dem Zwecke des Apparats gemäss, diejenigen Aenderungen ihrer Abstumpfung vornehmen kann, über deren Einwirkung auf die Schwingungszeit Versuche gemacht werden sollen. Die Unterlage der Schneiden waren die zu dem unveränderlichen Pendel von FORTIN gehörigen Agatebenen. Das Gewicht des Pendels fand ich = 34260 Gran.

Die Beobachtungen mit diesem Apparate wurden nach der im 5. Art. beschriebenen Methode gemacht; da sie aber auf das eigentliche Resultat dieser Abhandlung keinen Einfluss haben, so glaube ich die Anführung derselben in ihrer ursprünglichen Form unterlassen und nur die aus jedem Versuche herausgebrachte Schwingungszeit für unendlich kleine Winkel mittheilen zu dürfen.

Wenn man die Schneiden herausnimmt, um ihre Schärfe durch neues Anschleifen zu verändern, so wird nur dann eine Aenderung der Schwingungszeit daraus hervorgehen, wenn der Werth von bq dadurch verändert worden ist; insofern man also nicht Mittel anwendet, welche dieses Product bestimmt ändern, wird

das neue Anschleifen oft keinen merklichen Einfluss äussern. Ich kann daher nicht alle Versuche, welche ich gemacht habe, zur Bestätigung des wirklichen Einflusses der Abstumpfung auf die Schwingungszeit anführen, sondern nur diejenigen derselben, welche diesen Einfluss zeigten. Die Form, unter welcher ich die Versuche mittheilen werde, ist folgende: zuerst wird die beobachtete mittlere Zeit t einer Schwingung für unendlich kleine Winkel nebst dem Stande des Barometers und daran befindlichen Thermometers angegeben; dann die Temperatur des Pendels τ; ferner die auf den leeren Raum und die Temperatur 0 bezogene, entsprechende einfache Pendellänge l', in der Voraussetzung der Länge des einfachen Secundenpendels $= 440{,}^{L}8147$ und der Ausdehnung des Messings $= 0{,}0000178$ für 1^{0} C. berechnet. Der unbekannte Coefficient, welcher die Einwirkung der Luft bestimmt, ist, je nachdem das grosse Gewicht unten oder oben ist, durch k und k' bezeichnet.

Am 13. December 1826, als das grosse Gewicht oben war, wurde folgender Versuch gemacht:

$$t = 1{,}^{s}0001093. \quad 340{,}^{L}38, \; +3{,}^{0}2. \quad \tau = 2{,}^{0}95.$$
$$l' = 440{,}^{L}8185 - 0{,}^{L}0694 \,.\, k'.$$

Darauf wurde die Schneide herausgenommen und so fein geschliffen als mir möglich war; am folgenden Tage fand sich damit:

$$t = 1{,}^{s}0001651. \quad 339{,}^{L}34, \; +3{,}^{0}0. \quad \tau = 3{,}^{0}07.$$
$$l' = 440{,}^{L}8668 - 0{,}^{L}0694 \,.\, k'.$$

Allein durch das Herausnehmen und Wiedereinsetzen der Schneide war sie, wie ich durch eine mikroskopische Messung fand, um $0{,}^{L}006$ dem Schwerpunkte näher gekommen, wodurch l', nach der oben angegebenen Lage des Schwerpunkts des Pendels, um $0{,}^{L}0075$ vergrössert worden ist. Der Unterschied beider Versuche ist daher $= 0{,}^{L}0408$, und zeigt, dass das Product bq durch die Aenderung der Schneide um $0{,}^{L}0125$ verkleinert worden ist.

Ein zweites Beispiel gibt eine, durch fortgesetzten Gebrauch einer Schneide erzeugte Aenderung zu erkennen. Am 16. December 1826 war das grosse Gewicht unten und die Schneide war sehr fein, vermuthlich feiner als es nach der Härte ihres Stahls hätte sein sollen, angeschliffen; in diesem Zustande des Pendels wurde folgender Versuch gemacht:

$$t = 1{,}^{s}0001505. \quad 338{,}^{L}66, \; +2{,}^{0}7. \quad \tau = 2{,}^{0}64.$$
$$l' = 440{,}^{L}8572 - 0{,}^{L}0695 \,.\, k.$$

Nach dieser Beobachtung wurde das Pendel zu verschiedenen Versuchen angewandt, von welchen ich später reden werde, und nach der Beendigung derselben, am 14. und 15. Februar 1827, wurden folgende Versuche damit gemacht:

$$t = 1{,}^{s}0000984. \quad 331{,}^{L}80, \; -1{,}^{0}0. \quad \tau = -0{,}^{0}78.$$
$$l' = 440{,}^{L}8387 - 0{,}^{L}0689 \,.\, k.$$

$$t = 1{,}^{s}0000787. \quad 334{,}^{L}39, \; -1{,}^{0}3. \quad \tau = -2{,}^{0}20.$$
$$l' = 440{,}^{L}8316 - 0{,}^{L}0689 \,.\, k.$$

Die Veränderung der entsprechenden einfachen Pendellänge ist daher $-0{,}^{L}0220$; allein im Februar fand sich die Schneide $0{,}^{L}006$ entfernter vom Schwerpunkte als im December, welches vermuthlich von einer durch die erwähnten Versuche entstandenen, auch später beim Herausnehmen der Schneide sichtbaren Abnutzung herrührt. Diese vergrösserte Entfernung hätte l' um $0{,}^{L}0033$ vergrössern müssen, wenn bq denselben Werth behalten hätte; die beobachtete Veränderung beträgt daher $-0{,}^{L}0253$, und es folgt daraus eine Vergrösserung von $bq = 0{,}^{L}0173$. Die abgenutzte Schneide schien mir, unter einem 200 Mal vergrössernden Mikroskop, eine Abstumpfung von $0{,}^{L}005$ zu haben.

Diese beide Erfahrungen scheinen mir hinreichend, zu zeigen, dass die Figur der Schneide wirklich die Schwingungszeiten ändern kann; ich hätte noch einige andere anführen können, welche aber nicht so entschieden wie diese die möglichen Grenzen der Beobachtungsfehler überschreiten. Allein man kann eine viel grössere Wirkung der Abstumpfung hervorbringen, wenn man darauf ausgeht, die Krümmung der Abstumpfung sehr klein zu machen. Um eine Bestätigung dieses Resultats der Rechnung durch Versuche zu erhalten, schliff ich die Schneide durch eine Glasplatte, welche, soviel ohne besonders dazu eingerichteten Apparat thunlich war, stets senkrecht auf der den Winkel der Ebenen des Prismas bissectirenden Ebene erhalten wurde. Die Breite der dadurch entstandenen Abstumpfung fand ich, mit den Pistor'schen Mikroskopen, im Mittel aus Messungen an 10 verschiedenen Punkten $= 0{,}^{L}0216$; die Entfernung der Schneide vom Schwerpunkte war jetzt $0{,}^{L}021$ grösser als am 16. December 1826, für welchen Tag oben $l' = 440{,}^{L}8572 - 0{,}^{L}0695\, k$ bestimmt worden ist; jetzt hätte also sein Werth $= 440{,}^{L}8689 - 0{,}^{L}0695\, k$ sein sollen, wenn der Zustand der Schneide übrigens nicht verändert worden wäre. In diesem Zustande des Pendels beobachtete Herr Dr. Erman am 16. Februar eine Reihe von Coincidenzen, welche ich mit den dazu gehörigen Schwingungswinkeln anführe, weil die aus jedem einzelnen Intervalle geschlossene, nach der gewöhnlichen Formel auf unendlich kleine Winkel reducirte Schwingungszeit entschieden kleiner wurde, sowie die Schwingungswinkel abnahmen.

u'	t		
von 98,1 bis 69,0	0,9997649		
69,0 „ 52,6	7633		
52,6 „ 40,8	7594		
40,8 „ 29,2	7619	$334,^{L}80$	$-2,^{0}0$
29,2 „ 22,4	7509		
22,4 „ 17,0	7407		
17,0 „ 13,3	7255		

τ	l'		Einfluss der Abstumpfung.
$-2,^{0}03$	$440,^{L}5539$		$-0,^{L}3150$
$-2,01$	5524		$-0,3165$
$-2,00$	5489		$-0,3200$
$-2,00$	5511	$-0,^{L}0696\,k$	$-0,3178$
$-1,99$	5413		$-0,3276$
$-1,97$	5321		$-0,3368$
$-1,94$	5185		$-0,3504$

Der hier beobachtete Einfluss der Abstumpfung ist $= -\frac{l}{s} \cdot bq = -\frac{13}{9} \cdot bq$; $b = 0,^{L}0216$ angenommen ergibt sich daraus q:

u'	q
83,6	10,1
60,8	10,1
46,7	10,2
35,0	10,2
25,8	10,5
19,7	10,8
15,2	11,2

Dieser Versuch wurde einige Tage später mit der Abänderung wiederholt, dass die Ebenen der Schneide vorher abgeschliffen wurden, so dass die Breite der Abstumpfung dadurch bis auf $0,^{L}0135$ im Mittel vermindert wurde. Als die Schneide wieder befestigt war, fand sie sich $0,^{L}019$ entfernter vom Schwerpunkte als am 16. December, weshalb der Werth von l' jetzt $= 440,^{L}8678 - 0,^{L}0695\,k$ hätte sein sollen. Die Coincidenzen wurden von Herrn Anger beobachtet.

u'	t		
von 90,0 bis 69,3	0,9998555		
69,3 „ 56,0	8478		
56,0 „ 44,8	8373		
44,8 „ 36,3	8370	$335,^{L}94$	$-3,^{0}4$
36,3 „ 29,9	8300		
29,9 „ 24,5	8368		
24,5 „ 20,4	8210		

τ	l'		Einfluss der Abstumpfung.
$-3,^{0}92$	$440,^{L}6475$		$-0,^{L}2203$
$-3,75$	6393		$-0,2285$
$-3,63$	6292		$-0,2386$
$-3,54$	6282	$-0,^{L}0706\,k$	$-0,2396$
$-3,47$	6214		$-0,2464$
$-3,43$	6271		$-0,2407$
-3.39	6129		$-0,2548$

Da b hier $= 0,^{L}0135$ ist, so erhält man die den einzelnen Intervallen entsprechenden Werthe von q:

u'	q
79,7	11,2
62,7	11,7
50,4	12,2
40,6	12,2
33,1	12,6
27,2	12,3
22,5	13,0

Diese Versuche, verglichen mit der ersten Tafel des 25. Art., zeigen, dass, wenn man die Abstumpfung als eine Ellipse betrachtet, das Axenverhältniss etwa 1:21 und 1:25 angenommen werden muss, welche Annahmen nichts Unwahrscheinliches haben, aber, da man die Krümmung so kleiner Flächen nicht messen kann, auch nicht direct bestätigt werden können; die Zunahme des Einflusses bei kleinen Schwingungswinkeln stimmt nahe genug mit der Theorie überein.

27.

Obgleich diese Versuche, übereinstimmend mit der oben gegebenen Entwickelung der Theorie zeigen, dass Grund vorhanden ist, auf die Vermeidung des Einflusses der Cylindricität der Schneiden mehr Gewicht zu legen als bisher geschehen ist, so sieht man doch wohl, dass ihr Einfluss auf die Versuche des Herrn Kater wenn nicht ganz unmerklich, doch sehr gering gewesen sein muss. Denn die grosse Vorsicht, welche dieser eben so aufmerksame als erfindungsreiche Beobachter auf die feine Bearbeitung und gute Erhaltung der Schneiden wandte, sowie die Güte des zu denselben benutzten Stahls, lassen eine nur sehr geringe, wahrscheinlich ein Tausendtheil einer Linie nicht erreichende Abstumpfung erwarten, deren Einfluss, wenn sie für beide Schneiden gleich war, verschwinden, wenn sie ungleich war, nach dem 25. Art., nur zum Theil auf das Resultat übergehen musste.

Die Herren Biot und Arago haben ihre Versuche mit zwei Schneiden gemacht, deren eine eine sehr breite Abstumpfung, die andere eine weit geringere hatte; für jene war $b = 0,^{L}0166$, für diese $= 0,^{L}0023$. Dennoch stimmen die mit beiden erhaltenen Resultate überein. Nach dem was ich über die Abstumpfung der Schneiden angeführt habe, muss ich gestehen, dass mir diese Uebereinstimmung mehr zufällig als nothwendig erscheint. Bei dem letzten der im vorigen Art. angeführten Versuche war die Breite der Abstumpfung kleiner als bei dem ersten der beiden französischen Pendel; dennoch würde ihr Einfluss auf dasselbe etwa $0,^{L}16$

gewesen sein. Wenn er aber nicht so gross, sogar unmerklich gefunden wurde, so liegt dieses also in der Art der Krümmung, von welcher es überhaupt wahrscheinlich ist, dass sie die Grenze nicht durch Zufall erreicht, welche man ihr durch Absicht geben kann. Es scheint daher, dass man das zuverlässigste Resultat aus der in dem Recueil d'Observations enthaltenen denkwürdigen Operation ziehen wird, wenn man die Versuche mit der feineren Schneide allein nimmt, und die mit der gröberen nur zur Uebertragung der Pendellänge von einem Orte zum anderen anwendet. Das Maximum des Einflusses der Abstumpfung der feineren Schneide auf die Länge des Secundenpendels, welches sich mit den bei grösseren und kleineren Schwingungswinkeln angestellten Beobachtungen noch vereinigen lässt, würde etwa $0^{L}{,}029$ sein; allein es ist, wie gesagt, gar nicht wahrscheinlich, dass diese Grenze auch nur näherungsweise erreicht werden sollte.

Der Fehler, welchen dieselbe Ursache bei der Borda'schen Bestimmung hervorgebracht haben kann, ist, weil das Pendel viermal so lang war als das Secundenpendel, nur ein Viertel der Grösse von bq. Man darf aber nicht unbemerkt lassen, dass LAPLACE erst lange nach BORDA'S Tode auf diese Fehlerursache aufmerksam machte, so dass man nicht sicher ist, ob BORDA alle Aufmerksamkeit angewandt hat, sie zu vermeiden; ferner dass jener grosse Geometer anführt, die Begrenzung der Schneide sei ein Halbcylinder, dessen Radius ein Hunderttheil eines Millimeters überschreite, woraus hervorzugehen scheint, dass diese allgemein ausgesprochene Wahrnehmung, wenn nicht an BORDA'S Schneide selbst gemacht, doch nach LAPLACE'S Meinung mit dieser vereinbar ist. Muss man aber eine Abstumpfung der Schneide von 0,01 Lin. für wahrscheinlich, dagegen den anderen Theil der Angabe, dass die Schneide einen Halbcylinder bilde, wegen Unzulänglichkeit eines Vergrösserungsglases zur Beurtheilung des Krümmungshalbmessers einer so kleinen Fläche, für nicht hinreichend begründet halten, so scheint man nicht mit Sicherheit behaupten zu können, dass der Einfluss der Abstumpfung der Schneide auf BORDA'S Resultat ganz unmerklich sei. Vielleicht ist BORDA'S Schneide noch unverändert vorhanden, in welchem Falle es nicht schwer werden wird, durch eine neue Reihe von Versuchen mit einem weit kürzeren Pendel dieser höchst ausgezeichneten Operation entweder die Bestätigung zu verschaffen, oder die ihr anzubringende Verbesserung zu finden.

28.

Hier muss ich auch der Versuche erwähnen, welche ich in der Absicht gemacht habe, zu bestimmen, wie sich die Mittelpunkte der Bewegung der drei, im 18. Art. beschriebenen Aufhängungsarten der Pendel an meinem Apparate, gegen die Aufhängungspunkte selbst verhalten.

Es ist dazu nöthig, die Entfernung der Ebene am Aufhängungsrahmen, auf welcher die Schneide, die Klemme und der Abwickelungscylinder ruhen, von dem Nullpunkte der Mikrometervorrichtung am unteren Ende des Pendelapparats, oder vielmehr die durch F bezeichnete Constante, unmittelbar zu messen. Wenn man den Apparat durch eine Einrichtung zu dieser Messung vermehrt, so ergibt er nicht nur den Unterschied der beiden Pendellängen, sondern auch die Längen beider Pendel selbst. Indem aber die aus dem Unterschiede gefolgerte Länge des einfachen Secundenpendels von der Einwirkung der Aufhängungsart auf den Mittelpunkt der Bewegung frei ist, so wird durch die Vergleichung derselben mit der Länge eines der beiden Pendel diese Einwirkung bekannt. Man sieht, dass der so vermehrte Apparat eigentlich eine dreifache Bestimmung der Länge des Secundenpendels gewährt, sowohl aus der gemessenen Länge des kurzen Pendels, als aus der des langen (welche die Summe der vorigen und der Toise ist) und aus dem Unterschiede beider Längen. Die letzte allein ist aber frei von jeder Unsicherheit über den Mittelpunkt der Bewegung und eben so von dem Halbmesser und der Voraussetzung der Gleichförmigkeit der Materie der Kugel.

Herr REPSOLD hatte die Güte, mir eine Einrichtung zur Messung der Constante F zu verfertigen. Dieses ist eine Stange von Stahl von 453 Lin. Länge; auf ihre obere polirte, ebene Fläche wird ein Cylinder von Stahl, von 1 Lin. Durchmesser und 3 Lin. Länge, durch eine starke Feder aufgedrückt, welcher dann über beide Seiten der Stange hervorragt; die Dicke der Stange ist nicht grösser als die Weite des Einschnitts der Ebene, auf welcher die Schneide, die Klemme und der Abwickelungscylinder ruhen, so dass sie mittelst des über ihre beiden Seiten hervorstehenden Cylinders an derselben Ebene aufgehängt werden kann, wodurch ihr oberes Ende mit dieser Ebene zusammenfällt. Mit dem unteren, abgerundeten Ende trifft diese Stange, wenn der Aufhängungsrahmen so aufgelegt ist wie bei dem Gebrauche des kurzen Pendels, auf die Stahlplatte am Fühlhebel. Ihr Gewicht ist dem Gewichte der Pendelkugel von Messing gleich, so dass der Aufhängungs-

rahmen bei den Versuchen mit dem Pendel und bei der Messung eine gleiche Spannung erfährt.

Nach der Ankunft dieser Einrichtung ersuchte ich Herrn ANGER, vier Reihen von Coincidenzen mit dem kurzen Pendel, mit der Schneide und der Kugel von Messing zu beobachten, zwischen welchen sowohl der Faden als der Fühlhebel umgekehrt wurden; die Messungen an der Mikrometerschraube und die Vergleichungen der Uhren übernahm ich selbst. Vor und nach diesen Versuchen wurde die Messstange angewandt.

Diese vier Versuche habe ich nicht im Originale mitgetheilt, theils weil das Maass der Genauigkeit der Coincidenz-Beobachtungen aus den früheren hinreichend bekannt ist und Herr ANGER hier wenigstens denselben Erfolg erhalten hat, theils weil sie keinen Einfluss auf das Hauptresultat dieser Abhandlung haben. Ich führe also hier nur die Schwingungszeiten für unendlich kleine Winkel und die übrigen zur Rechnung nothwendigen Data an:

1827.	Schwingungszeit. M. Z.	Barometer.		Temperatur von F.	Schraube des Fühlhebels.
Nov. 22	$1^{L}{,}0001360$	$334^{L}{,}01$	$+2^{\circ}{,}5$	$+3^{\circ}{,}26$	$19^{R}{,}294$
23	1,0001399	333,56	+2,8	+3,44	19,294
23	1,0001098	331,56	+2,4	+2,89	19,5505
26	1,0001125	338,86	+2,4	+2,96	19,527

Die Messungen an der Schraube des Fühlhebels ergeben:

Gemessene Länge	$= F - 1^{L}{,}7403$	$-1^{L}{,}7403$	$-1^{L}{,}7635$	$-1^{L}{,}7613$
Temperatur von F	+0,0176	+0,0186	+0,0156	+0,0160
Elasticität des Fadens	+0,0014	+0,0014	+0,0014	+0,0014
Länge des Pendels	$= F - 1{,}7213$	$-1{,}7203$	$-1{,}7465$	$-1{,}7439$

Die Berechnung der Schwingungszeiten, unter Voraussetzung der Länge des einfachen Secundenpendels $= 440^{L}{,}81 + \varepsilon$, und des im 21. Art. bestimmten Werthes von k, geben folgende Resultate:

Länge des entsprechenden einfachen Pendels	$440^{L}{,}9299$	$440^{L}{,}9333$	$440^{L}{,}9068$	$440^{L}{,}9092$
Reduction auf den leeren Raum	−0,1332	−0,1329	−0,1323	−0,1353
„ auf das zusammengesetzte Pendel	−0,0535	−0,0535	−0,0535	−0,0535
„ auf F	+1,7213	+1,7203	+1,7465	+1,7439
Resultat des Versuchs	$F = 442{,}4645$	442,4672	442,4675	442,4643

Die Reduction auf das zusammengesetzte Pendel ist mit dem Gewichte des Fadens = 3,64 Gran, übrigens aber mit denselben Elementen berechnet, welche für das Pendel mit der Schneide, in der VII. Beilage, angewandt worden sind.

Als die Messstange aufgehängt war, ergab die Messung mit der Mikrometerschraube, im Mittel aus häufigen, immer fast vollkommen übereinstimmenden Beobachtungen:

Schraube des Fühlhebels.	e'	e''	l'	l''
$18^{R}{,}069$	$3^{\circ}{,}65$	$3^{\circ}{,}64$	$3^{\circ}{,}53$	$3^{\circ}{,}60$

Für die Temperatur dieser Messung ist die Constante $= F + 0^{L}{,}0197$; diese um die Angabe der Mikrometerschraube $= 1^{L}{,}6298$ vermindert, und um den Halbmesser der Pendelkugel für $3^{\circ}{,}53$ Temperatur ($= a$) vermehrt, ist die Länge der Messstange für $\frac{1}{2}\{3^{\circ}{,}53 + 3^{\circ}{,}60\} = 3^{\circ}{,}565$ Temperatur ($= b$). Man erhält also

$$F = b - a + 1^{L}{,}6101.$$

Um die Länge b zu bestimmen, habe ich die Toise auf eine horizontale Ebene gelegt und die Messstange auf dieselbe, so dass das obere Ende derselben mit einer der Endflächen der Toise zusammenfiel, welches man durch einen geraden, an das Ende der Toise angedrückten Cylinder, an welchen auch die Stange angeschoben wird, erlangt: dann habe ich auf das untere, abgerundete Ende der Stange eins der Pistor'schen, zur Prüfung der Theilungen des Meridiankreises bestimmten Mikroskope eingestellt, und, ohne die Toise zu verrücken, diese Operation am anderen Ende derselben wiederholt, so dass ein zweites dieser Mikroskope den nunmehrigen Ort des unteren Endes der Stange angab. Auf diese Art erhielten die Mikroskope eine Entfernung, welche dem Ueberschusse der doppelten Länge der Stange über die Länge der Toise gleich war, und welche nun auf einer, von den Herren PISTOR und SCHIEK in Berlin verfertigten, auf in Messing eingelegtes Silber schön getheilten Scale, durch die Schraube des einen der Mikroskope gemessen wurde. Im Mittel aus mehreren Wiederholungen ergab sich dieser Ueberschuss $= 41^{L}{,}9973$ bei der Temperatur $= 4^{\circ}{,}04$ C. Für diese Temperatur ist die Länge der Toise $= 863^{L}{,}8790$; der gemessene Ueberschuss ist, da die Scale ihre wahre Länge bei der Normaltemperatur der Toise erlangt $= 41^{L}{,}9882$; also ist die Länge der Stange für dieselbe Temperatur $= 452^{L}{,}9336$, und wenn man die

Ausdehnung 0,0000114 für jeden Grad des Thermometers annimmt, $b = 452^{L},9311$.

Der Halbmesser der Kugel ist zwar in der VII. Beilage durch das Gewicht des Wassers welches sie aus dem Wege drängt $= 12^{L},082$ bestimmt worden; allein da er hier einen directen Einfluss auf das Resultat erlangt, so habe ich ihn unmittelbar gemessen. Dieses geschah dadurch, dass in die Ebene von Holz, auf welcher die Toise lag, eine Vertiefung von 10 Linien gemacht wurde, an deren einen Rand ich ein eben und rechtwinklig geschliffenes, etwas über 2 Linien dickes Stück Messing so befestigte, dass sowohl die Kugel als die Toise an dasselbe angeschoben werden konnten; auf die Toise wurde die Scale von PISTOR und SCHIEK befestigt und die Grösse der Verschiebung durch ein Mikroskop gemessen. Hierdurch erhielt ich den Durchmesser der Kugel in der Temperatur $3^{0},90 = 24^{L},1619$; da die Scale und die Kugel aus demselben Metalle bestehen, so ist dieses ihr wahrer Durchmesser für die Normaltemperatur der Toise und man erhält den für $3^{0},53$ stattfindenden $= 24^{L},1564$ oder $a = 12^{L},0782$.

Demzufolge ist $F = 442^{L},4630$; nach der Bestimmung durch die Pendelschwingungen ist es im Mittel $= 442^{L},4659 + 1,0002.\varepsilon$; setzt man für ε seinen aus dem 20. Art. bekannten Werth $= + 0^{L},0047$, so wird es $= 442^{L},4706$ und die Vergleichung beider Bestimmungen ergibt den Mittelpunkt der Bewegung des Pendels $0^{L},0076$ über der Ebene, auf welcher die Schneide ruhete. Dieser Unterschied mag zum Theil aus den Fehlern der in diesem Art. beschriebenen Operation entstanden sein, vielleicht auch aus der Voraussetzung, dass der Schwerpunkt und der Mittelpunkt der Kugel zusammenfallen, welche durch Umkehren der Kugel hätte unschädlich gemacht werden müssen, wenn die Bestimmung der Pendellänge aus Versuchen mit einem Pendel hätte abgeleitet werden sollen; man sieht aber daraus, dass dieser Versuch keinen Grund gibt anzunehmen, dass eine so schön gearbeitete Schneide wie die von Herrn REPSOLD, womit diese Versuche gemacht worden sind, den Mittelpunkt der Bewegung merklich zu tief gebe. Hierdurch wird das bestätigt, was ich über die Einwirkung der cylindrischen Figur der Schneiden auf Herrn KATER's Bestimmung gesagt habe. Es geht übrigens aus diesem Versuche hervor, dass die Beobachtungen, welche ich gemacht habe, aus beiden Pendeln einzeln genommen, nahe dasselbe Resultat gegeben haben würden, welches aus ihrem Unterschiede folgt. Dass aber sowohl der Abwickelungscylinder als die Klemme den Mittelpunkt der Bewegung (Art. 18 und 19) um einige Hunderttheile einer Linie zu tief ergeben, ist nicht mehr zu bezweifeln.

29.

In dem Werke des Herrn SABINE findet sich eine Bemerkung, welche grosse Aufmerksamkeit verdient, indem sie auf die Richtigkeit der Bestimmungen der absoluten Pendellänge neue Zweifel wirft. Er liess nämlich seine beiden unveränderlichen Pendel sowohl auf denselben Agatebenen schwingen, welche Herr KATER zu seinen Versuchen gebraucht hatte, als auch auf den zu diesen Pendeln selbst gehörenden: obgleich kein Unterschied unter diesen Ebenen sichtbar war, so machte doch eins der Pendel auf seinen eigenen Ebenen täglich 1,46 Schwingungen mehr als auf den Katerschen; das andere zeigte diesen Unterschied (welcher mit $0^{L},015$ in der Länge des Secundenpendels correspondirt) nicht. Die ausgezeichnete Uebereinstimmung aller Versuche von SABINE lässt keinen Zweifel über die Wirklichkeit des Unterschiedes; dennoch fand er, unter dem Anscheine nach ganz gleichen Umständen, bei dem zweiten Pendel nicht statt. Es war daher keine Hoffnung vorhanden, seine Ursache durch Versuche auf verschiedenen Ebenen von derselben Materie zu entdecken; allein es schien der Mühe werth, das im 26. Art. beschriebene Pendel auf Unterlagen von sehr verschiedener Härte und Politur schwingen zu lassen, weil sich dadurch weit grössere Unterschiede ergeben konnten, von welchen dann einiger Aufschluss über die Natur und den Einfluss dieser Einwirkung zu erwarten war. Ich machte daher Versuche auf Ebenen von Agat, von mattgeschliffenem Glase und von Stahl, auf Glascylindern und auf Ebenen und Cylindern von Messing. Alle diese Versuche wurden mit beiden Schneiden des Pendels wiederholt; die meisten Coincidenzen sind von Herrn ANGER beobachtet. Die Form ihrer Mittheilung ist die bereits im 26. Art. angewandte.

Die auf den härteren Unterlagen — Agat, mattgeschliffenen Glasplatten, Glasröhren von 42 Lin. Durchmesser und sehr harten Stahlebenen — gemachten Versuche werde ich zuerst anführen:

1) Grosses Gewicht unten:

		t	Barometer.		τ	l'
1826 Dec. 16	Agatebenen	1°,0001505	338^{L},66	+ 2°,7	+ 2°,64	440^{L},8572 — 0^{L},0695 k
21	Glasebenen	1,0001436	334,17	+ 2,0	+ 1,86	440,8580 — 0,0687 k
19	Glasröhren	1,0001510	337,73	+ 2,0	+ 2,56	440,8585 — 0,0692 k
1827 Apr. 19	Agatebenen	1,0002455	337,82	+ 12,4	+ 12,01	440,8700 — 0,0668 k
21	Dieselben	1,0002455	335,24	+ 13,1	+ 12,34	440,8680 — 0,0662 k
20	Stahlebenen	1,0002459	337,65	+ 13,7	+ 12,57	440,8662 — 0,0666 k
20	Dieselben	1,0002364	336,45	+ 12,1	+ 11,73	440,8644 — 0,0666 k

2) Grosses Gewicht oben:

		t	Barometer.		τ	l'
1826 Dec. 16	Agatebenen	1°,0001387	338^{L},68	+ 2°,7	+ 2°,40	440^{L},8488 — 0^{L},0694 k'
21	Glasebenen	1,0001316	333,96	+ 2,2	+ 2,08	440,8458 — 0,0686 k'
19	Glasröhren	1,0001299	337,84	+ 2,0	+ 2,16	440,8428 — 0,0694 k'
1827 Apr. 19	Agatebenen	1,0001908	337,79	+ 12,9	+ 12,12	440,8210 — 0,0668 k'
21	Dieselben	1,0001817	335,20	+ 13,7	+ 12,51	440,8105 — 0,0662 k'
20	Stahlebenen	1,0001825	337,55	+ 13,8	+ 12,71	440,8092 — 0,0666 k'
20	Dieselben	1,0001807	336,35	+ 12,3	+ 11,78	440,8149 — 0,0666 k'

Der Zustand des Pendels bei den drei ersten Versuchen blieb derselbe; ebenso bei den vier letzten; zwischen beiden Reihen wurde er aber verändert. Die Versuche zeigen keine entschiedene Einwirkung der Unterlagen auf die Schwingungszeiten des Pendels, welche selbst bei den Glasröhren, welche von den Schneiden nur in einem Punkte berührt werden, den Werth behalten haben, den sie auf den übrigen Unterlagen hatten. Vielleicht wäre aus öfterer Wiederholung der Versuche ein kleiner mittler Unterschied hervorgegangen; allein seine Auffindung schien mir kaum ein Interesse zu haben, da man aus der Erfahrung des Herrn SABINE schon weiss, dass dergleichen Unterschiede auch vorkommen können, wenn die verschiedenen Unterlagen von gleicher Materie sind.

Ganz verschieden zeigten sich aber die Schwingungszeiten, als die Schneiden auf Ebenen von gehämmertem Messing gelegt wurden, deren Oberflächen abgeschliffen, aber nicht polirt waren. Auf diesen Unterlagen wurden folgende Versuche gemacht.

1) Grosses Gewicht unten:

		t	Barometer.		τ	l'
1826 Dec. 20	Messingebenen	1°,0001124	335^{L},58	+ 2°,1	+ 1°,96	440^{L},8299 — 0^{L},0689 k
1827 Oct. 7	Agatebenen	1,0002979	337,80	+ 12,7	+ 12,43	440,9133 — 0,0664 k
7	Messingebenen	1,0002751	337,52	+ 13,3	+ 12,85	440,8901 — 0,0662 k
9	Agatebenen	1,0003135	334,86	+ 15,8	+ 14,16	440,9145 — 0,0654 k
10	Messingebenen	1,0002709	334,86	+ 15,8	+ 14,67	440,8730 — 0,0653 k

2) Grosses Gewicht oben:

		t	Barometer.		τ	l'
1826 Dec. 20	Messingebenen	1°,0000619	335^{L},52	+ 2°,0	+ 2°,18	440^{L},7833 — 0^{L},0689 k'
1827 Oct. 7	Agatebenen	1,0002433	337,78	+ 12,8	+ 12,62	440,8638 — 0,0663 k'
7	Messingebenen	1,0002198	337,40	+ 13,6	+ 13,17	440,8390 — 0,0661 k'
8	Agatebenen	1,0002530	336,31	+ 14,5	+ 13,83	440,8633 — 0,0657 k'
10	Messingebenen	1,0001680	334,83	+ 15,8	+ 14,86	440,7810 — 0,0652 k'

Bei dem ersten Versuche, verglichen mit den drei oben angeführten Versuchen auf härteren Unterlagen, zeigt sich ein Einfluss der Messingebenen auf die Länge des gleichzeitig schwingenden Pendels von — 0^{L},0280 und — 0^{L},0625; der zweite Versuch ergibt denselben — 0^{L},0238 und — 0^{L},0246; der dritte — 0^{L},0409 und — 0^{L},0826. Sie stimmen daher bei weitem nicht so gut überein, als ähnliche Versuche auf härteren Unterlagen, so dass man annehmen kann, dass die Messingebenen die Schwingungszeiten auf eine Art stören, welche von der Verschiedenheit im Auflegen des Pendels oder von Umständen abhängt welche man nicht kennt. Indessen geben alle drei Versuche beträchtlich kürzere Schwingungszeiten als die Versuche auf härteren Unterlagen, und der Unterschied ist für die zweite Aufhängung des Pendels grösser als für die erste. Die Ab-

nahme der Schwingungswinkel war nicht beträchtlich verschieden von der welche sich zeigt wenn man das Pendel auf härteren Unterlagen schwingen lässt; die einzelnen Coincidenzen stimmten eben so gut untereinander als gewöhnlich, so dass kein Einfluss der Schwingungswinkel bemerkt wurde. Nachdem die Versuche beendigt waren, untersuchte ich die Ebenen und fand bei den beiden ersten, dass die Schneide keinen Einschnitt in dieselben gemacht, sondern nur eine sehr feine, sich von den übrigen Stellen der mattgeschliffenen Flächen durch ihren Glanz auszeichnende Linie hervorgebracht hatte; bei den vier späteren Versuchen war ein sehr feiner Einschnitt sichtbar, dessen Breite aber so gering war, dass ich vergebens versuchte, sie unter dem Mikroskope zu messen. —

Der beträchtliche Einfluss, welchen die Messingebenen auf die Schwingungszeiten des Pendels gehabt haben, liess erwarten, dass man einen noch grösseren erhalten würde, wenn man die Schneiden auf Cylinder von derselben Materie legte. Ich versuchte daher auch diese; allein sie gaben einen so grossen und mit den Schwingungswinkeln so veränderlichen Einfluss, dass es nöthig wird, die Versuche im Einzelnen vorzulegen.

Der erste wurde am 18. December 1826 gemacht; die Unterlagen waren Stücke von Messingdraht von 1 Lin. Durchmesser, welche aber abgedreht und polirt wurden. Als das grosse Gewicht unten war, bewegte das Pendel sich folgendermassen:

u'	t	
von 43′,7 bis 34′,2	0ˢ,9998277	$339^{L},32 + 2^{0},0$
34,2 „ 26,0	0,9997884	
26,0 „ 20,2	0,9997686	
20,2 „ 17,1	0,9997624	
17,1 „ 13,7	0,9997535	

τ	l'	
+ 2°,04	$440^{L},5772$	$- 0,0696 . k$
2,05	5425	
2,08	5248	
2,13	5189	
2,16	5108	

als es oben war:

u'	t	
von 59′,4 bis 32′,5	0ˢ,9995905	$339^{L},32 + 2^{0},0$
32,5 „ 19,5	0,9994995	
19,5 „ 13,7	0,9994446	

τ	l'	
+ 2°,12	$440^{L},3676$	$- 0,0696 . k'$
2,12	2874	
2,12	2389	

Dieser Versuch wurde am 22. December mit neuen Messingcylindern von 1,63 L. Durchmesser wiederholt; er ergab nun für beide Lagen des Pendels:

u'	t	
von 87′,8 bis 63′,5	1ˢ,0000431	$337^{L},31 + 2^{0},0$
63,5 „ 46,1	1,0000110	
46,1 „ 34,8	0,9999771	
34,8 „ 27,0	0,9999493	
27,0 „ 21,2	0,9999290	

τ	l'	
+ 2°,00	$440^{L},7663$	$- 0,0691 . k$
2,04	7393	
2,09	7090	
2,14	6841	
2,20	6657	

u'	t	
von 81′,3 bis 39′,3	0ˢ,9997143	$337^{L},74 + 2^{0},0$
39,3 „ 22,9	0,9995826	
22,9 „ 14,0	0,9995067	

τ	l'	
+ 2°,17	$440^{L},4765$	$- 0,0693 . k'$
2,21	3600	
2,25	2928	

Die Stellen der Messingcylinder, wo die Schneiden gelegen hatten, wurden unter dem Mikroskope untersucht; es fanden sich Einschnitte, deren Breite $= 0^{L},01$ bis $0^{L},013$, deren Tiefe aber weit geringer war. Die Abnahme der Schwingungswinkel war weit grösser als auf den härteren Unterlagen, wie die folgende Zusammenstellung der in beiden Versuchen und den früheren beobachteten zeigt:

I.		II.		Härtere Unterlagen.	
u'	Schwingungen.	u'	Schwingungen.	u'	Schwingungen.
43′,7	0	87′,8	0	82′,9	0
34,2	885	63,5	802	68,1	770
26,0	1787	46,1	1619	56,0	1544
20,2	2698	34,8	2450	47,0	2320
17,1	3612	27,0	3292	39,5	3097
13,7	4530	21,2	4142	33,5	3874
				28,4	4652
				24,2	5431
59′,4	0	81′,3	0	94′,3	0
32,5	987	39,3	929	65,0	772
19,5	2025	22,9	1925	46,4	1550
13,7	3095	14,0	2962	33,6	2331
				24,5	3112
				18,9	3895

Vergleicht man die aus diesen beiden Versuchen hervorgehenden Werthe von l' mit den auf den härteren Unterlagen bestimmten, so erhält man folgende Einwirkungen der Messingcylinder auf dieselben:

1. Versuch.				2. Versuch.			
u'		u'		u'		u'	
39',0	— 0L,2807	46',0	— 0L,4782	75',7	— 0L,0916	60',3	— 0L,3693
30,1	— 0,3154	26,0	— 0,5584	54,8	— 0,1186	31,1	— 0,4858
23,1	— 0,3331	16,6	— 0,6069	40,5	— 0,1489	18,5	— 0,5530
18,7	— 0,3390			30,9	— 0,1738		
15,4	— 0,3471			24,1	— 0,1922		

30.

Man wird gewiss nicht Pendelschwingungen auf weicheren Unterlagen beobachten, während härtere vorhanden sind, also auch nicht Gefahr laufen, so grosse Unsicherheiten in die Resultate zu bringen als die sind, welche die Anwendung von Messingebenen und Cylindern gegeben hat. Allein dennoch halte ich die auf diesen Unterlagen gemachten Versuche für lehrreich, indem sie die Natur der Einwirkung aufklären. Es scheint zwischen den im December 1826 gemachten Versuchen auf Messingebenen und denen auf härteren Unterlagen kein wesentlicher Unterschied zu sein, indem auch jene Ebenen keinen bleibenden Eindruck der Schneide erhielten; der grosse Einfluss derselben wäre dann die Wirkung einer auch bei den härteren Unterlagen stattfindenden, nur bei den Messingebenen stärker hervortretenden Ursache.

Es schien mir daher der Mühe werth, der Natur der Einwirkung der Unterlagen auf die Schneiden noch weiter nachzuspüren, und namentlich durch hinreichend feine Versuche zu entscheiden, ob die Schneiden, wie man immer vorausgesetzt hat, wirklich festliegen oder ob sie durch die Schwingungen eine kleine Bewegung erhalten. Zu diesen Versuchen wandte ich eine Vorrichtung an, welche Fig. 10, Taf. II in halber Grösse abgebildet ist. Das Wesentliche derselben ist eine Rolle von Stahl von 0,85 Lin. Halbmesser, an welche ein 36 Lin. langer Zeiger mit einem Gegengewichte für die Schwere desselben versehen, befestigt ist und welche sich um einen feinen Zapfen dreht. Wenn diese Rolle unter die Schärfe der Schneide gedrückt wird, so dass ihre Axe sich nicht bewegen kann, so muss sie eine Drehung annehmen, wenn die Schneide sich bewegt; diese Drehung zeigt der Zeiger 42 Mal vergrössert; allein wenn man gegen denselben ein Mikroskop richtet, so wird die Vergrösserung noch weit stärker und man wird auch im Stande sein, mit einem Mikrometer im Mikroskope die Ausdehnung der Bewegung zu messen. Um die Rolle gegen die Schneide des auf seinen Unterlagen befindlichen Pendels drücken zu können, sind die Löcher für ihren Zapfen an dem kurzen Arme eines Hebels befindlich, welcher sich um zwei, auf dem Rahmen der Agatebenen oder anderen Unterlagen ruhende scharfe Spitzen dreht, während der lange Arm desselben so belastet ist, dass die Rolle mit einem Gewichte von etwa einer Unze gegen die Schneide drückt. Gegen den Zeiger wurde eins der Pistor'schen Mikroskope gerichtet, indem es in horizontaler Lage auf dem Rahmen der Unterlage befestigt wurde; da man damit den tausendsten Theil einer Linie noch deutlich erkennt, so musste eine Bewegung der Schneide sichtbar werden, wenn sie auch nur den vierzigtausendsten Theil einer Linie betrug. Es ist klar, dass das Rollen der cylindrischen Schneide auf den Unterlagen keine Verrückung des Zeigers verursachen kann; allein wenn die Schneide nicht gerade, oder vielmehr der die Rolle berührende Punkt derselben nicht in gerader Linie mit den auf den Lagern aufliegenden Theilen ist, so muss eine Bewegung erfolgen, wodurch es nöthig wird, durch Veränderung der Versuche, diesen Fehler auszuschliessen oder zu verkleinern.

Zu diesen Versuchen über die Bewegung der Schneiden während der Schwingungen des Pendels wurde wieder das im 26. Art. beschriebene Pendel angewandt. Ich fand auf allen Unterlagen kleine Bewegungen immer nach der Richtung der Bewegung des Pendels: die Schneiden bewegen sich immer rechts, wenn das Pendel sich rechts bewegt und umgekehrt. Die Ausdehnung dieser Bewegung ist, den Versuchen zufolge, den Schwingungswinkeln proportional und für beide Schneiden gleich; sie schien für Agat-, Glas- und Stahlebenen und für Glascylinder genau gleich und für jeden Grad des Schwingungswinkels $u' = 0L,00004$ zu sein; für Messingebenen $= 0L,00033$; für Messingcylinder von 1,63 Lin. Durchmesser $= 0L,00049$. Die sehr starke Vergrösserung, unter welcher diese Bewegungen beobachtet wurden, zeigte bei den beiden letzten Unterlagen deutlich, dass das Maximum ihrer Schnelligkeit mit dem Durchgange des Pendels durch die Lothlinie zusammenfällt. Die angegebenen Grössen aber sind weit weniger genau als man mit dem Apparate messen kann; denn es zeigten sich, vorzüglich bei den weicheren Unterlagen, Unterschiede, welche weit ausser den Grenzen der Messungsfehler lagen, so dass z. B. bei mehreren Wiederholungen des Versuchs auf den Messingcylindern die Bewegung für einen Grad des Schwingungswinkels $= 0L,00034$ gefunden wurde; ich habe daher nur Mittel

aus vielen Resultaten angeben können, deren jedes ohne Zweifel von der Härte und Beschaffenheit der Stelle der Unterlage abhängig war, wo die Schneide jedesmal lag.

Diese Versuche zeigen, dass die grossen im vorigen Art. angeführten Einwirkungen der Messingcylinder auf die Schwingungszeiten, nicht einer Bewegung der Schneiden zugeschrieben werden dürfen. Bezeichnet man die beobachteten Einwirkungen auf die Länge des gleichzeitig schwingenden einfachen Pendels in beiden Lagen des Pendels durch i und i', so entsprechen sie, nach den oben angeführten Entfernungen des Schwerpunkts von den Schneiden, Aenderungen des Mittelpunkts der Bewegung von resp. $\frac{9}{5}i$ und $-\frac{4}{5}i'$; sollten diese wirklich stattfinden, so müsste der ruhende Punkt des Pendels nicht in der Schärfe der Schneide selbst liegen, sondern für die erste Schneide $\frac{9}{5}i$ unterhalb, für die andere $\frac{4}{5}i'$ oberhalb derselben, woraus also Bewegungen der Schneiden folgen würden, welche $\frac{18}{5}i \sin u'$ und $\frac{-8}{5}i' \sin u'$ betragen. Beide sind ungleich kleiner beobachtet worden, die erste sogar nach der entgegengesetzten Richtung.

Auch können die beobachteten Bewegungen nicht der Unzulänglichkeit der Reibung zum Festhalten der Schneiden zugeschrieben werden. Da nämlich das Pendel ein fester Körper ist, welcher sich nicht um eine seiner freien Axen dreht, so ist eine Kraft erforderlich, um seine Drehungsaxe fest zu halten; diese Kraft ist die Reibung auf den Unterlagen, allein wenn sie nicht völlig ausreichte und daher die Bewegung der Schneiden nicht ganz aufhöbe, sondern nur auf eine kleine Quantität, im Verhältnisse $1:\alpha$ reducirte, so würde diese übrig bleibende Bewegung immer der Schwingungsbewegung entgegengesetzt sein und den Ausdruck $-2\alpha s u'$ haben, wo s die Entfernung des Schwerpunkts von der Schneide bedeutet. Sie müsste also nicht nur in der Richtung verschieden, sondern auch für beide Schneiden von ungleicher Grösse sein; beides gegen die Erfahrung, welche also keinen Grund gibt, die Hinlänglichkeit der Reibung zum Festhalten der Axe zu bezweifeln.

Man sieht daher aus den Versuchen über die Schwingungszeiten und die Bewegung der Schneide, dass die Unterlagen der Bewegung des Pendels eine Kraft entgegensetzen. Allein jede Kraft, welche nur auf die Schärfe der Schneide wirkt, kann keinen Einfluss auf die Schwingungszeit haben: die Kraft muss also aus einem Eindrucke entstehen, welchen die Schneide in die Unterlage macht, so dass Punkte der ersteren, welche über der Schärfe liegen, mit der letzteren in Berührung kommen; oder aus einer Veränderung der Figur der Schneide durch den Druck und die Bewegung des Pendels; oder aus einer Zusammenwirkung beider Ursachen. Doch ist die zweite Ursache allein nicht hinreichend die Versuche zu erklären, indem verschiedene Unterlagen dann gleiche Schwingungszeiten geben müssten. Die Versuche zeigen daher, dass die Schneide in die Unterlage einen Eindruck macht, woran aber auch aus anderen Gründen nicht gezweifelt werden kann.

Um die Art wie dieser Eindruck auf die Schwingungszeiten wirkt, näher zu untersuchen, habe ich den in diesem Artikel angeführten Versuchen gemäss angenommen, dass die Bewegung der Schneide den Schwingungswinkeln proportional ist; hieraus folgt, dass ein Punkt in der Axe des Pendels über der Schneide vorhanden ist, welcher auch bei der Bewegung in derjenigen lothrechten Ebene bleibt, in welcher die Axe des Pendels und die Schneide im Zustande der Ruhe sich befinden. Die Entfernung dieses Punkts von der Schneide, welche ich durch h bezeichnen werde, wird durch die Ausdehnung der Bewegung der Schneide und den Schwingungswinkel bestimmt, und findet sich aus den angeführten Angaben:

für die härteren Unterlagen $= 0{,}0012$
für Messingebenen . . . . . $= 0{,}0095$
für Messingcylinder . . . . . $= 0{,}0140.$

Nimmt man nun an, dass der Schneide eine Kraft Q entgegenwirkt, welche von dem Orte der Schneide auf der Unterlage abhängig ist, oder

$$Q = a^{(0)} + a^{(1)} h \sin u + a^{(2)} h^2 \sin u^2 + \text{u. s. w.} \ldots$$

wo $h \sin u$ die Entfernung der Schneide von dem Orte welchen sie bei der Ruhe des Pendels einnimmt ist, so erhält man, der X. Beilage zufolge, die Länge des gleichzeitig schwingenden einfachen Pendels, die dem ungestörten Pendel entsprechende $= l$ gesetzt:

$$l' = l + 2h - 2h\frac{l}{s}\left\{\frac{1}{2}a^{(1)}h + \frac{1.3}{2.4}a^{(3)}h^3 \sin u'^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}a^{(5)}h^5 \sin u'^4 + \text{u.s.w.}\right\}$$

die Abnahme des Schwingungswinkels während einer Schwingung

$$= \frac{2h}{s}\left\{a^{(0)} + \frac{1}{3}a^{(2)}h^2 \sin u'^2 + \frac{1}{5}a^{(4)}h^4 \sin u'^4 + \text{u. s. w.} \ldots\right\}$$

Man sieht hieraus, dass die geraden Glieder im Ausdrucke der Kraft Q, vermöge welcher diese Kraft während der ganzen Schwingung der Bewegung entgegenwirkt, nur den Winkel ändern, auf die Zeit aber keinen Einfluss haben; dass dagegen die ungeraden

Glieder, vermöge welcher die Kraft in der ersten Hälfte der Schwingung die Bewegung befördert, in der zweiten hindert, die Zeit aber nicht den Winkel ändern. Die beobachtete Einwirkung der Messingebenen muss also von den ungeraden Gliedern herrühren, indem sie nur die Zeit änderte; sie muss ferner aus dem ersten dieser Glieder entstanden sein, indem nur dieses einen vom Schwingungswinkel unabhängigen Einfluss gibt, so wie die Versuche erfordern, welche für grössere und kleinere Winkel übereinstimmende Zeiten ergeben.

Die Reibung, so wie man sie anzunehmen pflegt, ist eine constante, stets entgegenwirkende Kraft und wird daher durch $a^{(0)}$ der Formel dargestellt. Diese Kraft ist aber nicht mit den Versuchen vereinbar, denn sie hat keinen merklichen Einfluss auf die Schwingungszeit, und einen viel zu grossen auf den Winkel. Setzt man nämlich $a^{(0)} = \frac{1}{5}$, welche Grösse man der Reibung gewöhnlich beilegt, und $h = 0^{L}{,}0095$ für die Messingebenen, so erhält man die Abnahme des Winkels für beide Lagen des Pendels $= 2''{,}6$ und $5''{,}9$, welche Zahlen so sehr viel grösser sind als die ganze beobachtete, durch den Widerstand der Luft erklärliche Abnahme, dass dieser Versuch der Annahme einer solchen Reibung bestimmt widerspricht.

Die Grösse des Coefficienten $a^{(1)}$, welche angenommen werden muss, um den Versuch zu erklären, kann indessen nicht absolut bestimmt werden, sondern nur abhängig von dem ähnlichen, zu den härteren Unterlagen gehörenden Coefficienten. Wenn sich nämlich l', h, $a^{(1)}$ auf die Messingebenen, $l_{,}'$, $h_{,}$, $a_{,}^{(1)}$ auf die härteren Unterlagen beziehen, so hat man

$$l' = l + 2h - \frac{l}{s} h^2 a^{(1)}$$

$$l_{,}' = l + 2h_{,} - \frac{l}{s} h_{,}^2 a_{,}^{(1)}$$

oder

$$l' - l_{,}' = 2h - 2h_{,} - \frac{l}{s}(hh a^{(1)} - h_{,}h_{,}a_{,}^{(1)}).$$

Wenn man ferner das Maximum der Kraft Q, den am Anfange und am Ende der Schwingung wirkenden Werth derselben, für beide Arten der Unterlagen durch Q' und $Q_{,}'$ bezeichnet, so hat man:

$$Q' = a^{(1)} h \sin u'; \quad Q_{,}' = a_{,}^{(1)} h_{,} \sin u',$$

und wenn man $a^{(1)}$ und $a_{,}^{(1)}$ hierdurch eliminirt:

$$\frac{h}{h - h_{,}} Q' - \frac{h_{,}}{h - h_{,}} Q_{,}' = \frac{s}{l}\left\{\frac{l_{,}' - l'}{h - h_{,}} + 2\right\} \sin u'.$$

Gibt man den im December 1826 gemachten Versuchen auf Messingebenen den Vorzug vor den späteren, indem jene die Störung der Schwingungszeit zeigten, ohne dass die Oberfläche der Ebenen einen bleibenden Eindruck erhielt, was bei den späteren nicht der Fall war, so hat man für beide Lagen des Pendels:

$l_{,}' - l'$	$+ 0^{L}{,}0280$;	$+ 0^{L}{,}0625$
s	305,3;	135,7
h	0,0095;	0,0095
$h_{,}$	0,0012;	0,0012

woraus also

$$\frac{95}{83} Q' - \frac{12}{83} Q_{,}' = 3{,}7 \sin u' \quad \text{und} \quad 3{,}0 \sin u'$$

hervorgeht; man sieht hieraus, dass die Kraft, welche man annehmen muss um den Versuch zu erklären, selbst bei Schwingungswinkeln von $1\frac{1}{2}^0$, noch nicht den zehnten Theil der Schwere beträgt, also auch weit unter der Grösse bleibt, welche man der Reibung beizulegen pflegt. Ich bemerke übrigens, dass unter Q die Summe aller, auf die Schneide reducirten Kräfte verstanden werden kann, und dass nicht gerade angenommen zu werden braucht, dass nur die Schärfe derselben einer Kraft ausgesetzt ist.

Durch diese Rechnung wollte ich zeigen, dass einerseits die gewöhnliche Reibung weder die Versuche erklärt, noch damit vereinbar ist, andererseits aber die Annahme einer sehr grossen Kraft zu ihrer Erklärung nicht nöthig ist. Es scheint also, dass die Schneide bei sehr kleinen Bewegungen keine Reibung erfährt, sondern nur diejenige Kraft, welche aus der Verschiebung der Theile der Unterlage, mit welchen sie während ihrer sehr kleinen Bewegung in Berührung bleibt, dadurch entsteht, dass die Elasticität der Unterlage die verschobenen Theile wieder auf ihren ursprünglichen Ort zurückzuführen strebt. Sobald aber die Bewegung so gross wird, dass $a^{(1)} h \sin u'$ grösser wird als $\frac{1}{5}$, so muss die gewöhnliche Reibung eintreten. Alle Erscheinungen, welche die Reibung darbietet, scheinen mit der Annahme vereinbar zu sein, dass dieselbe aus den Eindrücken entsteht, welche die Oberflächen der sich reibenden Körper ineinander machen und welche bei der Bewegung ihren Ort verändern; Rauhigkeit der Oberflächen vergrössert Ursache und Wirkung.

Die Erscheinungen, welche die Schwingungen auf Oberflächen darbieten, welche bleibende Eindrücke durch die Schneide erhalten, sind von den hier untersuchten verschieden; auf Messingcylindern fand sich z. B. eine Aenderung der Schwingungswinkel und eine Abhängigkeit der Schwingungszeit von diesen Winkeln. Es müssen also hier die höheren Glieder des Ausdrucks der Kraft merklich werden; allein die Erscheinung wird dadurch so zusammengesetzt, dass vermuthlich nichts

allgemein Anwendbares daraus gefolgert werden kann und daher diese Versuche nur bemerkenswerth sind, weil sie eine stärker hervortretende Bestätigung davon geben, dass Einwirkungen, welche auf einen sehr kleinen Raum beschränkt sind, dennoch beträchtlichen Einfluss auf die Bewegung eines Pendels erlangen können.

Nimmt man das was ich über die Einwirkung der Unterlagen auf die Bewegung gesagt habe zusammen, so scheint daraus hervorzugehen, dass die Schneide (indem sie sich in die Unterlage eindrückt, auch vielleicht Theile derselben über ihre ursprüngliche Oberfläche erhöhet und dadurch bei der Bewegung des Pendels eine Bewegung der Materie der Unterlage erzeugt) sich nicht um ihre Schärfe, sondern um einen höheren oder niedrigeren Punkt dreht, je nachdem niedrigere oder höhere Theile der Unterlage leichter ausweichen. Dass das erstere der Fall sei, deuten die Versuche an, indem man nicht wird annehmen können, dass die Schneide noch beträchtlich über das oben bestimmte h hinaus mit der Unterlage in Berührung ist.

31.

Ich habe geglaubt, bei diesen Erscheinungen etwas länger verweilen zu dürfen, indem sich daraus die bemerkenswerthe Folgerung ergibt, dass das Resultat eines Pendels mit reciproken Axen von der Einwirkung der Unterlagen nur insofern abhängig ist, als sie den Punkt um welchen es sich drehet, etwas erhöht. Wie auch die in der Nähe des Drehungspunkts wirkenden Kräfte beschaffen sein mögen, so ist ihr Einfluss auf die entsprechende Pendellänge stets der Entfernung des Schwerpunkts von der Schneide umgekehrt proportional; oder man hat durch die Schwingung um die erste Schneide

$$l' = l + 2h - 2h\frac{l}{s}\cdot A$$

und um die zweite

$$l_{,}' = l_{,} + 2h_{,} - 2h_{,}\frac{l_{,}}{s_{,}}\cdot A.$$

Wenn man aber die Schwingungszeiten um beide Schneiden gleich macht und für l und $l_{,}$ ihre Ausdrücke:

$$l = \frac{\mu + ss}{s}, \quad l_{,} = \frac{\mu + s_{,}s_{,}}{s_{,}}$$

setzt, so folgt aus beiden Gleichungen:

$$l' = s + s_{,} + h + h_{,} + \left(\frac{s + s_{,} - 2lA}{s - s_{,}}\right)(h - h_{,}).$$

Ich habe hier nicht angenommen, dass h und $h_{,}$ gleich seien; sind sie gleich, so verschwindet das letzte Glied unmittelbar, sind sie ungleich, so verschwindet es durch eine Wiederholung der Versuche mit verwechselten Schneiden. Indem man das Pendel so einrichtet, dass die Schneiden mit einander vertauscht werden können, erlangt man also ausser dem im 25. Art. erwähnten Vortheile auch die möglichst vollständige Befreiung des Resultats von der Einwirkung der Unterlage.

Ich werde jetzt noch zeigen, wie das Pendel mit reciproken Axen, von welchem Herr Bohnenberger die Ehre der Erfindung, Herr Kater aber die Ehre der ausgezeichnetsten Anwendung besitzt, meiner Meinung nach eingerichtet werden muss, damit alle Schwierigkeiten so viel als möglich beseitigt werden. Es muss dasselbe der äusseren Figur nach symmetrisch construirt werden, also, da es der Masse nach nicht symmetrisch sein darf, zwei gleich grosse und gegen die Schneiden gleich gestellte Linsen an einer Stange besitzen, deren eine mit Metall gefüllt, die andere hohl ist. Durch diese Einrichtung geht die Einwirkung der Luft aus der Rechnung, so dass der Stand der meteorologischen Instrumente nur insofern in Betracht kömmt, als er sich zwischen zusammengehörigen Versuchen ändert. In der That ist nach dem 13. Art. die entsprechende einfache Pendellänge für die Schwingung um die erste Schneide:

$$l = \frac{\mu + \frac{m'}{m}K + ss}{s\left(1 - \frac{m'}{m}\cdot\frac{s'}{s}\right)},$$

für die andere, unter der Voraussetzung, dass beide Schwingungszeiten gleich gemacht worden sind und dass die Dichtigkeit der Luft gleich geblieben ist:

$$l = \frac{\mu + \frac{m'}{m}K_{,} + s_{,}s_{,}}{s_{,}\left(1 - \frac{m'}{m}\cdot\frac{s_{,}'}{s_{,}}\right)}.$$

Allein wegen der Symmetrie der Construction ist $K_{,} = K$, $s_{,}' = s' = \frac{1}{2}(s + s_{,})$, also:

$$ls - \frac{m'}{m}l\cdot\frac{s + s_{,}}{2} = \mu + \frac{m'}{m}K + ss$$

$$ls_{,} - \frac{m'}{m}l\cdot\frac{s + s_{,}}{2} = \mu + \frac{m'}{m}K + s_{,}s_{,}$$

woraus man

$$l = s + s_{,}$$

also unabhängig von der Einwirkung der Luft erhält.

Ferner müssen die Schneiden so eingerichtet werden, dass sie mit einander verwechselt werden können. Dadurch verschwindet der Einfluss der cylindrischen Figur derselben völlig, sowie auch die Einwirkung der Unterlagen, selbst wenn sie für beide Schneiden verschieden ist, wie dieses, nach der Erfahrung des Herrn Sabine, für möglich gehalten werden muss. Das Mittel aus Versuchen vor und nach der Verwechselung der

Schneiden gibt die Länge des gleichzeitig schwingenden Pendels $= s + s_{,} + h + h_{,,}$ wo h und $h_{,,}$ welche übrigens für harte Unterlagen sehr klein sind, durch die im vorigen Artikel beschriebene Einrichtung bestimmt werden können.

Endlich würde ich vorziehen, das bewegliche Gewicht wegzulassen, allein das Pendel so zu construiren, dass die Schwingungszeiten in der Luft um beide Schneiden nahe gleich werden, welches dadurch geleistet werden kann, dass man die Stange, an welcher die Schneiden und die Linsen befindlich sind, anfänglich etwas zu lang lässt, und sie dann an beiden Enden symmetrisch so lange abkürzt, bis die Gleichheit der Schwingungszeiten nahe stattfindet. Nennt man die beiden Schwingungszeiten, welche das Pendel in der Luft hat, auf eine gleiche Temperatur des Pendels und auf unendlich kleine Winkel reducirt, t und $t_{,}$, so hat man im Mittel aus allen Versuchen, vor und nach der Verwechselung der Schneiden:

$$\lambda tt = \frac{\mu + \frac{m'}{m} K\delta + ss}{s\left(1 - \frac{m'}{m} \cdot \frac{s + s_{,}}{2s} \cdot \delta\right)}$$

$$\lambda t_{,} t_{,} = \frac{\mu + \frac{m'}{m} K\delta_{,} + s_{,} s_{,}}{s_{,}\left(1 - \frac{m'}{m} \cdot \frac{s + s_{,}}{2s_{,}} \cdot \delta_{,}\right)}$$

wo δ und $\delta_{,}$ die Dichtigkeiten der Luft, die bei der Berechnung von m' zum Grunde gelegte zur Einheit angenommen, bezeichnen. Hieraus folgt:

$$\lambda\left\{tt \cdot s - tt \cdot \frac{m'}{m} \cdot \frac{s + s_{,}}{2} \cdot \delta\right\} = \mu + \frac{m'}{m} K\delta + ss$$

$$\lambda\left\{t_{,} t_{,} \cdot s_{,} - t_{,} t_{,} \cdot \frac{m'}{m} \cdot \frac{s + s_{,}}{2} \cdot \delta_{,}\right\} = \mu + \frac{m'}{m} K\delta_{,} + s_{,} s_{,}$$

und wenn man beide Gleichungen von einander abzieht und durch $s - s_{,}$ dividirt:

$$\lambda\left\{\frac{tt + t_{,} t_{,}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s + s_{,}}{s - s_{,}}\left[tt\left(1 - \frac{m'}{m}\delta\right) - t_{,} t_{,}\left(1 - \frac{m'}{m}\delta_{,}\right)\right]\right\} = s + s_{,} + \frac{m'}{m} K \frac{(\delta - \delta_{,})}{s - s_{,}};$$

das letzte Glied dieses Ausdrucks bleibt unbekannt, allein wenn zwei zusammengehörige Versuche stets bald nach einander gemacht werden, so wird $\delta - \delta_{,}$ sehr klein sein, in welchem Falle man dieses Glied vernachlässigen kann. Will man aber K selbst kennen lernen, so wird man es, aus den bei sehr verschiedenen Barometer- und Thermometerständen beobachteten Schwingungszeiten um jede der Schneiden, mit der zur Berechnung des letzten Gliedes hinreichenden Annäherung erhalten. Wenn man noch die aus h und $h_{,}$ hervorgehende Verbesserung anbringt, so erhält man hieraus:

$$\lambda = \frac{s + s_{,} + h + h_{,} + \frac{m'}{m} K \cdot \frac{(\delta - \delta_{,})}{s - s_{,}}}{\frac{tt + t_{,} t_{,}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s + s_{,}}{s - s_{,}}\left\{tt\left(1 - \frac{m'}{m}\delta\right) - t_{,} t_{,}\left(1 - \frac{m'}{m}\delta_{,}\right)\right\}}$$

Durch die Weglassung des beweglichen Gewichts wird man genöthigt, die Entfernung des Schwerpunkts des Pendels von beiden Schneiden zu bestimmen; allein da man t und $t_{,}$ willkürlich nahe gleich machen kann, so wäre hier eine rohe Annäherung hinreichend, obgleich es leicht ist, Mittel anzuwenden, wodurch man den Schwerpunkt sehr nahe richtig erhält. Der Vortheil den man dadurch erlangt, ist, dass alle Versuche mit demselben Pendel genau vergleichbar werden, und dass man die Schwierigkeit vermeidet, welche entsteht, wenn die anfängliche Berichtigung des beweglichen Gewichts sich in der Folge der Versuche nicht vollständig bewährt. Ein solches Pendel, jedoch mit völlig befestigten Schneiden, möchte auch vortheilhafter als die bisher üblichen sein, wenn es darauf ankömmt, die Schwere an verschiedenen Orten zu vergleichen.

Das so eingerichtete Pendel leistet dasselbe, was ich durch meinen Apparat auf einem ganz verschiedenen Wege erhalten habe, insofern nämlich dadurch die Unsicherheit über den Mittelpunkt der Bewegung und die aus der Bewegung in der Luft entstehende Schwierigkeit aus dem Resultate geschafft werden. Allein ob man wagen darf, nach der Entdeckung des Herrn ARAGO, dass auch nicht eisenhaltige Substanzen magnetische Wirkungen äussern, ein Pendel, welches aus einer Stange construirt ist, anzuwenden, ist eine Frage, deren Beantwortung der Entdecker dieser merkwürdigen Eigenschaft vielleicht ertheilt; man könnte das Pendel mit der drehenden Scheibe von Messing in Herrn ARAGO'S Versuchen und den Erdmagnetismus mit der Nadel vergleichen, welche durch die Drehung in Bewegung gesetzt wurde. Dass dieselbe Ursache auf ein Pendel, welches aus einer Kugel besteht, deren Durchmesser, vergleichungsweise mit der Länge des Fadens an welchem sie schwingt, sehr klein ist, einen merklichen Einfluss haben könnte, ist mir nicht denkbar. Die Versuche, aus welchen NEWTON die Gleichheit der Schwere für alle irdischen Substanzen schloss, hoffe ich mit dem Apparate, auf welchen meine Bestimmung der Pendellänge beruht, sehr bald zu wiederholen, um dadurch das Stattfinden dieser wichtigen Eigenschaft strenger zu prüfen [s. Abh. 139].

I. Beilage.

Bewegung eines sich von einem horizontalen Cylinder abwickelnden Pendels.

1.

Durch die Axe des Abwickelungscylinders lege man eine horizontale und eine verticale Ebene und bezeichne die Entfernungen eines Punkts der durch die Abwickelung des Fadens entstehenden Curve von der ersten Ebene durch x, von der anderen durch y; ferner den Winkel des Fadens mit der zweiten Ebene durch u; seine Länge, von dem Berührungspunkte mit dem Cylinder an gerechnet, durch r; den Werth von r für $u = 0$ durch ϱ; den Halbmesser des Cylinders durch a. Dann hat man, wenn man u nach der Richtung nach welcher der Faden sich abwickelt, positiv annimmt,

$$r = \varrho + au$$
$$x = (\varrho + au)\cos u - a \sin u$$
$$y = (\varrho + au)\sin u + a \cos u.$$

Wenn λ die Länge des einfachen Secundenpendels bedeutet und die Zeit t in mittleren Secunden ausgedrückt wird, so ist die Differentialgleichung der Bewegung eines Punkts auf einer vorgeschriebenen Curve bekanntlich:

$$c = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} - 2\pi^2\lambda . x,$$

für unsern Fall also

$$c = (\varrho + au)^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 2\pi^2\lambda\{(\varrho + au)\cos u - a \sin u\};$$

und wenn man den Winkel bei welchem die Schwingung anfängt, durch $-u'$ bezeichnet:

$$(\varrho + au)^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 2\pi^2\lambda\{(\varrho + au)\cos u - a\sin u - (\varrho - au')\cos u' - a\sin u'\} \quad (1)$$

2.

Die Untersuchungen über die Einwirkung störender Ursachen auf die Bewegung eines Pendels erfordern meistentheils, dass man diese Bewegung aus einer Differentialgleichung von der Form

$$c = (1 + 2f'u)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 2nn\{\cos u + fu\}$$

bestimme, in welcher $f'u$, fu Functionen von u von der Ordnung der störenden Ursache sind. Ich werde daher bei dieser Gelegenheit die Bewegung entwickeln, welche eine Folge dieser Gleichung ist, unter der Voraussetzung, dass man die Annäherung nicht über die erste Ordnung von fu und $f'u$ hinaustreibt.

Die Winkelgeschwindigkeit des Pendels verschwindet, wenn

$$0 = c + 2nn(\cos u + fu)$$

ist; am Anfange einer Schwingung ist dieses der Fall, und das u welches dem Ende derselben entspricht, ist eine zweite Wurzel dieser Gleichung. Nennt man die erstere $= -u'$, die andere $= u' - \delta u'$, so erhält man:

$$\delta u' = \frac{f(-u') - fu'}{\sin u'}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

denselben Werth, mit entgegengesetzten Zeichen, erhält man für die entgegengesetzte Schwingung. Die Winkel bleiben also ungeändert; ihr Ausdruck durch den beobachteten Schwingungswinkel, d. i. durch die halbe Summe beider Entfernungen des Pendels von der Lothlinie $= u''$, ist

$$\text{für die negative Grenze} = -u'' - \frac{f(-u') - fu'}{\sin u'}$$

$$\text{für die positive Grenze} = u'' + \frac{f(-u') - fu'}{\sin u'}$$

Dieses setzt voraus, dass fu von der Richtung der Bewegung unabhängig ist; ist dieses nicht der Fall, sondern ist es eine zweiförmige Function, welche für beide Richtungen der Bewegung einen verschiedenen Ausdruck erhält, so findet die Unveränderlichkeit der Winkel nicht statt.

Um die Relation zwischen t und u zu erhalten, führe ich einen neuen Winkel φ ein, sodass $\cos u + fu$ dem Producte des Cosinus dieses Winkels in eine Constante gleich wird. Damit φ immer möglich bleibe und auch $= 0$ werden könne, ist es erforderlich, dass die Constante das Maximum von $\cos u + fu$, oder, in Grössen von der Ordnung von fu richtig, $= 1 + f0$ ist. Man hat also:

$$(1 + f0)\cos\varphi = \cos u + fu,$$

woraus

$$u = \varphi + \frac{f\varphi - f0 . \cos\varphi}{\sin\varphi}$$

folgt. Setzt man dieses in die Differentialgleichung, so verwandelt sie sich in

$$(1 + 2f'\varphi)\left\{\frac{d\varphi + d\frac{f\varphi - f0.\cos\varphi}{\sin\varphi}}{dt}\right\}^2 = 2nn(1 + f0)\{\cos\varphi - \cos\varphi'\}.$$

Nimmt man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens die Quadratwurzel, so erhält man:

$$dt = \pm\frac{d\varphi}{n\sqrt{2\cos\varphi - 2\cos\varphi'}} \pm \frac{(f'\varphi - \tfrac{1}{2}f0)\,d\varphi + d\frac{f\varphi - f0.\cos\varphi}{\sin\varphi}}{n\sqrt{2\cos\varphi - 2\cos\varphi'}}$$

wo das obere Zeichen für Schwingungen in positiver Richtung gilt, das untere für entgegengesetzte.

Das Integral dieses Differentials, von $\mp\varphi'$ bis $\pm\varphi'$ genommen, ist die Dauer einer ganzen Schwingung; will man sie von dem beobachteten Schwingungswinkel u'' abhängig machen, so hat man nach vollendeter Integration φ' durch u'' auszudrücken, wodurch man erhält:

$$-\varphi' = -u' + \frac{f(-u') - f0.\cos u'}{\sin u'}$$

$$= -u'' - \frac{2f0.\cos u' - fu' - f(-u')}{2\sin u'}$$

$$\varphi' = u' - \frac{fu' - f0.\cos u'}{\sin u'}$$

$$= u'' + \frac{2f0.\cos u' - fu' - f(-u')}{2\sin u'}$$

Das erste Glied des Integrals ist bekanntlich

$$= \frac{\pi}{n}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin\tfrac{1}{2}\varphi'^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin\tfrac{1}{2}\varphi'^4 + \ldots\right\} = \frac{\pi}{n} F\varphi';$$

also, durch u'' ausgedrückt,

$$= \frac{\pi}{n}\left\{Fu'' + \frac{dFu''}{du''} \cdot \frac{2f0\cos u' - fu' - f(-u')}{2\sin u'}\right\};$$

in dem zweiten, welches von der Ordnung der störenden Ursache ist, kann u für φ geschrieben werden. Man erhält dadurch den Ausdruck der für entgegengesetzte Richtungen der Bewegung gleichen Schwingungszeit:

$$= \frac{\pi}{n}\left\{Fu'' + \frac{dFu''}{du''} \cdot \frac{2f0.\cos u' - fu' - f(-u')}{2\sin u'}\right\}$$

$$+ \frac{1}{n}\int \frac{(f'u - \frac{1}{2}f0)\,du + d\frac{fu - f0.\cos u}{\sin u}}{\sqrt{2\cos u - 2\cos u'}} \quad \ldots\ldots (3)$$

wo das Integral von $-u'$ bis $+u'$ genommen wird.

3.

Wenn die Schwingungen sehr klein sind, wie es bei den Beobachtungen der Pendel der Fall ist, so wird man die Producte der Störungen in die höheren Potenzen von u' meistentheils vernachlässigen dürfen; wenn man für fu und $f'u$ die Formen

$$fu = \alpha + \alpha'\sin\tfrac{1}{2}u + \alpha''\sin\tfrac{1}{2}u^2 + \text{u. s. w.}$$
$$f'u = \beta + \beta'\sin\tfrac{1}{2}u + \beta''\sin\tfrac{1}{2}u^2 + \text{u. s. w.}$$

annimmt und die Producte der Coefficienten dieser Reihen in die über das Quadrat hinausgehenden Potenzen von u' vernachlässigt, so findet man:

$$\frac{2f0.\cos u' - fu' - f(-u')}{2} = -(2\alpha + \alpha'')\sin\tfrac{1}{2}u'^2$$

$$f'u - \tfrac{1}{2}f.0 + \frac{d\left(\frac{fu - f0.\cos u}{\sin u}\right)}{du} = \beta + \frac{\alpha''}{4} + \left(\beta' + \frac{\alpha'}{4} + \frac{\alpha'''}{2}\right)\sin\tfrac{1}{2}u + \left(\beta'' + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha''}{4} + \frac{3\alpha''''}{4}\right)\sin\tfrac{1}{2}u^2$$

und hieraus den bis zu der angegebenen Grenze vollständigen Ausdruck der Schwingungszeit:

$$= \frac{\pi}{n}\left\{Fu''\left(1 + \beta + \frac{\alpha''}{4}\right) + \sin\tfrac{1}{2}u'^2\left(\frac{\beta''}{2} + \frac{3\alpha''''}{8}\right)\right\}$$

Nennt man die Länge des einfachen Pendels, welches mit dem hier betrachteten gleichzeitig von $-u''$ bis $+u''$ schwingt $= l$, so ist

$$\frac{l}{\lambda}(Fu'')^2 = \frac{\pi\pi}{nn}\left\{Fu''\left(1 + \beta + \frac{\alpha''}{4}\right) + \sin\tfrac{1}{2}u'^2\left(\frac{\beta''}{2} + \frac{3\alpha''''}{8}\right)\right\}^2$$

woraus

$$l = \frac{\pi^2\lambda}{nn}\left\{1 + 2\beta + \frac{\alpha''}{2} + \sin\tfrac{1}{2}u'^2\left(\beta'' + \frac{3\alpha''''}{4}\right)\right\} \quad (4)$$

folgt.

4.

Für das Pendel, dessen Bewegung hier betrachtet werden sollte, ist (1):

$$f'u = \frac{\alpha}{\varrho}\left\{2\sin\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{3}\sin\tfrac{1}{2}u^3 + \ldots\right\}$$

$$fu = \frac{\alpha}{\varrho}\left\{\tfrac{1}{3}\sin\tfrac{1}{2}u^3 + \ldots\right\}$$

$$nn = \frac{\pi^2\lambda}{\varrho}$$

also $\beta = \beta'' = \alpha'' = \alpha'''' = 0$, und daher

$$l = \varrho,$$

oder es vollendet eine ganze Schwingung in derselben Zeit, in welcher ein vom Mittelpunkte des Abwickelungscylinders eben so tief herabhängendes einfaches Pendel sie vollenden würde.

II. Beilage.

Einfluss der Federkraft des Fadens auf seine Figur und die Schwingungszeit des Pendels.

1.

Ich werde zuerst die Figur bestimmen, welche ein nicht völlig biegsamer Faden von gegebener Länge ($= S$) annimmt, wenn er am oberen Ende befestigt ist, dann über einen horizontalen, festen Cylinder (dessen Halbmesser $= a$) geht und am unteren Ende durch eine Kraft ($= T''$) gezogen wird, welche mit der Lothlinie einen Winkel ω'' macht.

Den Mittelpunkt des Cylinders nehme ich zum Anfangspunkte der Coordinaten x und y, und zwar be-

zeichnet die erste die Entfernung eines Punkts von der durch den Mittelpunkt des Cylinders gelegten horizontalen Linie, die andere die Entfernung von der Lothlinie durch denselben Mittelpunkt; die erstere ist unterwärts positiv, die andere auf der Seite, auf welcher der Faden den Cylinder berührt. Für den festen Anfangspunkt sind die Coordinaten x' und y', für den Endpunkt x'' und y''. Der Winkel des Fadens mit der Lothlinie wird allgemein durch φ, also für den Anfang und das Ende derselben durch φ' und φ'' bezeichnet.

Nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten ist die charakteristische Eigenschaft der Figur, welche der Faden im Gleichgewicht annimmt, dass, wenn man diese Figur unendlich wenig variirt (so dass die Variation mit den Bedingungen verträglich bleibt, welchen die Figur entsprechen soll) und nun die auf jeden Punkt wirkende Kraft in die auf ihre Richtung bezogene Variation des Punkts multiplicirt, die Summe aller dieser Producte verschwindet. Die hierauf gegründete Methode, welche LAGRANGE in der unsterblichen Mécanique analytique gegeben hat, werde ich hier anwenden.

2.

Die Federkraft des Fadens kann als eine Kraft angesehen werden, welche verschwindet wenn der Faden gerade ist, und welche die Krümmung zu vermindern sucht wenn er krumm ist. Nach den im 1. Art. eingeführten Bezeichnungen sucht also diese Kraft ($= E$) die Veränderung des Winkels φ an jedem Punkte des Fadens zu vermindern. Wenn man daher diesen Winkel in der variirten Curve durch $\varphi + \delta\varphi$ bezeichnet, also seine Veränderungen in der Curve des Gleichgewichts und in der variirten durch $d\varphi$ und $d\varphi + d\delta\varphi$, so ist das Product der Kraft in die auf ihre Richtung bezogene Variation $= E d\delta\varphi$ und daher die Summe aller dieser Producte

$$= \int E\, d\delta\varphi.$$

Ich werde auch den Anfangspunkt des Fadens als frei und der Einwirkung einer Kraft ausgesetzt annehmen, welche der Kraft womit der Faden den Befestigungspunkt zieht, gleich, aber in entgegengesetzter Richtung angebracht ist. Diese unbekannte Kraft bezeichne ich durch T' und den gleichfalls unbekannten Winkel den sie mit der Lothlinie macht durch $180^0 + \omega'$. Aus dieser Kraft und der am Ende des Fadens im Winkel ω'' wirkenden Kraft T'' erhält man die Kräfte nach der Richtung

der x ... $-T'\cos\omega'$ und $T''\cos\omega''$
der y ... $-T'\sin\omega'$ und $T''\sin\omega''$

und diese in die Variationen der Coordinaten multiplicirt, ergeben Producte, welche der oben schon gefundenen Summe hinzugefügt, die vollständige Bedingungsgleichung des Gleichgewichts geben. Man hat diese daher:

$$0 = -T'\cos\omega'\,\delta x' - T'\sin\omega'\,\delta y' + T''\cos\omega''\,\delta x'' + T''\sin\omega''\,\delta y'' + \int E\, d\delta\varphi \quad \ldots (1)$$

In dieser Gleichung müssen die Variationen so genommen werden, dass sie den Bedingungen nicht zuwider sind, welchen die Figur des Fadens entsprechen muss. Die erste dieser Bedingungen ist, dass die Coordinaten x und y in der Curve des Gleichgewichts, und die Coordinaten $x + \delta x$ und $y + \delta y$ in der variirten, einem und demselben Punkte des Fadens entsprechen, oder dass die Länge des Fadens, vom Anfange desselben bis zu diesem Punkte, in beiden Curven gleich ist; diese Bedingung gibt daher:

$$\int\sqrt{dx^2 + dy^2} = \int\sqrt{(dx + d\delta x)^2 + (dx + d\delta y)^2},$$

oder, wenn ds das Differential der Länge bezeichnet,

$$0 = \int\left\{\frac{dx}{ds}\, d\delta x + \frac{dy}{ds}\, d\delta y\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Die andere Bedingung erfordert, dass beide Curven die Oberfläche des Cylinders berühren, oder dass für die den Curven und der Oberfläche des Cylinders gemeinschaftlichen Punkte

$$aa = xx + yy = (x + \delta x)^2 + (y + \delta y)^2$$

sei, woraus für diese Punkte die Bedingungsgleichung

$$0 = x\delta x + y\delta y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

folgt.

3.

Da der Gleichung (2) in der ganzen Ausdehnung des Fadens Genüge geleistet werden muss, so kann man sie mit der Gleichung (1) vereinigen, indem man sie unter dem Integralzeichen mit einem unbestimmten Factor λ multiplicirt und das Product der Gleichung (1) hinzufügt; man erhält dadurch:

$$0 = -T'\cos\omega'\,\delta x' - T'\sin\omega'\,\delta y' + T''\cos\omega''\delta x'' + T''\sin\omega''\delta y'' + \int\left\{E d\delta\varphi + \lambda\frac{dx}{ds} d\delta x + \lambda\frac{dy}{ds} d\delta y\right\} \quad \ldots\ldots (4)$$

Um nun $d\delta\varphi$ durch die Coordinaten x und y auszudrücken, hat man:

$$\cos\varphi = \frac{dx}{ds}; \quad \cos(\varphi + \delta\varphi) = \frac{dx + d\delta x}{ds}$$

$$\sin\varphi = \frac{dy}{ds}; \quad \sin(\varphi + \delta\varphi) = \frac{dy + d\delta y}{ds}$$

woraus

woraus

$$\delta\varphi = \frac{dx.d\delta y - dy.d\delta x}{ds^2}$$

folgt. Hierdurch verwandelt sich die Gleichung (4) in:

$$\begin{aligned} 0 = &- T'\cos\omega'\,\delta x' - T'\sin\omega'\,\delta y' \\ &+ T''\cos\omega''\delta x'' + T''\sin\omega''\delta y'' \\ &+ \int\left\{E\cdot d\cdot\frac{dx.d\delta y}{ds^2} - E\cdot d\cdot\frac{dy.d\delta x}{ds^2} + \lambda\frac{dx}{ds}d\delta x\right. \\ &\qquad\left. + \lambda\frac{dy}{ds}d\delta y\right\} \end{aligned}$$

und ergibt, nach gehöriger Integration,

$$\begin{aligned} 0 = &- T'\cos\omega'\,\delta x' - T'\sin\omega'\,\delta y' \\ &+ T''\cos\omega''\delta x'' + T''\sin\omega''\delta y'' \\ &+ E\left\{\frac{dx.d\delta y - dy.d\delta x}{ds^2}\right\} + \delta x\left\{\frac{dy.dE}{ds^2} + \lambda\frac{dx}{ds}\right\} \\ &\qquad - \delta y\left\{\frac{dx.dE}{ds^2} - \lambda\frac{dy}{ds}\right\} \\ &- \int\delta x\left\{d\cdot\frac{dy.dE}{ds^2} + d\cdot\lambda\frac{dx}{ds}\right\} \\ &+ \int\delta y\left\{d\cdot\frac{dx.dE}{ds^2} - d\cdot\lambda\frac{dy}{ds}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5) \end{aligned}$$

wo die ausser dem Integralzeichen stehenden Glieder für beide Endpunkte des Fadens genommen werden müssen.

4.

Die beiden Glieder unter dem Integralzeichen müssen für Theile des Fadens, welche nicht mit dem Cylinder in Berührung sind, abgesondert verschwinden, indem sowohl δx als δy willkürlich bleiben müssen. Man hat daher für die freien Theile des Fadens:

$$0 = d\cdot\frac{dy.dE}{ds^2} + d\cdot\lambda\frac{dx}{ds}$$

$$0 = d\cdot\frac{dx.dE}{ds^2} - d\cdot\lambda\frac{dy}{ds}$$

und durch Integration dieser Gleichungen:

$$c = \frac{dy.dE}{ds^2} + \lambda\frac{dx}{ds}$$

$$c' = \frac{dx.dE}{ds^2} - \lambda\frac{dy}{ds}$$

woraus unmittelbar folgt:

$$\lambda = c\frac{dx}{ds} - c'\frac{dy}{ds} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

$$\frac{dE}{ds} = c\frac{dy}{ds} + c'\frac{dx}{ds} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

und wenn man die letzte Gleichung integrirt:

$$E = cy + c'x + c'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Für die Theile des Fadens, welche den Cylinder berühren, fallen die Bedingungen des freien Gleichgewichts weg; und da die Berührung mit dem Cylinder auch die Variation von φ verhindert, so bleibt von der Gleichung (5), in Beziehung auf diese Theile, nur

$$0 = \delta x\left\{d\cdot\frac{dy.dE}{ds^2} + d\cdot\lambda\frac{dx}{ds}\right\} - \delta y\left\{d\cdot\frac{dx.dE}{ds^2} - d\cdot\lambda\frac{dy}{ds}\right\}$$

übrig. Allein die Bedingungsgleichung (3) gibt die Relation von δx und δy für diese Theile, und mit ihrer Anwendung verwandelt sich die eben gegebene Gleichung in

$$0 = y\cdot d\cdot\frac{dy.dE}{ds^2} + x\cdot d\cdot\frac{dx.dE}{ds^2} + y\cdot d\cdot\lambda\frac{dx}{ds} - x\cdot d\cdot\lambda\frac{dy}{ds}$$

Führt man die hier angedeuteten Differentiationen aus, und setzt man dabei, der Oberfläche des Cylinders gemäss:

$$0 = xdx + ydy; \qquad 0 = dx^2 + dy^2 + xd^2x + yd^2y,$$

so erhält man aus dieser Gleichung, also gültig für die Theile des Fadens welche den Cylinder berühren:

$$0 = dE - ad\lambda,$$

oder wenn d eine willkürliche Constante ist:

$$d = E - a\lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

5.

Die Glieder der Gleichung (5), welche sich auf den Anfangspunkt und den Endpunkt des Fadens beziehen, ergeben die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 = &\; E'\left\{\frac{dx'.d\delta y' - dy'.d\delta x'}{ds^2}\right\} + \delta x'\left\{-T'\cos\omega' + \frac{dy'.dE'}{ds^2} + \lambda'\frac{dx'}{ds}\right\} \\ &\qquad + \delta y'\left\{-T'\sin\omega' - \frac{dx'.dE'}{ds^2} + \lambda'\frac{dy'}{ds}\right\} \\ 0 = &\; E''\left\{\frac{dx''.d\delta y'' - dy''.d\delta x''}{ds^2}\right\} + \delta x''\left\{T''\cos\omega'' + \frac{dy''.dE''}{ds^2} + \lambda''\frac{dx''}{ds}\right\} \\ &\qquad + \delta y''\left\{T''\sin\omega'' - \frac{dx''.dE''}{ds^2} + \lambda''\frac{dy''}{ds}\right\} \end{aligned}$$

Da beide Endpunkte als frei angenommen sind, so bleiben die Variationen der Coordinaten, sowie auch ihre Differentialquotienten willkürlich; man hat daher:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= E' \\ 0 &= -T'\cos\omega' + \frac{dy'.dE'}{ds^2} + \lambda'\cdot\frac{dx'}{ds} \\ 0 &= -T'\sin\omega' - \frac{dx'.dE'}{ds^2} + \lambda'\cdot\frac{dy'}{ds} \\ 0 &= E'' \\ 0 &= T''\cos\omega'' + \frac{dy''.dE''}{ds^2} + \lambda''\cdot\frac{dx''}{ds} \\ 0 &= T''\sin\omega'' - \frac{dx''.dE''}{ds^2} + \lambda''\cdot\frac{dy''}{ds} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (10)$$

Indem die Integrale in der Gleichung (5) nicht ohne Unterbrechung vom Anfange des Fadens bis zum Ende genommen werden, sondern für die freien und für die den Cylinder berührenden Theile eine verschiedene Bedeutung haben, so gelten die daraus abgeleiteten Gleichungen (6), (7), (8) zwar für alle freien Theile des Fadens, aber die Constanten c, c', c'' sind für die beiden durch den Cylinder getrennten Theile nicht nothwendig dieselben. Ich werde für den oberen Theil die Bezeichnung c, c', c'' beibehalten, für den unteren aber $c_{,}$, $c'_{,}$, $c''_{,}$ schreiben. Hiernach verwandeln sich die Gleichungen (10) mittelst (6), (7), (8) in

$$\left.\begin{aligned} 0 &= cy' + c'x' + c'' \\ 0 &= -T'\cos\omega' + c \\ 0 &= -T'\sin\omega' - c' \\ 0 &= c_{,}y'' + c'_{,}x'' + c''_{,} \\ 0 &= T''\cos\omega'' + c_{,} \\ 0 &= T''\sin\omega'' - c'_{,} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (11)$$

6.

Um die Figur des Fadens zu bestimmen, muss E durch die Federkraft desselben ausgedrückt werden. Ich werde dabei den Faden als gleichförmig annehmen und übrigens dieselbe Hypothese anwenden, welche man den Untersuchungen der elastischen Linie immer zum Grunde gelegt hat: man denkt sich nämlich einen unendlich kleinen Theil des Fadens, an beiden Enden, durch unbiegsame gerade Linien fortgesetzt, die eine dieser Linien als fest, die andere, in der Entfernung e von dem unendlich kleinen Theil des Fadens, der senkrechten Einwirkung einer Kraft k ausgesetzt, welche Kraft daher den Faden krümmt, so dass er einen Krümmungshalbmesser erhält, welchen ich durch h bezeichne; setzt man für e, k, h andere Werthe, e', k', h', so ist die erwähnte Hypothese, dass die Krümmungshalbmesser sich umgekehrt verhalten wie die Drehungsmomente der Kräfte, oder

$$h : h' = e'k' : ek,$$

woraus

$$e'k' = \frac{ekh}{h'}$$

folgt. Dieses $e'k'$ ist die durch E bezeichnete (in der Entfernung 1 angenommene) Kraft; h' ist der Krümmungshalbmesser der Curve und ehk, welches ich in der Folge durch μ bezeichnen werde, ist das Maass der Federkraft des Fadens. Da die Curve der Axe ihre hohle Seite zukehrt, so ist also

$$E = -\frac{\mu dx.d^2y}{\sqrt{\{dx^2+dy^2\}^3}}$$

7.

Wenn man für E den Ausdruck (8) setzt, so erhält man die Differentialgleichung der Curve:

$$\frac{-\mu dx.d^2y}{\sqrt{\{dx^2+dy^2\}^3}} = cy + c'x + c'' \ldots\ldots (12)$$

und wenn man dieselben mit $cdy + c'dx$ multiplicirt, integrirt und durch e eine willkürliche Constante bezeichnet:

$$\mu\left\{\frac{cdx - c'dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\right\} = e + \frac{1}{2}\{cy + c'x + c''\}^2 \ldots (13)$$

woraus das vollständige Differential

$$c'dy - cdx = \frac{\pm(cdy + c'dx)\{e + \frac{1}{2}(cy + c'x + c'')^2\}}{\sqrt{\mu(cc + c'c') - \{e + \frac{1}{2}(cy + c'x + c'')^2\}^2}} \quad (14)$$

folgt, dessen Integral die endliche Gleichung der Curve ist.

Nimmt man das Integral (13) vom Anfange des Fadens bis zu dem Punkte, wo derselbe anfängt, den Cylinder zu berühren, und bezeichnet man durch ψ' den Winkel der Tangente an diesem Punkte mit der Lothlinie, so erhält man eine Gleichung zwischen φ' und ψ'; nimmt man dann das Integral von (14) zwischen denselben Grenzen, so ergibt es, da die Coordinaten des Berührungspunktes von ψ' abhängen, nämlich

$$x_{,} = -a\sin\psi'; \quad y_{,} = a\cos\psi',$$

eine zweite Gleichung zwischen denselben Winkeln, so dass beide durch x', y', T', ω' gegeben sind. Auf dieselbe Art hat man zwei Gleichungen für die ähnlichen Winkel φ'' und ψ'', welche zu dem Theile des Fadens zwischen dem Cylinder und dem Ende gehören, wodurch auch diese durch x'', y'', T'', ω'' gegeben werden.

Wenn der Faden zwischen den Punkten ψ' und ψ'' ganz auf der Cylinderfläche aufliegt, so zeigt die Gleichung (9), dass λ an diesen Punkten gleich ist; denn E hängt von dem Krümmungshalbmesser des Fadens ab, und dieser ist für die Cylinderfläche unveränderlich; man hat also aus (6):

$$c\cos\psi' - c'\sin\psi' = c_{,}\cos\psi'' - c'_{,}\sin\psi'',$$

und wenn man für die Constanten ihre Ausdrücke (11) schreibt:

$$-T'\cos(\omega'-\psi') = T''\cos(\psi''-\omega'') \quad \ldots (15)$$

Ferner ergibt (8):

$$E_{,} = cy_{,} + c'x_{,} + c''; \qquad E_{,,} = c_{,}y_{,,} + c'_{,}x_{,,} + c''_{,}$$

oder, da beide $= \frac{\mu}{a}$ sind, nach (11):

$$\frac{\mu}{a} = aT'\cos(\omega'-\psi') + c'' = -aT''\cos(\psi''-\omega'') + c''_{,}$$

woraus, in Verbindung mit (15),

$$c'' = c''_{,} = \frac{\mu}{a} - aT'\cos(\omega'-\psi') \quad \ldots . (16)$$

folgt. Diese drei Gleichungen (15) und (16), und eine vierte, welche man durch den Ausdruck der ganzen Länge des Fadens erhält, bestimmen die in den Ausdrücken von φ', ψ', φ'', ψ'' noch unbekannt gebliebenen T', ω', x'', y''.

Wenn dagegen der Faden den Cylinder nur in einem Punkte berührt, so hat man $\psi' = \psi''$, und die Gleichungen (6) und (8) ergeben:

$$-T'\cos(\omega'-\psi') = T''\cos(\psi''-\omega'')$$
$$c'' = c''_{,}$$

wodurch, wiederum mit dem Ausdrucke der ganzen Länge des Fadens verbunden, alle unbekannten Grössen bestimmt werden.

8.

Die Durchführung der hier angedeuteten Auflösung der Aufgabe hat aber die Schwierigkeit, dass die Integration des Differentials (14) von einer transcendenten Function abhängt, welche die Elimination der verschiedenen unbekannten Grössen nicht erlaubt. Diese Schwierigkeit wird vermieden, wenn der Faden auf beiden Seiten des Cylinders unendlich lang angenommen wird, wodurch er an seinen beiden Endpunkten dieselben Richtungen erhält, in welchen die Kräfte T' und T'' ihn ziehen; es ist überdies klar, dass dann beide Kräfte gleich und beide Schenkel der Curve symmetrisch werden. Ich werde die Aufgabe „die Figur „eines unendlich langen Fadens zu bestimmen, welcher „in gegebenen Richtungen $180^0 + \omega'$ und ω'', von gleichen Kräften T'' gezogen wird, aber einen Cylinder „berührt" ganz entwickeln, weil diese nicht merklich von der verschieden ist, welche der Pendelapparat darbietet. Denn hier ist μ, vergleichungsweise mit T'', eine sehr kleine Grösse, und daher die Krümmung des Fadens in einigermassen erheblicher Entfernung vom Cylinder unmerklich, so dass es gleichgültig ist, ob man seine Länge als endlich oder als unendlich ansieht.

Um der Gleichung (14) eine einfachere Gestalt zu geben, werde ich neue rechtwinkelige Coordinaten ξ und η einführen, so dass die ersteren auf den Asymptoten an die Schenkel der Curve gezählt werden, und zwar an dem Punkte anfangen, wo diese Schenkel aufhören mit dem Cylinder in Berührung zu sein; den Werth von η für $\xi = 0$ bezeichne ich durch b. Man erhält dadurch für den oberen Schenkel:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\xi\cos\omega' - (b-\eta)\sin\omega' - a\sin\psi' \\ y &= -\xi\sin\omega' + (b-\eta)\cos\omega' + a\cos\psi' \end{aligned}\right\} \ldots (17)$$

und für den unteren:

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi\cos\omega'' - (b-\eta)\sin\omega'' - a\sin\psi'' \\ y &= \xi\sin\omega'' + (b-\eta)\cos\omega'' + a\cos\psi'' \end{aligned}\right\} \ldots (18)$$

Durch diese neuen Coordinaten wird $cy + c'x + c''$, oder $c(y-y') + c'(x-x')$ (11), wenn man unter x', y' die Coordinaten eines unendlich entfernten Punkts versteht,

$$= T''.\eta;$$

ferner ergibt (13) für einen unendlich entfernten Punkt des Fadens:

$$e = -T''.\mu,$$

und dann für $\xi = 0$, wo $\frac{dx}{ds} = \cos\psi'$, $\frac{dy}{ds} = \sin\psi'$ ist,

$$-T''\mu\cos(\omega'-\psi') = -T''\mu + \tfrac{1}{2}T''T''.bb$$

oder

$$bb = \tfrac{2\mu}{T''}\{1-\cos(\omega'-\psi')\}$$

$$b = 2\sqrt{\tfrac{\mu}{T''}}\cdot\sin z \quad \ldots (19)$$

wenn man $2z$ für $\omega'-\psi' = \psi''-\omega''$ schreibt.

Die Entscheidung über die Frage, welcher von beiden vorausgesetzten Fällen stattfindet, ob ψ' und ψ'' ungleich sind und der Faden dazwischen ganz auf dem Cylinder aufliegt, oder ob beide zusammenfallen und der Faden den Cylinder nur in einem Punkte berührt, wird durch die Gleichung

$$cy_{,} + c'x_{,} + c'' = E_{,}$$

gegeben; man hat nämlich die Grösse links vom Gleichheitszeichen $= T''b$, und $E_{,} = \frac{\mu}{h}$, wo h den Krümmungshalbmesser bezeichnet, woraus sich, wenn man für b seinen Ausdruck (19) setzt,

$$\sin z = \tfrac{1}{2h}\sqrt{\tfrac{\mu}{T''}}$$

ergibt. In dem ersten Falle ist h gleich dem Halbmesser des Cylinders, und $2z$ kleiner als $\frac{1}{2}(\omega'-\omega'')$, also

$$\sin z = \tfrac{1}{2a}\sqrt{\tfrac{\mu}{T''}} \quad \text{und} \quad \sin\tfrac{1}{4}(\omega'-\omega'') > \tfrac{1}{2a}\sqrt{\tfrac{\mu}{T''}};$$

in dem zweiten Falle ist h nicht kleiner als der Halbmesser des Cylinders, aber $2z = \frac{1}{2}(\omega'-\omega'')$, also

$\sin z = \sin\frac{1}{4}(\omega' - \omega'')$ und $\sin\frac{1}{4}(\omega' - \omega'') < \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\mu}{T''}}$

wodurch also beide Fälle unterschieden werden.

Das Differential (14) verwandelt sich durch Einführung der neuen Coordinaten in

$$d\xi = \pm\sqrt{\frac{\mu}{T''}} \cdot \frac{\left(1 - \frac{T''}{2\mu}\eta\eta\right) d\eta}{\sqrt{1 - \frac{T''}{4\mu}\eta\eta}}$$

und es gilt das untere Zeichen, indem η abnimmt wenn ξ wächst. Das Integral hiervon, von $\xi = 0$ an gerechnet, ist:

$$\xi = \sqrt{\frac{\mu}{T''}}\left[\log\left\{\frac{b}{\eta}\cdot\frac{1+\sqrt{1-\frac{T''}{4\mu}\eta\eta}}{1+\sqrt{1-\frac{T''}{4\mu}bb}}\right\} + 2\sqrt{1-\frac{T''}{4\mu}bb} - 2\sqrt{1-\frac{T''}{4\mu}\eta\eta}\right] \quad \ldots (20)$$

Endlich hat man den Bogen der Curve, von $\xi = 0$ an gerechnet,

$$s = \int\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} = \sqrt{\frac{\mu}{T''}}\log\left\{\frac{b}{\eta}\cdot\frac{1+\sqrt{1-\frac{T''}{4\mu}\eta\eta}}{1+\sqrt{1-\frac{T''}{4\mu}bb}}\right\}$$

$$= \xi + 2\sqrt{\frac{\mu}{T''}}\left\{\sqrt{1-\frac{T''}{4\mu}\eta\eta} - \sqrt{1-\frac{T''}{4\mu}bb}\right\}. \quad (21)$$

9.

Um den Punkt zu bestimmen, in welchem das untere Ende des Fadens sich befindet, wenn das obere fest ist, muss man die ganze Länge desselben $= S$ durch auf die Curve sich beziehende Grössen ausdrücken. Man hat (21), wenn man η' und $\eta'' = 0$ und für b seinen Ausdruck (19) setzt,

$$s' = \xi' + 2\sqrt{\frac{\mu}{T''}}(1 - \cos z)$$

$$s'' = \xi'' + 2\sqrt{\frac{\mu}{T''}}(1 - \cos z)$$

also im ersten Falle

$$S = s' + s'' + a(\psi' - \psi'') = \xi' + \xi'' + 4\sqrt{\frac{\mu}{T''}}(1 - \cos z) + a(\omega' - \omega'') - 4az$$

und im zweiten Falle dieselbe Formel, indem alsdann $\omega' - \omega'' = 4z$ ist, also die beiden letzten Glieder verschwinden.

Bestimmt man nun den Ort der beiden Endpunkte des Fadens durch Perpendikel von dem Mittelpunkte des Cylinders auf die Axen der ξ' und ξ'' gefällt, und durch die Entfernungen der Endpunkte von diesen Perpendikeln, und bezeichnet man die ersteren (welche für beide Schenkel gleich sind) durch p, die letzteren durch ϱ' und ϱ'', so hat man:

$$p = b + a\cos 2z \quad \ldots\ldots\ldots (22)$$
$$\varrho' = \xi' - a\sin 2z$$
$$\varrho'' = \xi'' - a\sin 2z$$

und hiermit

$$S = \varrho' + \varrho'' - 2a(2z - \sin 2z) + 4\sqrt{\frac{\mu}{T''}}(1 - \cos z) + a(\omega' - \omega'')$$

Versetzt man das Pendel in den Zustand der Ruhe und des freien Gleichgewichts, und bezeichnet man seine Tiefe unter dem Mittelpunkte des Cylinders, oder den Werth von ϱ'' für $\omega'' = 0$ und $T'' = 1$ durch ϱ, den diesem Zustande zugehörigen Werth von z durch z', so hat man, indem ϱ' durch eine Aenderung von ω'' und T'' nicht geändert wird:

$$S = \varrho' + \varrho - 2a(2z' - \sin 2z') + 4\sqrt{\mu}(1 - \cos z') + a\omega'$$

und wenn man aus beiden Ausdrücken S eliminirt:

$$\varrho'' = \varrho + a\omega'' + 2a(2z - \sin 2z - 2z' + \sin 2z') - 4\sqrt{\frac{\mu}{T''}}(1 - \cos z) + 4\sqrt{\mu}(1 - \cos z'). \quad (23)$$

wodurch also, da die Ausdrücke von z und b oben schon gegeben sind, die Aufgabe vollständig aufgelöst ist.

10.

Nachdem durch das Vorhergehende die Figur des Fadens und der Ort seines Endpunkts bestimmt worden sind, werde ich den Einfluss der Federkraft auf die Schwingungszeit des Pendels untersuchen; ich werde dabei die Masse des Pendels als im Endpunkte des Fadens vereinigt annehmen.

Man kann die Bewegung dieses Punkts als frei betrachten, oder seine Verbindung mit dem Faden ganz ausser Acht lassen, wenn man ihn als der Wirkung zweier Kräfte ausgesetzt ansieht, nämlich der Schwere und der die Figur des Fadens bestimmenden Kraft T'', diese in entgegengesetzter Richtung oder im Winkel $180^0 + \omega''$ gegen die Lothlinie angenommen. Man hat dann die nach der Richtung der Coordinaten x'' und y'' wirkenden Kräfte

$$1 - T''\cos\omega'' \quad \text{und} \quad -T''\sin\omega''$$

und also, da der Punkt als frei angenommen wird, die beiden Gleichungen:

$$0 = \frac{d^2x''}{dt^2} + \pi^2\lambda(T''\cos\omega'' - 1)$$

$$0 = \frac{d^2y''}{dt^2} + \pi^2\lambda . T''\sin\omega''$$

wo λ die Länge des einfachen Secundenpendels, π die halbe Kreisperipherie und t die in mittleren Secunden ausgedrückte Zeit bedeuten. Setzt man für die rechtwinkeligen Coordinaten ihre Ausdrücke durch ϱ'', p, ω'', nämlich:

$$x'' = \varrho'' \cos\omega'' - p \sin\omega''$$
$$y'' = \varrho'' \sin\omega'' + p \cos\omega''$$

und multiplicirt man die Gleichungen mit $\cos\omega''$ und $\sin\omega''$, ferner mit $-\sin\omega''$ und $\cos\omega''$, so sind die Summen ihrer Producte:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2\varrho''}{dt^2} - \varrho''\left(\frac{d\omega''}{dt}\right)^2 - 2\frac{dp}{dt}\cdot\frac{d\omega''}{dt} - p\frac{d^2\omega''}{dt^2} \\ &\quad + \pi^2\lambda(T'' - \cos\omega'') \\ 0 &= \frac{d^2p}{dt^2} - p\left(\frac{d\omega''}{dt}\right)^2 + 2\frac{d\varrho''}{dt}\cdot\frac{d\omega''}{dt} + \varrho''\frac{d^2\omega''}{dt^2} \\ &\quad + \pi^2\lambda \cdot \sin\omega'' \end{aligned}\right\} \quad \ldots (24)$$

Man erhält ein erstes Integral dieser Gleichungen durch Integration der Summe der Producte der ersten in $2(d\varrho'' - pd\omega'')$, der zweiten in $2(\varrho'' d\omega'' + dp)$, nämlich:

$$c = \left(\varrho''\frac{d\omega''}{dt} + \frac{dp}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varrho''}{dt} - p\frac{d\omega''}{dt}\right)^2$$
$$- 2\pi^2\lambda\{\varrho''\cos\omega'' - p\sin\omega'' - \int T''(d\varrho'' - pd\omega'')\} \ldots (25)$$

Das hier noch unter dem Integralzeichen stehende Glied ist, in beiden abgesonderten Fällen, ein vollständiges Differential. Man hat nämlich aus (22) und (23):

$$p = b + a\cos 2z = 2\sqrt{\frac{\mu}{T''}}\sin z + a\cos 2z$$
$$\varrho'' = \varrho + a\omega'' + 2a(2z - \sin 2z - 2z' + \sin 2z')$$
$$- 4\sqrt{\frac{\mu}{T''}}(1 - \cos z) + 4\sqrt{\mu}(1 - \cos z')$$

woraus

$$T''(d\varrho'' - pd\omega'') = aT''(1 - \cos 2z)(d\omega'' + 4dz)$$
$$- 2\sqrt{\mu T''}\sin z\,(d\omega'' + 2dz) + 2\sqrt{\frac{\mu}{T''}}(1 - \cos z)dT''$$

folgt. Im ersten Falle ist aber

$$\sin z = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\mu}{T''}}$$

und wenn man hierdurch T'' eliminirt, das Differential

$$= -\frac{\mu}{2a}d\omega'' - \frac{2\mu}{a}\cdot\frac{\cos z \cdot dz}{1 + \cos z} = -d\left\{\frac{\mu}{2a}\omega'' + \frac{2\mu}{a}\left(z - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}z\right)\right\}$$

Im anderen Falle ist

$$z = \frac{1}{4}(\omega' - \omega''), \quad dz = -\frac{1}{4}d\omega'',$$

also das Differential

$$= 4\sqrt{\mu T''}\sin z\,dz + 2\sqrt{\frac{\mu}{T''}}(1 - \cos z)\,dT''$$
$$= 4d\{\sqrt{\mu T''}(1 - \cos z)\}$$

Hierdurch verwandelt sich die Gleichung (25) im ersten Falle in

$$c = \left(\varrho''\frac{d\omega''}{dt} + \frac{dp}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varrho''}{dt} - p\frac{d\omega''}{dt}\right)^2 - 2\pi^2\lambda\left\{\varrho''\cos\omega'' - p\sin\omega'' + \frac{\mu}{2a}\omega'' + \frac{2\mu}{a}\left(z - \operatorname{tg}\frac{1}{2}z\right)\right\} \ldots . (26)$$

und im zweiten in

$$c = \left(\varrho''\frac{d\omega''}{dt} + \frac{dp}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varrho''}{dt} - p\frac{d\omega''}{dt}\right)^2 - 2\pi^2\lambda\{\varrho''\cos\omega'' - p\sin\omega'' - 4\sqrt{\mu T''}(1 - \cos z)\} \ldots . (27)$$

11.

Die weitere Integration werde ich unter der Bedingung ausführen, dass das Pendel vor dem Anfange der Bewegung auf einer Ebene ruht, welche der Axe des Cylinders parallel, in dem Winkel $\omega'' = u'$ gegen die Lothlinie geneigt ist, und dass die Bewegung durch das Wegnehmen dieser Ebene entsteht. Dieser Bedingung zufolge haben am Anfange der Bewegung, oder für $t = 0$, ϱ'' und p die Werthe (23) und (22), und man hat ferner für dieselbe Zeit $\frac{d\omega''}{dt} = 0$, $\frac{d\varrho''}{dt} = 0$, $\frac{dp}{dt} = 0$.

Die Annäherung werde ich nicht über Grössen von der Ordnung von $\sqrt{\mu}$ und a hinausführen, und beide als von der ersten Ordnung betrachten. Um diese Annäherung zu erhalten, ist es nur nothwendig, dass man die Kraft T'' exclusive der Glieder der ersten Ordnung kenne, denn sie kömmt in den Ausdrücken von ϱ'' und p und in den Gleichungen (26) und (27) nur in Grössen von der ersten Ordnung multiplicirt vor. Man kann daher in der ersten der Gleichungen (24) die Grössen der ersten Ordnung vernachlässigen, wodurch sie sich in

$$0 = (T'' - \cos\omega'')\pi^2\lambda - \varrho\left(\frac{d\omega''}{dt}\right)^2$$

verwandelt; man hat ferner aus (25), exclusive dieser Grössen,

$$c = \varrho^2\left(\frac{d\omega''}{dt}\right)^2 - 2\pi^2\lambda\varrho\cos\omega'',$$

und für den Anfang der Bewegung:

$$c = -2\pi^2\lambda\varrho\cos u',$$

wodurch man c und $\frac{d\omega''}{dt}$ eliminiren kann, und dann den von allen für die fernere Rechnung überflüssigen Gliedern befreiten Ausdruck

$$T'' = 3\cos\omega'' - 2\cos u' \ldots . (28)$$

erhält.

12.

In beiden abgesonderten Fällen ist das zweite Glied der Gleichungen (26) und (27) wegzulassen, indem es

von der zweiten Ordnung ist. Man hat also für den ersten Fall:

$$\left(\varrho''\frac{d\omega''}{dt}+\frac{dp}{dt}\right)^2 = 2\pi^2\lambda\left\{\varrho''\cos\omega''-p\sin\omega''+\frac{\mu}{2a}\omega''+\frac{2\mu}{a}\left(z-\operatorname{tg}\frac{1}{2}z\right)-C\right\}$$

wofür ich, immer unter Vernachlässigung der Grössen von der zweiten Ordnung,

$$\left(\frac{d\omega''}{dt}\right)^2\left\{1+2\frac{\varrho''-\varrho}{\varrho}+2\frac{dp}{d\omega''}\right\} = \frac{2\pi^2\lambda}{\varrho}\left\{\cos\omega''+\frac{(\varrho''-\varrho)}{\varrho}\cos\omega''-\frac{p}{\varrho}\sin\omega''+\frac{\mu\omega''}{2a\varrho}+\frac{2\mu}{a\varrho}\left(z-\operatorname{tg}\frac{1}{2}z\right)-C\right\}$$

schreiben werde.

Dieses Differential ist unter der Form begriffen, für welche ich, in der I. Beilage, das Integral entwickelt habe. Es ist also nur nöthig, dass man

$$f\omega'' = \frac{\varrho''-\varrho}{\varrho}\cos\omega''+\frac{p}{\varrho}\sin\omega''+\frac{\mu\omega''}{2a\varrho}+\frac{2\mu}{a\varrho}\left(z-\operatorname{tg}\frac{1}{2}z\right)$$

$$f'\omega'' = \frac{\varrho''-\varrho}{\varrho}+\frac{dp}{d\omega''}$$

nach den Potenzen von $\sin\frac{1}{2}\omega''$ entwickele, und die Coefficienten der geraden Potenzen in die vierte Formel (Beilage I.) setze. Um dieses möglichst leicht auszuführen, werde ich diejenigen Glieder beider Ausdrücke, welche allein in der Rechnung bleibende, gerade Potenzen von $\sin\frac{1}{2}\omega''$ enthalten, zuerst von z allein abhängig machen. Man hat nämlich, da

$$\sin z = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\mu}{T''}}, \quad \sin z' = \frac{1}{2a}\sqrt{\mu}$$

ist, aus (23), wenn man die ungeraden Glieder weglässt:

$$\varrho''-\varrho = 2a\{2z-4\sin z+\sin 2z-2z'+4\sin z'-\sin 2z'\}$$

und für das letzte Glied des Ausdrucks von $f\omega''$:

$$\frac{2\mu}{a}\left\{z-\operatorname{tg}\frac{1}{2}z\right\} = 8a\sin z'^2\left\{z-\operatorname{tg}\frac{1}{2}z\right\};$$

die übrigen Glieder von $f\omega''$ und $f'\omega''$ fallen weg, da sie nur ungerade Potenzen von $\sin\frac{1}{2}\omega''$ enthalten. Da aber

$$\frac{\sin z'^2}{\sin z^2} = T'' = 1-6\sin\frac{1}{2}\omega''^2+4\sin\frac{1}{2}u'^2$$

so darf man nur die beiden durch z ausgedrückten Grössen als Functionen von $\frac{1}{\sin z^2}$ betrachten, und ihre Entwickelung mit den ähnlichen Functionen von z' anfangen, während man sie nach den Potenzen von

$$\frac{1}{\sin z^2}-\frac{1}{\sin z'^2} = \frac{-6\sin\frac{1}{2}\omega''^2+4\sin\frac{1}{2}u'^2}{\sin z'^2}$$

fortgehen lässt. Auf diese Art findet man die in der I. Beilage durch α'', α'''', β, β'' bezeichneten Coefficienten,

$$\alpha'' = \frac{a}{\varrho}\sin z'(1-\cos z')\cdot 64\sin\frac{1}{2}u'^2$$

$$\alpha'''' = -\frac{a}{\varrho}\sin z'(1-\cos z').24$$

$$\beta = \frac{a}{\varrho}\sin z'(1-\cos z').16\sin\frac{1}{2}u'^2$$

$$\beta'' = -\frac{a}{\varrho}\sin z'(1-\cos z').24$$

Ferner ist

$$nn = \frac{\pi^2\lambda}{\varrho},$$

also die Länge des einfachen Pendels, welches mit dem hier betrachteten gleichzeitig schwingt,

$$= \varrho + a\sin z'(1-\cos z').22\sin\frac{1}{2}u'^2,$$

oder, wenn man z' durch μ und a ausdrückt,

$$= \varrho + 11\sqrt{\mu}\left\{1-\sqrt{1-\frac{\mu}{4aa}}\right\}\sin\frac{1}{2}u'^2 \ldots (29)$$

Im zweiten Falle hat man, durch (27), die Gleichung:

$$\left(\frac{d\omega''}{dt}\right)^2\left\{1+2\frac{\varrho''-\varrho}{\varrho}+\frac{2dp}{\varrho d\omega''}\right\} = \frac{2\pi^2\lambda}{\varrho}\left\{\cos\omega''+\frac{\varrho''-\varrho}{\varrho}\cos\omega''-\frac{p}{\varrho}\sin\omega''-\frac{4\sqrt{\mu T''}}{\varrho}\left(1-\cos\frac{\omega'-\omega''}{4}\right)-C\right\}$$

oder

$$f\omega'' = \frac{\varrho''-\varrho}{\varrho}\cos\omega''-\frac{p}{\varrho}\sin\omega''-\frac{4\sqrt{\mu T''}}{\varrho}\left(1-\cos\frac{\omega'-\omega''}{4}\right)$$

$$f'\omega'' = \frac{\varrho''-\varrho}{\varrho}+\frac{dp}{\varrho d\omega''}$$

Allein in diesem Falle ist

$$\varrho''-\varrho = 2a\left\{\sin\frac{1}{2}\omega'-\sin\frac{\omega'-\omega''}{2}\right\}$$
$$-4\sqrt{\frac{\mu}{T''}}\left(1-\cos\frac{\omega'-\omega''}{4}\right)+4\sqrt{\mu}\left(1-\cos\frac{\omega'}{4}\right)$$

$$p = a\cos\frac{\omega'-\omega''}{2}+2\sqrt{\frac{\mu}{T''}}\sin\frac{\omega'-\omega''}{4}$$

$$T'' = 3\cos\omega''-2\cos u'$$

Setzt man dieses in die Ausdrücke von $f\omega''$ und $f'\omega''$, und entwickelt man dieselben nach den Potenzen von $\sin\frac{1}{2}\omega''$, so erhält man:

$$\alpha'' = -\frac{a}{\varrho}\sin\frac{\omega'}{2}+\frac{\sqrt{\mu}}{\varrho}\left\{\cos\frac{\omega'}{4}+\left(32-36\cos\frac{\omega'}{4}\right)\sin\frac{1}{2}u'^2\right\}$$

$$\alpha'''' = -\frac{3}{4}\cdot\frac{a}{\varrho}\sin\frac{\omega'}{2}+\frac{\sqrt{\mu}}{\varrho}\left\{-12+\frac{287}{16}\cos\frac{\omega'}{4}\right)$$

$$\beta = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\varrho}\sin\frac{\omega'}{2} + \frac{\sqrt{\mu}}{\varrho}\left\{-\frac{1}{2}\cos\frac{\omega'}{4} + \left(8 - 7\cos\frac{\omega'}{4}\right)\sin\frac{1}{2}u'^2\right\}$$

$$\beta'' = \frac{3}{4}\cdot\frac{a}{\varrho}\sin\frac{\omega'}{2} + \frac{\sqrt{\mu}}{\varrho}\left\{-12 + \frac{113}{16}\cos\frac{\omega'}{4}\right\}$$

Hieraus folgt, nach der Formel 4, Beilage I, die Länge des gleichzeitig schwingenden einfachen Pendels:

$$= \varrho + \frac{1}{2}a\sin\frac{\omega'}{2} - \sqrt{\mu}\cdot\cos\frac{\omega'}{4} + \left\{\frac{3}{16}a\sin\frac{\omega'}{2} + \sqrt{\mu}\left(11 - \frac{735}{64}\cos\frac{\omega'}{4}\right)\right\}\sin\frac{1}{2}u'^2 \quad \ldots\ldots\ldots (30)$$

13.

Die Annahme am Anfange des 11. Art., dass nämlich das Pendel aus dem Zustande des Gleichgewichts in die Bewegung übergeht, hat die Rechnung bedeutend abgekürzt, indem dadurch zwei willkürliche Constanten welche in dem vollständigen Integrale der Gleichungen enthalten sind, verschwinden. Dadurch gehen alle Glieder, deren Periode von der durch die Ausdrücke (29), (30) bestimmten verschieden ist, aus der Rechnung, so wie etwas ähnliches immer stattfindet, wenn ein System von materiellen Punkten, in Beziehung auf alle möglichen Bewegungen, exclusive einer einzigen, vor dem Anfange der Bewegung ins Gleichgewicht gebracht ist. Diese hier verschwundenen Glieder haben Perioden, deren Dauern von den störenden Kräften abhängen und daher weit kürzer sind als die Hauptperiode des Pendels, welche ich allein bestimmt habe; sie bringen eine scheinbar zitternde Bewegung des Pendels hervor, welche jedesmal vorhanden sein muss, wenn der Anfang der Bewegung der gemachten Voraussetzung nicht wirklich entspricht. Man wird aber schwer zu der Ueberzeugung gelangen können, dass der Anfang der Bewegung, bei einer Reihe von Schwingungen des Pendels, diese Bedingung erfüllt; allein noch schwerer würde die Bestimmung der ursprünglichen Werthe von $\frac{d\varrho''}{dt}$ und $\frac{dp}{dt}$ sein, indem diese allein aus Zufälligkeiten entstehen, vorausgesetzt dass man beabsichtigt, die über den Anfang der Bewegung gemachte Bedingung zu erfüllen. Es geht hieraus hervor, dass die Bewegung des Pendels gewissermassen unbestimmt bleibt. Allein diese Unbestimmtheit hat auf die Versuche keinen Einfluss, indem theils die Kürze der Perioden der erwähnten Glieder verursacht, dass die aus einem Intervalle von vielen Schwingungen abgeleitete Schwingungszeit nicht merklich geändert werden kann, theils aber auch diese Glieder durch den Widerstand der Luft sehr bald vernichtet werden, so dass, bald nach dem Anfange einer Beobachtungsreihe, die Bewegung des Pendels wirklich in den Zustand kömmt, welcher der Rechnung zum Grunde gelegt wurde. Die letzte Bemerkung findet bei allen Gliedern von kurzer Periode ihre Anwendung; also auch bei denen, welche aus der Ausdehnbarkeit des Fadens und aus den Drehungen der einzelnen Theile des Pendels um ihre eigenen Hauptaxen entstehen.

III. Beilage.

Tafel für den Werth eines Pendelschlages der Uhr P, in mittlerer Zeit.

[Werthe für a und b von $k = 45^m$ bis $k = 65^m$.]

Wenn die Zeit k der Uhr R, der Zeit $k - 1^s$ der Uhr P gleich, und die tägliche Verspätung der ersteren gegen Sternenzeit $= s$, so ist ein Pendelschlag der letzteren, in mittlerer Zeit ausgedrückt,

$$= a + b\,.\,s.$$

IV. Beilage.

Einwirkung der Temperatur auf den Pendelapparat.

Tafel für die wahren Temperaturen, welche den Angaben der drei Thermometer e', e'', e''' entsprechen.*)

Angabe der Therm.	Wahre Temperatur. e'	e''	e'''
0°	− 0°,23	− 0°,39	− 0°,44
5	+ 4,59	+ 4,53	+ 4,37
10	9,44	9,46	9,30
15	14,25	14,30	14,16
20	19,07	19,16	19,08
25	23,97	24,06	24,03
30	28,90	28,92	28,96

Der Einfluss der Temperatur auf die Messungen des kurzen Pendels ist folgendermassen berechnet worden. Der feste Ansatz, auf welchem der Cylinder von Stahl (i) ruht, ist 521 Lin. über dem Boden des Gehäuses; der Cylinder (i) ist 46 Lin. lang; die auf seiner oberen Ebene ruhende Kugel des Abwickelungs-Cylinders hat 3 Lin. Halbmesser und ihr Mittelpunkt ist 570 Lin. hoch. Der Punkt der eisernen Stange, wo die Hülse von Glockenmetall befestigt ist, welche die Mikrometerschraube und den Cylinder mit dem Fühlhebel

*) [Im Original von Grad zu Grad angegeben.]

enthält, ist 430,5 Lin. unter dem festen Ansatze, also 90,5 Lin. hoch; diese Hülse ist 51,5 Lin. lang, ihr unteres Ende also 39 Lin. hoch. Die Ausdehnungen dieser Theile, nämlich des Stahlcylinders (i) und der darauf liegenden Kugel, des Eisens der Stange zwischen dem festen Ansatze und dem Befestigungspunkte der Hülse, endlich der Hülse, vergrössern die Entfernung des Fühlhebels von dem Aufhängepunkte; die folgenden wirken vom unteren Ende der Hülse an, also in entgegengesetzter Richtung: die Mikrometerschraube von Stahl, 12,5 Lin. lang; die Mutter derselben von Messing, 6 Lin. lang; der Stahlcylinder, welcher den Fühlhebel trägt, 48 Lin. lang; endlich der Halbmesser der Pendelkugel von 12,1 Lin., welcher in die Rechnung kömmt, indem die thermometrischen Ausdehnungen bis zum Schwingungspunkte genommen werden müssen.

Bezeichnet man die Ausdehnungen des Stahls, Eisens, Glockenmetalls und Messings durch S, E, G, M, so hat man für die verschiedenen angeführten Theile:

	Höhe der Mitte $= h$	Ausdehnung für 1° C.
Kugel am Abwickelungs-Cylinder . . .	$568^{L}5$	$+ 3{,}0 . S$
Cylinder i, worauf dieselbe ruht . . .	544,0	$+ 46{,}0 . S$
Eiserne Stange	305,75	$+ 430{,}5 . E$
Hülse der Mikrometervorrichtung . . .	64,75	$+ 51{,}5 . G$
Mikrometerschraube	45,25	$- 12{,}5 . S$
Schraubenmutter derselben	53,75	$- 6{,}0 . M$
Stahlcylinder unter dem Fühlhebel . .	81,5	$- 48{,}0 . S$
Halbmesser der Pendelkugel	111,5	$- 12{,}1 . M$

Nimmt man die Temperaturen dieser Theile, nach dem 7. Artikel,

$$= \frac{584 - h}{388} e' + \frac{h - 196}{388} e''$$

und setzt man die Ausdehnungen der Metalle

$S = 0{,}000011898$. Troughton

$E = 0{,}000011400$. Borda

$G = 0{,}000019080$. Berthoud

$M = 0{,}000018782$. Lavoisier und Laplace

so erhält man die Aenderung der Entfernung des Aufhängepunkts vom Fühlhebel, weniger dem Halbmesser der Kugel

$$= 0^{L}0035153 . e' + 0^{L}0018979 e''$$
$$= 0^{L}0054132 \{0{,}6494 . e' + 0{,}3506 . e''\}$$

Wenn dagegen die Toise auf dem Cylinder (i) steht und der Abwickelungs-Cylinder auf ihrem oberen Ende ruht, so hat man für die

Kugel am Abwickelungs-Cylinder	1432,5	$+ 3{,}0 S$
Toise	999,0	$+ 864{,}0 E$

und ferner die für das kurze Pendel berechneten Wirkungen der Temperatur, mit Ausnahme der ersteren. Nimmt man für die hinzugekommenen beiden Theile die Temperatur

$$= \frac{1292 - h}{708} e'' + \frac{h - 584}{708} e'''$$

so erhält man die Veränderung für jeden Grad des Thermometers:

$$- 0^{L}0000014 . e' + 0^{L}0040339 . e'' + 0^{L}0058162 . e'''$$

oder, wenn man e'' für e' setzt, was wegen der Kleinheit des in e' multiplicirten Gliedes erlaubt ist,

$$+ 0^{L}0040325 . e'' + 0^{L}0058162 . e'''$$
$$= 0^{L}0098487 \{0{,}4095 . e'' + 0{,}5905 . e'''\}$$

Dass der Coefficient mit dem im 7. Art. angegebenen richtigeren nicht vollkommen übereinstimmt, rührt daher, dass hier die Toise $0^{L}16$ (um welche Quantität sie beim Eispunkte kürzer ist als 864 Lin.) zu lang angenommen worden ist.

Ich füge noch eine Tafel für die Länge der Toise und die Veränderung von F hinzu:*)

Temperatur.	Toise.	F
0°	$863^{L}83917$	$0^{L}00000$
2	85887	+ 0,01083
4	87857	0,02165
6	89826	0,03248
8	91796	0,04331
10	93765	0,05413
12	95735	0,06496
14	97704	0,07578
16	99674	0,08661
18	864,01643	0,09744
20	03613	0,10826
22	05582	0,11909
24	07552	0,12992
26	09522	0,14074
28	11491	0,15157
30	13461	+ 0,16240

V. Beilage.

Certificat über die Vergleichung der Toise.

Le 31me août 1823, nous avons comparé, Mr. Zahrtmann et moi, la toise en fer que Mr. Fortin a construite pour Mr. Bessel de Königsberg, à l'étalon en fer de l'observatoire connu sous le nom de Toise du Pérou. Il nous a semblé que la Règle de Mr. Bessel

*) [Im Original von Grad zu Grad fortschreitend.]

est plus courte que l'étalon de l'observatoire de $\frac{1}{1278^{me}}$ de ligne (de un douze cent soixante dix-huitième de ligne).

(signé) F. Arago. Zahrtmann.

VI. Beilage.

Bewegung eines Pendels in einer Flüssigkeit.

Wenn man, dem 13. Art. zufolge, für die Summe der bewegten Theilchen der Flüssigkeit, jedes in das Quadrat seiner Geschwindigkeit multiplicirt, den Ausdruck

$$m'u'u'nn\{b^{(0)}+b^{(2)}\cos(2nt+B^{(2)})+b^{(4)}\cos(4nt+B^{(4)})+\text{u. s. w.}\}$$

annimmt, und den durch den Anstoss des Pendels an immer andere Theile der Flüssigkeit verursachten Verlust an lebendiger Kraft nicht berücksichtigt, indem er auf die Zeit einer ganzen Schwingung keinen Einfluss hat, so hat man die Gleichung der Bewegung:

$$c = m\{\mu+ss\}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 2\pi^2\lambda\{ms-m's'\}\cos u + m'u'u'nn\{b^{(0)}+b^{(2)}\cos(2nt+B^{(2)})+\text{u. s. w.}\}$$

oder

$$c = \left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 2n'n'\{\cos u - u'u'\zeta(b^{(0)}+b^{(2)}\cos(2nt+B^{(2)})+\text{u. s. w. ...})\}$$

wo

$$n'n' \text{ für } \frac{\pi^2\lambda(ms-m's')}{m(\mu+ss)}$$

$$\zeta \text{ für } \frac{m'nn}{2\pi^2\lambda(ms-m's')}$$

geschrieben ist. Wenn man diese Gleichung mit der in der I. Beilage untersuchten vergleicht, so hat man:

$$fu = -u'u'\zeta\{b^{(0)}+b^{(2)}\cos(2nt+B^{(2)})+\text{u. s. w.}\}$$
$$f'u = 0$$

und für das dortige n, hier n'. Man kann daher die Zeit einer ganzen Schwingung des Pendels durch die dritte Formel jener Beilage erhalten. Allein da es noch unentschieden ist, ob $b^{(0)}$, $b^{(2)}$, ... $B^{(2)}$, ... beständig, oder von der Ausdehnung der Schwingungen abhängig sind, so kann der von dem Quadrate und den höheren Potenzen des Schwingungswinkels abhängige Theil der Zeit nicht vollständig gefunden werden, weshalb ich von der erwähnten Formel alles weglassen werde, was nur auf diesen Theil Einfluss erhält. Dadurch verwandelt diese Formel sich in

$$\frac{\pi}{n'}+\frac{1}{n'}\int d\cdot\frac{fu-f0}{u\sqrt{u'u'-uu}}$$

und da hier nur die Einwirkung, welche von der Ordnung der störenden Ursache selbst ist, bestimmt wird, so kann für u die von dieser Störung unabhängige Annäherung gesetzt werden; nämlich unter der Voraussetzung, dass die Zeit t von dem Durchgange des Pendels durch die Lothlinie an gezählt wird:

$$u = u'\sin n't; \quad \sqrt{u'u'-uu} = u'\cos n't.$$

Schreibt man um abzukürzen z für $n't$, so ist die Schwingungszeit:

$$\frac{\pi}{n'}+\frac{\zeta}{n'}\int d\cdot\frac{\{b^{(2)}\cos B^{(2)}(1-\cos 2z)+b^{(2)}\sin B^{(2)}\sin 2z+b^{(4)}\cos B^{(4)}(1-\cos 4z)+\text{u. s. w.}\}}{\sin z\cos z}$$

wo das Integral von $z = -\frac{1}{2}\pi$ bis $z = \frac{1}{2}\pi$ genommen wird.

Die bestimmten Integrale, welche hier vorkommen, haben die Formen:

$$\int d\cdot\frac{1-\cos 2hz}{\sin z\cos z} \quad \text{und} \quad \int d\cdot\frac{\sin 2hz}{\sin z\cos z}$$

Das erste ist, wenn wirklich differentiirt wird,

$$= 4h\int\frac{\sin 2hz}{\sin 2z}dz - \int\frac{1-\cos 2hz}{\sin z^2}dz;$$

allein man hat

$$\frac{\sin 2hz}{\sin 2z} = \cos(2h-2)z+\cos(2h-6)z+\cos(2h-10)z+\ldots+\cos(-2h+2)z$$

$$\frac{1-\cos 2hz}{\sin z^2} = 2h+4(h-1)\cos 2z+4(h-2)\cos 4z+\ldots+4\cos(2h-2)z$$

woraus hervorgeht, dass das zwischen den angegebenen Grenzen genommene Integral

$$\int\frac{\sin 2hz}{\sin 2z}dz$$

verschwindet, wenn h eine gerade Zahl ist, allein $= \pi$ wird, wenn h ungerade ist; ferner dass man

$$\int\frac{1-\cos 2hz}{\sin z^2}dz = 2h\pi$$

hat. Man erhält also:

$$\int d\cdot\frac{1-\cos 2hz}{\sin z\cos z} = 2h\{1-(-1)^h\}-2h = (-1)^{h+1}.2h.$$

Das zweite bestimmte Integral ergibt durch theilweise Integration:

$$\frac{2\sin 2hz}{\sin 2z} - \int\frac{\sin 2hz}{\cos z^2}dz;$$

der oben gegebene Ausdruck des ersten Gliedes zeigt, dass es, zwischen den angegebenen Grenzen genommen, verschwindet; das zweite Glied verschwindet gleichfalls, indem das Differential für $-z$ und $+z$ entgegengesetzte Werthe von gleicher Grösse hat. Man hat also

$$\int d \cdot \frac{\sin 2hz}{\frac{\sin z}{\cos z}} = 0$$

Substituirt man diese Werthe der bestimmten Integrale in den Ausdruck der Schwingungszeit, so erhält man dieselbe

$$= \frac{\pi}{n'} + \frac{2\xi\pi}{n'}\left\{b^{(2)}\cos B^{(2)} - 2b^{(4)}\cos B^{(4)} + 3b^{(6)}\cos B^{(6)} \text{ u.s.w.}\right\}$$

Verwechselt man nn mit $n'n'$ im Ausdrucke von ξ, welches erlaubt ist, so hat man

$$\xi = \frac{m'}{2m(\mu + ss)};$$

schreibt man ferner für n' seinen Ausdruck, und C für

$$b^{(2)}\cos B^{(2)} - 2b^{(4)}\cos B^{(4)} + 3b^{(6)}\cos B^{(6)} - \text{u. s. w.} \ldots.$$

so verwandelt sich der Ausdruck der Schwingungszeit in

$$\sqrt{\frac{m(\mu + ss)}{\lambda(ns - m's')}}\left\{1 + \frac{m'C}{m(\mu + ss)}\right\};$$

oder die Länge des einfachen, in derselben Zeit schwingenden Pendels, nämlich das Quadrat der Schwingungszeit in λ multiplicirt, ist

$$\frac{\mu + \frac{2m'}{m}C + ss}{s\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right)}.$$

Es geht hieraus hervor, dass eine das Pendel umgebende Flüssigkeit von sehr geringer Dichtigkeit, auf die Dauer sehr kleiner Schwingungen keinen anderen Einfluss hat, als dass sie die Schwerkraft vermindert und das Moment der Trägheit vermehrt. Wenn die Ausdehnung der Bewegungen der Flüssigkeit den Schwingungswinkeln des Pendels proportional ist, so ist diese Vermehrung des Moments der Trägheit sehr nahe beständig; im entgegengesetzten Falle hängt sie von den Schwingungswinkeln ab.

VII. Beilage.

Bestimmung der einzelnen Theile der verschiedenen, bei den Versuchen angewandten Pendel, und Berechnung ihrer Zusammensetzung.

Das Gewicht, welches den folgenden Abwiegungen zum Grunde liegt, ist das Preussische Pfund von 7680 Gran, welches nach Herrn EYTELWEIN'S sorgfältiger Bestimmung 467,7112 Grammen wiegt. Das Exemplar davon, welches ich benutzte, ist das von Messing gemachte Normalpfund der hiesigen Aichungscommission. Die Abtheilungen desselben erhielt ich dadurch, dass ich andere, näherungsweise richtige Gewichte von 12, 6, 3, 2, 1 Unzen, 240, 120, 60 .... Gran zuerst untereinander ausglich, oder vielmehr ihre relativen Fehler bestimmte, dann das wahre Pfund damit wog, wodurch die absoluten Gewichte der einzelnen Stücke bekannt wurden.

Die Pendelkugel von Messing, mit Einschluss der eingeschraubten Fadenklemme wog 11418,15 Gran; die letztere allein 19,72. In destillirtem Wasser von 15°,8 C. Wärme wogen Kugel und Klemme 10025,07, die letztere allein 17,30; dabei stand das Barometer, dessen Temperatur = 12°,5 C. war, auf 341,17 Lin., wodurch die beiden letzten Angaben, auf den leeren Raum reducirt, sich in 10023,63 und 17,30 verwandeln. Hieraus folgt, dass die Kugel mit der Klemme vereinigt 1394,52 Gr., die letztere allein 2,42 Gr. Wasser von der angegebenen Wärme aus dem Wege drängen; der Unterschied der von beiden eingenommenen Räume drängt also 1392,10 Gr. aus dem Wege.

Nach den Untersuchungen des Herrn HÄLLSTRÖM (Dissertatio de mutationibus voluminis aquae destillatae. Aboae 1802) ist die Dichte des Wassers bei der angegebenen Temperatur = 0,9993053, das Maximum derselben = 1 gesetzt; also wird der Raum welchen die Kugel bei 15°,8 C. Temperatur einnimmt, durch 1393,067 Gr. des dichtesten Wassers gefüllt, und ihr Raum bei der Temperatur des Eispunkts durch 1391,826 Gran. Hieraus ist das im 15. Art. angegebene specifische Gewicht hervorgegangen.

Da das Kilogramm einen Cubus des dichtesten Wassers von 1 Decimeter Seite im leeren Raume aufwiegt, so ist das Gewicht einer Cubiklinie des dichtesten Wassers

$$\frac{1000 \times 7680}{467{,}7112\,(44{,}32959)^3} = 0{,}1884961 \text{ Gran},$$

wodurch man den Unterschied der Räume, welche Kugel und Klemme und die letztere allein bei der Temperatur des Eispunkts einnehmen, = 7383,84 Cubiklinien findet. Dieser Raum ist aber kleiner als die ganze Kugel, denn es ist an der Stelle, wo die Fadenklemme eingeschraubt wird, ein Segment abgeschliffen, dessen Basis ein Kreis von 2 Lin. Halbmesser ist; ferner fehlt noch der Raum, welchen die Schraube an der Fadenklemme einnimmt, die man als einen Cylinder von 1,25 Lin. Höhe und 0,75 Lin. Halbmesser ansehen kann. Wenn a den Halbmesser der Kugel bezeichnet, so hat man daher:

$$7383{,}84 = \frac{2}{3}\pi a^3\left\{1+\left(1+\frac{2}{aa}\right)\sqrt{1-\frac{4}{aa}}\right\} - \frac{45}{64}\pi$$

woraus der Halbmesser der Kugel, für die Temperatur des Eispunkts, $= 12{,}082$ folgt.

Berechnung der Pendel für die erste Reihe der Versuche.

Ich werde die Pendel aus acht Theilen zusammengesetzt annehmen und die Gewichte derselben durch m, die Entfernung des Schwerpunkts eines jeden Theils vom Mittelpunkte der Bewegung durch s, das Moment der Trägheit desselben, auf eine horizontale, durch seinen Schwerpunkt gehende Axe bezogen, durch μ bezeichnen.

1. Das Messingblättchen, dessen Länge ich r nenne, und dessen Gewicht $= 0{,}01759\ r$ ist.
$m^{(1)} = 0{,}01759.r$; $s^{(1)} = \frac{1}{2}r$; $\mu^{(1)} = 0{,}001466.r^3$.
2. Die Klemme am Messingblättchen, mit der eingeschraubten oberen Fadenklemme zusammen, wiegt 40,49 Gran, und ich habe ihren Schwerpunkt 3,56 Lin. unter dem Ende des Messingblättchens gefunden, ihr Moment der Trägheit $= 157$.
$m^{(2)} = 40{,}49$; $s^{(2)} = r + 3{,}56$; $\mu^{(2)} = 157$.
3. Der Faden, dessen Länge ich durch r' bezeichne, und dessen Gewicht, für beide Pendel, 10,95 und 3,58 Gran ist. Die Fadenklemme in welcher er befestigt ist und die Klemme des Messingblättchens haben, zusammengeschraubt, eine Länge von 6,5 Lin.; der Faden geht durch die erstere ganz hindurch und ist am Ende der Schraube derselben, welche 3,25 Lin. von der Spitze des Kegels dieser Fadenklemme entfernt ist, abgeschnitten; dasselbe findet an dem unteren, in die Kugel eingeschraubten Ende des Fadens statt. Der Anfang des Fadens ist also $r + 3{,}25$ Lin. vom Mittelpunkte der Bewegung entfernt, und man hat für das lange Pendel:
$m^{(3)} = 10{,}95$; $s^{(3)} = r + 3{,}25 + \frac{1}{2}r'$; $\mu^{(3)} = \frac{10{,}95}{12}r'r'$;
für das kurze:
$m^{(3)} = 3{,}58$; $s^{(3)} = r + 3{,}25 + \frac{1}{2}r'$; $\mu^{(3)} = \frac{3{,}58}{12}r'r'$.
4. Der Coincidenzcylinder, für das lange Pendel:
$m^{(4)} = 3{,}81$; $s^{(4)} = 1277{,}8$; $\mu^{(4)} = 2$,
und für das kurze:
$m^{(4)} = 3{,}69$; $s^{(4)} = 413{,}8$; $\mu^{(4)} = 2$.
5. Die untere Fadenklemme, deren Schwerpunkt von dem Ende ihrer Schraube, also auch von dem des Fadens, 1,83 Lin. entfernt ist,
$m^{(5)} = 19{,}72$; $s^{(5)} = r + 1{,}42 + r'$; $\mu^{(5)} = 19$.
6. Das abgeschliffene Segment der Kugel, welches ich als eine negative Masse betrachte. Der räumliche Inhalt eines Segments, dessen Basis, am Mittelpunkte einer Kugel vom Halbmesser a, den Winkel 2φ einschliesst, ist
$$\tfrac{4}{3}a^3\pi \sin\tfrac{1}{2}\varphi^4\{3 - 2\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2\};$$
also sein Gewicht, wenn das Gewicht einer Cubiklinie des Metalls durch Δ bezeichnet wird,
$$\tfrac{4}{3}\Delta a^3\pi \sin\tfrac{1}{2}\varphi^4\{3 - 2\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2\};$$
die Entfernung seines Schwerpunkts von der Basis
$$a\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2\,\frac{2-\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{3-2\sin\frac{1}{2}\varphi^2};$$
das Moment der Trägheit, auf den Schwerpunkt bezogen,
$$\frac{4\Delta a^5\pi \sin\frac{1}{2}\varphi^6}{3-2\sin\frac{1}{2}\varphi^2}\{2 - \tfrac{4}{3}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2 + \tfrac{1}{5}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^4 - \tfrac{2}{5}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^6\}.$$
Setzt man in diesen Formeln $\sin\varphi = \frac{2}{12{,}082}$ und $\Delta = 8{,}19 \times 0{,}1884961 = 1{,}5437$ Gran, so findet man das Gewicht $= 1{,}63$ Gran; die Entfernung des Schwerpunkts von der Basis $= 0{,}06$ Lin.; das Moment der Trägheit $= 1$. Hiernach ist für das abgeschliffene Segment der Kugel zu nehmen:
$m^{(6)} = -1{,}63$; $s^{(6)} = r + 1{,}94 + r'$; $\mu^{(6)} = -1$.
7. Das Loch in der Kugel; es ist, von der Basis des Segments an gerechnet, 4 Lin. tief gebohrt und hat 0,75 Lin. Halbmesser. Da das Ende des Fadens $r + 3{,}25 + r'$ vom Mittelpunkte der Bewegung, und 1,25 Lin. von der Basis des Segments entfernt ist, so findet man für das eingebohrte Loch:
$m^{(7)} = -10{,}91$; $s^{(7)} = r + 4 + r'$; $\mu^{(7)} = -16$.
8. Die Kugel, als vollständig betrachtet. Ihre Masse ist $= 11398{,}43 + 1{,}63 + 10{,}91 = 11410{,}97$ Gr.; ihr Mittelpunkt ist 11,9143 Lin. von der Basis des Segments entfernt, woraus folgt:
$m^{(8)} = 11410{,}97$; $s^{(8)} = r + 13{,}91 + r'$; $\mu^{(8)} = 666285$.

Ich habe hier nicht näher angegeben, wie ich die Schwerpunkte und Momente der Trägheit der Theile 2 und 5 gefunden habe; ich würde dabei weitläuftigere Erklärungen über die Figuren dieser Theile haben geben müssen, welche ich glaubte unterdrücken zu dürfen, da der Einfluss derselben auf das Endresultat der Versuche unbedeutend ist.

Die Länge des einfachen, mit dem zusammengesetzten in gleicher Zeit schwingenden Pendels, dieses als festen Körper angesehen, ist
$$l = \frac{\Sigma\mu + \Sigma ms^2}{\Sigma ms},$$
oder, wenn man die sich auf die Kugel beziehenden Theile dieses Ausdrucks besonders schreibt:

$$l = s^{(8)} + \frac{\Sigma\mu + \Sigma mss - s^{(8)}\,\Sigma ms}{m^{(8)}\,s^{(8)} + \Sigma ms},$$

wo Σmss und Σms sich auf die ersten 7 Theile beziehen. Schreibt man $s^{(8)} + c$ für l, so hat man also:

$$c = \frac{\Sigma\mu - m^{(1)}\,s^{(1)}\,(s^{(8)} - s^{(1)}) - m^{(2)}\,s^{(2)}\,(s^{(8)} - s^{(2)}) - \text{u. s. w.} \ldots}{m^{(8)}\,s^{(8)} + m^{(1)}\,s^{(1)} + m^{(2)}\,s^{(2)} + \text{u. s. w.} \ldots}$$

Dieser Ausdruck enthält, ausser bekannten Längen und Gewichten, r und r', oder die Längen des Messingblättchens und des Fadens. Die erstere geht aus der gemessenen und bei den Versuchen angegebenen Entfernung des Schwerpunkts der oberen Klemme vom Aufhängepunkte des Pendels hervor, und ist immer zwischen 14,5 und 15 Lin., weshalb ich sie durch $14{,}5 + i$ bezeichnen werde; die andere ist nicht gemessen, sondern muss durch die ganze Pendellänge ausgedrückt werden. Bezeichnet man diese, so wie sie bei den Versuchen angegeben worden ist, durch $F + h$, wo $F = 442{,}40$ Lin., ferner h für das lange Pendel durch $862{,}6 + i'$, und für das kurze durch $-1{,}4 + i'$, so hat man durch die Ausdrücke der Entfernungen der Schwerpunkte der Theile (2) und (8) vom Mittelpunkte der Bewegung:

langes Pendel.		kurzes Pendel.
$r + 3{,}56 =$	$14{,}5 + i$	$= 14{,}5 + i$
$r + r' + 13{,}91 = 1305{,}00 + i'$		$= 441{,}00 + i'$

oder

$$r = 10{,}94 + i \quad \ldots. = 10{,}94 + i$$
$$r' = 1280{,}15 + i' - i \ldots. = 416{,}15 + i' - i$$

[Substitution der Ausdrücke von r und r' in die Grössen m, s, μ.]

Hieraus ergibt sich für das lange Pendel:

$$c = -0{,}^{L}23768 - 0{,}00363\,i - 0{,}00051\,i',$$

und für das kurze:

$$c = +0{,}^{L}03992 - 0{,}00337\,i - 0{,}00064\,i'.$$

Indessen sind diese Formeln nicht vollständig, indem sie die Pendel als feste Körper voraussetzen und LAPLACE schon bemerkt hat, dass man die Drehungen der einzelnen Theile um einander, insofern der sehr biegsame Faden ihnen kein merkliches Hinderniss ist, nicht vernachlässigen darf. Man überzeugt sich aber leicht, dass die Theile (1) bis (4) in dieser Beziehung ohne merklichen Einfluss sind; bei den übrigen, welche einen festen Körper bilden, ist dieses nicht der Fall, und überdies kann man nicht bezweifeln, dass die, vergleichungsweise mit der Steifheit des Fadens, sehr grosse Masse dieses Körpers hinreicht, wirklich eine Biegung des Fadens hervorzubringen. Um den Einfluss derselben zu untersuchen, werde ich annehmen, dass der erwähnte Körper an einem Faden ohne Masse, von der Länge a befestigt ist. Den Winkel des Fadens mit der Lothlinie bezeichne ich durch u, den Winkel der durch den Befestigungspunkt und den Schwerpunkt des Körpers gehenden geraden, mit der Lothlinie, durch u'; die Entfernung eines Massentheilchens dm des Körpers, vom Befestigungspunkte, durch r; den Winkel dieses r mit der durch den Schwerpunkt gehenden Linie, in der Ebene der Bewegung genommen, durch ψ. Wenn die Coordinaten x lothrecht, y wagerecht genommen werden, so folgt aus der allgemeinen Gleichung der Bewegung um eine feste Axe, nämlich:

$$0 = \int dm \left\{ \left(\frac{d^2x}{dt^2} - \pi^2\lambda \right) \delta x + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \delta y \right\}$$

durch Substitution von

$$x = a\cos u + r\cos(u' + \psi)$$
$$y = a\sin u + r\sin(u' + \psi)$$

und dadurch, dass man die in δu und $\delta u'$ multiplicirten Theile des Ausdrucks abgesondert $= 0$ setzt:

$$0 = \int dm \left\{ a\frac{d^2u}{dt^2} + r\cos(u' - u + \psi)\frac{d^2u'}{dt^2} - r\sin(u' - u + \psi)\left(\frac{du'}{dt}\right)^2 + \pi^2\lambda\sin u \right\}$$

$$0 = \int dm \left\{ ar\cos(u' - u + \psi)\frac{d^2u}{dt^2} + ar\sin(u' - u + \psi)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + rr\frac{d^2u'}{dt^2} + \pi^2\lambda r\sin(u' + \psi) \right\}$$

Allein wenn s die Entfernung des Schwerpunkts des Körpers von seinem Befestigungspunkte am Faden, $m\mu$ sein Moment der Trägheit in Beziehung auf den Schwerpunkt bezeichnen, so hat man:

$$\int dm \,.\, r\cos(u' - u + \psi) = ms\cos(u' - u)$$
$$\int dm \,.\, r\sin(u' - u + \psi) = ms\sin(u' - u)$$
$$\int dm \,.\, rr = m(\mu + ss)$$

wodurch die beiden Gleichungen sich in

$$0 = a\frac{d^2u}{dt^2} + s\cos(u' - u)\frac{d^2u'}{dt^2} - s\sin(u' - u)\left(\frac{du'}{dt}\right)^2 + \pi^2\lambda\sin u$$

$$0 = as\cos(u' - u)\frac{d^2u}{dt^2} + as\sin(u' - u)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + (\mu + ss)\frac{d^2u'}{dt^2} + \pi^2\lambda s\sin u'$$

verwandeln. Man kann aber, für den Fall sehr kleiner Schwingungen, die Glieder der dritten Ordnung von u und u' weglassen, und erhält dann:

$$0 = a\frac{d^2u}{dt^2} + s\frac{d^2u'}{dt^2} + \pi^2\lambda u$$

$$0 = as\frac{d^2u}{dt^2} + (\mu + ss)\frac{d^2u'}{dt^2} + \pi^2\lambda s.u'.$$

Diesen Gleichungen leistet man Genüge durch

$$u = k \sin(nt + K), \quad u' = k' \sin(nt + K)$$

wodurch man erhält:

$$0 = -knna - k'nns + k\pi^2\lambda$$
$$0 = -knnas - k'nn(\mu + ss) + k'\pi^2\lambda s$$

Eliminirt man k und k', so erhält man die Gleichung:

$$0 = \frac{\pi^4\lambda^2}{n^4} - \frac{\pi^2\lambda}{n^2}\left\{a + \frac{\mu + ss}{s}\right\} + \frac{a\mu}{s},$$

deren Auflösung

$$\frac{\pi^2\lambda}{nn} = \frac{a + \frac{\mu + ss}{s}}{2}\left\{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4as\mu}{(as + \mu + ss)^2}}\right\}$$

gibt.

Bezeichnet man die beiden Werthe von nn, welche dieser Ausdruck enthält, durch nn und $n'n'$, so hat man:

$$u = k \sin(nt + K) + l \sin(n't + L)$$
$$u' = k' \sin(nt + K) + l' \sin(n't + L)$$

wo zwischen den vier Constanten k, k', l, l' die oben fundenen Relationen

$$\frac{k'}{k} = \frac{\pi^2\lambda}{nns} - \frac{a}{s}$$
$$\frac{l'}{l} = \frac{\pi^2\lambda}{n'n's} - \frac{a}{s}$$

stattfinden, also das Integral die gehörige Anzahl Constanten enthält.

Bei der Beobachtung der Schwingungszeit des Pendels wird bekanntlich das zweite Glied des Ausdrucks von u unmerklich, indem es eine sehr kurze Periode hat und überdies durch den Widerstand der Luft bald vernichtet wird. Die Zeit der Schwingung ist dann die, in welcher der Winkel nt um π wächst, oder sie ist $= \frac{\pi}{n}$; die ihr entsprechende einfache Pendellänge aber ist:

$$\frac{\lambda\pi^2}{nn} = \frac{a + \frac{\mu + ss}{s}}{2}\left\{1 + \sqrt{1 - \frac{4as\mu}{(as + \mu + ss)^2}}\right\}$$

Wäre das Pendel ein fester Körper, so würde die Länge des einfachen Pendels von gleicher Schwingungszeit

$$= a + s + \frac{\mu}{a + s}$$

sein; sie ist aber, wenn man sie nach den Potenzen von μ entwickelt,

$$= a + s + \frac{\mu}{a + s} + \frac{a\mu^2}{s(a + s)^3} - \frac{a\mu^3}{ss(a + s)^4} \text{ u. s. w. . . .}$$

Es ist daher dem in der ersteren Hypothese berechneten c noch

$$+ \frac{a\mu^2}{s(a + s)^3} - \frac{a\mu^3}{ss(a + s)^4} \text{ u. s. w. . . .}$$

hinzuzufügen.

Setzt man in diese Formel die aus den oben gemachten Angaben folgenden Werthe von μ und s, nämlich $\mu = 58{,}50$ und $s = 12{,}48$, so erhält man die von der Biegsamkeit des Pendels herrührende Verbesserung von c für das lange Pendel $= + 0{,}^{L}00016$ und für das kurze $= + 0{,}^{L}00137$, und damit die vollständigen Ausdrücke für das

lange Pendel $c = - 0{,}^{L}23752 - 0{,}00363\,i - 0{,}00051\,i'$

kurze Pendel $c = + 0{,}^{L}04129 - 0{,}00337\,i - 0{,}00064\,i'$

Berechnung der Pendel für die zweite Reihe der Versuche.

a. Pendel mit der Schneide. Um das Moment der Trägheit der Schneide und ihres Rahmens zu finden, deren Figur zu zusammengesetzt ist, um sie mit aller wünschenswerthen Genauigkeit berechnen zu können, habe ich sowohl die Schneide und ihren Rahmen allein, als auch in Verbindung mit einem angeschraubten Cylinder von Messing schwingen lassen, in welchem bei den Versuchen die Fadenklemme eingeschraubt wird. Das Gewicht der Schneide und ihres Rahmens ist = 194,39 Gran, und sie vollendete eine Schwingung in 2;9042 MZ., welcher die Länge eines einfachen Pendels $l = 3718{,}0$ Lin. entspricht. Als aber der Cylinder angeschraubt war, dessen Gewicht = 26,81 Gran ist, dessen Schwerpunkt 7,78 Lin. unter der Schneide liegt, und dessen Moment der Trägheit für eine durch seinen Schwerpunkt gehende Axe ich = 92,1 gefunden habe, war die Dauer einer Schwingung = 0;2971 MZ., oder die correspondirende einfache Pendellänge = 38,91 Lin.

Bezeichnet man das gesuchte Moment der Trägheit der Schneide und ihres Rahmens durch μ, die unbekannte Entfernung des Schwerpunkts beider von der Schneide durch s, so hat man die beiden Gleichungen:

$$3718{,}0 = \frac{\mu + 194{,}39\,ss}{194{,}39\,s}$$

$$38{,}91 = \frac{\mu + 194{,}39\,ss + 92{,}1 + 26{,}81\,(7.78)^2}{194{,}39\,s + 26{,}81 \times 7{,}78}$$

und ihre Auflösung ergibt $\mu = 6469$, $s = 0{,}^{L}0089502$. Ferner ist noch nöthig zu wissen, dass, wenn die Fadenklemme in den Cylinder am Rahmen der Schraube eingeschraubt ist, ihr Schwerpunkt 3,78 Lin. niedriger ist als der Schwerpunkt dieses Cylinders. Uebrigens gelten alle bei der ersten Reihe der Versuche angegebenen Bestimmungen der Theile der Pendel auch hier, bis auf das Gewicht der Fäden, welches, da neue etwas längere

Fäden genommen wurden, eine Veränderung erlitt. Man hat also für das lange Pendel ($i' = h - 862{,}52$) und für das kurze ($i' = h + 1{,}48$): [Ausdrücke der m, s, μ.]

b. Pendel mit der Klemme. Das Messingblättchen war 6,35 Lin. lang. Uebrigens waren beide Pendel, bis auf den Faden, in demselben Zustande wie bei der ersten Reihe der Versuche. Man hat also für das lange Pendel ($i' = h - 862{,}56$) und für das kurze ($i' = h + 1{,}44$): [Ausdrücke der m, s, μ.]

c. Pendel mit dem Abwickelungs-Cylinder. Das Messingblättchen war 6,84 Lin. lang. Aus der Beschreibung der zu diesen Versuchen angewandten Einrichtung, im 18. Art., geht hervor, dass die Axe des Abwickelungs-Cylinders, welcher mit seiner Oberfläche auf der horizontalen Ebene liegt, auf welcher auch die Schneide und die Klemme ruhen, um seinen Halbmesser höher ist, als bei den früheren Versuchen. Dieses hat zur Folge, dass die Scale, und auch der Coincidenz-Cylinder, von dem Mittelpunkte der Bewegung um 0,5 Lin. entfernter sind. Uebrigens ist zwischen beiden Pendeln und den in der ersten Reihe der Versuche angewandten kein Unterschied, ausser in der Länge und dem Gewichte der Fäden. Man hat also für das lange Pendel ($i' = h - 862{,}06$) und für das kurze ($i' = h + 1{,}94$): [Ausdrücke der m, s, μ.]

Aus diesen Angaben folgt für die sechs angewandten Pendel:

Schneide. . . . { langes P. $c = -0^{L}{,}22586 - 0{,}00052 . i'$; kurzes „ $c = +0{,}05355 - 0{,}00064 . i'$

Klemme . . . . { langes P. $c = -0{,}22307 - 0{,}00052 . i'$; kurzes „ $c = +0{,}05544 - 0{,}00064 . i'$

Abwickel.-Cyl. { langes P. $c = -0{,}22471 - 0{,}00052 . i'$; kurzes „ $c = +0{,}05389 - 0{,}00064 . i'$

Fügt man noch die von der Biegsamkeit des Fadens abhängige Verbesserung hinzu, so erhält man die vollständigen, zur Reduction der Beobachtungen angewandten Formeln:

Schneide. . . . { langes P. $c = -0^{L}{,}22570 - 0{,}00052 . i'$; kurzes „ $c = +0{,}05492 - 0{,}00064 . i'$

Klemme . . . . { langes P. $c = -0{,}22291 - 0{,}00052 . i'$; kurzes „ $c = +0{,}05681 - 0{,}00064 . i'$

Abwickel.-Cyl. { langes P. $c = -0{,}22455 - 0{,}00052 . i'$; kurzes „ $c = +0{,}05526 - 0{,}00064 . i'$

Berechnung der Pendel für die dritte Reihe der Versuche.

Die Kugel von Elfenbein, womit diese Reihe von Versuchen gemacht wurde, wiegt, mit der eingeschraubten Fadenklemme zusammen (auf den leeren Raum reducirt) 2481,26 Gran. Im dichtesten Wasser, dessen Temperatur genau dieselbe ist, in welcher die Abwiegung gemacht wurde, wiegt sie 1098,50 Gran, woraus das specifische Gewicht der vereinigten Kugel und Klemme = 1,79443 folgt, so wie es im 15. Art. angegeben worden ist.

Nachdem das Loch in der Kugel, in welches die Klemme eingeschraubt wird, mit Wachs ausgefüllt war, wog sie im leeren Raume 2461,80 Gr. und im dichtesten Wasser 1081,38 Gran. Sie drängte also 1380,42 Gran des dichtesten Wassers aus dem Wege, woraus, nach dem oben angegebenen Gewichte einer Cubiklinie des dichtesten Wassers, ihr Halbmesser = 12,047 Lin. folgt. Da die Versuche dieser Reihe sehr nahe in derselben Temperatur gemacht wurden, in welcher die Kugel in Wasser gewogen wurde, so behielt ich den unmittelbar gefundenen Werth des Halbmessers bei der Reduction der Versuche unverändert bei.

Das Loch in dieser Kugel ist dem in der Kugel von Messing befindlichen gleich, so dass man die Massen $m^{(6)}$ und $m^{(7)}$ erhält, wenn man ihre Werthe für die Kugel von Messing im Verhältnisse der specifischen Gewichte = 8,19 : 1,783 verkleinert. Allein da der Halbmesser der Kugel von Elfenbein $0^{L}{,}035$ kleiner ist als der der Kugel von Messing, so wird der Ausdruck von $s^{(8)}$, welcher vorher $r + 13{,}91 + r'$ war, ein wenig geändert und zwar $r + 13{,}88 + r'$. Die Länge des Messingblättchens, bei den Versuchen mit dem Abwickelungs-Cylinder, war 6,48 Lin.; bei der Anwendung der Schneide war diese in demselben Zustande, in welchem sie bei den früheren Versuchen war. Die Fäden, feiner als früher, wogen 6,28 und 2,04 Gran. Man hat daher zur Berechnung der Reduction auf das einfache Pendel folgende Data:

a. Pendel mit dem Abwickelungs-Cylinder. Für das lange ($i' = h - 862{,}58$) und für das kurze ($i' = h + 1{,}42$). [Ausdrücke der m, s, μ.]

b. Pendel mit der Schneide. Für das lange ($i' = h - 862{,}58$) und für das kurze ($i' = h + 1{,}42$). [Ausdrücke der m, s, μ.]

Hieraus folgt für die vier angewandten Pendel:

Abwickel.-Cyl. { langes P. $c = -0^{L}{,}80241 - 0{,}00193 . i'$; kurzes „ $c = -0{,}21471 - 0{,}00176 . i'$

Schneide . . . { langes P. $c = -0{,}81372 - 0{,}00193 . i'$; kurzes „ $c = -0{,}22197 - 0{,}00178 . i'$

Die Einwirkung der Biegsamkeit des Fadens ist

für das lange Pendel $= +0^{L},00016$ und für das kurze $+0^{L},00138$. Also sind die vollständigen Formeln:

Abwickel.-Cyl. { langes P. $c = -0^{L},80225 - 0,00193\,i'$; kurzes „ $c = -0,21333 - 0,00176\,i'$

Schneide . . . { langes P. $c = -0,81356 - 0,00193\,i'$; kurzes „ $c = -0,22059 - 0,00178\,i'$

VIII. Beilage.

Untersuchung des Einflusses der Ungleichheiten des Fadens auf die Reduction auf das einfache Pendel.

Ich nehme den Anfangspunkt des Fadens in der Entfernung $= r$ vom Mittelpunkte der Bewegung an, seine Länge $= r'$, seinen Querschnitt in der Entfernung x von seiner Mitte $= \varphi x$ und das Gewicht einer Cubiklinie seiner Materie $= \Delta$. Nach diesen Bezeichnungen ist das Gewicht des ganzen Fadens:

$$m = \Delta \int \varphi x \, . \, dx;$$

das Product des Gewichts in die Entfernung des Schwerpunkts des Fadens vom Aufhängepunkte:

$$ms = \Delta \int \varphi x (r + \tfrac{1}{2} r' + x)\, dx;$$

das Moment der Trägheit des Fadens, auf den Mittelpunkt der Bewegung bezogen:

$$\mu = \Delta \int \varphi x (r + \tfrac{1}{2} r' + x)^2 dx.$$

Wenn man m, ms, μ für alle übrigen Theile des Pendels zusammengenommen durch m', $m's'$, μ' bezeichnet, so hat man die Länge des gleichzeitig schwingenden einfachen Pendels, ohne Rücksicht auf den Faden,

$$l = \frac{\mu'}{m's'},$$

und mit Rücksicht auf denselben:

$$l + \delta l = \frac{\mu' + \Delta \int \varphi x (r + \frac{1}{2} r' + x)^2 dx}{m's' + \Delta \int \varphi x (r + \frac{1}{2} r' + x)\, dx};$$

woraus der Einfluss des Fadens

$$\delta l = \frac{\Delta}{m's'} \{ \int \varphi x (r + \tfrac{1}{2} r' + x)^2 dx - l \int \varphi x (r + \tfrac{1}{2} r' + x) dx \}$$

und wenn man für Δ seinen Ausdruck $\frac{m}{\int \varphi x \, . \, dx}$ schreibt,

$$\delta l = \frac{m}{m's'} \left\{ \frac{\int \varphi x (r + \frac{1}{2} r' + x)^2 dx}{\int \varphi x \, . \, dx} - l \frac{\int \varphi x (r + \frac{1}{2} r' + x) dx}{\int \varphi x \, . \, dx} \right.$$

oder auch

$$\delta l = \frac{m}{m's'} \left\{ (r + \tfrac{1}{2} r' - l)(r + \tfrac{1}{2} r') - (2r + r' - l) \frac{\int \varphi x \, . \, x\, dx}{\int \varphi x \, . \, dx} + \frac{\int \varphi x \, . \, xx\, dx}{\int \varphi x \, . \, dx} \right\}$$

hervorgeht; die Integrale werden von $-\frac{1}{2} r'$ bis $+\frac{1}{2} r'$ genommen.

Kehrt man den Faden um, so dass das obere Ende das untere wird, so hat man in diesem Ausdrucke $\varphi(-x)$ für φx zu schreiben, wodurch man in dieser Lage des Fadens erhält:

$$\delta l = \frac{m}{m's'} \left\{ (r + \tfrac{1}{2} r' - l)(r + \tfrac{1}{2} r') + (2r + r' - l) \frac{\int \varphi x \, . \, x\, dx}{\int \varphi x \, . \, dx} + \frac{\int \varphi x \, . \, xx\, dx}{\int \varphi x \, . \, dx} \right\}$$

Hieraus geht hervor, dass der Einfluss der Ungleichheiten des Fadens in beiden Lagen nahe gleich ist, indem das Glied, welches in beiden Ausdrücken ein verschiedenes Zeichen hat, wegen der Multiplication mit $2r + r' - l$, eine geringe Wirkung erlangt, denn dieser Factor ist klein, immer wenn der Faden nahe bei dem Mittelpunkte der Bewegung anfängt und sich nahe bei dem Mittelpunkte der Schwingung endigt. Die halbe Summe beider Ausdrücke ist der Einfluss auf das Mittel aus zwei Versuchen, zwischen welchen der Faden umgekehrt worden ist:

$$= \frac{m}{m's'} \left\{ (r + \tfrac{1}{2} r' - l)(r + \tfrac{1}{2} r') + \frac{\int \varphi x \, . \, xx\, dx}{\int \varphi x \, . \, dx} \right\}$$

Setzt man nun

$$\varphi x = h \left\{ 1 + \alpha \frac{x}{r'} + \beta \frac{xx}{r'r'} + \text{u. s. w.} \right\}$$

wo h den Querschnitt in der Mitte des Fadens bedeutet, so verschwinden aus beiden Integralen die ungeraden Glieder und man erhält:

$$\int \varphi x \, . \, xx\, dx = hr'^3 \left\{ \frac{1}{3 \, . \, 2^2} + \frac{\beta}{5 \, . \, 2^4} + \frac{\delta}{7 \, . \, 2^6} + \text{u. s. w.} \ldots \right\}$$

$$\int \varphi x \, . \, dx = hr' \left\{ 1 + \frac{\beta}{3 \, . \, 2^2} + \frac{\delta}{5 \, . \, 2^4} + \text{u. s. w.} \ldots \right\}$$

woraus also, wenn man die Potenzen und Producte von β, δ, ... vernachlässigt, der gesuchte Einfluss des Fadens

$$= \frac{m}{m's'} \left\{ \tfrac{1}{3} r'r' - \tfrac{1}{2} r'(l - 2r) - r(l - r) + r'r' \left(\frac{\beta}{180} + \frac{\delta}{840} + \frac{\zeta}{4032} + \text{u. s. w.} \right) \right\}$$

folgt.

Die Reduction der Länge des einfachen Pendels auf das zusammengesetzte ist daher:

$$-\frac{m}{m's'} \left\{ \tfrac{1}{3} r'r' - \tfrac{1}{2} r'(l - 2r) - r(l - r) \right\} \left\{ 1 + \frac{r'r' \left(\frac{\beta}{180} + \frac{\delta}{840} + \frac{\zeta}{4032} + \text{u. s. w.} \right)}{\tfrac{1}{3} r'r' - \tfrac{1}{2} r'(l - 2r) - r(l - r)} \right\}$$

und sie ist bei den Versuchen ohne Rücksicht auf die Ungleichheiten in Rechnung gebracht.

Man hat für beide Pendel des Apparats in der ersten Reihe der Versuche:

Angewandte Reduction wegen des Fadens		+ 0,L2126;	+ 0,L0244
Länge des Fadens	r'	= 1280,33;	416,34
Länge des gleichzeitigen einfachen Pendels. . .	l	= 1305,27;	441,56
Anfang des Fadens unter dem Aufhängepunkt.	r	= 14,52;	14,52

Hieraus folgt die vollständige Reduction für beide Pendel:

das lange $= + 0{,}^{L}2126 - 0{,}^{L}00669\,.\,\beta - 0{,}^{L}001434\,.\,\delta - 0{,}^{L}000299\,.\,\zeta$ — u. s. w.

das kurze $= + 0{,}0244 - 0{,}00068\,.\,\beta - 0{,}000147\,.\,\delta - 0{,}000031\,.\,\zeta$ — u. s. w.

Um eine Schätzung der möglichen Grösse der Coefficienten β, δ, ζ.... zu erhalten, habe ich den Durchmesser des langen Fadens, mit einem der Pistor'schen zur Prüfung der Theilungen des Meridiankreises bestimmten Mikroskope, an vielen verschiedenen Stellen gemessen und ihn im Mittel = 0,L0861 gefunden. Die grösste Abweichung von diesem Mittel war 0,L0013 und ich habe keinen Grund, die Messungen selbst, welche eine doppelte Einstellung des Mikroskops auf beide Ränder des Fadens erfordern, für sicherer zu halten. Nimmt man aber diesen Unterschied für eine wirkliche Ungleichheit des Fadens, die Ungleichheit der Querschnitte doppelt so gross $= \frac{1}{33}$ des Ganzen und verlegt man sie auf beide Enden des Fadens, wo sie den grössten Einfluss erhält, so ist

$$\frac{1}{33} = \frac{\beta}{4} + \frac{\delta}{16} + \frac{\zeta}{64} + \ldots.$$

Jenachdem die Ungleichheit dem von β, oder δ, oder ζ... abhängigen Gliede zugeschrieben wird, erhält man die Verbesserung der Reduction für das

lange Pendel	— 0,L00081;	— 0,L00070;	— 0,L00058
kurze „	— 0,00008;	— 0,00007;	— 0,00006

Im ungünstigsten Falle erhielte also selbst diese unwahrscheinliche Annahme der Ungleichheit des Fadens auf die Länge des Secundenpendels nur einen Einfluss von 0,L0004. In Wirklichkeit ist derselbe aber ohne Zweifel kleiner. Man kann ihn also als unmerklich betrachten; auch würde das Resultat ähnlicher Versuche nicht merklich an Sicherheit gewinnen, wenn man die Fäden oft mit neuen vertauschte.

IX. Beilage.

Einfluss der cylindrischen Figur der Schneide, worauf ein Pendel sich bewegt, auf die Schwingungszeit.

1.

Ich nehme an, dass die Schneide durch eine Cylinderfläche begrenzt wird, deren Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten ξ und η ich durch $V = 0$ bezeichne. Der Mittelpunkt dieser Coordinaten ist der Berührungspunkt der Schneide und der Ebene worauf sie liegt, im Zustande der Ruhe des Pendels; in diesem Zustande ist die Axe der ξ lothrecht, die der η wagrecht; die ξ sind unterhalb dem Mittelpunkte der Coordinaten positiv, die η rechts von der Lothlinie.

Wenn das Pendel den Winkel u mit der Lothlinie macht, so berührt ein Punkt der cylindrischen Schneide die Ebene, dessen Coordinaten ich durch ξ' und η' bezeichne. Die auf ein zweites, im Raume festes Axensystem, mit welchem das erste zusammenfällt, wenn das Pendel in Ruhe ist, bezogenen Coordinaten eines Massentheilchens dm des Pendels, werde ich x und y nennen; x wird unter der Ebene positiv genommen, y und u links von der Lothlinie. Die auf dieses zweite Axensystem bezogenen Coordinaten des Mittelpunkts des ersteren werden durch x' und y' bezeichnet. Man hat also

$$x = x' + \xi\cos u + \eta\sin u$$
$$y = y' + \xi\sin u - \eta\cos u$$

Die Differentialgleichung der Bewegung des Pendels ist:

$$c = \int\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}\,dm - 2\pi^2\lambda\int x\,dm,$$

wo λ die Länge des einfachen Secundenpendels bezeichnet; indem die Axe der ξ durch den Schwerpunkt geht, ist

$$\int\xi\,dm = ms$$
$$\int\eta\,dm = 0$$
$$\int(\xi\xi+\eta\eta)\,dm = m(\mu+ss)$$

wo m die Masse des Pendels, s die Coordinate ξ des Schwerpunkts und $m\mu$ das Moment der Trägheit, bezogen auf eine der Drehungsaxe parallel durch den Schwerpunkt gelegte Axe bedeuten. Hierdurch verwandelt die Differentialgleichung sich in:

$$c = (\mu+ss)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2s\frac{du}{dt}\left(\frac{dy'}{dt}\cos u - \frac{dx'}{dt}\sin u\right) + \frac{dx'^2+dy'^2}{dt^2} - 2\pi^2\lambda\{s\cos u - x'\} \ldots (1)$$

2.

Die Coordinaten x' und y' hängen von den Coordinaten ξ' und η' des Berührungspunkts des Cylinders und der Ebene ab; es ist nämlich, wenn σ den Bogen auf der Oberfläche des Cylinders, zwischen dem Berührungspunkte und dem Anfangspunkte der Coordinaten bedeutet,

$$x' = -\xi' \cos u - \eta' \sin u$$
$$y' = -\xi' \sin u + \eta' \cos u - \sigma.$$

Indem die Normale an den Berührungspunkt die Axe der ξ im Winkel u durchschneidet, hat man

$$d\xi' = -d\sigma \sin u; \quad d\eta' = d\sigma \cos u$$

und wenn dieses in das Differential der Gleichung $V = 0$ gesetzt wird:

$$0 = \left(\frac{dV}{d\xi'}\right) \sin u - \left(\frac{dV}{d\eta'}\right) \cos u \quad \ldots\ldots (2)$$

wodurch, mit $V = 0$ verbunden, ξ' und η' durch u bestimmt werden.

Drückt man x' und y' in (1) durch ξ' und η' aus und lässt man das dx'^2 und dy'^2 enthaltende Glied weg, indem es von der Ordnung des Quadrats der Abstumpfung der Schneide ist, welche Ordnung ich allenthalben vernachlässigen werde, so verwandelt sich (1) in

$$c = \left(\mu + ss - 2s\xi'\right)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 2\pi^2\lambda\left((s-\xi')\cos u - \eta' \sin u\right)$$

Diese Differentialgleichung ist unter der allgemeinen Form begriffen, deren Integral ich in der I. Beilage gegeben habe; es ist nämlich hier:

$$nn = \frac{\pi^2 \lambda s}{\mu + ss}$$
$$fu = -\frac{\xi'}{s}\cos u - \frac{\eta'}{s}\sin u$$
$$f'u = -\frac{s}{\mu + ss}\xi'$$

Da ξ' und η' für $u = 0$ verschwinden, so ist $f0 = 0$; ferner ist

$$\frac{d\frac{fu}{\sin u}}{du} = \frac{\xi'}{s \sin u^2} - \frac{d\xi' \cos u + d\eta' \sin u}{s \sin u \, du} = \frac{\xi'}{s \sin u^2}.$$

Der Ausdruck der Schwingungszeit (I. Beilage, 3) verwandelt sich daher in

$$\frac{\pi}{n}\left\{Fu'' - \frac{fu' + f(-u')}{2 \sin u'} \cdot \frac{dFu'}{du'}\right\} + \frac{1}{ns}\int \frac{\xi'\left(1 - \frac{s}{l}\sin u^2\right) du}{\sin u^2 \sqrt{2\cos u - 2\cos u'}}$$

wo $l.s$ für $\mu + ss$ geschrieben ist, also l die Länge des einfachen Pendels bedeutet, welches mit dem untersuchten Pendel gleichzeitig schwingen würde, wenn dieses sich um den Anfangspunkt der Coordinaten drehte. Bezeichnet man aber die der Schwingungszeit um die cylindrische Schneide entsprechende einfache Pendellänge durch l', so hat man die wirkliche Schwingungszeit $= \sqrt{\frac{l'}{\lambda}} \cdot Fu''$, und wenn man sie ihrem eben gegebenen Ausdruck gleich setzt:

$$l' = l - l \cdot \frac{fu' + f(-u')}{\sin u'} \cdot \frac{dFu'}{Fu' . du'} + \frac{2l}{sFu'} \cdot \frac{1}{\pi}\int \frac{\xi'\left(1 - \frac{s}{l}\sin u^2\right) du}{\sin u^2 \sqrt{2\cos u - 2\cos u'}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

3.

Ich werde jetzt annehmen, dass die Schneide durch einen nach einem Kegelschnitte gekrümmten Cylinder abgestumpft ist, dessen eine Axe mit der Axe der ξ zusammenfällt und dessen Oberfläche von den abgeschliffenen Ebenen des Prismas berührt wird. Den Winkel dieser Ebenen bezeichne ich durch $2i$, die Sehne des Cylinders da wo die Ebenen ihn berühren, oder die Breite der Abstumpfung, durch b. Wenn a und p die halbe, in der Richtung der ξ liegende Axe und den halben Parameter des Kegelschnitts bedeuten, so hat man daher:

$$0 = V = 2p\xi' \pm \frac{p}{a}\xi'\xi' + \eta'\eta',$$

wo das obere Zeichen für eine Ellipse, das untere für eine Hyperbel gilt; ferner durch Differentiation (2):

$$0 = p\left(1 \pm \frac{\xi'}{a}\right)\sin u - \eta' \cos u,$$

und aus beiden Gleichungen zusammengenommen, wenn ε für $1 \mp \frac{p}{a}$ geschrieben wird,

$$\xi' = \mp a\left\{1 - \frac{\cos u}{\sqrt{1 - \varepsilon \sin u^2}}\right\}$$
$$\eta' = \pm a \cdot \frac{(1-\varepsilon)\sin u}{\sqrt{1 - \varepsilon \sin u^2}}$$

Setzt man $90^0 - i$ für u, so verwandelt sich η' in $\frac{1}{2}b$, wodurch man

$$a = \pm \frac{b\sqrt{1 - \varepsilon \cos i^2}}{2(1-\varepsilon)\cos i}$$

also auch

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \frac{b\sqrt{1-\varepsilon\cos i^2}}{2(1-\varepsilon)\cos i}\left\{\frac{\cos u}{\sqrt{1-\varepsilon\sin u^2}} - 1\right\} \\ fu &= \frac{b\sqrt{1-\varepsilon\cos i^2}}{2s(1-\varepsilon)\cos i}\left\{\cos u - \sqrt{1-\varepsilon\sin u^2}\right\} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (4)$$

erhält.

Wenn die Begrenzungscurve eine Ellipse ist, deren kleine Axe mit der der ξ zusammenfällt, so ist ε zwischen $-\infty$ und 0; für $\varepsilon = 0$ ist die Curve ein Kreis; zwischen 0 und ε eine Ellipse mit der grossen Axe in

der Richtung der ξ; für 1 eine Parabel; zwischen 1 und $\sec i^2$ eine Hyperbel. Die äusserste Ellipse ist eine gerade Linie senkrecht auf die Axe der ξ, die äusserste Hyperbel fällt mit den Ebenen des Prismas ganz zusammen und hat deren Winkel zum Scheitel, in welchem Falle b nothwendig willkürlich bleibt.

$$q' = \frac{\sqrt{1-\varepsilon\cos i^2}}{(1-\varepsilon)\cos i}\left\{\frac{\cos u' - \sqrt{1-\varepsilon\sin u'^2}}{\sin u'}\right\}\frac{dFu'}{Fu'.du'}$$

$$q'' = \frac{\sqrt{1-\varepsilon\cos i^2}}{(1-\varepsilon)\cos i Fu'}\cdot\frac{1}{\pi}\int\frac{\left(\sqrt{1-\varepsilon\sin u^2}-\cos u\right)\left(1-\frac{s}{l}\sin u^2\right)}{\sin u^2\sqrt{1-\varepsilon\sin u^2}\sqrt{2\cos u - 2\cos u'}}du \quad \begin{bmatrix}\text{von } -u'\\ \text{bis } +u'\end{bmatrix}$$

besteht. Führt man den Winkel x ein, so dass $\sin u = -\sin u'\cos x$ ist, so verwandelt der letzte Ausdruck sich in:

$$q'' = \frac{\sqrt{1-\varepsilon\cos i^2}}{(1-\varepsilon)\cos i Fu'}\cdot\frac{1}{\sin u'^2.\pi}\times\cdot$$
$$\times\int\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\sin u'^2\cos x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon\sin u'^2\cos x^2}}\right\}\left(1-\frac{s}{l}\sin u'^2\cos x^2\right)\sqrt{\frac{\sqrt{1-\sin u'^2\cos x^2}+\cos u'}{2}}\frac{dx}{\cos x^2}$$

wo das Integral von $x=0$ bis π genommen wird.

Entwickelt man nach den Potenzen von $\sin u'$, welches so lange angeht, so lange $\varepsilon\sin u'^2$ eine kleine Grösse ist, so erhält man:

$$q' = \frac{\sqrt{1-\varepsilon\cos i^2}}{\cos i}\left\{-\frac{1}{8}\sin u'^2 - \left(\frac{15}{256}+\frac{1}{32}\varepsilon\right)\sin u'^4 - \text{u. s. w.}\ldots\ldots\right\}$$

$$q'' = \frac{\sqrt{1-\varepsilon\cos i^2}}{\cos i}\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{16}+\frac{3}{16}\varepsilon-\frac{1}{4}\frac{s}{l}\right)\sin u'^2+\left(\frac{39}{2048}+\frac{33}{512}\varepsilon+\frac{15}{128}\varepsilon^2-\frac{13}{128}\frac{s}{l}-\frac{9}{64}\frac{s}{l}\varepsilon\right)\sin u'^4+\text{u. s. w.}\right\}$$

woraus hervorgeht

$$q = \frac{\sqrt{1-\varepsilon\cos i^2}}{2\cos i}\left\{1-\left(\frac{1}{8}-\frac{3}{8}\varepsilon+\frac{1}{2}\frac{s}{l}\right)\sin u'^2-\left(\frac{81}{1024}-\frac{17}{256}\varepsilon-\frac{15}{64}\varepsilon^2+\frac{13}{64}\frac{s}{l}+\frac{9}{32}\frac{s}{l}\varepsilon\right)\sin u'^4+\text{u. s. w.}\right\}\ldots(5)$$

Allein dieser Ausdruck hört auf brauchbar zu sein, wenn ε sehr gross wird. Lässt man daher

$$\sqrt{1-\varepsilon\sin u'^2\cos x^2}$$

unentwickelt und bezeichnet man es mit Herrn LEGENDRE durch Δ, so erhält man unter Vernachlässigung der in $\sin u'^2$ multiplicirten, ε nicht enthaltenden Glieder,

$$q' = 0$$
$$q'' = \frac{\sqrt{1-\varepsilon\cos i^2}}{(1-\varepsilon)\cos i.\pi}\int\left\{\left(-\frac{1}{\sin u'^2}+\frac{1}{8}\right)\left(\frac{dx}{\Delta\cos x^2}-\frac{dx}{\cos x^2}\right)+\left(\frac{s}{l}+\frac{1}{8}\right)\frac{dx}{\Delta}-\left(\frac{s}{l}-\frac{3}{8}\right)dx\right\}$$

und wenn man von 0 bis π integrirt:

$$q'' = \frac{\sqrt{1-\varepsilon\cos i^2}}{(1-\varepsilon)\cos i}\left\{\left(-\frac{1}{\sin u'^2}+\frac{1}{8}\right)\frac{1}{\pi}\int\frac{dx}{\Delta\cos x^2}+\left(\frac{s}{l}+\frac{1}{8}\right)\int\frac{dx}{\Delta}-\frac{s}{l}+\frac{3}{8}\right\}$$

Dieses Integral kann bekanntlich von dem Nenner $\cos x^2$ befreit werden, wenn man $\Delta\,\mathrm{tg}\,x$ differentiirt; man erhält dadurch:

$$d.(\Delta\,\mathrm{tg}\,x) = \frac{dx}{\Delta\cos x^2} - \varepsilon\sin u'^2\frac{\cos x^2 dx}{\Delta}$$

also, da $\Delta\,\mathrm{tg}\,x$ für $x=0$ und $x=\pi$ verschwindet,

$$\int\frac{dx}{\Delta\cos x^2} = \varepsilon\sin u'^2\int\frac{\cos x^2 dx}{\Delta}$$

Hierdurch verwandelt sich der Ausdruck von q in

$$\frac{\sqrt{1-\varepsilon\cos i^2}}{(1-\varepsilon)\cos i}\left\{\int\frac{(\frac{1}{8}-\varepsilon\cos x^2)\,dx}{\pi\Delta}+\frac{3}{8}+\frac{s}{l}\int\frac{dx}{\pi\Delta}-\frac{s}{l}\right\}\ldots(6)$$

5.

Die Form welche GAUSS der Berechnung der hier vorkommenden elliptischen Transcendenten gegeben hat, ist bekanntlich:

$$\int\frac{dx}{\pi\sqrt{mm\cos x^2+nn\sin x^2}} = \frac{1}{\mu}$$
$$\int\frac{dx(\cos x^2-\sin x^2)}{\pi\sqrt{mm\cos x^2+nn\sin x^2}} = -\frac{\nu}{\mu},$$

wobei μ die Grenze ist, welcher die Quantitäten

$$m' = \tfrac{1}{2}(m+n)$$
$$n' = \sqrt{mn}$$
$$m'' = \tfrac{1}{2}(m'+n')$$
$$n'' = \sqrt{m'n'}$$

u. s. w.

4.

Für den in Grössen der ersten Ordnung vollständigen Ausdruck (3) der Schwingungszeit werde ich

$$l' = l - \frac{l}{s}\cdot b\cdot q$$

schreiben, wo q aus den beiden Theilen $q'+q''$:

sich nähern und

$$\nu = \frac{2\lambda'\lambda' + 4\lambda''\lambda'' + 8\lambda'''\lambda''' + \text{u. s. w.}}{\lambda\lambda}$$

wo $16\lambda\lambda = mm - nn$; $m'\lambda' = \lambda\lambda$; $m''\lambda'' = \lambda'\lambda'$ u. s. w. Wendet man dieses hier an, so hat man

$$m = \sqrt{1-\varepsilon\sin u'^2}, \quad n = 1,$$

und man erhält

$$q = \frac{\sqrt{1-\varepsilon\cos i^2}}{(1-\varepsilon)\cos i}\left\{\frac{\left(-\frac{1}{\sin u'^2}+\frac{1}{8}+\frac{s}{l}\right)}{\Delta'}\int\frac{dx}{\pi\sqrt{1+\varepsilon'\sin x^2}} + \frac{\Delta'}{\sin u'^2}\int\frac{dx\sqrt{1+\varepsilon'\sin x^2}}{\pi} + \frac{3}{8} - \frac{s}{l}\right\}$$

unter welcher Form, aus der von Herrn LEGENDRE (Exercices du Calc. Int. I. P. 68) gegebenen Reihenentwickelung der beiden Integrale, unmittelbar sichtbar wird, dass für $\varepsilon = -\infty$ nur das zweite Glied in der Rechnung bleibt und sich in

$$\frac{\sqrt{1-\varepsilon\sin u'^2}}{\sin u'^2}\cdot\frac{2}{\pi}$$

verwandelt. Man hat also für diesen Fall:

$$q = \frac{2}{\pi\sin u'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

und dieses ist das Maximum des Einflusses, welchen die Abstumpfung der Schneide erlangen kann.

X. Beilage.

Einfluss der Unterlage auf die Bewegung eines um eine Schneide schwingenden festen Körpers.

1.

Wenn das mit der Schneide auf horizontalen Unterlagen liegende Pendel in Ruhe ist, so ist ein Punkt in der durch die Schneide gelegten lothrechten Ebene, von welchem ich annehme, dass er, auch während der Bewegung, in dieser Ebene bleibt; seine Entfernung von der Schneide bezeichne ich durch h. Die Schneide aber bewegt sich auf ihren Unterlagen und ist $h\sin u$ von ihrem ursprünglichen Orte entfernt, wenn das Pendel den Winkel u mit der Lothlinie macht; dabei erfährt sie die Entgegenwirkung einer Kraft, welche ich durch mQ bezeichne, wo m die Masse des Pendels ist.

Unter Anwendung der Bezeichnungen im 1. Art. der IX. Beilage ist die Differentialgleichung der Bewegung:

$$c = \int dm\cdot\frac{dx^2+dy^2}{dt^2} - 2\pi^2\lambda\int x\,dm + 2\pi^2\lambda mh\int Q\cos u\,du$$

Wenn man x und y durch die im Pendel festen Coordinaten ξ und η ausdrückt, nämlich

$$q = \frac{\sqrt{1-\varepsilon\cos i^2}}{2\cos i}\left\{\frac{1-\nu}{\mu} + \frac{\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)+\frac{\nu}{\mu}}{1-\varepsilon} - \frac{2s}{l}\cdot\frac{1-\frac{1}{\mu}}{1-\varepsilon}\right\} \quad (7)$$

Für den Fall dass $\varepsilon = -\infty$, oder dass die Schneide durch eine auf die Axe der ξ senkrechte Ebene abgestumpft ist, ist diese Formel nicht unmittelbar anwendbar. Man formt aber den Ausdruck (6) leicht in folgenden um ($\sqrt{1-\varepsilon\sin u'^2} = \Delta'$; $\varepsilon\sin u'^2 = \Delta'\Delta'\varepsilon'$):

$$x = \xi\cos u + \eta\sin u$$
$$y = \xi\sin u - \eta\cos u + h\sin u$$

und die Integrationen in Beziehung auf die Masse ausführt, so erhält man hieraus:

$$c = \left(\frac{du}{dt}\right)^2\left\{\mu + (s+h)^2 - (2sh+hh)\sin u^2\right\}$$
$$- 2\pi^2\lambda\{s\cos u - hfQ\cos u\,du\} \ldots\ldots(1)$$

2.

Die Zeit einer ganzen Schwingung des Pendels findet sich hieraus nach der 3. Formel der I. Beilage, nachdem für Q sein Ausdruck gesetzt ist. Diesen werde ich

$$= a^{(0)} + a^{(1)}h\sin u + a^{(2)}h^2\sin u^2 + a^{(3)}h^3\sin u^3 + \text{u. s. w.}$$

annehmen, woraus die am angeführten Orte durch fu bezeichnete Grösse

$$fu = -\frac{h}{s}\left\{a^{(0)}\sin u + \frac{1}{2}a^{(1)}h\sin u^2 + \frac{1}{3}a^{(2)}h^2\sin u^3 + \right.$$
$$\left. + \text{u. s. w.}\ldots\ldots\right\}$$

folgt; man hat ferner, wenn man h^2, wo es nicht in einen der Coefficienten a multiplicirt ist, vernachlässigt,

$$f'u = \frac{sh}{\mu+ss}\cos u^2;$$

endlich ist

$$nn = \frac{\pi^2\lambda s}{\mu+ss}.$$

Hieraus folgt $f0 = 0$ und die angeführte Formel verwandelt sich in

$$\frac{\pi}{n}\left\{Fu'' - \frac{dFu''}{du''}\cdot\frac{fu'+f(-u')}{2\sin u'}\right\} + \frac{1}{n}\int\frac{f'u\,.\,du + d\frac{fu}{\sin u}}{\sqrt{2\cos u - 2\cos u'}}$$

Die Länge des gleichzeitig schwingenden einfachen Pendels $= l'$ gesetzt, erhält man diese Schwingungszeit

$$= \sqrt{\frac{l'}{\lambda}}\cdot Fu'',$$

also wenn man beide Ausdrücke derselben gleich setzt und sl für $\mu + ss$ schreibt, wo l die dem ohne Störung durch die Unterlage schwingenden Pendel entsprechende einfache Pendellänge bezeichnet,

$$l' = l - \frac{l\,dFu''}{Fu''.du''}.\frac{fu'+f(-u')}{\sin u'} + \frac{2l}{Fu''}\int\frac{f'u.du + d\frac{fu}{\sin u}}{\pi\sqrt{2\cos u - 2\cos u'}}$$

Vernachlässigt man in diesem Ausdrucke die Glieder der Störung welche in das Quadrat und die höheren Potenzen des Schwingungswinkels multiplicirt sind, so verschwindet sein zweites Glied aus der Rechnung, und das dritte wird nach der Substitution der Ausdrücke von fu und $f'u$:

$$2h\int\frac{\cos u^2\,du}{\pi\sqrt{2\cos u - 2\cos u'}} - \frac{2lh}{s}\int\frac{(\frac{1}{2}a^{(1)}h + \frac{3}{4}a^{(2)}h^2\sin u + \frac{1}{3}a^{(3)}h^3\sin u^2 + \text{etc.})\cos u\,du}{\pi\sqrt{2\cos u - 2\cos u'}},$$

wovon das bis zu der angegebenen Grenze richtige Integral

$$= 2h - 2h\frac{l}{s}\left\{\frac{1}{2}a^{(1)}h + \frac{1.3}{2.4}a^{(3)}h^3\sin u'^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}a^{(5)}h^5\sin u'^4 + \text{u. s. w.}\right\}$$

ist. Man erhält also:

$$l' = l + 2h - 2h\frac{l}{s}\left\{\frac{1}{2}a^{(1)}h + \frac{1.3}{2.4}a^{(3)}h^3\sin u'^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}a^{(5)}h^5\sin u'^4 + \text{u. s. w.}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

3.

Die Abnahme des Schwingungswinkels während einer Schwingung ist, nach der 2. Formel der I. Beilage,

$$= \frac{f(-u') - fu'}{\sin u'},$$

also wenn man den Ausdruck von $f(-u')$ und fu' setzt,

$$= \frac{2h}{s}\left\{a^{(0)} + \frac{1}{3}a^{(2)}h^2\sin u'^2 + \frac{1}{5}a^{(4)}h^4\sin u'^4 + \text{u. s. w.}\right\} \quad (3)$$

[Im Originale folgen nun die numerischen Ergebnisse der Versuchsreihen:

1., mit der Kugel von Messing und dem Abwickelungscylinder (p. 157—212);
2., mit der Kugel von Messing und drei verschiedenen Aufhängungsarten (p. 215—234).
3., mit der Kugel von Elfenbein und zwei verschiedenen Aufhängungsarten (p. 237—254).]

[Als Beispiel Versuch I.]

1. Bestimmung.

Entfernung des Schwerpunkts der oberen Klemme vom Aufhängepunkte = 14,55 L.

Vergleichungen der beiden Uhren.

		R	P
1	März 31	9h49m 0s	9h48m28s
2		20 28 30	20 27 47
3		21 27 0	21 26 16
4		22 26 0	22 25 15
5	April 1	4 10 0	4 9 9
6	8	21 10 30	21 6 27
7		23 7 0	23 2 55
8		0 4 0	23 59 54
9		1 2 0	0 57 53
10	9	4 50 45	4 46 34
11		6 45 45	6 41 32
12		7 42 30	7 38 16
13		8 40 0	8 35 45
14	10	1 8 0	1 3 28
15		6 53 0	6 48 22
16		8 49 30	8 44 50
17		21 33 0	21 28 7
18		22 31 30	22 26 36
19		1 29 0	1 24 3
20	11	6 20 0	6 14 58
21	12	21 25 0	21 19 18
22		22 23 30	22 17 47
23		0 19 30	0 13 45
24		1 17 30	1 11 44
25	13	3 12 30	3 6 42
26		4 9 30	4 3 41

Zeit in welcher P gegen R einen Schlag verliert.

1 bis 4	März 31	15h46m	58m13s,1	14 bis 16	April 10	4h44m	57m38s,6
2 „ 5		0 36	57 36,6	17 „ 19		23 37	59 2,3
6 „ 9	April 8	23 3	57 50,5	19 „ 20	11	3 55	58 12,0
8 „ 10	9	2 36	57 18,2	21 „ 24	12	23 21	58 6,0
10 „ 13		6 41	57 17,1	23 „ 26	13	2 15	57 30,0

Verbesserung der Zeitangabe der Uhr R.

	St.-Z.	Verbesserung			Tägl. Veränderung
März 30	5h 22m	+ 2s,013			
31	0 23	+ 3,094	März 31	2h53m	+ 0s,603
April 8	7 29	+ 6,503	April 4	15 56	+ 0,467
9	6 24	+ 6,962	8	18 57	+ 0,482
10	9 59	+ 7,770	9	20 12	+ 0,703
Aus Sonnenbeobachtungen..			10	13 16	+ 0,748
			11	13 19	+ 0,768

Hieraus folgt für die Zeiten der Versuche:

Versuch		St.-Z.	k	s	1 Schlag v. P
I. *a.*	März 31	21h46m	57m48s,4	+ 0s,579	0s,9975639
I. *b.*	April 8	22 48	57 52,8	+ 0,516	0,9975628
I. *c.*	9	6 22	57 17,2	+ 0,582	0,9975665
I. *d.*	10	4 23	57 38,2	+ 0,725	0,9975664
I. *e.*	10	23 52	58 59,4	+ 0,757	0,9975601
I. *f.*	12	23 59	57 58,2	+ 0,777	0,9975653

Versuch I. *a.* 1826 März 31. $21^h\,46^m$ Stz. Barometer 336,81 L. + 3,°1 C.

Beobachtete Coincidenzen.

0	$20^h44^m44^s$	509	$20^h59^m22^s$	1007	$21^h13^m41^s$	1516	$21^h28^m19^s$	2025	$21^h42^m57^s$
40	45 53	549	21 0 31	1018	14 0	1527	28 38	2054	43 47
80	47 2	578	1 21	1087	15 59	1596	30 37	2065	44 6
160	49 20	589	1 40	1098	16 18	1607	30 56	2105	45 15
189	50 10	618	2 30	1116	16 49	1636	31 46	2134	46 5
229	51 19	658	3 39	1127	17 8	1676	32 55	2145	46 24
		669	3 53	1167	18 17	1687	33 14	2214	48 23
		738	5 57	1178	18 36	1716	34 4	2225	48 42
$116\frac{1}{3}$	20 48 $4\frac{2}{3}$	613,5	21 2 $22\frac{1}{4}$	$1099\frac{3}{4}$	21 16 21	$1620\frac{1}{8}$	21 31 $18\frac{5}{8}$	$2120\frac{7}{8}$	21 45 $42\frac{3}{8}$

2534	$21^h57^m35^s$	3003	$22^h11^m\,4^s$	3530	$22^h26^m13^s$	4010	$22^h40^m\,1^s$
2545	57 54	3032	11 54	3541	26 32	4021	40 20
2563	58 25	3043	12 13	3581	27 41	4050	41 10
2574	58 44	3072	13 3	3592	28 0	4090	42 19
2614	59 53	3083	13 22	3610	28 31	4101	42 38
2625	22 0 12	3152	15 21	3621	28 50	4130	43 28
2643	0 43	3163	15 40	3661	29 52	4148	43 59
2654	1 2	3192	16 30	3672	30 18	4159	44 18
2683	1 52	3232	17 39	3690	30 49	4170	44 37
2723	3 1	3243	17 58	3701	31 8	4181	44 56
2615,8	21 59 56,1	3121,5	22 14 28,4	3619,9	22 28 48,1	4106,0	22 42 46,6

Reducirte Mittel der Beobachtungen.		Schwingungsweite und Temperatur. μ	l'	l'''	Rechnung $1^s,72492858$.	Fehler.
120	$20^h48^m10^s,9915$	38,3	3,°48	3,°40	$20^h48^m10^s,9874$	$-0^s,0041$
620	21 2 33,4621	33,8			21 2 33,4621	0,0000
1120	16 55,9300	29,8	3,50	3,42	16 55,9345	+0,0045
1620	31 18,4094	26,4			31 18,4051	−0,0043
2120	45 40,8657	23,6	3,51	3,45	45 40,8744	+0,0087
2620	22 0 3,3449	20,9			22 0 3,3427	−0,0022
3120	14 25,8126	18,8	3,51	3,48	14 25,8102	−0,0024
3620	28 48,2725	16,9			28 48,2771	+0,0046
4120	43 10,7481	15,4	3,53	3,53	43 10,7437	−0,0044

Messung der Länge des Pendels.

	Schraube des Fühlheb.	e'	e''	e'''	l'	l'''
Anfang...	13,883	3,°44	3,°29	3,°50	3,°48	3,°40
Ende	13,887	3,53	3,39	3,59	3,54	3,54
Mittel ...	13,885	3,49	3,34	3,545	3,51	3,47

Gemessene Länge . . . . . $F - 1^L,2524$
Temperatur von $F = 3,°39$ . . . + 0,0184
Toise. Temperatur = 3,46 . . . 863,8732
Elasticität des Fadens . . . . . + 0,0042
Länge des Pendels . . . . . $= F + 862,6434$

Beobachtete Schwingungszeit = $1^s,72492858$ Uhrz. . . . . = $1^s,7207265$ MZ.
Entsprechende Länge des einfachen Pendels . . . . . $1305^L,1942 + 2,9609\,s$
Reduction auf den leeren Raum . . . . . $-0,2040 - 0,0005\,s - 0,2040\,k$
„ auf das zusammengesetzte Pendel . . . . . $+0,2377$
„ auf F . . . . . $-862,6434$

Resultat des Versuchs . . . . . $F = 442,5845 + 2,9604\,s - 0,2040\,k$

Versuch I. *b.* 1826 April 8. 22^h 48^m Stz. Barometer 336,80 L. + 5,°3 C.

Beobachtete Coincidenzen.

0	$21^h43^m42^s$	469	$21^h57^m11^s$	989	$22^h12^m\,8^s$	1458	$22^h25^m37^s$	1967	$22^h40^m15^s$
40	44 51	480	57 30	1029	13 17	1498	26 46	1978	40 34
51	45 10	520	58 39	1069	14 26	1538	27 55	2007	41 24
80	46 0	549	59 29	1109	15 35	1549	28 14	2047	42 33
120	47 9	560	59 48	1138	16 25	1578	29 4	2087	43 42
160	48 18	589	22 0 38	1178	17 34	1618	30 13	2127	44 51
		629	1 47			1658	31 22	2167	46 0
		669	2 56			1698	32 31	2207	47 9
$75\frac{1}{6}$	21 45 $51\frac{2}{3}$	$558\frac{1}{6}$	21 59 $44\frac{3}{4}$	$1085\frac{1}{3}$	22 14 $54\frac{1}{6}$	$1574\frac{3}{8}$	22 28 $57\frac{3}{4}$	$2073\frac{3}{8}$	22 43 18,5

2476	$22^h54^m53^s$	2956	$23^h\ 8^m41^s$	3494	$23^h24^m\ 9^s$	3963	$23^h37^m38^s$
2516	56 2	2985	9 31	3505	24 28	4003	38 47
2527	56 21	2996	9 50	3534	25 18	4014	39 6
2556	57 11	3145	10 7	3545	25 37	4043	39 56
2596	58 20	3156	14 26	3574	26 27	4054	40 15
2636	59 29	3185	15 16	3585	26 46	4083	41 5
2676	23 0 38	3225	16 25	3614	27 36	4094	41 24
2716	1 47	3265	17 34	3625	27 55	4123	42 14
				3654	28 45	4163	43 23
				3665	29 4	4174	43 42
$2587\frac{3}{8}$	22 58 $5\frac{1}{8}$	$3114\frac{1}{8}$	23 13 $13\frac{3}{4}$	$3579\frac{1}{2}$	23 26 $36\frac{1}{2}$	4071,4	23 40 45,0

Reducirte Mittel der Beobachtungen.		Schwingungsweite und Temperatur. μ	l'	l'''	Rechnung $1^s,72494814$	Fehler.
80	$21^h46^m\ 0^s,0040$	39,0	$4^0,73$	$5^0,00$	$21^h46^m\ 0^s,0023$	$-0^s,0017$
580	22 0 22,4835	34,2			22 0 22,4867	$+0,0032$
1080	14 44,9669	30,1	4,78	5,00	14 44,9687	$+0,0018$
1580	29 7,4529	26,8			29 7,4489	$-0,0040$
2080	43 29,9279	23,8	4,85	5,01	43 29,9279	0,0000
2580	57 52,4034	21,3			57 52,4060	$+0,0026$
3080	23 12 14,8857	19,2	5,00	5,05	23 12 14,8835	$-0,0022$
3580	26 37,3625	17,2			26 37,3606	$-0,0019$
4080	40 59,8347	15,5	5,04	5,13	40 59,8373	$+0,0026$

Messung der Länge des Pendels.

	Schraube des Fühlheb.	e'	e''	e'''	l'	l'''
Anfang...	13,842	$4^0,87$	$4^0,78$	$5^0,06$	$4^0,70$	$5^0,00$
Ende.....	13,834	4,93	4,83	5,06	5,04	5,17
Mittel....	13,838	4,90	4,805	5,06	4,87	5,085

Gemessene Länge . . . . . $F - 1^L,2482$
Temperatur von $F = 4^0,84$ . . . $+ 0,0262$
Toise. Temperatur = 4,96 . . . 863,8880
Elasticität des Fadens . . . . . $+ 0,0042$
Länge des Pendels . . . . . $= F + 862,6702$

Beobachtete Schwingungszeit = $1^s,72494814$ Uhrz. . . . . $= 1^s,7207441$ M Z.
Entsprechende Länge des einfachen Pendels . . . . . $1305^L,2209 + 2,9609\,\varepsilon$
Reduction auf den leeren Raum . . . . . $- 0,2029 - 0,0005\,\varepsilon - 0,2028\,k$
„ auf das zusammengesetzte Pendel . . . . . $+ 0,2377$
„ auf F . . . . . $- 862,6702$
Resultat des Versuchs . . . . . $F = 442,5855 + 2,9604\,\varepsilon - 0,2028\,k$

Versuch I. *c.* 1826 April 9. $6^h\ 22^m$ Stz. Barometer 337,52 L. + 7°,6 C.

Beobachtete Coincidenzen.		Schwingungsweite und Temperatur. μ	l'	l''	Rechnung $1^s,00306920$	Fehler.
0	$5^h22^m23^s,5$	14,65	$5^0,71$	$5^0,86$	$5^h22^m23^s,5011$	$+0^s,0011$
648	33 13,5	13,7			33 13,4998	$-0,0002$
1296	44 3,5	12,8	5,71	5,93	44 3,4974	$-0,0026$
1946	54 55,5	11,9			54 55,4999	$-0,0001$
2596	6 5 47,5	11,0	5,74	5,99	6 5 47,5015	$+0,0015$
3246	16 39,5	10,3			16 39,5023	$+0,0023$
3895	27 30,5	9,6	5,79	6,04	27 30,4996	$-0,0006$
4545	38 22,5	8,9			38 22,4991	$-0,0009$
5195	49 14,5	8,3	5,82	6,06	49 14,4982	$-0,0018$
5846	7 0 7,5	7,8			7 0 7,4999	$-0,0001$
6497	11 0,5	7,3	5,81	6,06	11 0,5012	$+0,0013$

Messung der Länge des Pendels.

	Schraube des Fühlheb.	e'	e''	e'''	l'	l''
Anfang...	13,829	$5^0,59$	$5^0,47$	$5^0,69$	$5^0,60$	$5^0,80$
Ende.....	13,801	5,80	5,72	6,26	5,80	6,06
Mittel....	13,815	5,695	5,595	5,975	5,70	5,93

Gemessene Länge. . . . . $F - 1,2461$
Temperatur von $F = 5^0,63$ . . . . . $+ 0,0305$
Elasticität des Fadens . . . . . $+ 0,0014$
Länge des Pendels . . . . . $= F - 1,2142$

Beobachtete Schwingungszeit = $1^s,00306920$ Uhrz. . . . . $= 1^s,0006282$ M Z.
Entsprechende Länge des einfachen Pendels. . . . . $441^L,3640 + 1,0013\,\varepsilon$
Reduction auf den leeren Raum . . . . . $- 0,0685 - 0,0002\,\varepsilon - 0,0685\,k$
„ auf das zusammengesetzte Pendel. . . . . $- 0,0410$
„ auf F . . . . . $+ 1,2142$
Resultat des Versuchs. . . . . $F = 442,4687 + 1,0011\,\varepsilon - 0,0685\,k$

Versuch I. *d.* 1826 April 10. $4^h\,23^m$ Stz. Barometer 335,97 L. + 9°,1 C.

Beobachtete Coincidenzen.		Schwingungsweite und Temperatur. μ	l'	l''	Rechnung $1^s,00306809$	Fehler.
0	$3^h24^m18^s,5$	13,5	6°,14	6°,37	$3^h24^m18^s,5048$	+ 0s,0048
648	35 8,5	12,7			35 8,5008	+ 0,0008
1297	45 59,5	11,9	6,19	6,43	45 59,4990	— 0,0010
1947	56 51,5	11,0			56 51,4994	— 0,0006
2596	4 7 42,5	10,3	6,25	6,54	4 7 42,4951	— 0,0049
3247	18 35,5	9,7			18 35,4975	— 0,0025
3898	29 28,5	9,0	6,31	6,63	29 28,4993	— 0,0007
4549	40 21,5	8,4			40 21,5007	+ 0,0007
5199	51 13,5	7,9	6,31	6,68	51 13,4985	— 0,0015
5851	5 2 7,5	7,4			5 2 7,5022	+ 0,0022
6502	13 0,5	7,0	6,34	6,74	13 0,5026	+ 0,0026

Messung der Länge des Pendels.

	Schraube des Fühlheb.	e'	e''	e'''	l'	l''
Anfang...	$13,^R756$	5°,92	6°,02	6°,53	6°,11	6°,40
Ende	13,753	6,21	6,26	6,97	6,39	6,74
Mittel....	13,7545	6,065	6,14	6,75	6,25	6,57

Gemessene Länge . . . . . $F - 1,2407$
Temperatur von $F = 6°,11$ . . . . . + 0,0331
Elasticität des Fadens . . . . . + 0,0014
Länge des Pendels . . . . . $= F - 1,2062$

Beobachtete Schwingungszeit = $1^s,00306809$ Uhrz. . . . . $= 1^s,0006270$ MZ.
Entsprechende Länge des einfachen Pendels . . . . . $441,^L3630 + 1,0013\,\varepsilon$
Reduction auf den leeren Raum . . . . . $- 0,0681 - 0,0002\,\varepsilon - 0,0680\,k$
„ auf das zusammengesetzte Pendel . . . . . — 0,0410
„ auf F . . . . . + 1,2062
Resultat des Versuchs . . . . . $F = 442,4601 + 1,0011\,\varepsilon - 0,0680\,k$

Versuch I. *e.* 1826 April 10. $23^h\,52^m$ Stz. Barometer 336,40 L. + 7°,5 C.

Beobachtete Coincidenzen.

0	$22^h46^m28^s$	560	$23^h\ 2^m34^s$	1040	$23^h16^m22^s$	1520	$23^h30^m10^s$	2029	$23^h44^m48^s$
80	48 46	571	2 53	1080	17 31	1531	30 29	2040	45 7
91	49 5	600	3 43	1120	18 40	1549	31 0	2080	46 16
120	49 55	611	4 2	1131	18 59	1560	31 19	2109	47 6
160	51 4	640	4 52	1160	19 49	1600	32 28	2120	47 25
240	53 22	651	5 11	1200	20 58	1629	33 18	2189	49 24
		720	7 10			1640	33 37	2200	49 43
		731	7 29			1680	34 46	2240	50 52
$115\frac{1}{6}$	22 49 46$\frac{2}{3}$	635$\frac{1}{2}$	23 4 44$\frac{1}{4}$	1121$\frac{5}{6}$	23 18 43$\frac{1}{6}$	1588$\frac{5}{8}$	23 32 8$\frac{1}{8}$	2125$\frac{7}{8}$	23 47 35$\frac{1}{8}$

2520	$23^h58^m55^s$	3029	$0^h13^m33^s$	3549	$0^h28^m30^s$	4007	$0^h41^m40^s$
2589	0 0 54	3040	13 52	3560	28 49	4018	41 59
2600	1 13	3069	14 42	3589	29 39	4029	42 18
2669	3 12	3080	15 1	3629	30 48	4058	43 8
2680	3 31	3109	15 51	3658	31 38	4069	43 27
2749	5 30	3149	17 0	3669	31 57	4087	43 58
		3160	17 19	3709	33 6	4098	44 17
		3189	18 9	3738	33 56	4109	44 36
		3229	19 18	3749	34 15	4138	45 26
		3240	19 37	3778	35 5	4167	46 16
2634$\frac{1}{2}$	0 2 12,5	3129,4	0 16 26,2	3662,8	0 31 46,3	4078	0 43 42,5

Reducirte Mittel der Beobachtungen.		Schwingungsweite und Temperatur. μ	l'	l'''	Rechnung $1^s,72497638$	Fehler.
120	$22^h49^m55^s,0041$	39,5	6°,66	6°,96	$22^h49^m55^s,0091$	+ 0s,0050
620	23 4 17,5128	34,6			23 4 17,5080	— 0,0048
1120	18 40,0042	30,5	6,71	7,02	18 40,0045	+ 0,0003
1620	33 2,4962	26,8			33 2,4992	+ 0,0030
2120	47 24,9907	23,9	6,74	7,08	47 24,9925	+ 0,0018
2620	0 1 47,4878	21,6			0 1 47,4850	— 0,0028
3120	16 9,9852	19,3	6,75	7,17	16 9,9768	— 0,0084
3620	30 32,4700	17,3			30 32,4680	— 0,0020
4120	44 54,9500	15,7	6,78	7,26	44 54,9589	+ 0,0089

Messung der Länge des Pendels.

	Schraube des Fühlheb.	e'	e''	e'''	l'	l'''
Anfang...	$13,^R572$	6°,55	6°,49	6°,97	6°,65	6°,94
Ende.....	13,574	6,69	6,64	7,11	6,79	7,28
Mittel....	13,573	6,62	6,565	7,04	6,72	7,11

Gemessene Länge . . . . . F — 1,2243
Temperatur von $F = 6°,58$ . . . . . + 0,0356
Toise. Temperatur = 6,85 863,9066
Elasticität des Fadens . . . . . + 0,0042
Länge des Pendels . . . . . $= F + 862,7221$

Beobachtete Schwingungszeit = $1^s,72497638$ Uhrz. . . . . = $1^s,7207676$ MZ.
Entsprechende Länge des einfachen Pendels . . . . . $1305^L,2566 + 2,9610\,\varepsilon$
Reduction auf den leeren Raum . . . . . $-0,2012 - 0,0005\,\varepsilon - 0,2012\,k$
„ auf das zusammengesetzte Pendel . . . . . $+0,2378$
„ auf F . . . . . $-862,7221$
Resultat des Versuchs . . . . . $F = 442,5711 + 2,9605\,\varepsilon - 0,2012\,k$

Versuch I. *f.* 1826 April 12. $23^h\ 59^m$ Stz. Barometer 332,19 L. + 9°,6 C.

Beobachtete Coincidenzen.

0	$22^h52^m26^s$	520	$23^h\ 7^m23^s$	1011	$23^h21^m30^s$	1491	$23^h35^m18^s$	1971	$23^h49^m\ 6^s$
40	53 35	531	7 42	1051	22 39	1531	36 27	2011	50 15
51	53 54	571	8 51	1080	23 29	1542	36 46	2051	51 24
91	55 3	600	9 41	1091	23 48	1571	37 36	2091	52 33
120	55 53	611	10 0	1160	25 47	1611	38 45	2102	52 52
131	56 12	640	10 50	1171	26 6	1651	39 54	2131	53 42
		651	11 9	1200	26 56	1662	40 13	2171	54 51
		680	11 59	1211	27 15	1702	41 22	2182	55 10
		691	12 18						
$72\frac{1}{8}$	22 54 30,5	$610\frac{5}{8}$	23 9 $59\frac{3}{8}$	$1121\frac{7}{8}$	23 24 $41\frac{1}{4}$	$1595\frac{1}{8}$	23 38 $17\frac{5}{8}$	$2088\frac{3}{4}$	23 52 $19\frac{1}{8}$

2491	$0^h\ 4^m\ 3^s$	3000	$0^h18^m41^s$	3491	$0^h32^m48^s$	4011	$0^h47^m45^s$
2531	5 12	3011	19 0	3502	33 7	4022	48 4
2542	5 31	3022	19 19	3531	33 57	4080	49 44
2571	6 21	3051	20 9	3542	34 16	4091	50 3
2611	7 30	3062	20 28	3571	35 6	4102	50 22
2622	7 49	3091	21 18	3582	35 25	4171	52 21
2651	8 39	3102	21 37	3611	36 15	4182	52 40
2662	8 58	3131	22 27	3622	36 34	4251	54 39
2691	9 48	3171	23 36	3651	37 24		
2731	10 57	3182	23 55	3662	37 48		
2610,3	0 7 28,8	3082,3	0 21 3	3576,5	0 35 15,5	$4113\frac{3}{4}$	0 50 $42\frac{1}{4}$

Reducirte Mittel der Beobachtungen.		Schwingungsweite μ	Temperatur l'	Temperatur l'''	Rechnung $1^s,72499552$	Fehler.
100	$22^h35^m18^s,5125$	39,9	7°,75	8°,57	$22^h55^m18^s,5089$	$-0^s,0036$
600	23 9 41,0140	34,6			23 9 41,0174	$+0,0034$
1100	24 3,5156	30,4	7,82	8,54	24 3,5233	$+0,0077$
1600	38 26,0344	27,1			38 26,0275	$-0,0069$
2100	52 48,5313	24,1	7,92	8,56	52 48,5303	$-0,0010$
2600	0 7 11,0325	21,5			0 7 11,0323	$-0,0002$
3100	21 33,5325	19,3	7,95	8,62	21 33,5334	$+0,0009$
3600	35 56,0375	17,3			35 56,0341	$-0,0034$
4100	50 18,5313	15,5	7,99	8,72	50 18,5345	$+0,0032$

Messung der Länge des Pendels.

	Schraube des Fühlheb.	e'	e''	e'''	l'	l'''
Anfang...	$13,^R535$	7°,76	7°,79	8°,40	7°,73	8°,58
Ende.....	13,523	7,96	8,19	8,50	8,00	8,75
Mittel ...	13,529	7,86	7,99	8,45	7,865	8,665

Gemessene Länge . . . . . $F - 1,2201$
Temperatur von F = 7°,94 . . . . . $+0,0430$
Toise, Temperatur = 8,26 863,9205
Elasticität des Fadens . . . . . $+0,0042$
Länge des Pendels. . . . . $= F + 862,7476$

Beobachtete Schwingungszeit = $1^s,72499552$ Uhrz. . . . . = $1^s,7207957$ MZ.
Entsprechende Länge des einfachen Pendels . . . . . $1305^L,2992 + 2,9611\,\varepsilon$
Reduction auf den leeren Raum . . . . . $-0,2008 - 0,0005\,\varepsilon - 0,2007\,k$
„ auf das zusammengesetzte Pendel . . . . . $+0,2378$
„ auf F . . . . . $-862,7476$
Resultat des Versuchs . . . . . $F = 442,5886 + 2,9606\,\varepsilon - 0,2007\,k$

[u. s. w. Versuch II—XV.]

138. Ueber den Einfluss eines widerstehenden Mittels auf die Bewegung eines Pendels.*)

(Astr. Nachr. 9, p. 221.)

Es sind gegenwärtig Veranlassungen vorhanden, auf das zurückzukommen, was in meinen „Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels" über die Bewegung eines Pendels in einer Flüssigkeit enthalten ist [Abh. 137, § 13 und Beilage VI]. Ich werde dieselben im Laufe dieses Aufsatzes näher angeben, allein eine kurze Darstellung der Sache vorangehen lassen.

Die Erfindung des Einflusses der Flüssigkeit setzt Betrachtungen sowohl über das Gleichgewicht, als auch über die Bewegung der Flüssigkeiten voraus. Die ersteren ergeben ohne alle Schwierigkeit, dass die bewegende Kraft des Pendels aus zwei anderen bewegenden Kräften zusammengesetzt ist: nämlich aus der in lothrechter Richtung wirkenden, an den Schwerpunkt des Pendels angebrachten, der Masse des Pendels gleichen Kraft der Schwere, und aus der ihr entgegengesetzt wirkenden, an den Schwerpunkt der äusseren Figur des Pendels angebrachten, der Masse der aus der Stelle gedrängten Flüssigkeit gleichen Kraft. Die anderen dagegen entziehen sich bei dem jetzigen Zustande unserer Kenntnisse der Hydrodynamik der directen mathematischen Behandlung: es ist zwar nicht zu bezweifeln, dass die Flüssigkeit sich bewege, indem das Pendel sich bewegt, und eben so wenig, dass aus der Trägheit derselben fortwährende Verminderungen der lebendigen Kraft des Pendels entstehen, allein die Grösse der Wirkungen dieser Ursachen aus der gegebenen Beschaffenheit des Pendels und der Natur und Dichtigkeit der Flüssigkeit zu berechnen, übersteigt bis jetzt die Kräfte der Hydrodynamik.

Die erste — hydrostatische — Einwirkung ist seit NEWTON zur Reduction der Versuche über die Pendellängen angewandt worden, und ich habe dabei nur erinnert, dass die zur Berechnung angewandte Formel im Falle eines nicht homogenen Pendels eine Verbesserung erfordert, welche ich S. 34 [p. 154] meiner angeführten Schrift angegeben habe. Von der zweiten — hydrodynamischen — Einwirkung ist aber früher nur ein Theil, nämlich die Verminderung der lebendigen Kraft, oder der Widerstand, welchen das Pendel erfährt, berücksichtigt worden und es ist gezeigt, dass seine erste Potenz nur auf die Weite, nicht aber auf die Dauer der Schwingung einen Einfluss äussert. Die von der Bewegung des Pendels unzertrennliche Bewegung der Flüssigkeit, welche einen unmittelbaren Einfluss auf die Dauer erhält, ist zuerst in der erwähnten Abhandlung in Betracht gezogen. Da die Grösse ihres Einflusses bis jetzt nicht theoretisch bestimmt werden kann, so habe ich gesucht, denselben aus den Versuchen zu eliminiren. Ich habe gezeigt, dass, wenn ein gleicher Zustand der Bewegung der Flüssigkeit nach einer vollendeten Schwingung des Pendels wiederkehrt (welche Voraussetzung nicht bezweifelt werden kann), der Einfluss dieser Bewegung sich auf eine Vermehrung des Moments der Trägheit des Pendels reducirt; diese Vermehrung aber habe ich durch Vergleichung der Schwingungszeiten zweier Pendel von gleicher Form, aber ungleichen Massen, bestimmt und aus dem Resultate geschafft.

1.

Die erste Veranlassung meines Zurückkommens auf diesen Gegenstand ist der entstandene Zweifel, ob die letzte der angeführten Ursachen von mir oder von einem Anderen zuerst bemerkt worden ist. Mein Freund und College, Herr Professor NEUMANN, hat mir nämlich eine Stelle in ROBINSON'S „System of mechanical Philosophy" II. p. 359—362 gezeigt, aus welcher hervorgeht, dass der berühmte Hydrauliker DUBUAT ähnliche Betrachtungen angestellt hat. Er zieht nämlich bei der Bewegung der Körper in Wasser eine Masse Wassers in Betracht, welche sich an die bewegten Körper anhängt*), und leitet die Grösse derselben aus den Schwingungen eines Pendels in Wasser ab. Aus dem, was ROBINSON anführt, erscheint zwar, dass DUBUAT'S Ansicht von der meinigen verschieden ist, indem er das sich mit dem Körper bewegende Wasser als durch Anziehung oder Klebrigkeit mit demselben verbunden, etwa wie eine den Körper umgebende, während der Bewegung ihn nicht verlassende Hülle betrachtet, wogegen ich die Nothwendigkeit, dass die Flüssigkeit sich bewege, wenn der Körper seinen Ort in derselben verändert, verfolgt habe; allein inwiefern beide Ansichten gleich oder verschieden sind, und ob DUBUAT eine dem

*) [254 d. a. Verz. — Br. m. O. II. 307 fl. 359. 361 (O.).]

*) „A quantity of water, which is made to adhere in some degree to a body, which is carried along through still water etc."

Wasser eigenthümliche Eigenschaft sich den Körpern anzuhängen, oder die allgemeine Natur der Flüssigkeiten, nämlich den durch die Bewegung des Körpers leer werdenden Raum wieder auszufüllen und dadurch in Bewegung versetzt zu werden, verfolgt hat, muss durch Vergleichung des eigenen Werkes DUBUAT's, welches nicht zu meiner Verfügung ist, ausgemittelt werden. So wie aber kein Zweifel darüber obwaltet, dass das Eigenthumsrecht an der neuen Art, die Pendelversuche von dem Einflusse der Luft zu befreien, mir gebührt, so vermuthe ich auch, dass der Uebergang von DUBUAT's Bemerkungen zu der Bewegung eines Pendels in der Luft wenigstens nicht unmittelbar am Tage liegen müsse, indem es nicht wahrscheinlich ist, dass BORDA und PRONY, welche beide sich eifrig mit den Pendelversuchen beschäftigt haben, und von denen der letztere bekanntlich ein grosser Hydrauliker ist, DUBUAT's bereits 1779 erschienenes Werk nicht gekannt haben sollten.

2.

Die zweite Veranlassung meines gegenwärtigen Aufsatzes ist eine in den Mailänder Ephemeriden für 1831 enthaltene Abhandlung des Herrn GABRIEL PIOLA. Er entwickelt darin den Einfluss des Widerstandes auf die Bewegung vollständiger als bisher geschehen und findet im Ausdrucke der Dauer einer ganzen Schwingung ein dem Producte der Quadrate des Schwingungswinkels und des Widerstandes proportionales Glied, welches aus den früheren, nur in der ersten Potenz des Widerstandes vollständigen Auflösungen derselben Aufgabe nicht hervorgegangen war. Von diesem Gliede glaubt Herr PIOLA zeigen zu können, dass es beträchtlichen Einfluss auf die Schwingungszeiten erhalte und hinreiche, das was ich der Bewegung der Flüssigkeit zugeschrieben habe, durch den Widerstand allein zu erklären. Auf diese Folgerung werde ich unten zurückkommen, jetzt aber eine Integration derselben Differentialgleichung der Bewegung des Pendels, welche Herr PIOLA auf eine sehr verschiedene Art integrirt hat, mittheilen. Es ist dieses die Differentialgleichung, welche man erhält, wenn man den Widerstand im Verhältnisse des Quadrats der Geschwindigkeit voraussetzt und von welcher Herr POISSON (Méc. I. §. 273) das erste Integral angegeben hat.

Herrn PIOLA's Bezeichnungen zufolge ist diese Gleichung:

$$0 = \frac{d^2\omega}{dt^2} - a\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + b\sin\omega \quad \ldots\ldots (1)$$

wo ω den Winkel des Pendels mit der Lothlinie, a und b die resp. von dem Widerstande und von der Schwere abhängigen Coefficienten bedeuten. Multiplicirt man sie mit $d\omega$ und eliminirt man dt durch eine neue veränderliche Grösse γ, welche man so annimmt, dass

$$b\cos\gamma = b\cos\omega - \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 \quad \ldots\ldots (2)$$

ist, so verwandelt sie sich in

$$\sin\gamma\, d\gamma = 2a(\cos\omega - \cos\gamma)\, d\omega$$

oder $$0 = \sin\gamma\, d\gamma + 2a\cos\gamma\, d\omega - 2a\cos\omega\, d\omega.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $e^{-2a\omega}$, so wird sie ein vollständiges Differential, welches

$$\left.\begin{aligned} C &= e^{-2a\omega}\cos\gamma + 2a\int e^{-2a\omega}\cos\omega\, d\omega \\ &= e^{-2a\omega}\cos\gamma + \frac{2a}{1+4aa}e^{-2a\omega}(\sin\omega - 2a\cos\omega) \end{aligned}\right\} (3)$$

ergibt. Zur Bestimmung der Constante C ist die Bedingung vorhanden, dass der Anfang der Schwingung, oder $\frac{d\omega}{dt} = 0$, bei einem gegebenen Werthe von $\omega = \alpha$ stattfindet; sie ergibt für den Anfang der Schwingung $\gamma = \omega = \alpha$, oder

$$C = \frac{e^{-a\alpha}}{1+4aa}(\cos\alpha + 2a\sin\alpha) \quad \ldots\ldots (4)$$

Die Schwingung erreicht ihr Ende, wenn $\frac{d\omega}{dt}$ wieder verschwindet oder $\cos\gamma$ und $\cos\omega$ wieder gleich werden, welches für $\gamma = -\omega$ stattfindet. Bezeichnet man daher den Werth von ω, bei welchem die Schwingung sich endigt, durch $-\beta$, so erhält man

$$C = \frac{e^{2a\beta}}{1+4aa}(\cos\beta - 2a\sin\beta)$$

und daher

$$e^{2a\beta}(\cos\beta - 2a\sin\beta) = e^{-2a\alpha}(\cos\alpha + 2a\sin\alpha) \ldots (5)$$

aus welcher Gleichung also der Winkel des Pendels mit der Lothlinie am Ende der Schwingung gefunden wird.

Um die Dauer der Schwingung zu finden, muss man die Gleichung (2) integriren. Sie ist

$$dt\sqrt{2b} = \frac{\pm d\omega}{\sqrt{\cos\omega - \cos\gamma}}$$

und zwar gilt das obere oder das untere Zeichen, je nachdem ω während der Schwingung sich positiv oder negativ verändert. Nimmt man das letztere, oder den Winkel α am Anfange der Schwingung positiv an und setzt man für $\cos\gamma$ seinen Ausdruck (3), so ist die Dauer der Schwingung

$$T = \sqrt{\frac{1+4aa}{2b}}\int_{-\beta}^{\alpha} \frac{e^{-a\omega}\, d\omega}{\sqrt{(\cos\omega + 2a\sin\omega)e^{-2a\omega} - (\cos\alpha + 2a\sin\alpha)e^{-2a\alpha}}}$$

Dieses Integral werde ich durch die von mir in der ersten Beilage meiner angeführten Schrift ange-

wandte Methode suchen, aber dem jetzigen Zwecke gemäss die Annäherung nicht auf die erste Potenz des Widerstandes beschränken. Indem der grösste Werth von

$$(\cos\omega + 2a\sin\omega)\,e^{-2a\omega}$$

$= 1$ ist, kann man

$$(\cos\omega + 2a\sin\omega)e^{-2a\omega} = \cos\varphi \quad \ldots\ldots (6)$$

sowie die ähnliche Function von $\alpha = \cos\varphi'$ setzen und $\sqrt{1+4aa}\,.\,e^{-a\omega}d\omega$ durch a, φ und $d\varphi$ ausdrücken, so dass die Form des Integrals

$$T = \frac{1}{\sqrt{2b}}\int\frac{\Phi d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi'}} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

wird. Die Grenzen dieses Integrals werden, der Gleichung (5) zufolge, $-\varphi'$ und $+\varphi'$.

Den Ausdruck von Φ kann man zwar durch den Lagrange'schen Lehrsatz direct entwickeln, allein die Rechnung wird leichter, wenn man zuerst $\sin\frac{1}{2}\varphi = s$ durch $\sin\frac{1}{2}\omega = \sigma$ der Formel (6) gemäss ausdrückt, dann die Reihe umkehrt und den dadurch erhaltenen Ausdruck von σ durch s zur Entwickelung von $-\frac{1}{a}\sqrt{1+4aa}\,.\,e^{-a\omega}$ in eine nach den Potenzen von s fortschreitende Reihe anwendet, deren Differential dann $= \Phi d\varphi$ ist.

Den Anfang der Entwickelung von $\cos\varphi$ nach den Potenzen von σ findet man aus (6)

$$\cos\varphi = 1 - 2(1+4aa)\sigma^2 + \tfrac{1}{3}^6\,a(1+4aa)\sigma^3 - \text{etc.}\ldots$$

Das Gesetz ihres Fortganges erkennt man am leichtesten durch die aus (6) hervorgehende Differentialgleichung:

$$0 = \frac{d^2X}{d\sigma^2}(\sigma - \sigma^3) - \frac{dX}{d\sigma}(2 - 3\sigma\sigma) - X.4(1+4aa)\sigma,$$

in welcher X für $\cos\varphi$ geschrieben ist. Setzt man nämlich

$$X = 1 + \alpha^{(2)}\sigma^2 + \alpha^{(3)}\sigma^3 + \alpha^{(4)}\sigma^4 + \text{etc.}\ldots$$

so erhält man durch diese Differentialgleichung allgemein:

$$\alpha^{(n+2)} = \alpha^{(n)}.\frac{(n-2)^2 + 16aa}{(n-1)(n+2)}$$

also für $n = 2, 3, 4 \ldots$:

$$\alpha^{(4)} = \alpha^{(2)}.\frac{16aa}{1.4}; \qquad \alpha^{(5)} = \alpha^{(3)}.\frac{1+16aa}{2.5}$$

$$\alpha^{(6)} = \alpha^{(4)}.\frac{4+16aa}{3.6}; \qquad \alpha^{(7)} = \alpha^{(5)}.\frac{9+16aa}{4.7}$$

$$\alpha^{(8)} = \alpha^{(6)}.\frac{16+16aa}{5.8}; \qquad \alpha^{(9)} = \alpha^{(7)}.\frac{25+16aa}{6.9}$$

u. s. w.

Man erhält hieraus für $ss = \frac{1}{2}(1-X)$ den Ausdruck:

$$\frac{ss}{1+4aa} = \sigma^2 - \tfrac{8}{3}a\sigma^3 + 4a^2\sigma^4 - \tfrac{4}{15}a(1+16aa)\sigma^5 + \tfrac{8}{9}a^2(1+4aa)\sigma^6 - \text{etc.}\ldots (8)$$

und durch Umkehrung dieser Reihe:

$$\sigma = s' + \frac{4}{3}as'^2 + \frac{22}{9}a^2s'^3 + \left(\frac{2}{15}a + \frac{688}{135}a^3\right)s'^4 + \left(\frac{4}{5}a^2 + \frac{1538}{135}a^4\right)s'^5 + \text{etc.}\ldots\ldots (9)$$

wo, um abzukürzen, $s'\sqrt{1+4aa}$ für s geschrieben ist. Da nun

$$e^{-a\omega} = e^{-2a(\sigma + \frac{1}{6}\sigma^3 + \frac{3}{40}\sigma^5 + \text{etc.}\ldots)}$$

$$= 1 - 2a\sigma + 2a^2\sigma^2 - (\tfrac{1}{3}a + \tfrac{4}{3}a^3)\sigma^3 + (\tfrac{2}{3}a^2 + \tfrac{2}{3}a^4)\sigma^4 - (\tfrac{3}{10}a + \tfrac{2}{3}a^3 + \tfrac{4}{15}a^5)\sigma^5 + \text{etc.}\ldots$$

ist, so erhält man, indem man für σ seinen eben gefundenen Ausdruck setzt:

$$e^{-a\omega} = 1 - 2as' - \frac{2}{3}a^2s'^2 - \left(\frac{1}{3}a + \frac{8}{9}a^3\right)s'^3 - \left(\frac{14}{15}a^2 + \frac{206}{135}a^4\right)s'^4 - \left(\frac{3}{20}a + \frac{12}{5}a^3 + \frac{80}{27}a^5\right)s'^5 - \text{etc.}\ldots$$

Multiplicirt man dieses mit $-\frac{\sqrt{1+4aa}}{a}$ und differentiirt man, so hat man endlich:

$$\Phi d\varphi = 2ds\left\{1 + \frac{2}{3}as' + \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3}a^2\right)s'^2 + \left(\frac{28}{15}a + \frac{412}{135}a^3\right)s'^3 + \left(\frac{3}{8} + 6a^2 + \frac{200}{27}a^4\right)s'^4 + \text{etc.}\ldots\right\} \ldots (10)$$

Es ist nun noch die Formel (7) zu integriren. Schreibt man $1-2ss$ und $1-2kk$ für $\cos\varphi$ und $\cos\varphi'$, so verwandelt sie sich in

$$T = \frac{1}{\sqrt{b}}\int_{-k}^{+k}\frac{\frac{1}{2}\Phi d\varphi}{\sqrt{kk - ss}};$$

da die Glieder des Ausdruckes von $\Phi d\varphi$, welche ungerade Potenzen von s enthalten, aus dem Integrale verschwinden und

$$\int_{-k}^{+k}\frac{s^{2n}ds}{\sqrt{kk-ss}} = \frac{1.3\ldots.2n-1}{2.4\ldots.2n}\cdot\pi k^{2n}$$

ist, so erhält man den Ausdruck der Schwingungszeit:

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{b}}\left\{1 + \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{8}a^2}{1+4aa}k^2 + \frac{\frac{9}{64} + \frac{9}{4}a^2 + \frac{25}{9}a^4}{(1+4aa)^2}k^4 + \ldots\right\} (11)$$

Will man diesen Ausdruck, der nach den Potenzen von $k = \sin\frac{1}{2}\varphi'$ geordnet ist, von dem anfänglichen Schwingungsmittel α unmittelbar abhängig machen und bezeichnet man $\sin\frac{1}{2}\alpha$ durch $\varkappa$, so hat man der Formel (8) gemäss

$$\frac{kk}{1+4aa} = \varkappa^2 - \tfrac{8}{3}a\varkappa^3 + 4a^2\varkappa^4 - \text{etc.}\ldots$$

zu setzen, wodurch man erhält:

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{b}}\left\{1 + (\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{8}a^2)\varkappa^2 - (\tfrac{3}{8}a + \tfrac{1}{9}^6\,a^3)\varkappa^3 + (\tfrac{9}{64} + \tfrac{1}{4}^3\,a^2 + \tfrac{4}{9}^9\,a^4)\varkappa^4 + \text{etc.}\ldots\right\} (12)$$

Dieser Ausdruck ist von dem von Herrn Piola gefundenen nur darin verschieden, dass er nach den Poten-

zen von $\sin\frac{1}{2}\alpha$ geordnet ist, während der andere nach den Potenzen von α selbst fortschreitet. Er ist zur Anwendung auf die Pendelversuche, welche man immer bei kleinen Schwingungswinkeln macht, völlig hinreichend; allein wenn der Zweck der Versuche die Erfindung der Grösse des Widerstandes wäre und man deshalb das Pendel in sehr grossen Winkeln schwingen liesse, so würde man Veranlassung haben, noch eine andere Integration der Differentialgleichung zu wünschen, welche nach den Potenzen des Widerstandes fortschreitet, allein von der Voraussetzung der Kleinheit von α befreit ist. Ich werde bei dieser Gelegenheit zeigen, von welchen Integralen sie abhängt.

Differentiirt man die Formel (6), so ergibt sie

$$\sin\varphi\,.\,d\varphi = (1+4aa)\sin\omega e^{-2a\omega}d\omega$$

und man erhält daraus

$$\sqrt{1+4aa}\,.\,e^{-a\omega}d\omega = \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1+4aa}}\cdot\frac{e^{a\omega}}{\sin\omega} = \Phi d\varphi$$

so dass die hier zu machende Umformung des Differentials der Schwingungszeit auf die Entwickelung von

$$\Phi = \frac{\sin\varphi}{\sin\omega}\cdot\frac{e^{-a\omega}}{\sqrt{1+4aa}}$$

in eine von ω befreite, nach den Potenzen von a fortschreitende Reihe zurückkömmt. Bezeichnet man die Grösse

$$\cos\omega - (\cos\omega + 2a\sin\omega)e^{-2a\omega}$$

durch $F\omega$, so ist (6)

$$\cos\varphi = \cos\omega - F\omega$$

und da man nach dem Lagrange'schen Lehrsatze

$$f\omega = f\varphi + F\varphi\cdot\frac{df\varphi}{d\cos\varphi} + \frac{d\left\{(F\varphi)^2\frac{df\varphi}{d\cos\varphi}\right\}}{1\,.\,2\,(d\cos\varphi)^2} + \text{etc.}\ldots$$

hat und

$$f\omega = \frac{e^{a\omega}}{\sqrt{1+4aa}\,.\sin\omega}$$

also

$$\frac{df\varphi}{d\cos\varphi} = \frac{e^{a\varphi}(\cos\varphi - a\sin\varphi)}{\sqrt{1+4aa}\,.\sin\varphi^3} = P$$

ist, so erhält man

$$\Phi = \frac{e^{a\varphi}}{\sqrt{1+4aa}} + \sin\varphi\,.\,PF\varphi + \frac{\sin\varphi}{1\,.\,2}\cdot\frac{d\{P(F\varphi)^2\}}{d\cos\varphi} + \text{etc.}$$

Setzt man nun für $F\varphi$ und P ihre Entwickelungen nach den Potenzen von a, nämlich:

$$F\varphi = 2a\,.\,y' - \frac{(2a)^2}{1\,.\,2}y'' + \frac{(2a)^3}{1\,.\,2\,.\,3}y''' - \text{etc.}\ldots$$

$$P = \frac{\sqrt{1+4aa}}{\sin\varphi^3}\left(y + ay' + \frac{a^2}{1\,.\,2}y'' + \frac{a^3}{1\,.\,2\,.\,3}y''' + \text{etc.}\ldots\right)$$

wo

$$y = \cos\varphi$$
$$y' = \varphi\cos\varphi - \sin\varphi$$
$$y'' = \varphi^2\cos\varphi - 2\varphi\sin\varphi$$
$$y''' = \varphi^3\cos\varphi - 3\varphi^2\sin\varphi$$

so erhält man sehr leicht, wenn man nicht über aa hinausgeht:

$$\Phi = 1 + a\frac{\varphi+\varphi\cos\varphi^2-2\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi^2} + aa\left\{\tfrac{1}{2}\varphi^2 + \frac{(\varphi\cos\varphi-\sin\varphi)(6\varphi\cos\varphi-6\sin\varphi+4\sin\varphi^3)}{\sin\varphi^4}\right\} + \text{u. s. w.}$$

Aus dem Integral (7) verschwinden, wie auch dieser Ausdruck zeigt, die ungeraden Potenzen von a, weshalb der bis zu a^4 excl. richtige Ausdruck der Dauer der Schwingung

$$T = \frac{1}{\sqrt{b}}\int\frac{\frac{1}{2}d\varphi}{\sqrt{kk-ss}} + \frac{aa}{\sqrt{b}}\int\frac{d\varphi\left\{\frac{1}{4}\varphi^2 + \frac{(\varphi\cos\varphi-\sin\varphi)(3\varphi\cos\varphi-3\sin\varphi+2\sin\varphi^3)}{\sin\varphi^4}\right\}}{\sqrt{kk-ss}} \quad\ldots\ldots\ldots (13)$$

ist. Das erste Glied dieses Ausdrucks ist bekanntlich die elliptische Transcendente der ersten Gattung; die Erfindung der übrigen wird vermuthlich durch die merkwürdigen Reihenentwickelungen unterstützt werden können, welche Herr Prof. Jacobi in seinen Fundam. nov. Theoriae Funct. Ellipt. gegeben hat.

3.

Ich werde jetzt die Abnahme, welche der Schwingungswinkel während einer Anzahl (n) von Schwingungen erfährt und die mittlere Dauer derselben untersuchen. Wenn der Sinus des halben Winkels des Pendels mit der Lothlinie am Anfange einer Schwingung durch x, am Ende derselben durch x' bezeichnet wird, so erhält man durch die Entwickelung (8) der beiden Glieder der Gleichung (5):

$$x'^2 + \frac{8}{3}ax'^3 + 4a^2x'^4 + \frac{4}{15}a(1+16aa)x'^5 + \frac{8}{9}a^2(1+4aa)x'^6 + \text{etc.}\ldots$$
$$= x^2 - \frac{8}{3}ax^3 + 4a^2x^4 - \frac{4}{15}a(1+16aa)x^5 + \frac{8}{9}a^2(1+4aa)x^6 - \text{etc.}\ldots$$

und durch die Umkehrung der ersten Reihe:

$$x' = x - \frac{8}{3}ax^2 + \frac{64}{9}a^2x^3 - \left(\frac{4}{15}a + \frac{2816}{135}a^3\right)x^4 + \left(\frac{32}{15}a^2 + \frac{49664}{405}a^4\right)x^5 - \text{etc.}\ldots\ldots\ldots (14)$$

Bezeichnet man diesen Ausdruck durch

$$x' = fx,$$

so hat man für die folgenden Schwingungen

$$x'' = fx'$$
$$x''' = fx'' \text{ u. s. w.}$$

welches, wenn $x^{(n)}$ für das Ende der n^{ten} Schwingung gilt, bis zu

$$x^{(n)} = fx^{(n-1)}$$

fortzusetzen ist. Der Ausdruck von $x^{(n)}$ durch x und die Anzahl der Schwingungen erfordert, dass man die zwischen dem Anfange und dem Ende der Bewegung des Pendels vorkommenden x', x'', ... $x^{(n-1)}$ aus der Rechnung schaffe.

Um dieses zu erlangen, werde ich das zu dem Anfange einer Schwingung, welche ich die m^{te} benennen werde, gehörige $x^{(m-1)}$ durch k bezeichnen und m als eine Function von k betrachten, oder

$$m = \Psi k$$

setzen. Wendet man dieselbe Bezeichnung auf das Ende derselben Schwingung an oder setzt man auch

$$m + 1 = \Psi k'$$

so hat man

$$1 = \Psi k' - \Psi k,$$

woraus die Function Ψ, unter Annahme der Relation (14) zwischen k und k', zu bestimmen ist. Setzt man

$$\Psi k = C + \frac{\alpha}{k} + \beta k + \gamma k^2 + \delta k^3 + \text{ etc.}$$

so ist also

$$1 = \alpha\left\{\frac{1}{k'} - \frac{1}{k}\right\} + \beta(k' - k) + \gamma(k'^2 - k^2) + \text{etc.} \ldots$$

oder

$$kk' = (k' - k)\{-\alpha + \beta kk' + \gamma kk'(k' + k) + \ldots\},$$

wodurch, wenn man für k' seinen Ausdruck (14) setzt,

$$\alpha = \frac{3}{8a}; \quad \beta = \frac{3}{80a} + \frac{4}{15}a; \quad \gamma = -4aa; \text{ etc.} \ldots$$

und

$$m = C + \frac{3}{8ak} + \left(\frac{3}{80a} + \frac{4}{15}a\right)k - 4aak^2 + \text{etc.} \ldots (15)$$

gefunden wird.

Wendet man diesen Ausdruck auf den Anfang der ersten und auf das Ende der letzten Schwingung an, so wird er:

$$1 = C + \frac{3}{8ax} + \left(\frac{3}{80a} + \frac{4}{15}a\right)x - 4aax^2 + \text{etc.} \ldots$$

$$n + 1 = C + \frac{3}{8ax^{(n)}} + \left(\frac{3}{80a} + \frac{4}{15}a\right)x^{(n)} - 4aax^{(n)2} + \text{etc.}$$

und der Unterschied beider Reihen ergibt:

$$n = \frac{3}{8a}\left(\frac{1}{x^{(n)}} - \frac{1}{x}\right) - \left(\frac{3}{80a} + \frac{4}{15}a\right)(x - x^{(n)}) + 4aa(x^2 - x^{(n)2}) - \text{etc.} \ldots . (16)$$

Hieraus erhält man $x^{(n)}$, explicite durch x und n ausgedrückt, wenn man die fünften und höheren Potenzen von x weglässt und p für $1 + \frac{b}{3}anx$ schreibt:

$$x^{(n)} = \frac{x}{p} - \left(\frac{1}{10} + \frac{32}{45}aa\right)\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^3}\right)x^3 + \frac{32}{3}a^3\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^4}\right)x^4 + \text{etc.} \ldots . (17)$$

Herrn Piola's ähnlicher Ausdruck (35) enthält auch die in den Nennern der verschiedenen Glieder vorkommenden Potenzen von p in Reihen aufgelöst, welche nach den Potenzen von anx aufsteigen und deren Convergenz nicht angenommen werden kann; dieses wird aber dadurch unschädlich, dass Herr Piola die Reihe, welche er findet, als geometrische Progression summirt. Es schien mir nicht überflüssig, diesen Uebelstand durch eine anders geführte Rechnung zu vermeiden.

Die Zeit, welche das Pendel anwendet, um n Schwingungen zu vollenden, ist der Formel (12) zufolge

$$= \frac{\pi}{\sqrt{b}}(n + Fx + Fx' + Fx'' + \ldots + Fx^{(n-1)})$$

wo

$$Fx^{(m)} = \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}a^2\right)x^{(m)2} - \left(\frac{2}{3}a + \frac{16}{9}a^3\right)x^{(m)3} + \left(\frac{9}{64} + \frac{13}{4}a^2 + \frac{49}{9}a^4\right)x^{(m)4} - \text{etc.} \ldots$$

ist; oder die mittlere Dauer einer dieser Schwingungen ist

$$= \frac{\pi}{\sqrt{b}}\left(1 + \frac{1}{n}\Sigma x^{(m)}\right).$$

Der Formel (17) gemäss ist das zu dem Anfange der $m + 1^{\text{ten}}$ Schwingung gehörige $x^{(m)}$

$$= \frac{x}{p} - \left(\frac{1}{10} + \frac{32}{45}a^2\right)\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^3}\right)x^3 + \frac{32}{3}a^3\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^4}\right)x^4 - \text{etc.} \ldots$$

wo $p = 1 + \frac{8}{3}axm$ ist; substituirt man dieses in dem Ausdrucke von $Fx^{(m)}$, so erhält man:

$$Fx^{(m)} = \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}a^2\right)\frac{x^2}{p^2} - \left(\frac{2}{3}a + \frac{16}{9}a^3\right)\frac{x^3}{p^3} - \left(\frac{1}{5} + \frac{64}{45}a^2\right)\left(\frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^4}\right)x^4 + \left(\frac{9}{64} + \frac{13}{4}a^2 + \frac{49}{9}a^4\right)\frac{x^4}{p^4} - \text{etc.} \ldots$$

Die Summe sämmtlicher Werthe von $Fx^{(m)}$, von $m = 0$ bis $m = n - 1$ genommen, ist nach der Bernouilli-schen Entwickelung:

$$= \int_0^n F\varkappa^{(m)} dm + \psi 0 - \psi n$$

wo $\psi m = \frac{1}{2} F\varkappa^{(m)} - \frac{1}{12}\frac{dF\varkappa^{(m)}}{dm} + \frac{1}{720}\frac{d^3 F\varkappa^{(m)}}{dm^3} - \text{etc.}$

ist. Entwickelt man diese Formel so weit, als sie auf die Coefficienten der vierten Potenz des Schwingungswinkels Einfluss erhält, so findet man:

$$\int_0^n F\varkappa^{(m)} dm = \left(\frac{3}{32} + \frac{1}{4}a^2\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)\frac{\varkappa}{a} - \left(\frac{1}{8}a + \frac{1}{3}a^3\right)\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\frac{\varkappa^2}{a} - \left(\frac{1}{80} + \frac{4}{45}a^2\right)\left(1 - \frac{3}{p^2} + \frac{2}{p^3}\right)\frac{\varkappa^3}{a}$$
$$+ \left(\frac{9}{512} + \frac{13}{32}a^2 + \frac{49}{72}a^4\right)\left(1 - \frac{1}{p^3}\right)\frac{\varkappa^3}{a}$$

$$\psi 0 - \psi n = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{3}a^2\right)\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\varkappa^2 - \left(\frac{2}{9}a + \frac{16}{27}a^3\right)\left(1 - \frac{1}{p^3}\right)\varkappa^3$$

Jedes Glied dieser beiden Theile von $\Sigma F\varkappa^{(m)}$ enthält den Factor

$$1 - \frac{1}{p} = \frac{8a\varkappa n}{3p},$$

sondert man ihn ab, so ergibt der n^{te} Theil ihrer Summe den Ausdruck der mittleren Dauer einer Schwingung:

$$\frac{\pi}{\sqrt{b}}\left\{1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}a^2\right)\frac{\varkappa^2}{p} + \left(\frac{3}{64} + \frac{53}{108}a^2 + \frac{19}{81}a^4\right)\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3}\right)\varkappa^4 - \left(\frac{1}{30} + \frac{32}{135}a^2\right)\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p^3}\right)\varkappa^4\right\} \quad . . (18)$$

Auch diesen Ausdruck hat die Rechnung des Herrn PIOLA so ergeben, dass die Potenzen von $p = 1 + \frac{8}{3}an\varkappa$ in den Nennern in nicht convergirende Reihen aufgelöst erscheinen.

4.

Nachdem Herr PIOLA die Abnahme des Schwingungswinkels und die Dauer einer Schwingung aus der Theorie bestimmt hat, wendet er die beobachtete Abnahme des ersteren an, um dadurch die Grösse a, von welcher beide abhängen, aus dem Ausdrucke der letzteren zu eliminiren. Wenn man die von $\varkappa^3$ und $\varkappa^4$ abhängigen Theile der Formel (17) weglässt, indem sie für so kleine Schwingungswinkel, als bei den Pendelversuchen vorzukommen pflegen, unbedeutend sind, hat man

$$p = 1 + \frac{8}{3}an\varkappa = \frac{\varkappa}{\varkappa^{(n)}}$$

oder $$a = \frac{3(\varkappa - \varkappa^{(n)})}{8n\varkappa\varkappa^{(n)}}.$$

Setzt man dieses in den Ausdruck (18) der Dauer einer Schwingung und vernachlässigt man darin ebenfalls $\varkappa^4$, so erhält man diese Dauer:

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{b}}\left\{1 + \frac{\varkappa\varkappa^{(n)}}{4} + \frac{3}{32}\cdot\frac{(\varkappa - \varkappa^{(n)})^2}{n\varkappa\varkappa^{(n)}}\right\} \quad . . . . (19)$$

Dieses ist also die beobachtete mittlere Dauer von n Schwingungen; die für einen unendlich kleinen Schwingungswinkel stattfindende t sollte man daher aus der Gleichung

$$T = t\left\{1 + \frac{\varkappa\varkappa^{(n)}}{4} + \frac{3}{32}\cdot\frac{(\varkappa - \varkappa^{(n)})^2}{n\varkappa\varkappa^{(n)}}\right\} \quad . . . . (20)$$

folgern. Indem man aber das neu hinzugekommene letzte Glied der Formel bisher nicht berücksichtigt hat, hat man einen andern Werth von t, welchen ich durch $t_,$ bezeichnen werde, durch die Gleichung

$$T = t_,\left\{1 + \frac{\varkappa\varkappa^{(n)}}{4}\right\}$$

finden müssen, welcher den wahren mit hinreichender Annäherung nach der Formel

$$t = t_,\left\{1 - \frac{3}{32}\cdot\frac{(\varkappa - \varkappa^{(n)})^2}{n\varkappa\varkappa^{(n)}}\right\} = t_,(1 - z)$$

ergeben wird.

Ich werde jetzt den Einfluss dieser Verbesserung auf die in meiner angeführten Abhandlung sowohl aus den Versuchen mit einer Kugel von Messing, als aus denen mit einer Kugel von Elfenbein abgeleiteten Längen des einfachen Secundenpendels berechnen. Bezeichnet man diese Länge durch λ, die verbesserten Schwingungszeiten des langen und des kurzen Pendels durch t und t', die Längen beider Pendel durch l und l', so hat man

$$\lambda = \frac{tl - l't'}{tt - t't'}$$

und indem man t und t' durch $t_,$ und $t'_,$ ausdrückt,

$$\lambda = \frac{l - l'}{t_,t_,(1-z)^2 - t'_,t'_,(1-z')^2},$$

woraus die anzubringende Verbesserung der Länge des einfachen Secundenpendels

$$= 2\lambda\frac{lz - l'z'}{l - l'}$$

hervorgeht.

Um den Zahlenwerth dieser Verbesserung auszumitteln, habe ich die mittleren Werthe der halben Schwingungswinkel, mit welchen meine Versuche anfangen und sich endigen, aufgesucht. Die 11 Bestimmungen mit der Kugel von Messing haben ergeben:

	langes Pendel.	kurzes Pendel.
Anfang .	= 3163″	2845″
Ende . .	= 1248	1554
n	= 4000	5932

Die 4 Bestimmungen mit der Kugel von Elfenbein:

	langes Pendel.	kurzes Pendel.
Anfang .	= 3020″	3330″
Ende . .	= 1107	1080
n	= 1000	2473

Die Werthe von l und l' sind, mit hinreichender Annäherung, 1305,5 Linien und 441,5 Linien, λ ist = 440,81 Linien. Aus diesen Angaben folgt die Verbesserung der aus den Versuchen gefolgerten Werthe von λ für die Kugel von Messing = + 0,L000007, für die Kugel von Elfenbein = + 0,L000127. Das Endresultat meiner Versuche im 21. § meiner Abhandlung [p. 162] würde durch Anbringung dieser Verbesserung um die völlig unmerkliche Grösse + 0,L000026 verändert worden sein. Schreibt man einen Theil der beobachteten Abnahme des Schwingungswinkels den Hindernissen zu, welche die Bewegung des Pendels an seinem Aufhängungspunkte erfährt, so erhält man die eben berechneten Verbesserungen noch kleiner; es scheint aber, dass diese Ursache, wenigstens bei meinen Versuchen, keinen grossen Einfluss auf die Schwingungswinkel geäussert hat.

Hieraus geht hervor, dass die weitere Entwickelung der Theorie des Widerstandes, welche auch das Quadrat desselben berücksichtigt, weit entfernt bleibt, den grossen Unterschied zwischen den aus der schwereren und der leichteren Kugel gefolgerten Längen des Secundenpendels, welcher 0,L2324 beträgt, zu erklären. Man konnte dieses zwar auch ohne die eben gemachte Berechnung der Versuche nicht anders erwarten, indem eine Verbesserung, welche nur einen Theil des Products der Quadrate der kleinen Grössen $\varkappa$ und a beträgt, keinen erheblichen Einfluss erhalten kann; allein dennoch habe ich diese Berechnung hier angeführt, indem Herr Piola glaubt, dass eben dieselbe Verbesserung hinreiche, das zu erklären, was ich der Bewegung der Luft zugeschrieben habe.

Indessen zieht Herr Piola aus den Beobachtungen der Schwingungen der verschiedenen Pendel in Wasser, welche ich im 24. § meiner angeführten Schrift [p. 166] mitgetheilt habe, das entgegengesetzte Resultat, nämlich, dass das bisher vernachlässigte Glied im Ausdrucke der Schwingungszeit hinreiche, die grossen Unterschiede zwischen der Rechnung und der Beobachtung zu erklären, und dass es nicht nöthig sei, der Bewegung der Flüssigkeit einen Einfluss zuzuschreiben. — Eigentlich können diese Versuche nicht zur Bestimmung oder zur Elimination von a angewandt werden, indem der Schwingungswinkel am Ende der Versuche von mir gar nicht angegeben worden ist, also seine Abnahme, und damit a, unbekannt bleibt; allein Herr Piola kehrt die Aufgabe um und sucht denjenigen Werth des Schwingungswinkels am Ende der Versuche, welcher angenommen werden muss, damit die Verschiedenheit der beobachteten und der aus der Newton'schen Theorie berechneten Schwingungszeiten ohne die Voraussetzung eines Einflusses der Bewegung des Wassers durch die Formel (20) allein erklärt werden könne. Diesen Werth findet er so, dass er ihm mit meiner Aeusserung — die Versuche seien bis zu den kleinsten Schwingungswinkeln fortgesetzt worden, welche noch gehörig gesehen werden konnten — vereinbar erscheint. Jedoch beruht dieses nur auf einem begangenen Fehler und einem Missverständnisse; wenn man beide berichtigt, so erhält man ein völlig verschiedenes Resultat.

Der Fehler besteht darin, dass (Ephem. di Milano p. 74) eine unrichtige Formel angewandt worden ist. Ich habe oben schon bemerkt, dass Herrn Piola's Formeln erst dadurch richtig werden, dass er die divergirenden Reihen wie geometrische Progressionen summirt; dieses aber ist hier unterlassen und es wird die Formel

$$T = t\left\{1+\frac{3}{32}\frac{(\varkappa-\varkappa^{(n)})^2}{nn\varkappa^{(n)}\varkappa^{(n)}}\right\}$$

angewandt, während (20), oder da man den directen Einfluss des Schwingungswinkels bei so wenig genauen Versuchen vernachlässigen kann,

$$T = t\left\{1+\frac{3}{32}\frac{(\varkappa-\varkappa^{(n)})^2}{nn\varkappa\varkappa^{(n)}}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (21)$$

hätte angewandt werden sollen, welche Formel auch Herr Piola früher richtig angibt. Das Missverständniss, welches jedoch weit geringeren Einfluss erhält als dieser Fehler, ist, dass Herr Piola den Schwingungswinkel von etwa 2^0, mit welchem ich die Versuche angefangen habe, für die anfängliche Entfernung des Pendels von der Lothlinie, oder für den halben Schwingungswinkel ansieht. Die Auflösung der Gleichung (21) ergibt

$$\varkappa^{(n)} = \varkappa \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} m^2$$

wo

$$\operatorname{tg} m = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{3t}{8(T-t)}}$$

ist; berechnet man hiernach die halben Schwingungswinkel am Ende der Versuche, welche man annehmen müsste, wenn man die beobachteten Zeiten durch die

Formel (21) darstellen wollte, so findet man, indem man von denselben Zahlen ausgeht, welche Herr PIOLA als Resultate meiner Versuche seiner Rechnung zum Grunde legt, aber den anfänglichen halben Schwingungswinkel = 1° setzt:

		T	t	n	Halber Schwing.-winkel am Ende.
Kugel von Messing	langes Pend.	1,9085	1,8373	150,31	0,39
	kurzes „	1,1078	1,0693	108,07	0,80
Hohlcylinder	langes Pend.	2,7892	2,3928	35,66	1,60
	kurzes „	1,6385	1,4021	58,44	0,59
Hohlcylinder ohne Boden	langes Pend.	2,5675	1,8339	38,84	0,56
	kurzes „	1,5042	1,0683	26,52	1,18

Diese halben Schwingungswinkel sind so sehr viel kleiner als die, bei welchen ich die Versuche nothwendig geschlossen haben muss, dass kein Zweifel darüber bleibt, dass die Versuche in Wasser eben so wenig durch den Widerstand erklärt werden können, als die früher angeführten Versuche mit Kugeln von verschiedener Schwere, welche ich in der Luft habe schwingen lassen. — Ich glaube, dass die Schwingungswinkel am Ende der Versuche grösser gewesen sein müssen als 4′*) oder $\frac{1}{30}$ der anfänglichen; nimmt man dieses als Grenze an, so erhält man die Werthe von

$$t \cdot \frac{3}{32} \frac{(\varkappa - \varkappa^{(n)})^2}{nn\varkappa\varkappa^{(n)}}$$

für die verschiedenen Versuche:

$$\begin{cases} 0,0004 \\ 0,0002 \end{cases} \quad \begin{cases} 0,0049 \\ 0,0011 \end{cases} \quad \begin{cases} 0,0032 \\ 0,0040 \end{cases}$$

Mehr als diese kleinen Theile der beobachteten Unterschiede $T - t$ würde also der Widerstand nicht erklären können. Wäre das Resultat, welches Herr PIOLA aus denselben Versuchen zieht, einigermassen richtig, so müssten die Schwingungen am Anfange der Versuche eine sehr viel längere Dauer gehabt haben als am Ende derselben, wie daraus folgt, dass die Unterschiede den Quadraten des Schwingungswinkels proportional sein müssten; die einzelnen Zeitangaben zwischen dem Anfange und dem Ende der Versuche, welche im 24. Art. meiner Schrift angeführt sind [s. p. 166], zeigen aber keine Spur einer solchen Ungleichförmigkeit und sind also eben so unverträglich mit Herrn PIOLA's Meinung, wie alles Uebrige.

Schliesslich muss ich noch bemerken, dass die Annahme des Widerstandes im Verhältnisse des Quadrats der Geschwindigkeit, auf welcher die Rechnungen des Herrn PIOLA beruhen, eine Hypothese ist, welche durch die Beobachtungen der Pendelschwingungen keineswegs gerechtfertigt wird. Da die Abhängigkeit des Widerstandes von der Geschwindigkeit nicht durch die Theorie bestimmt wird, so sollte man sie aus den Versuchen selbst ableiten, ehe man weitere Folgerungen daraus zieht. Was meine Versuche in dieser Beziehung ergeben, werde ich in einem zweiten Aufsatze mittheilen, den ich dem gegenwärtigen bald folgen zu lassen hoffe.

*) Die diesem Winkel entsprechende Schwingungsweite ist für das kurze Pendel eine halbe Linie, für das lange anderthalb Linien; bei dem ersteren können weit kleinere Schwingungen beobachtet werden als bei dem letzteren, indem es sich schneller bewegt.

139. Versuche über die Kraft, mit welcher die Erde Körper von verschiedener Beschaffenheit anzieht.*)

(Astr. Nachr. **10**, p. 97.)

NEWTON hat bekanntlich sein System der allgemeinen Schwere auf verschiedene aus Beobachtungen gefolgerte Sätze gegründet, von welchen einer behauptet, dass die Anziehungen, welche die irdischen Körper von der Erde erfahren, den Massen der Körper proportional sind. Diesen Satz unterstützte NEWTON durch eigene Versuche: er liess nämlich Körper von verschiedener Beschaffenheit — Gold, Silber, Blei, Glas, Sand, Kochsalz, Wasser, Weizen und Holz — in gleichen Kreisbögen schwingen und beobachtete, dass ihre Schwingungen gleichzeitig waren.

Die Einrichtung dieser Versuche besitzt die grösste Einfachheit, deren Erreichung man wünschen kann: zwei runde hohle Körper von Holz, von gleicher Figur und Grösse, wurden an 11 Fuss langen Fäden neben einander aufgehängt; der eine wurde mit Holz gefüllt; in den anderen wurde eine gleich viel wiegende Masse der Substanz, deren Schwere untersucht werden sollte, so

*) [264 d. a. Verz.; vgl. Abhandlungen der Berliner Akad. d. Wiss. 1830. Math. Cl. p. 41 (250 d. a. Verz.); Auszug (von BESSEL) in POGGENDORFF's Annalen XXV. p. 401. — Br. m. O. II. 27. 311. 318 fl.]

befestigt, dass die Mittelpunkte der Schwingung beider Pendel von den Mittelpunkten der Bewegung derselben gleich entfernt waren. Indem alle äusseren Umstände auf diese Art gleich gemacht waren, erwies die Gleichzeitigkeit der Schwingungen beider Pendel den zu erweisenden Satz unmittelbar, d. h. ohne dass es nöthig gewesen wäre, die Versuche durch irgend eine Reduction vergleichbar zu machen.

Diese Einfachheit ist ohne Zweifel das Ziel, welches man bei allen Versuchen im Auge haben soll; allein sie ist nur dann erreichbar, wenn das was sie voraussetzt, wirklich geleistet werden kann. In dem Falle der Newton'schen Versuche hat die vorausgesetzte Gleichheit der Länge beider Pendel, von dem Mittelpunkte der Bewegung bis zum Mittelpunkte der Schwingung gezählt, nur näherungsweise hervorgebracht werden können und es gibt wirklich kein mechanisches Mittel, durch welches man sie innerhalb der Grenze der Sicherheit, welche man bei der Bestimmung der Länge des einfachen Secundenpendels heutzutage erreichen kann, hervorbringen könnte. Auch ist NEWTON mit einer Annäherung zufrieden gewesen, welche weit ausserhalb dieser Grenze bleibt, denn er schätzt die Grenze der Unsicherheit, welche die Versuche in Beziehung auf die Gleichheit der auf die genannten Körper wirkenden anziehenden Kraft übrig lassen, auf ein Tausendstel der ganzen Kraft, oder auf fast eine halbe Pariser Linie in der Länge des Secundenpendels.

Es wird aber immer ein Interesse haben, die Wahrheit des Satzes so scharf zu prüfen, wie die Hülfsmittel jeder Zeit erlauben; für die Bestimmung der Länge des einfachen Secundenpendels ist es überdies wesentlich zu wissen, ob sie absolut oder nur beziehungsweise auf den Körper, der zu den Versuchen gedient hat, angegeben werden kann. — Der Apparat, durch welchen ich die Länge des einfachen Secundenpendels auf der Königsberger Sternwarte bestimmt habe, ist auch zur Wiederholung der Newton'schen Versuche vorzüglich vortheilhaft, indem er die Länge des einfachen Secundenpendels nicht durch die Messung der Länge eines Pendels, sondern durch die Messung des Längenunterschiedes zweier Pendel ergibt, und dadurch das Resultat von der Voraussetzung der Kenntniss der absoluten Länge eines Pendels befreit. Hierdurch wird es möglich, auch für Körper, welchen nicht eine vollkommen regelmässige Figur gegeben werden kann, ein sicheres Resultat zu erlangen.

Die eben angeführten Gründe haben mich veranlasst, meiner Bestimmung der Länge des einfachen Secundenpendels noch eine Reihe von Versuchen hinzuzufügen, deren Zweck die Bestimmung dieser Länge für zwölf verschiedene Substanzen, nämlich Gold, Silber, Blei, Eisen, Zink, Messing, Marmor, Thon, Quarz, Wasser, Meteoreisen und Meteorstein war. Die meteorischen Substanzen wünschte ich in die Reihe der Versuche zu ziehen, weil es möglich ist, dass sie nicht irdischen Ursprunges sind, und weil man eine Ansicht fassen kann, welche irdische und nicht irdische Körper in Beziehung auf die Anziehung durch die Erde unterscheidet. Dass ich diesen Wunsch zur Ausführung bringen konnte, verdanke ich der Güte des Herrn Professors WEISS, welcher mir, auf die Verwendung des Herrn LEOPOLD VON BUCH, seltene und schöne Stücke der Berliner mineralogischen Sammlung zum Gebrauche überliess.

Diese neue Reihe von Versuchen habe ich, der früher*) übernommenen Verpflichtung gemäss, gleich nach der Beendigung der früheren angestellt, sie aber erst jetzt der Berliner Akademie der Wissenschaften vorgelegt. Hier theile ich eine Uebersicht darüber mit, wobei ich jedoch die in meiner früheren Abhandlung beschriebene Beobachtungsart als bekannt voraussetzen muss.

Der Apparat, mit welchem die neueren Versuche gemacht sind, ist derselbe der früher angewandt worden ist; die Art die Coincidenzen zu beobachten und daraus die Dauer einer Schwingung des Pendels, in mittlerer Zeit ausgedrückt, abzuleiten, hat gleichfalls keiner Aenderung bedurft. Allein die neuen Versuche unterscheiden sich dadurch von den alten, dass statt der Kugeln, welche ich früher schwingen liess, ein Hohlcylinder von Messing angewandt worden ist, in dessen Inneres die verschiedenen, in Beziehung auf ihre Schwere zu untersuchenden Körper nach und nach verschlossen werden konnten; ferner erhielten sie eine Einrichtung, welche sowohl die Bestimmung des Einflusses der Luft auf jedes der beiden Pendel des Apparats abgesondert ergab, als auch aus jedem derselben ein Resultat für die Länge des Secundenpendels zu ziehen erlaubte. Diese beiden Aenderungen sind eigentlich nicht wesentlich, denn man sieht ohne Mühe, dass, wenn auch die durch den früher von mir k genannten Coefficienten ausgedrückte Einwirkung der Luft für beide Pendel verschieden sein sollte, die Voraussetzung ihrer Gleichheit für beide dennoch keinen merklichen Fehler in der Bestimmung der einfachen Secundenpendellänge hervorbringt; und ebenso liegt es am Tage, dass die durch die einzelnen Pendel gegebenen Resultate am Ende in ein ihrer Verbindung entsprechendes zusammengezogen

*) Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels. Abhandl. der Akad. für 1826, S. 99 [Abh. 137. p. 182].

werden müssen, da immer das Augenmerk sein muss, den Mittelpunkt der Bewegung der Pendel, den man aus den in meiner früheren Abhandlung angeführten Gründen nie als vollkommen bekannt ansehen darf, aus dem Resultate zu schaffen. Die Abänderungen wurden aber gemacht, die erste, weil es ein Interesse hatte, die Gleichheit oder Ungleichheit des Coefficienten k für beide Pendel durch die Versuche zu erkennen; die zweite, weil eine aus der Vergleichung beider Pendel hervorgehende Controle mir wünschenswerth erschien bei einer Reihe von Versuchen, welche ich lieber über eine grössere Menge von Körpern ausdehnen, als jeden einzelnen durch häufige Wiederholung bestätigen wollte.

Der Hohlcylinder hat nahe 2 Zoll Höhe und Durchmesser; an beiden Enden wird er durch einzuschraubende Böden verschlossen, und diese Böden haben Schraubenmuttern in ihrer Mitte, in welchen man die Klemme für den Pendelfaden und ein abgerundetes Stück Messing befestigen kann. Dieses letztere, welches ich die Spitze nenne, wird bei der Messung der Länge des Pendels mit der Ebene am Fühlhebel in Berührung gebracht und hat keinen anderen Zweck, als dem Hohlcylinder ein rundes unteres Ende zu geben, dessen Höhe weit sicherer gemessen werden kann, als die Höhe des ebenen Bodens selbst. Die Klemme und die Spitze können miteinander verwechselt werden, so dass man den Hohlcylinder in entgegengesetzten Lagen aufhängen, und also durch Wiederholung eines Versuchs in beiden Lagen ein mittleres Resultat erhalten kann, welches sich nicht allein auf den Mittelpunkt der Figur des Hohlcylinders bezieht, sondern auch von der Voraussetzung frei ist, dass der gemeinschaftliche Schwerpunkt desselben und des in ihm verschlossenen zu untersuchenden Körpers mit diesem Mittelpunkte zusammenfalle. Das Gewicht des Hohlcylinders einschliesslich der Klemme und der Spitze ist 3971,4 Gran des Preussischen Pfundes. — Diese Einrichtung zu den neuen Versuchen ist das letzte Andenken, welches ich von dem unvergesslichen REPSOLD besitze: die schöne und regelmässige Ausführung desselben lässt nichts zu wünschen übrig.

Die Bestimmung des Coefficienten k für jedes der Pendel besonders setzt voraus, dass die Versuche, welche mit leichteren und schwereren, in dem Hohlcylinder verschlossenen Massen gemacht werden, nicht allein durch den Unterschied der Längen beider Pendel, sondern auch durch die Längen beider Pendel selbst miteinander verglichen werden können. Die Mikrometerschraube, welche den Fühlhebel trägt, gibt in der That diese Vergleichung, falls man voraussetzen will, dass ihr Anfangspunkt während der ganzen Reihe der Versuche in Beziehung auf die übrigen Theile des Apparats keine Aenderung erfährt; will man sich aber von dieser Voraussetzung befreien, so wird es nöthig, ein Mittel anzuwenden, wodurch man etwanige Veränderungen erkennen kann. Dieses Mittel besteht in der im 28. § meiner früheren Abhandlung beschriebenen Messstange, deren oberes Ende in die Ebene gebracht wird, auf welcher die Schneide des Pendels liegt, während das untere mit dem Fühlhebel in Berührung gesetzt wird. In der neuen Reihe der Versuche ist daher diese Messstange fortwährend angewandt worden, und ihre unveränderliche Länge dient, statt der Voraussetzung der Unveränderlichkeit der Mikrometervorrichtung, zur Vergleichung der Längen der Pendel.

Die Längen beider Pendel, deren Unterschied die Einrichtung des Apparats unmittelbar ergibt, welche aber selbst bekannt sein müssen, wenn man nicht nur das aus der Verbindung beider hervorgehende Resultat wissen, sondern auch durch die Vergleichung desselben und der mit jedem der Pendel gemachten Versuche eine Controle erlangen will, habe ich durch die Bestimmung der Länge der Messstange und der Entfernung der Spitze des Hohlcylinders von seinem Mittelpunkte erhalten. Die erstere habe ich schon im 28. § [p. 174] mitgetheilt, später aber bei weit höherer Temperatur noch einmal wiederholt; die letztere habe ich durch dasselbe Verfahren erhalten, durch welches ich früher (§ 28) den Durchmesser der Pendelkugel bestimmt habe. Die Messung des Höhenunterschiedes zwischen den tiefsten Punkten der am Apparate aufgehängten Messstange und des Pendels, welche man durch die Mikrometerschraube erhält, ergibt die Länge des Pendels vom Aufhängungspunkte bis zu der Spitze am Hohlcylinder gezählt; zieht man die Entfernung der Spitze vom Mittelpunkte des Hohlcylinders davon ab, so erhält man die bis zu diesem Mittelpunkte gezählte Länge des Pendels, und diese ist dem arithmetischen Mittel der beiden bis zum Schwerpunkte gezählten Längen gleich, welche vor und nach der Umkehrung des Hohlcylinders stattfinden. — Da indessen eine kleine Unsicherheit über den wahren Mittelpunkt der Bewegung der Schneide stattfindet, auch, trotz der auf die Messungen der Länge der Messstange und der Entfernung der Spitze vom Mittelpunkte des Hohlcylinders verwandten Vorsicht, ein kleiner Fehler übrig geblieben sein kann, und beide Ursachen einen constanten Einfluss auf die Längen beider Pendel des Apparats erhalten, so habe ich den auf die angeführte Art gemessenen Längen noch eine Verbesserung (x) hinzugesetzt, deren Werth sich aus der Vergleichung aller angestellten Versuche ergeben hat, und durch deren Einführung das

Endresultat, nämlich die Länge des einfachen Secundenpendels, der eigentlichen Idee der von mir befolgten Methode gemäss von dem Unterschiede der Längen beider Pendel, oder unmittelbar von der Toise abhängig geworden ist.

Die Körper, welche in den Hohlcylinder eingeschlossen wurden, hatten sämmtlich die cylindrische Form. Mit der grössten Regelmässigkeit von REPSOLD selbst gearbeitet waren Messing, Eisen, Zink und Blei; weniger regelmässig waren die übrigen, allein da die Kenntniss ihrer Figur nur nöthig wird, um die kleine Reduction des zusammengesetzten Pendels auf das einfache berechnen zu können und ein Fehler des Momentes der Trägheit der cylindrischen Körper, welcher bis auf ein Dreissigstel des Ganzen steigt, das Endresultat kaum um ein Tausendstel einer Linie ändern kann, so war es nicht schwierig, selbst den Substanzen, deren Bearbeitung am wenigsten regelmässig ausfiel, die beabsichtigte Figur mit hinreichender Annäherung zu geben. Besonders widerspenstig bei der Bearbeitung zeigte sich das Meteoreisen von Brera; die Cylinder von Gold und Silber wurden aus Preussischen Münzen zusammengesetzt, welche durch Eintauchen in geschmolzenes Harz in einen festen Körper vereinigt wurden; bei der Füllung des Hohlcylinders mit Wasser wurde Sorge getragen, alle Luftblasen zu entfernen und das Entstehen derselben durch Verdunstung zu vermeiden.

Von Messing wurden drei Cylinder von verschiedenen Gewichten angewandt, nämlich:

I. = 7466,15 Gran
II. = 3896,18 „
III. = 1970,12 „

überdies liess ich noch den leeren Hohlcylinder schwingen. Grössere und kleinere Belastungen des Hohlcylinders mussten nämlich angewandt werden, um die Einwirkung der Luft, oder den Coefficienten k, durch ihren Unterschied bestimmen zu können; um seinen Werth unabhängig von der Voraussetzung der Gleichheit der Schwere für die verschiedenen Substanzen zu erhalten, musste diese Verschiedenheit der Belastungen durch eine derselben hervorgebracht werden, und dieses konnte am vortheilhaftesten durch Messing geschehen, indem der Hohlcylinder selbst davon verfertigt ist. Die angewandten Massen der übrigen Substanzen wogen:

Eisen	7466,19	Gran	Marmor	4208,54	Gran
Zink	7466,34	„	Thon	2876,78	„
Blei	7465,79	„	Quarz	2409,02	„
Silber	7472,23	„	Wasser	1564,61	„
Gold	7447,78	„	„	1571,10	„
Meteoreisen	7724,84	„	„	1571,54	„
Meteorstein	4704,67	„			

Von der beträchtlichen Verschiedenheit dieser Gewichte ist eine Folge, dass die Schwingungswinkel mit sehr verschiedener Schnelligkeit abnahmen. Man konnte daher nicht allen Versuchen eine gleiche Dauer geben. Für das kurze Pendel ist die Dauer fast gleichgültig, indem sie immer lang genug war, um eine sehr genaue Vergleichung der Schwingungszeiten der Pendel des Apparats und der Uhr zu ergeben; für das lange Pendel erlangt aber eine Verkürzung der Dauer eines Versuchs nachtheiligeren Einfluss auf seine Genauigkeit. Von den schwereren Massen konnten indessen zwischen 3500 und 4000 Schwingungen beobachtet werden, ehe die Schwingungswinkel so klein wurden, dass die Beobachtung der Coincidenzen ihre Sicherheit verlor; für die leichteste Masse — Wasser — trat diese Verkleinerung der Schwingungswinkel schon nach 1600 bis 1700 Schwingungen ein. Um dennoch die Genauigkeit des Resultats für die leichteren und schwereren Massen weniger ungleich zu machen, wurden die ersteren öfter in Schwingung gesetzt als die letzteren. — Für jede Masse wurde in der Regel nur eine Bestimmung gemacht, welche für die schwereren auf zwei Versuchen mit jedem der Pendel, zwischen welchen der Hohlcylinder umgekehrt worden ist, beruhet; für die leichteren beruhet eine solche Bestimmung auf zwei Versuchen mit dem kürzeren Pendel, allein auf mehreren mit dem längeren. Es wird nicht nöthig sein, dieses in der gegenwärtigen Uebersicht näher anzugeben.

Die Form, welche ich in der Angabe der Resultate der Versuche beobachtet habe, ist der früher gewählten ähnlich; jedoch entsteht ein Unterschied dadurch, dass nicht allein der Längenunterschied der beiden Pendel, sondern auch die Längen derselben selbst gemessen wurden. Wenn die gemessene Länge des Pendels, von der Ebene auf welcher die Schneide liegt bis zum Mittelpunkte des Hohlcylinders gerechnet, durch L bezeichnet wird, so ist die vom wahren Mittelpunkte der Bewegung an gerechnete und von dem etwaigen beständigen Fehler der Länge der Messstange u. s. w. befreite ähnliche Pendellänge der, oben gemachten Bemerkung zufolge, $= L + x$; wenn ferner die Schwingungszeit durch t, die Reduction des einfachen Pendels auf das zusammengesetzte durch c, die Reduction auf den leeren Raum durch $e + e'k$ bezeichnet werden, und die Länge des einfachen Secundenpendels $= 440^{L}{,}81 + \varepsilon$ angenommen wird, so ist

$$L + x = 440^{L}{,}81\, tt + \varepsilon tt + c - e - e'k'$$

oder, wenn $440^{L}{,}81\, tt - L + c - e = n$ gesetzt wird,

$$0 = n - e'k + \varepsilon tt - x.$$

Unter dieser Form werde ich jetzt mittheilen, was die Versuche mit den verschiedenen in den Hohlcylinder verschlossenen Körpern ergeben haben:

Beobachtungen mit dem längeren Pendel.

Messing I.	$0 = +0^{L}2361 - 0{,}2802\,k + 2{,}9581\,\varepsilon - x$
„ II.	$0 = +0{,}3965 - 0{,}4165\,k + 2{,}9568\,\varepsilon - x$
„ III.	$0 = +0{,}4947 - 0{,}5321\,k + 2{,}9565\,\varepsilon - x$
	$0 = +0{,}4807 - 0{,}5339\,k + 2{,}9558\,\varepsilon - x$
	$0 = +0{,}4963 - 0{,}5324\,k + 2{,}9558\,\varepsilon - x$
	$0 = +0{,}4937 - 0{,}5271\,k + 2{,}9587\,\varepsilon - x$
Eisen	$0 = +0{,}2600 - 0{,}2947\,k + 2{,}9578\,\varepsilon - x$
Zink	$0 = +0{,}2550 - 0{,}2911\,k + 2{,}9578\,\varepsilon - x$
Blei	$0 = +0{,}2562 - 0{,}2906\,k + 2{,}9578\,\varepsilon - x$
Silber	$0 = +0{,}2428 - 0{,}2865\,k + 2{,}9579\,\varepsilon - x$
Gold	$0 = +0{,}2486 - 0{,}2899\,k + 2{,}9579\,\varepsilon - x$
Meteoreisen	$0 = +0{,}2491 - 0{,}2807\,k + 2{,}9580\,\varepsilon - x$
Meteorstein	$0 = +0{,}3388 - 0{,}3804\,k + 2{,}9571\,\varepsilon - x$
Marmor	$0 = +0{,}3344 - 0{,}3925\,k + 2{,}9571\,\varepsilon - x$
Thon	$0 = +0{,}4128 - 0{,}4648\,k + 2{,}9568\,\varepsilon - x$
Quarz	$0 = +0{,}4606 - 0{,}5014\,k + 2{,}9565\,\varepsilon - x$

Beobachtungen mit dem kürzeren Pendel.

Messing I.	$0 = +0^{L}0589 - 0{,}0948\,k' + 0{,}9983\,\varepsilon - x$
„ II.	$0 = +0{,}1035 - 0{,}1410\,k' + 0{,}9980\,\varepsilon - x$
„ III.	$0 = +0{,}1362 - 0{,}1796\,k' + 0{,}9980\,\varepsilon - x$
	$0 = +0{,}1188 - 0{,}1805\,k' + 0{,}9972\,\varepsilon - x$
	$0 = +0{,}1172 - 0{,}1796\,k' + 0{,}9972\,\varepsilon - x$
	$0 = +0{,}1158 - 0{,}1773\,k' + 0{,}9989\,\varepsilon - x$
„ IV. (Hohlcylinder)	$0 = +0{,}1859 - 0{,}2597\,k' + 0{,}9989\,\varepsilon - x$
	$0 = +0{,}1934 - 0{,}2610\,k' + 0{,}9989\,\varepsilon - x$
Eisen	$0 = +0{,}0678 - 0{,}0996\,k' + 0{,}9983\,\varepsilon - x$
Zink	$0 = +0{,}0652 - 0{,}0972\,k' + 0{,}9982\,\varepsilon - x$
Blei	$0 = +0{,}0668 - 0{,}0981\,k' + 0{,}9982\,\varepsilon - x$
Silber	$0 = +0{,}0676 - 0{,}0968\,k' + 0{,}9983\,\varepsilon - x$
Gold	$0 = +0{,}0624 - 0{,}0981\,k' + 0{,}9983\,\varepsilon - x$
Meteoreisen	$0 = +0{,}0650 - 0{,}0947\,k' + 0{,}9983\,\varepsilon - x$
Meteorstein	$0 = +0{,}0894 - 0{,}1285\,k' + 0{,}9981\,\varepsilon - x$
Marmor	$0 = +0{,}0873 - 0{,}1324\,k' + 0{,}9981\,\varepsilon - x$
Thon	$0 = +0{,}1058 - 0{,}1566\,k' + 0{,}9981\,\varepsilon - x$
Quarz	$0 = +0{,}1197 - 0{,}1694\,k' + 0{,}9980\,\varepsilon - x$

Die Versuche mit dem mit Wasser gefüllten Hohlcylinder habe ich in diese Zusammenstellung nicht aufgenommen; ich werde sie aus einem Grunde, den ich später angeben werde, unten besonders mittheilen.

Um aus diesen Bedingungsgleichungen die Resultate zu ziehen, deren Erlangung durch die Versuche beabsichtigt worden ist, könnte man k und k' aus den Versuchen mit den verschiedenen Pendeln von Messing ableiten und die Bestimmung derselben zur Berechnung der übrigen anwenden. Indessen kann man auch von der Voraussetzung der Gleichheit der Länge des einfachen Secundenpendels für alle untersuchten Substanzen ausgehen, also alle Versuche zur vortheilhaftesten Erfindung von k und k' mit einander verbinden, und durch die Uebereinstimmung, in welche alle mit der Voraussetzung gebracht werden können, beurtheilen, ob Grund vorhanden ist, an der Richtigkeit derselben zu zweifeln. Ich habe den letzteren Weg eingeschlagen, weil er eine vollständigere Uebersicht gewährt, und weil die Verschiedenheit der Gewichte von Messing, mit welchen experimentirt worden ist, keinen Zweifel darüber entstehen lässt, dass nicht etwa eine Verschiedenheit der Länge des einfachen Secundenpendels für die verschiedenen Substanzen auf die Bestimmung von k übertragen wird.

Bei dieser Form der Rechnung ist es folgerecht, auch die früheren Versuche mit den Kugeln von Messing und Elfenbein mit den späteren zu vereinigen. Dieses ist daher geschehen, allein die Bedingungsgleichungen, welche meine frühere Abhandlung für diese Versuche angibt, sind vorher ein wenig abgeändert worden, um sie mit der Ausdehnung der Toise, welche meine Pendelversuche ergeben haben (= 0,00001167 für 1° C.), und mit welcher auch die neuen Versuche berechnet sind, übereinstimmend zu machen. Den Werth der älteren und neueren Bedingungsgleichungen habe ich der Art und der Anzahl der Beobachtungen gemäss zu schätzen gesucht, und mit seiner gehörigen Berücksichtigung die wahrscheinlichsten Werthe der unbekannten Grössen folgendermassen gefunden:

k	ältere Versuche [vgl. p. 162]	0,95569
	neuere „ langes Pendel	0,95190
	„ „ kurzes „	0,75487
x		$-0^{L}00427$
ε		+0,00537

Die Uebereinstimmung, in welcher diese Werthe der unbekannten Grössen mit den einzelnen Bedingungsgleichungen sind, zeigt die folgende Zusammenstellung der übrigbleibenden Unterschiede; die letzte Columne derselben gibt an, welche Aenderung der Länge des einfachen Secundenpendels man würde machen müssen, wenn man die Unterschiede dadurch wegschaffen wollte.

Frühere Versuche.

Kugel von Messing.

Nr.	Unterschied.	Sec.-Pendel.
1.	$+0^{L}0030$	$-0^{L}0015$
2.	$-0{,}0028$	$+0{,}0014$
3.	$+0{,}0046$	$-0{,}0023$
4.	$-0{,}0014$	$+0{,}0007$
5.	$+0{,}0050$	$-0{,}0026$
6.	$+0{,}0025$	$-0{,}0013$
7.	$-0{,}0023$	$+0{,}0012$
8.	$+0{,}0064$	$-0{,}0033$
9.	$+0{,}0006$	$-0{,}0003$
10.	$+0{,}0026$	$-0{,}0013$
11.	$-0{,}0048$	$+0{,}0024$

Kugel von Elfenbein.

Nr.	Unterschied.	Sec.-Pendel.
12.	$-0^{L}0024$	$+0^{L}0012$
13.	$+0{,}0070$	$-0{,}0036$
14.	$+0{,}0024$	$-0{,}0012$
15.	$-0{,}0138$	$+0{,}0070$

Spätere Versuche.

		Langes Pendel. Unterschied.	Sec.-Pendel.		Kurzes Pendel. Unterschied.	Sec.-Pendel.	
Messing	I.	$-0^{L}0105$	$+0^{L}0035$		$-0^{L}0030$	$+0^{L}0030$	
„	II.	+0,0202	−0,0068		+0,0067	−0,0067	
„	III.	+0,0083	−0,0028	$-0^{L}0019$	+0,0103	−0,0103	$+0^{L}0037$
		−0,0074	+0,0025		−0,0078	+0,0078	
		+0,0097	−0,0033		−0,0087	+0,0087	
		+0,0121	−0,0041		−0,0084	+0,0084	
„	IV.	—	—		−0,0005	+0,0005	−0,0028
		—	—		+0,0060	−0,0060	
Eisen		−0,0004	+0,0001		+0,0023	−0,0023	
Zink		−0,0019	+0,0006		+0,0015	−0,0015	
Blei		−0,0003	+0,0001		+0,0024	−0,0024	
Silber		−0,0097	+0,0033		+0,0042	−0,0042	
Gold		−0,0071	+0,0024		−0,0020	+0,0020	
Meteoreisen		+0,0021	−0,0007		+0,0032	−0,0032	
Meteorstein		−0,0032	+0,0011		+0,0021	−0,0021	
Marmor		−0,0191	+0,0064		−0,0030	+0,0030	
Thon		−0,0095	+0,0032		−0,0027	+0,0027	
Quarz		+0,0035	−0,0012		+0,0015	−0,0015	

Hieraus geht hervor, dass man alle meine Versuche, ältere und neuere, durch Eine Länge des einfachen Secundenpendels genügend darstellen kann, denn es findet sich nirgends ein Unterschied, welcher den sechszigtausendsten Theil des Ganzen betrüge und welcher nicht den unvermeidlichen Fehlern der Versuche zugeschrieben werden könnte: bei der geringen Zahl der mit jeder der Substanzen angestellten, könnte man auch grössere Abweichungen von dem mittleren Resultate noch als vereinbar mit Einer Pendellänge ansehen.

Alle meine Versuche ergeben vereinigt also $\varepsilon = +0^{L}00537$ oder die Länge des einfachen Secundenpendels für die Königsberger Sternwarte

$$= 440{,}8154 \text{ Linien},$$

nur um die fast unmerkliche Kleinigkeit von $0^{L}0007$ grösser, als die früheren Versuche allein sie ergeben haben. Wesentlicher als diese kleine Aenderung und der eigentliche Gewinn, welcher aus den neueren Versuchen hervorgegangen ist, ist die erlangte Ueberzeugung, dass man alle durch Eine Länge des einfachen Secundenpendels darstellen kann, welche daher von der anziehenden Kraft der Erde allein abhängig, aber von der Beschaffenheit der gravitirenden Körper unabhängig ist.

Ferner zeigen diese Versuche, dass der Coefficient k für beide Pendel verschieden, für das kürzere beträchtlich kleiner ist als für das längere. Die Bedingungsgleichungen, welche aus den Versuchen mit beiden Pendeln abgeleitet worden sind, würden durch die Annahme eines Werthes von k weit weniger befriedigend dargestellt werden können, als das Maass der Genauigkeit der Versuche erfordert.

Ich habe nun noch die Versuche mit dem mit Wasser gefüllten Hohlcylinder mitzutheilen. Sie sind mit den übrigen nicht vereinigt worden, weil es zweifelhaft ist, ob die Reduction des zusammengesetzten Pendels auf das einfache nach der Theorie, welche für ein aus einem festen Körper bestehendes Pendel gilt, berechnet werden darf. Die höheren Theile des Wassers im Hohlcylinder erhalten durch die Bewegung des Pendels eine grössere Centrifugalkraft als die tieferen, woraus hervorgeht, dass das eingeschlossene Wasser in Bewegung gerathen muss. Diese Bewegung kann das Moment der Trägheit verändern und wird dann für ein kürzeres Pendel eine grössere Veränderung hervorbringen als für ein längeres; da überdies der Einfluss des Momentes der Trägheit auf die Reduction des zusammengesetzten Pendels auf das einfache im umgekehrten Verhältnisse der Länge des Pendels ist, so muss der Einfluss der Bewegung des Wassers, wenn er überall merklich ist, für das kürzere Pendel des Apparats sehr viel merklicher sein als für das längere.

Einen Einfluss dieser Art scheinen meine Versuche wirklich zu zeigen. Drei gemachte Bestimmungen ergeben die Bedingungsgleichungen:

für das längere Pendel:

$$0 = +0^{L}5314 - 0^{L}5699\,k + 2{,}9565\,\varepsilon - x$$
$$0 = +0{,}5209 - 0{,}5675\,k + 2{,}9557\,\varepsilon - x$$
$$0 = +0{,}5200 - 0{,}5629\,k + 2{,}9596\,\varepsilon - x$$

für das kürzere Pendel:

$$0 = +0^{L}1186 - 0^{L}1927k' + 0{,}9979\,\varepsilon - x$$
$$0 = +0{,}0954 - 0{,}1912\,k' + 0{,}9971\,\varepsilon - x$$
$$0 = +0{,}0949 - 0{,}1900\,k' + 0{,}9989\,\varepsilon - x$$

welche, wenn man die oben gefundenen Werthe von k, k', ε und x substituirt, bis auf

$+0^{L}0093$ und	$-0^{L}0172$
$+0{,}0009$	$-0{,}0393$
$+0{,}0043$	$-0{,}0389$

dargestellt werden. Hieraus geht hervor, das die Versuche mit dem längeren Pendel mit der allgemeinen Länge des einfachen Secundenpendels bis auf $0^{L}0016$, also genügend übereinstimmen, die mit dem kürzeren gemachten aber eine $0^{L}0318$ grössere angeben. Dieser Unterschied kann durch eine Verschiedenheit der auf Wasser wirkenden Schwerkraft nicht erklärt werden, indem das längere Pendel ihn nicht ergibt. Da ich ihn ebensowenig den Fehlern der Versuche zuschreiben kann, so halte ich für sehr wahrscheinlich, dass er aus der angeführten Ursache entstanden ist. Uebrigens scheint die erste der drei Bestimmungen für Wasser zweifelhaft zu sein, indem die oben mitgetheilten Gewichte des im Hohlcylinder befindlichen Wassers wahrscheinlich machen, dass derselbe nicht ganz angefüllt gewesen ist; denn das 6,5 Gran geringere Gewicht, welches sich durch eine Temperatur-Verschiedenheit nicht erklären lässt, deutet auf das Zurückbleiben von Luftblasen. Als bei der zweiten Bestimmung ein grösseres Gewicht gefunden wurde, wurde die Vorsicht bei der Füllung des Hohlcylinders verdoppelt und namentlich dafür gesorgt, dass nichts durch Verdunstung entweichen konnte.

Hätte eine der untersuchten Substanzen eine ausserhalb der Grenzen der Unvollkommenheit der Versuche befindliche Abweichung gezeigt, so würde ich die Bestimmung der Pendellänge für diese Substanz durch Wiederholung der Beobachtungen mit aller Genauigkeit, welche der Apparat geben kann, zu erkennen gesucht haben. Allein keine derselben hat eine Andeutung davon gegeben, dass der Satz von der Proportionalität der Massen und Anziehungen nicht wirklich das Naturgesetz wäre. — Die weitere Fortsetzung der Versuche schien daher kein Interesse zu gewähren; und ebensowenig hielt ich mich für berechtigt, sie bei der verminderten Aussicht eine Abweichung zu finden, auf einige meteorische Substanzen auszudehnen, welche mir Herr Prof. Weiss gleich den zu den Versuchen angewandten anvertraut hatte: dieses waren Stücke der meteorischen Eisenmassen von Pallas und Humboldt, deren sonstigen Werth durch die nothwendigen Umformungen beträchtlich zu vermindern ich mich nur entschlossen haben würde, wenn ein Erfolg davon wahrscheinlich gewesen wäre.

---

140. Construction eines symmetrisch geformten Pendels mit reciproken Axen.*)

(Astr. Nachr. **80**, p. 1.)

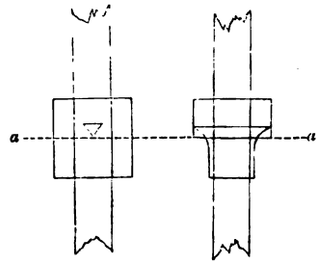
Die Entfernung, welche beiden Schneiden gegeben werden soll, wird der Secundenpendellänge etwa gleich angenommen; irgend eine ungefähre Annahme hierüber ist nöthig, da die Dimensionen der verschiedenen Theile des Apparats von der Entfernung der Schneiden abhängen, so dass man die Construction bei einer gänzlich verschiedenen Schneidenentfernung verschieden einrichten muss. Die Annahme der Entfernung darf übrigens nur innerhalb der Grenzen einiger Zolle richtig sein; selbst für ein Paar Zolle mehr oder weniger verliert die vorzuschlagende Construction nichts von ihrer Bequemlichkeit. Um aber die Willkür innerhalb dieser Grenzen zu erhalten, werde ich allen Abmessungen die Entfernung der Schneiden als Einheit zum Grunde legen.

Als Einheit der Masse nehme ich einen Cylinder von der Materie des Pendels, dessen Halbmesser und Höhe der angenommenen Längeneinheit gleich ist.

Ich construire das Pendel aus drei Theilen: einer cylindrischen Stange, einer schweren und einer leichten Linse; beiden Linsen gebe ich cylindrische Form, so dass die Axen derselben senkrecht auf der Axe der Stange und auf der Ebene der Bewegung stehen. Die Schneiden, welche zwei Theile mehr geben sollten, vernachlässige ich in der Rechnung, weil sie die Schwingungszeiten nicht merklich ändern, indem sie sehr nahe in den reciproken Mittelpunkten der Bewegung und Schwingung stehen. Es wird aber gut sein, dieselben

*) [387 d. a. Verz. — Aus Bessel's Briefen an Schumacher. — Vgl. auch Abh. 137, p. 181.]

so einzurichten, dass ihre Masse um diese Mittelpunkte etwa gleichförmig vertheilt ist: ich meine dieses so wie in dieser Zeichnung,



wo eben so viel Masse des Stücks, in welchem die Schneiden befestigt werden, über der Linse aa liegt, als unter derselben. Es hat kein Interesse, auf die Erfüllung dieser Forderung Genauigkeit zu verwenden; eine rohe Annäherung an dieselbe ist hinreichend.

Die Massen der drei Theile, in der Ordnung in welcher ich sie aufgezählt habe, sollen durch m, m', m'', bezeichnet werden; ihre Momente der Trägheit, bezogen auf ihre Schwerpunkte, μ, μ', μ''. Die Entfernungen der Schneiden vom Mittelpunkte der Stange sind, wegen der geforderten Symmetrie $= +\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ und zwar soll $+\frac{1}{2}$ die Schneide andeuten, welche auf der Seite der schweren Linse liegt. Die Entfernungen der beiden Mittelpunkte der Linsen vom Mittelpunkte der Stange bezeichne ich durch $\pm(\frac{1}{2}+k)$.

Wenn ϱ die Entfernung des Schwerpunkts des Pendels von dem Mittelpunkte der Stange bedeutet, so ist:

$$(m+m'+m'')\varrho = (m'-m'')(\tfrac{1}{2}+k) \quad \ldots (1)$$

also die Entfernung dieses Schwerpunkts von der ersten Schneide (auf der Seite der schweren Linse) $= \frac{1}{2}-\varrho$, von der zweiten $= \frac{1}{2}+\varrho$ und man hat:

$$\left.\begin{aligned}(m+m'+m'')(\tfrac{1}{2}-\varrho) &= \tfrac{1}{2}m - m'k + m''(1+k)\\ (m+m'+m'')(\tfrac{1}{2}+\varrho) &= \tfrac{1}{2}m + m'(1+k) - m''k\end{aligned}\right\} (2)$$

Ferner ist das Moment der Trägheit des Apparats auf die Schneiden bezogen:

$$\left.\begin{aligned}\mu+\mu'+\mu''+\tfrac{m}{4}+m'k^2+m''(1+k)^2\\ \mu+\mu'+\mu''+\tfrac{m}{4}+m'(1+k)^2+m''k^2\end{aligned}\right\} \ldots (3)$$

Das Pendel soll aber um beide Schneiden gleichzeitig schwingen, so wie ein einfaches Pendel, dessen Länge der Längeneinheit gleich ist; hierdurch hat man:

$$1 = \frac{\mu+\mu'+\mu''+\frac{m}{4}+m'k^2+m''(1+k)^2}{\frac{1}{2}m - m'k + m''(1+k)}$$

$$1 = \frac{\mu+\mu'+\mu''+\frac{m}{4}+m'(1+k)^2+m''k^2}{\frac{1}{2}m + m'(1+k) - m''k}$$

welche Gleichungen übereinstimmend ergeben müssen und ergeben:

$$k(1+k)(m'+m'') = \tfrac{1}{4}m - (\mu+\mu'+\mu'') \ldots (4)$$

Dieses ist die einzige Bedingungsgleichung der Aufgabe. Allein die Willkür in der Construction, welche sie übrig zu lassen scheint, wird sehr bedeutend beschränkt durch gewisse Eigenschaften, welche der Apparat haben muss. Es muss 1) der Schwerpunkt zwischen die beiden Schneiden fallen ($\varrho < \frac{1}{2}$) und zwar muss er nicht gar zu nahe an der ersteren derselben liegen, indem sonst der Drehungsmoment des Apparats sehr klein werden und der Reibung an der Schneide und dem Widerstande so grosse Einwirkung auf die Schwingungsbögen verstatten würde, dass die Dauer des Versuchs kürzer ausfallen würde als man wünscht. 2) muss k so gross sein, dass die Schneiden nicht in die Peripherie der Linsen, sondern ausserhalb derselben fallen. 3) muss die Länge der Stange weder so klein sein, dass sie nicht noch über die Linsen hinaus reichen sollte, noch so gross dass das Pendel unnöthig unbequem wird. 4) muss m'' nicht so klein ausfallen, dass der Mantel, welcher den hohlen Raum dieser Linse umschliesst, zu dünne wird, um ihn ordentlich verfertigen zu können.

Dagegen kann der Durchmesser der Linsen ziemlich willkürlich angenommen werden, indem man die nöthige Masse durch die Dicke derselben herausbringen kann. Nimmt man den Halbmesser der Linsen $r' = 2$ Zolle oder 0,055 unserer Einheit, so folgt, dass $k > 0{,}055$; da es aber nicht rathsam ist, es unnöthig gross anzunehmen, so werde ich auch für die Entfernung des unteren Randes der oberen Linse von der Schneide 0,055 annehmen, und demnach

$$k = 0{,}11$$

voraussetzen. Hiermit wird die erste Gleichung:

$$(m+m'+m'')\varrho = (m'-m'')\,0{,}61 \quad \ldots . (5)$$

und die vierte:

$$(m'+m'')\,0{,}1221 = \tfrac{1}{4}m - (\mu+\mu'+\mu'') \ldots (6)$$

Es müssen nun die Massen und Momente der drei Theile des Apparats durch ihre Dimensionen ausgedrückt werden.

1) Die Stange. Ihre Länge $= l$ gesetzt, ihren Halbmesser $= r$, hat man

$$m = lrr; \qquad \mu = \frac{ll}{12}m \text{ (sehr nahe).}$$

2) Die schwere Linse, Halbmesser r', Dicke d; da die Stange durch sie hindurch geht, so hat sie ein Loch, dessen Länge $2r'$ und Halbmesser r. Für diesen Körper ist

$$m' = r'r'd - 2r'rr;$$
$$\mu' = \frac{r'^4 d}{2} - \tfrac{2}{3}r'^3 rr = m'\frac{r'r'}{2} + \tfrac{1}{3}r'^3 rr.$$

3) Die leichte Linse. Sie ist äusserlich wie die vorige, allein hohl, und ihr Mantel hat die Dicke e:

$$m'' = (2r'd + 2r'r')e;$$
$$\mu'' = (2r'^3 d + r'^4)e = m''r'r' - r'^4 e.$$

Die letzten Glieder der Ausdrücke von μ' und μ'', $\frac{1}{3}r'^3 rr$ und $-r'^4 e$ sind kleine Grössen, weshalb sie zuerst vernachlässigt werden können. Thut man dieses, so werden (5) und (6):

$$(m + m' + m'')\varrho = 0{,}61\,(m' - m'')$$
$$(m' + m')\{0{,}1221 + \tfrac{3}{4}r'r'\} = \tfrac{1}{4}m(1 - \tfrac{1}{3}ll) + \tfrac{1}{4}(m' - m'')r'r'$$

oder die letzte Gleichung, der Annahme von $r' = 0{,}055$ gemäss:

$$\{m' + m''\}\,0{,}12436875 = \tfrac{1}{4}m\,(1 - \tfrac{1}{3}ll) + (m' - m'')\,0{,}00075625$$

woraus man erhält:

$$\frac{m'}{m} = \frac{0{,}1525\,(1 - \frac{1}{3}ll) + \varrho\,\{\frac{1}{4}(1 - \frac{1}{3}ll) + 0{,}125125\}}{0{,}151729875 - \varrho\,.\,0{,}0015125}$$
$$\frac{m''}{m} = \frac{0{,}1525\,(1 - \frac{1}{3}ll) - \varrho\,\{\frac{1}{4}(1 - \frac{1}{3}ll) + 0{,}1236125\}}{0{,}151729875 - \varrho\,.\,0{,}0015125}$$

Da m'' positiv sein muss, so gibt die letzte Gleichung die Bedingung:

$$0{,}1525\,(1 - \tfrac{1}{3}ll) > \varrho\,\{\tfrac{1}{4}(1 - \tfrac{1}{3}ll) + 0{,}1236125\}$$

oder

$$\varrho < \frac{0{,}61\,(1 - \frac{1}{3}ll)}{1 - \frac{1}{3}ll + 0{,}49445}.$$

Allein l muss grösser sein als die Entfernung der entferntesten Ränder der Linsen, welche $= 1 + 2k + 2r' = 1{,}33$; setzt man daher $l = 1{,}33 + p$, so ist p positiv und man hat:

$$\varrho < 0{,}61 \cdot \frac{1{,}2311 - 2{,}66\,.\,p - pp}{2{,}71445 - 2{,}66\,.\,p - pp}.$$

Für verschiedene Werthe von p ist

$p = 0$	$\varrho < 0{,}2767$
0,05	0,2598
0,10	0,2419
0,15	0,2230
0,20	0,2029

woraus hervorgeht, dass ϱ auf jeden Fall beträchtlich kleiner genommen werden muss als 0,2767, da für diesen Werth (sowie für jede zusammengehörige Werthe von p und ϱ) die leichtere Linse ganz wegfällt, was nicht sein soll. Indessen ist es bequem und vortheilhaft, ϱ so nahe an diese Grenze zu bringen, oder p so klein anzunehmen als möglich; bequem ist dieses, weil das Pendel dadurch möglichst kurz wird, vortheilhaft, weil die Sicherheit des aus der Combination der Schwingungen um beide Axen gezogenen Resultats dadurch gewinnt. Man muss also die leichtere Linse so leicht als möglich annehmen, oder ihren Mantel so dünn als möglich machen; nimmt man ihn eine halbe Linie dick, so wird die Linse noch fest genug, weshalb ich

$$e = 0{,}0011 = 0{,}02\,r'$$

setzen werde.

Ich werde nun mit einigen Werthen von p Versuche machen, um zu sehen, wie sie mit der Annahme von e vereinbar gemacht werden können.

Hyp. I. $p = 0{,}10$.

Da $2rr$ weit kleiner ist als $r'd$, so ist nahe $m' = r'r'd$, $m'' = 2r'e\{d + r'\}$, also

$$\frac{m''}{m'} = \frac{2e}{r'}\left\{1 + \frac{r'}{d}\right\} = 0{,}04\left\{1 + \frac{0{,}055}{d}\right\};$$

aus den beiden Ausdrücken für $\frac{m'}{m}$ und $\frac{m''}{m}$ folgt aber

$$\frac{m''}{m'} = \frac{0{,}61\,(1 - \frac{1}{3}ll) - \varrho\,\{(1 - \frac{1}{3}ll) + 0{,}49445\}}{0{,}61\,(1 - \frac{1}{3}ll) + \varrho\,\{(1 - \frac{1}{3}ll) + 0{,}50050\}},$$

und die Vergleichung beider Ausdrücke zeigt, dass d und ϱ zusammen wachsen oder abnehmen. Da es gut ist ϱ möglichst gross zu machen, so muss also auch d so gross sein, als irgend convenient ist; ich glaube indessen über 0,055 (etwa 2 Zoll) darf man es nicht machen, wenn nicht das Pendel gar zu unbehülflich werden soll. Nimmt man es so, so wird:

$$\frac{m''}{m'} = 0{,}08 = \frac{0{,}582611 - \varrho\,.\,2{,}43842}{0{,}582611 + \varrho\,.\,2{,}4566}$$

woraus $\varrho = 0{,}2034$ folgt. Da es nun wohl nicht rathsam sein möchte, weniger als $\frac{1}{2}p = 0{,}05$ der Stange über die Linsen hervorstehen zu lassen, so kann man keinen erheblich grösseren Werth von ϱ herausbringen. Ich werde es daher bei dieser Hypothese bewenden lassen und nun die genauere Rechnung machen.

Wir haben also festgesetzt:

$$k = 0{,}11$$
$$r' = 0{,}055$$
$$d = 0{,}055$$
$$e = 0{,}0011$$
$$l = 1{,}43.$$

Hiermit werden:

$$m = 1{,}43\,.\,rr$$
$$m' = 0{,}000166375 - 0{,}11\,.\,rr$$
$$m'' = 0{,}000013310$$
$$\mu = 0{,}24368392\,.\,rr$$
$$\mu' = 0{,}0000002516 - 0{,}0001664\,rr$$
$$\mu'' = 0{,}0000000302$$

also geben die Gleichungen:

$$(5) \ldots . \{1{,}32\,rr + 0{,}000179685\}\,\varrho = 0{,}61\,\{0{,}000153065 - 0{,}11\,.\,rr\}$$

$$(6) \ldots . \{0{,}000179685 - 0{,}11\,.\,rr\}\,0{,}1221 = 0{,}11398248\,.\,rr - 0{,}0000002818$$

und es folgt aus denselben

$$rr = 0{,}000174404, \qquad r = 0{,}013206$$

$$\varphi = 0{,}199237.$$

Man hat also folgende Einrichtung des Pendels:

Entfernung der Schneiden	= 1
Länge der Stange	= 1,43
Halbmesser derselben	= 0,013206
Entfernung der Mittelpunkte der Linsen von dem der Stange	= 0,61
Halbmesser der Linsen	= 0,055
Dicke derselben	= 0,055
Dicke des Metalls, woraus der Mantel der leichteren besteht	= 0,0011

Bei der Verfertigung des Pendels muss die Stange etwas länger gemacht werden, um durch symmetrisches Abfeilen die genaue Gleichheit der Schwingungszeiten herstellen zu können. Das Pendel wird etwa 22,8 Preuss. Pfunde wiegen, wenn es von Messing gemacht wird.

---

141. Methode die Thermometer zu berichtigen.*)

(Poggendorff's Annalen VI, p. 287.)

1.

Da man sehr selten, nach der Behauptung Einiger sogar nie, genau cylindrische Thermometerröhren findet, so wird es nothwendig, eine Methode zu besitzen, durch welche man entweder aus fehlerhaften Röhren fehlerfreie Thermometer verfertigen, oder die Verbesserungen schon fertiger Thermometer genau bestimmen und dann bei jeder Beobachtung in Rechnung bringen kann. Das erstere hat Herr Gay-Lussac geleistet, indem er die Röhre nicht nach der Länge, sondern nach ihrem inneren Raume, und zwar mittelst mehrerer Quecksilberfäden, zuerst in zwei, dann in vier, acht u. s. w. gleiche Theile eintheilte und endlich die Scale so auftrug, dass ihre Grade diesen gleichen Theilen des inneren Raumes entsprachen. Da aber auf diese Art die Scale ungleichförmig getheilt werden muss, und dieses in der Ausführung schwieriger ist als die gleichförmige Theilung, auch bei der Verbindung der Röhre mit der Scale neue Fehler entstehen können, so schien mir das zweite, nämlich eine Berichtigungsmethode, welche auf jedes Thermometer angewandt werden kann, insofern es nur die auch bei dem Gebrauche desselben unerlässliche Bedingung erfüllt, dass die Scale oder Röhre nicht plötzliche, sondern allmälig zu- oder abnehmende Unrichtigkeiten haben, noch wünschenswerther zu sein. Im Allgemeinen verdienen die Berichtigungen aller Instrumente durch Rechnung einen entschiedenen Vorzug vor den auf mechanischen Mitteln beruhenden; ich glaube sogar, dass die Verfertiger der Instrumente keineswegs verantwortlich sind für Alles, was der Besitzer selbst prüfen und dessen Verbesserung er selbst in Zahlen bestimmen kann; — wenigstens wird Jeder, der die Ueberzeugung mit mir theilt, dass nur dann gute Beobachtungen gelingen können, wenn man dahin gelangt, jeden möglichen Fehler des Instruments ganz aus dem Resultate zu entfernen, dem Verfertiger desselben wenig Dank für die Mühe sagen, welche er darauf verwandt hat, eine bestimmbare Verbesserung etwas kleiner zu machen. Dagegen muss aller Fleiss angewandt werden, die Instrumente so einzurichten, dass ihre Prüfung in allen Theilen möglich wird: für ein Thermometer z. B. sind Abweichungen der Röhre von der cylindrischen Form und Unrichtigkeiten in der Bestimmung der festen Punkte unbedeutende Fehler, weil der Besitzer sie in Rechnung bringen kann; sprungweise Unregelmässigkeiten der Scale, — nicht ganz unter der Röhre durchgezogene Theilstriche, welche der Genauigkeit der Ablesung nachtheilig, — Scalen von Elfenbein, welche hygrometrisch sind, — dieses sind bedeutende Fehler, indem sie sich der genauen Berichtigung widersetzen. — Eine Methode, die Fehler der Thermometer in Zahlen zu bestimmen, suchte ich im Jahre 1820, da es nothwendig wurde, die Temperaturen, bei welchen die astronomischen Beobachtungen angestellt wurden, genau zu kennen; ich habe dieselbe in der VII. Abtheilung der Tagebücher der Sternwarte beschrieben, erfülle aber jetzt den Wunsch einiger Freunde, sie ausführlicher und auch

*) [217 d. a. Verz. — Vgl. auch Königsb. Beobb. VII. Abth.]

denen mitzutheilen, welchen jenes Werk nicht zu Gesicht kommen möchte.

2.

Die Berichtigung des Thermometers zerfällt in zwei Theile, deren Absonderung zweckmässig ist. Zuerst muss für jeden Grad x der Scale eine Verbesserung bestimmt werden, welche ich durch φx bezeichne, so dass gleiche Aenderungen, nicht von x, sondern von $x+\varphi x$, zu gleichen Aenderungen des inneren Raumes der Röhre gehören. Dann müssen der Eis- und Siedepunkt bestimmt werden, deren Ort auf der Scale ich durch e und s bezeichne; diese Bestimmungen ergeben den wahren Fahrenheit'schen Grad, welcher einem Punkte x der Scale entspricht, nach der Proportion:

$$s+\varphi s-(e+\varphi e):180=x+\varphi x-(e+\varphi e):f-32$$

oder $$f=32+180\cdot\frac{x+\varphi x-(e+\varphi e)}{s+\varphi s-(e+\varphi e)}.$$

Meine Methode setzt voraus, dass man von dem Quecksilberfaden im Thermometer grössere und kleinere Stücke abtrennen und auch wieder damit vereinigen könne. Das erstere habe ich meistens durch Erwärmung der Röhre über der Lichtflamme an der Stelle, wo der Faden getrennt werden sollte, bewirkt; die Wiedervereinigung erfolgt bei weiteren Röhren ohne Schwierigkeit durch wiederholtes gelindes Aufstossen des Thermometers, ich habe sie aber auch bei sehr engen Röhren, wenn auch weniger schnell, stets erhalten.

3.

Unter den verschiedenen Anwendungen der abgetrennten Fäden, wodurch man zu der Bestimmung von φx gelangen kann, bietet sich das fortgesetzte Halbiren des inneren Raumes der Röhre zuerst dar. Man trennt z. B. einen Faden ab, welcher sehr nahe die Hälfte des Raumes zwischen 0 und 160° ausfüllt, bringt denselben zuerst mit seinem untern Ende auf 0, dann mit dem obern auf 160°, und beobachtet in beiden Fällen die Punkte der Scale, wo das entgegengesetzte Ende sich befindet; fallen diese Punkte zusammen, so bezeichnet der Punkt a, wo dieses stattfindet, die Mitte des Raumes von 0 bis 160°; sind sie aber auch um einige Grade von einander entfernt, so wird die Mitte derselben dennoch den Punkt a mit hinreichender Genauigkeit angeben. Man hat also $a+\varphi a=80°$ oder

$$\varphi a=80-a.$$

Nun halbirt man durch einen neuen, nahe halb so langen Faden, die Räume zwischen 0 und a und zwischen a und 160°*) und bestimmt dadurch zwei neue Punkte b und b', welche $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ des Raumes zwischen 0 und 160° entsprechen und also

$$\varphi b=40-b,\quad \varphi b'=120-b'$$

ergeben. Mit demselben Faden, dessen Länge in Hundertundsechzigtheilen des Raumes zwischen 0 und 160 ausgedrückt, nun bekannt geworden ist, bestimmt man noch einen dritten Punkt, welcher um diese Fadenlänge über 160 hinausliegt. Eine dritte Halbirung des Fadens (oder, wenn er dadurch zu kurz werden sollte, um sich noch leicht in der Röhre zu bewegen, eine Halbirung von 120°) bestimmt die Punkte, welche $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{9}{8}$ des Raumes entsprechen, und so setzt man dieses Verfahren fort, bis man auf hinreichend kleine Theile kömmt, um die Stetigkeit der Verbesserungen annehmen zu können.

Dieses Verfahren ist kein anderes als das von Herrn Gay-Lussac angegebene, nur auf bereits fertige Thermometer angewandt. Dasselbe Verfahren ist auch von dem vortrefflichen, alle seine Arbeiten durch die consequenteste Genauigkeit zierenden Hällström in einer in Åbo am 25. Juni 1823 unter seinem Präsidio durch Eduard Bergheim vertheidigten Dissertation**) vorgeschlagen und ausgeführt worden. Ich habe dagegen, bei den von mir ausgeführten Thermometerberichtigungen, eine andere Anordnung der Versuche gewählt, welche den Vortheil darbietet, dass man jeden Punkt der Scale durch von einander unabhängige Versuche so oft bestimmen kann als man für gut findet, wodurch man also den Einfluss der kleinen Ablesungsfehler bis zum Unmerklichen verkleinern kann. Diese Methode, die ich nun beschreiben werde, ist in ihrem Ansehen weniger einfach als das fortgesetzte Halbiren, allein bei der Ausführung habe ich nicht gefunden, dass sie billige Wünsche unbefriedigt liesse.

4.

Man trennt zuerst einen sehr langen Faden, z. B. 150 bis 160° F. ab, bringt das untere Ende desselben successive auf diejenigen runden Zahlen von Graden am untern Ende der Scale, für welche man die oben durch

*) Da es der Genauigkeit der Beobachtung förderlich ist, dass man den einen Endpunkt des Fadens genau auf einen Strich der Scale stellt, so geht man nicht von a selbst aus, ausser wenn es zufällig genau auf einen Strich fiele, sondern man geht von dem nächstvorhergehenden und dem nächstfolgenden Striche aus und folgert aus beiden den Punkt der Scale, welchen das andere Ende des Fadens eingenommen haben würde, wenn das erste auf a gebracht worden wäre.

**) Anmärkingar, angående Thermometrars Fœrsærdigande och Bruk.

φx bezeichneten Verbesserungen bestimmen will, z. B. von 10 zu 10°, und schreibt jedesmal den Ort des obern Endes an, so lange als dieser noch nicht den höchsten Punkt der Scale überschreitet. Dann vereinigt man diesen Faden wieder und nimmt einen zweiten, etwa 10° kürzeren, mit welchem man wie mit dem ersten verfährt. Diese Verkürzung der Fäden und dasselbe Verfahren mit jedem setzt man fort bis zu einem Faden, dessen Länge kleiner ist als die Hälfte der ersten, oder auch noch weiter; — die Länge der einzelnen Fäden ist willkürlich, allein man erlangt desto grössere Genauigkeit, je grösser ihre Anzahl ist.

Um hiervon ein Beispiel zu geben, an welchem ich auch die Berechnungsart erläutern werde, wähle ich ein von — 40° bis 230° F. getheiltes Thermometer; absichtlich eins, dessen Verbesserungen sich sehr bedeutend ergeben. Dieses Thermometer wurde durch 8 Fäden geprüft und jede Ablesung wurde zweimal wiederholt, wobei ich noch halbe Zehntel der Grade zu schätzen suchte, aber oft Unterschiede von einem bis anderthalb Zehntel fand. Das Mittel aus beiden Ablesungen ist in folgender Tafel angenommen.

Unteres Ende.	Oberes Ende der verschiedenen Fäden.							
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
— 40°	112°15	101°65	92°88	82°70	67°70	58°23	—	—
— 30	123,00	112,58	103,78	93,30	78,25	68,65	56°70	—
— 20	133,78	123,28	114,85	104,18	89,10	79,33	67,05	51°00
— 10	144,75	134,23	125,73	115,33	100,08	90,18	77,85	61,35
0	155,55	145,08	136,35	126,00	110,95	101,03	88,68	71,90
+ 10	166,15	155,80	147,20	136,85	121,68	111,93	99,40	82,60
+ 20	176,95	166,45	158,00	147,60	132,43	122,78	110,30	93,30
+ 30	187,40	177,10	168,70	158,25	143,25	133,60	121,05	104,25
+ 40	198,00	187,73	179,23	169,05	154,03	144,28	131,90	115,15
+ 50	208,70	198,30	189,85	179,70	164,83	155,08	142,78	126,00
+ 60	219,35	208,68	200,23	190,03	175,25	165,55	153,33	136,55
+ 70	229,73	219,28	210,45	200,25	185,30	175,95	163,60	146,95
+ 80	—	229,38	220,80	210,10	195,35	185,73	173,45	156,90
+ 90	—	—	230,70	220,48	205,28	195,65	183,30	166,93
+ 100	—	—	—	230,30	215,20	205,38	193,08	176,65
+ 110	—	—	—	—	225,20	215,30	202,85	186,28
+ 120	—	—	—	—	—	225,30	212,73	196,03
+ 130	—	—	—	—	—	—	222,90	206,20
+ 140	—	—	—	—	—	—	—	216,15
+ 150	—	—	—	—	—	—	—	226,38

5.

Man kann leicht übersehen, dass diese Beobachtungen weit mehr als hinreichend sind, um φx für alle Punkte der Scale zu bestimmen; schon zwei Fäden sind hinreichend, wenn nur das obere Ende des kürzeren in seinem niedrigsten Stande nicht höher hinaufreicht als das untere Ende des längeren in seinem höchsten Stande. Ich werde dieses an dem Beispiele des I. und V. Fadens zeigen. Es ist nämlich klar, dass der Raum, welcher unten durch das Hinaufrücken der Fäden leer wird, und der, welcher sich dadurch oben anfüllt, einander gleich sind; man hat also aus den beiden ersten Beobachtungen des I. Fadens:

$$[-30^0 + \varphi(-30^0)] - [-40^0 + \varphi(-40^0)] = [123{,}^0 00 + \varphi(123{,}^0 00)] - [112{,}^0 15 + \varphi(112{,}^0 15)]$$

oder

$$\varphi(-30^0) - \varphi(-40^0) = +0{,}^0 85 + \varphi(123{,}^0 00) - \varphi(112{,}^0 15)$$

und auf dieselbe Art aus der Verbindung jeder zwei auf einander folgenden Beobachtungen des I. Fadens 11 Gleichungen; aus denen des V. Fadens 15 Gleichungen; also im Ganzen 26 Gleichungen. Nimmt man nun an, dass man aus den Werthen von φx für jeden 10. Grad der Scale alle übrigen durch Interpolation finden kann, so erfordert die vollständige Kenntniss der Verbesserungen der Scale die Bestimmung von

$$\varphi(-40^0),\ \varphi(-30^0),\ \ldots\ldots\ \varphi(220^0),\ \varphi(230^0),$$

welche 28 unbekannte Grössen also gefunden werden müssen. Zwei davon können aber willkürlich angenommen werden, indem der Raum, welcher als Einheit dienen soll, durch zwei willkürliche Punkte der Scale bestimmt werden kann. Also bleiben nur 26 unbekannte Grössen übrig, durch welche alle in den 26 Gleichungen vorkommenden Verbesserungen ausgedrückt werden können, und die Zahl dieser Gleichungen ist gerade hinreichend zur Bestimmung derselben.

Hätte man statt des V. Fadens einen der vorhergehenden mit dem I. Faden verbunden, so würde man weniger Gleichungen als unbekannte Grössen erhalten haben; hätte man einen der folgenden gewählt, so würde die Zahl der Gleichungen grösser geworden sein als die der unbekannten Grössen. In dem ersten Falle wäre daher die Aufgabe unbestimmt geblieben, in dem anderen wäre sie mehr als bestimmt und man müsste zu ihrer Auflösung die Methode der kleinsten Quadrate anwenden. Durch diese Methode sollte man auch die 26 unbekannten Grössen so bestimmen, dass sie allen im vorigen Artikel verzeichneten Beobachtungen so nahe als möglich Genüge leisten; allein diese Anwendung derselben würde so mühsam und zeitraubend sein, dass kein Rechner sie unternehmen könnte. Ich werde daher eine andere Rechnungsart angeben, welche etwa zu demselben Ziele führt und sich durch ausgezeichnete Leichtigkeit empfiehlt.

6.

Diese Rechnungsart beruht auf der Voraussetzung, dass das arithmetische Mittel aus den Werthen von φx für viele verschiedene Punkte in einer Hälfte der Scale näherungsweise eine beständige Grösse ist, für welche man auch 0 annehmen kann, indem es nicht auf die absolute Grösse, sondern nur auf die Unterschiede der Verbesserungen φx ankömmt; sie führt durch successive Annäherungen zum Ziele, desto schneller, je mehr sich die Voraussetzung der Wahrheit nähert — und je grösser die Anzahl der beobachteten Fäden ist.

Wenn man die Längen der verschiedenen Fäden, alle in einem gleichen, obgleich an sich willkürlichen Maasse ausgedrückt, kennt, so gibt die gemachte Voraussetzung offenbar eine näherungsweise Bestimmung von φx für alle Theile der Scale; denn von jedem Punkte x reichen die Fäden bis zu vielen anderen, und da x durch jeden Faden von bekannter Länge, dessen eines Ende mit x zusammenfällt, durch den Punkt der Scale bestimmt wird, wo das andere Ende sich befindet, so erhält man für jedes x so viele Bestimmungen als man Fäden hat, und das Mittel aus allen ist, auch wenn man die Verbesserungen der Scale für das andere Ende der Fäden vernachlässigt, der Voraussetzung zufolge eine Näherung. Man erhält also eine erste Annäherung, wenn man die Punkte in der unteren Hälfte der Scale durch die Punkte in der oberen, und diese wieder durch jene bestimmt. Eine zweite Annäherung erhält man, wenn man die durch die erste gefundenen Werthe von φx den Beobachtungen (Art. 4) hinzusetzt und mit den dadurch veränderten Zahlen der Tafel dieselbe Rechnung wiederholt. Diese Annäherungen kann man, immer auf dieselbe Weise, so oft wiederholen als man will, wird aber, wenn das Thermometer nicht gar zu fehlerhaft ist, oder man die grössten Fehler, auf eine unten anzuzeigende Art, vorher ausgleicht, schon bei der zweiten Annäherung auf ein Resultat kommen, welches durch die folgenden nicht mehr erhebliche Verbesserungen erhält.

Dieses Verfahren hat aber die Schwierigkeit, dass man die Fadenlängen, in einem gleichen Maasse ausgedrückt, nicht kennt; ich werde daher an dem zum Beispiele gewählten Thermometer zeigen, wie diese Schwierigkeit beseitigt wird.

7.

Ich nehme ein willkürliches Maass eines der Fäden an, etwa so, wie man es in der oberen Hälfte der Scale findet, z. B. des ersten Fadens $= 159{,}^{0}6$; die anderen Fäden nehme ich etwa so an, wie sie in derselben Gegend der Röhre erscheinen, füge diesen Annahmen aber noch unbestimmte Verbesserungen $f(2)$, $f(3)$ u. s. w. hinzu, so dass die wahren Fadenlängen, alle in demselben Maasse ausgedrückt, in welchem der erste $159{,}^{0}6$ misst, durch

$$\begin{aligned}
\text{I.} &= 159{,}^{0}6\\
\text{II.} &= 149{,}2 + f(2)\\
\text{III.} &= 140{,}5 + f(3)\\
\text{IV.} &= 130{,}3 + f(4)\\
\text{V.} &= 115{,}2 + f(5)\\
\text{VI.} &= 105{,}7 + f(6)\\
\text{VII.} &= 93{,}3 + f(7)\\
\text{VIII.} &= 76{,}6 + f(8)
\end{aligned}$$

bezeichnet werden.

Durch diese Annahme erhält man acht Bestimmungen eines jeden Punktes, an welchem das untere Ende der Fäden sich befand, z. B. für 70^0 der Scale:

$$\begin{aligned}
70^0 + \varphi(70^0) &= 70{,}^{0}13 + \varphi(229{,}^{0}73)\\
&= 70{,}18 + \varphi(219{,}28) - f(2)\\
&= 69{,}95 + \varphi(210{,}45) - f(3)\\
&= 69{,}95 + \varphi(200{,}25) - f(4)\\
&= 70{,}10 + \varphi(185{,}30) - f(5)\\
&= 70{,}25 + \varphi(175{,}95) - f(6)\\
&= 70{,}30 + \varphi(163{,}60) - f(7)\\
&= 70{,}35 + \varphi(146{,}95) - f(8)
\end{aligned}$$

und wenn man aus denselben das arithmetische Mittel nimmt und dabei der Voraussetzung gemäss das Mittel aus den acht Verbesserungen $= 0$ setzt:

$$70^0 + \varphi(70^0) = 70{,}^{0}14 - \tfrac{1}{8}\{f(2) + f(3) \ldots + f(8)\}$$

oder, wenn man $\frac{1}{8}\{f(2) + f(3) + \ldots + f(8)\}$ durch F bezeichnet:

$$\varphi(70^0) = +0{,}^{0}14 - F.$$

Auf diese Art erhält man die erste Näherungsbestimmung aller Punkte, an welchen die unteren Enden aller acht Fäden beobachtet sind, hier also von -20^0 bis $+70^0$, nämlich:

$$\begin{aligned}
\varphi(-20^0) &= -5{,}98 - F\\
\varphi(-10) &= -5{,}11 - F\\
\varphi(0) &= -4{,}36 - F\\
\varphi(+10) &= -3{,}60 - F\\
\varphi(+20) &= -2{,}91 - F\\
\varphi(+30) &= -2{,}11 - F\\
\varphi(+40) &= -1{,}38 - F\\
\varphi(+50) &= -0{,}65 - F\\
\varphi(+60) &= -0{,}18 - F\\
\varphi(+70) &= +0{,}14 - F
\end{aligned}$$

Man addirt nun zu $-20^0 + \varphi(-20^0)$, $-10^0 + \varphi(-10^0)$ u. s. w. die Länge des ersten Fadens und erhält dadurch die Bestimmung der Punkte der Scale, wo sich das obere Ende des Fadens befand; z. B. für die Beobachtung, bei welcher das untere Ende auf -20^0, das obere auf 133,°78 fiel:

$$\begin{aligned}
-20^0 + \varphi(-20^0) &= -25{,}98 - F\\
\text{Länge des I. Fadens} &= 159{,}6\\
\hline
133{,}78 + \varphi(133{,}78) &= 133{,}62 - F\\
\text{oder}\qquad \varphi(133{,}78) &= -0{,}16 - F
\end{aligned}$$

Hierdurch erhält man für alle Beobachtungen von -20^0 bis $+70^0$ durch den ersten Faden:

$$\begin{aligned}
\varphi(133{,}78) &= -0{,}16 - F\\
\varphi(144{,}75) &= -0{,}26 - F\\
\varphi(155{,}55) &= -0{,}31 - F\\
\varphi(166{,}15) &= -0{,}15 - F\\
\varphi(176{,}95) &= -0{,}26 - F\\
\varphi(187{,}40) &= +0{,}10 - F\\
\varphi(198{,}00) &= +0{,}22 - F\\
\varphi(208{,}70) &= +0{,}25 - F\\
\varphi(219{,}35) &= +0{,}07 - F\\
\varphi(229{,}73) &= -0{,}07 - F
\end{aligned}$$

Ebenso durch den zweiten Faden:

$$\begin{aligned}
\varphi(123{,}28) &= -0{,}06 - F + f(2)\\
\varphi(134{,}23) &= -0{,}14 - F + f(2)\\
\varphi(145{,}08) &= -0{,}24 - F + f(2)\\
\varphi(155{,}80) &= -0{,}20 - F + f(2)\\
\varphi(166{,}45) &= -0{,}16 - F + f(2)\\
\varphi(177{,}10) &= -0{,}01 - F + f(2)\\
\varphi(187{,}73) &= +0{,}09 - F + f(2)\\
\varphi(198{,}30) &= +0{,}25 - F + f(2)\\
\varphi(208{,}68) &= +0{,}36 - F + f(2)\\
\varphi(219{,}28) &= +0{,}06 - F + f(2)
\end{aligned}$$

und durch alle acht Fäden ähnliche Resultate. Nimmt man aus jeder dieser acht Reihen das arithmetische Mittel und setzt man, immer der Voraussetzung zufolge, das Mittel aus den links vom Gleichheitszeichen befindlichen Verbesserungen $= 0$, so erhält man dadurch die zur genäherten Bestimmung von $f(2)$, $f(3)$ u. s. w. nothwendigen Gleichungen, nämlich:

$$\begin{aligned}
\text{Faden I.} \ldots\ 0 &= -0{,}06 - F\\
\text{„ II.} \ldots\ 0 &= 0{,}00 - F + f(2)\\
\text{„ III.} \ldots\ 0 &= -0{,}17 - F + f(3)\\
\text{„ IV.} \ldots\ 0 &= -0{,}04 - F + f(4)\\
\text{„ V.} \ldots\ 0 &= -0{,}10 - F + f(5)\\
\text{„ VI.} \ldots\ 0 &= +0{,}12 - F + f(6)\\
\text{„ VII.} \ldots\ 0 &= +0{,}09 - F + f(7)\\
\text{„ VIII.} \ldots\ 0 &= +0{,}08 - F + f(8)
\end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned}
f(2) &= -0{,}06 & f(6) &= -0{,}18\\
f(3) &= +0{,}11 & f(7) &= -0{,}15\\
f(4) &= -0{,}02 & f(8) &= -0{,}14\\
f(5) &= +0{,}04
\end{aligned}$$

oder die verbesserten Fadenlängen

I.	= 159,°60	V.	= 115,°24
II.	= 149,14	VI.	= 105,52
III.	= 140,61	VII.	= 93,15
IV.	= 130,28	VIII.	= 76,46

folgen.

Durch die gefundenen Werthe von $f(2)$, $f(3)$, ... ist man in den Stand gesetzt, die durch den II., III., ... Faden erhaltenen Bestimmungen der oberen Punkte von den ihnen noch anhängenden $f(2)$, $f(3)$, ... zu befreien; der zweite Faden gibt z. B. durch Hinzufügung von $f(2) = -0{,}06$:

$$\begin{aligned}
\varphi(123{,}28) &= -0{,}12 - F\\
\varphi(134{,}23) &= -0{,}20 - F\\
\varphi(145{,}08) &= -0{,}30 - F\\
\varphi(155{,}80) &= -0{,}26 - F\\
\varphi(166{,}45) &= -0{,}22 - F\\
\varphi(177{,}10) &= -0{,}07 - F\\
\varphi(187{,}73) &= +0{,}03 - F\\
\varphi(198{,}30) &= +0{,}19 - F\\
\varphi(208{,}68) &= +0{,}30 - F\\
\varphi(219{,}28) &= 0{,}00 - F
\end{aligned}$$

Nun schreibt man die beobachteten oberen Punkte sämmtlicher Fäden nach der Tafel (Art. 4) in der Ordnung, in welcher sie auf einander folgen, und setzt jedem, für welchen die Verbesserung schon gefunden ist, diese bei. Den Anfang der hierdurch erhaltenen Tafel benutzt man, um durch das arithmetische Mittel aus mehreren nahe beisammen liegenden Verbesserungen, die Verbesserungen $\varphi(80^0)$, $\varphi(90^0)$, ... $\varphi(150^0)$ zu erhalten und diese wieder um alle noch leeren Plätze der Tafel auszufüllen, wodurch man die Verbesserungen bis zu dem höchsten Punkte der Scale erhalten wird. Sobald man diese kennt, bestimmt man die unteren, nicht bei allen Fäden beobachteten Punkte, hier also -40^0 und -30^0. Auf diese Art erhält man die erste Annäherung vollständig, und es geht aus dem Verfahren hervor, dass allen so bestimmten Werthen der Verbesserungen noch $-F$ anhängt, welches, da es für alle gleich ist, weggelassen werden kann.

Ich werde den letzten Theil der Rechnung, durch die Mittheilung der erwähnten Zusammenstellung aller Verbesserungen, anschaulich machen und dabei die zuerst ausgefüllten Zahlen durch einen * bezeichnen.

x	φx	x	φx	x	φx
51,°00	− 0,°52 *	142,°78	− 0,°28 *	187,°73	+ 0,°03 *
61,35	0,00 *	143,25	− 0,12 *	189,85	+ 0,11 *
67,05	+ 0,12 *	144,28	− 0,14 *	190,03	+ 0,07 *
71,90	+ 0,20 *	144,75	− 0,26 *	193,08	+ 0,19
77,85	+ 0,19 *	145,08	− 0,30 *	195,35	+ 0,11
79,33	+ 0,21 *	146,95	− 0,35 *	195,65	+ 0,06
82,60	+ 0,26 *	147,20	− 0,19 *	196,03	+ 0,32
88,68	+ 0,11 *	147,60	− 0,23 *	198,00	+ 0,22 *
89,10	+ 0,16 *	153,33	− 0,36 *	198,30	+ 0,19 *
90,18	+ 0,23 *	154,03	− 0,17 *	200,23	+ 0,20 *
93,30	+ 0,25 *	155,08	− 0,21 *	200,25	+ 0,15 *
99,40	+ 0,15 *	155,55	− 0,31 *	202,85	+ 0,26
100,08	+ 0,05 *	155,80	− 0,26 *	205,28	+ 0,15
101,03	+ 0,13 *	156,90	− 0,22	205,38	+ 0,26
104,18	+ 0,12 *	158,00	− 0,30 *	206,20	+ 0,11
104,25	+ 0,10 *	158,25	− 0,08 *	208,68	+ 0,30 *
110,30	− 0,06 *	163,60	− 0,07 *	208,70	+ 0,25 *
110,95	− 0,07 *	164,83	− 0,24 *	210,10	+ 0,40
111,93	− 0,01 *	165,55	− 0,21 *	210,45	+ 0,30 *
114,85	− 0,22 *	166,15	− 0,15 *	212,73	+ 0,31
115,15	− 0,07 *	166,45	− 0,22 *	215,20	+ 0,16
115,33	− 0,16 *	166,93	− 0,28	215,30	+ 0,18
121,05	− 0,01 *	168,70	− 0,20 *	216,15	+ 0,11
121,68	− 0,04 *	169,05	− 0,15 *	219,28	0,00 *
122,78	− 0,17 *	173,45	− 0,08	219,35	+ 0,07 *
123,28	− 0,12 *	175,25	− 0,19 *	220,48	− 0,01
125,73	− 0,23 *	175,95	+ 0,01 *	220,80	+ 0,03
126,00	− 0,19 *	176,65	− 0,07	222,90	+ 0,10
126,00	− 0,08 *	176,95	− 0,26 *	225,20	0,00
131,90	− 0,13 *	177,10	− 0,07 *	225,30	+ 0,11
132,43	− 0,10 *	179,23	0,00 *	226,38	− 0,15
133,60	− 0,19 *	179,70	− 0,07 *	229,38	− 0,02
133,78	− 0,16 *	183,30	+ 0,04	229,73	− 0,07 *
134,23	− 0,20 *	185,30	− 0,06 *	230,30	+ 0,10
136,35	− 0,10 *	185,73	+ 0,01	230,70	+ 0,10
136,55	− 0,27 *	186,28	+ 0,14 *		
136,85	− 0,17 *	187,40	+ 0,10 *		

Die Bestimmung von $\varphi(80^0)$, $\varphi(90^0)$ u. s. w. erhält man dadurch, dass man die in dieser Tafel angegebenen Zahlen zu so vielen arithmetischen Mitteln vereinigt, als man Punkte über 70^0 hinaus zu bestimmen hat, und aus diesen für die runden Zahlen der Scale interpolirt. Ich habe die zusammen verbundenen durch Striche getrennt und auf diese Weise erhalten:

$\varphi(\ 66{,}77) = +0{,}°11$	$\varphi(155{,}87) = -0{,}°24$
$\varphi(\ 79{,}93) = +0{,}22$	$\varphi(166{,}41) = -0{,}19$
$\varphi(\ 90{,}32) = +0{,}19$	$\varphi(176{,}79) = -0{,}09$
$\varphi(101{,}70) = +0{,}11$	$\varphi(186{,}95) = +0{,}06$
$\varphi(113{,}80) = -0{,}10$	$\varphi(197{,}11) = +0{,}18$
$\varphi(123{,}79) = -0{,}12$	$\varphi(207{,}20) = +0{,}25$
$\varphi(134{,}46) = -0{,}17$	$\varphi(217{,}41) = +0{,}11$
$\varphi(145{,}24) = -0{,}23$	$\varphi(227{,}49) = +0{,}02$

woraus sich durch Interpolation ergibt:

$\varphi(\ 80) = +0{,}°22$	$\varphi(160) = -0{,}°22$
$\varphi(\ 90) = +0{,}19$	$\varphi(170) = -0{,}16$
$\varphi(100) = +0{,}12$	$\varphi(180) = -0{,}04$
$\varphi(110) = -0{,}04$	$\varphi(190) = +0{,}10$
$\varphi(120) = -0{,}11$	$\varphi(200) = +0{,}21$
$\varphi(130) = -0{,}15$	$\varphi(210) = +0{,}24$
$\varphi(140) = -0{,}20$	$\varphi(220) = +0{,}09$
$\varphi(150) = -0{,}23$	$\varphi(230) = 0{,}00$

Endlich bestimmt man hieraus und aus den bekannten Fadenlängen die beiden untersten Punkte der Scale, nämlich:

$$\varphi(-40) = -7{,}°47; \qquad \varphi(-30) = -6{,}°75.$$

Stellt man alle gefundenen Verbesserungen zusammen, so hat man damit das Resultat der ersten Annäherung:

$\varphi(-40) = -7{,}°47$	$\varphi(100) = +0{,}°12$
$\varphi(-30) = -6{,}75$	$\varphi(110) = -0{,}04$
$\varphi(-20) = -5{,}98$	$\varphi(120) = -0{,}11$
$\varphi(-10) = -5{,}11$	$\varphi(130) = -0{,}15$
$\varphi(\ 0) = -4{,}36$	$\varphi(140) = -0{,}20$
$\varphi(10) = -3{,}60$	$\varphi(150) = -0{,}23$
$\varphi(20) = -2{,}91$	$\varphi(160) = -0{,}22$
$\varphi(30) = -2{,}11$	$\varphi(170) = -0{,}16$
$\varphi(40) = -1{,}38$	$\varphi(180) = -0{,}04$
$\varphi(50) = -0{,}65$	$\varphi(190) = +0{,}10$
$\varphi(60) = -0{,}18$	$\varphi(200) = +0{,}21$
$\varphi(70) = +0{,}14$	$\varphi(210) = +0{,}24$
$\varphi(80) = +0{,}22$	$\varphi(220) = +0{,}09$
$\varphi(90) = +0{,}19$	$\varphi(230) = 0{,}00$

Ich bemerke hierbei noch, dass man $\varphi(80)$, $\varphi(90)$, ... $\varphi(130)$, welche hier nur durch die oberen Enden der Fäden bestimmt worden sind, auch durch die unteren bestimmen kann, wodurch der Einfluss der Beobachtungsfehler verkleinert wird. Bei der ersten Annäherung ist dieser aber unwesentlich, und es ist immer hinreichend, wenn man diese Vermehrung der Sicherheit bei der zweiten anwendet.

8.

Sobald die erste Annäherung gemacht ist, setzt man die daraus hervorgehenden Verbesserungen aller Zahlen der Tafel im 4. Art. hinzu, wodurch man eine neue Angabe der Beobachtungen, nämlich auf die näherungsweise verbesserte Scale bezogen, erhält. Mit dieser veränderten Tafel verfährt man genau so, wie vorher mit der ursprünglichen, weshalb es auch hinreichend sein wird, hier nur die Resultate anzugeben. Diese sind zuerst:

$\varphi(-20^0) = 0{,}°00$	$\varphi(30^0) = -0{,}°04$
$\varphi(-10) = +0{,}01$	$\varphi(40) = -0{,}03$
$\varphi(\ 0) = +0{,}01$	$\varphi(50) = +0{,}02$
$\varphi(+10) = -0{,}03$	$\varphi(60) = +0{,}04$
$\varphi(+20) = +0{,}03$	$\varphi(70) = +0{,}06$

Dann folgen die Verbesserungen der Fäden und diese selbst:

	I. = 159°60
$f(2) =$ 0°00	II. = 149,14
$f(3) = -0{,}01$	III. = 140,60
$f(4) = -0{,}04$	IV. = 130,24
$f(5) = -0{,}04$	V. = 115,20
$f(6) = -0{,}02$	VI. = 105,50
$f(7) = -0{,}01$	VII. = 93,14
$f(8) = -0{,}04$	VIII. = 76,42

Hieraus ergeben sich die Verbesserungen für die Punkte über 70° hinaus:

$\varphi(80°) = -0°03$	$\varphi(160°) = -0°04$
$\varphi(90) = -0{,}01$	$\varphi(170) = -0{,}06$
$\varphi(100) = -0{,}02$	$\varphi(180) = -0{,}05$
$\varphi(110) = -0{,}05$	$\varphi(190) = -0{,}01$
$\varphi(120) = -0{,}03$	$\varphi(200) = -0{,}01$
$\varphi(130) = -0{,}02$	$\varphi(210) = -0{,}02$
$\varphi(140) = -0{,}02$	$\varphi(220) = -0{,}04$
$\varphi(150) = -0{,}03$	$\varphi(230) = 0{,}00$

und endlich die Verbesserungen für die beiden unteren Punkte:

$$\varphi(-40°) = +0°01$$
$$\varphi(-30) = +0{,}01$$

Bestimmt man noch, nach der Bemerkung am Ende des 7. Art., $\varphi(80)$, $\varphi(90)$, ... $\varphi(130)$ durch die unteren Enden der Fäden, so erhält man:

$\varphi(80°) = -0°01$ ... 7 Beobb.	$\varphi(110°) = -0°02$ ... 4 Beobb.
$\varphi(90) = +0{,}04$ ... 6 „	$\varphi(120) = -0{,}10$ ... 3 „
$\varphi(100) = -0{,}02$ ... 5 „	$\varphi(130) = +0{,}05$ ... 2 „

und wenn man aus dieser und der vorigen Bestimmung das Mittel mit Rücksicht auf die jeder derselben zum Grunde liegende Anzahl der Fäden nimmt und dieses der ersten Annäherung hinzusetzt, so erhält man als Resultat der zweiten Annäherung:

$\varphi(-40°) = -7°46$	$\varphi(100°) = +0°10$
$\varphi(-30) = -6{,}74$	$\varphi(110) = -0{,}08$
$\varphi(-20) = -5{,}98$	$\varphi(120) = -0{,}16$
$\varphi(-10) = -5{,}10$	$\varphi(130) = -0{,}16$
$\varphi(0) = -4{,}35$	$\varphi(140) = -0{,}22$
$\varphi(+10) = -3{,}63$	$\varphi(150) = -0{,}26$
$\varphi(20) = -2{,}88$	$\varphi(160) = -0{,}26$
$\varphi(30) = -2{,}15$	$\varphi(170) = -0{,}22$
$\varphi(40) = -1{,}41$	$\varphi(180) = -0{,}09$
$\varphi(50) = -0{,}63$	$\varphi(190) = +0{,}09$
$\varphi(60) = -0{,}14$	$\varphi(200) = +0{,}20$
$\varphi(70) = +0{,}20$	$\varphi(210) = +0{,}22$
$\varphi(80) = +0{,}20$	$\varphi(220) = +0{,}05$
$\varphi(90) = +0{,}20$	$\varphi(230) = 0{,}00$

Diese Zahlen sind so wenig von den aus der ersten Annäherung gefolgerten verschieden, dass es ganz unnöthig sein würde, eine dritte zu suchen; man hätte es sogar ohne grossen Nachtheil bei der ersten bewenden lassen können, indem die Verbesserungen, welche die zweite ergeben hat, kleiner sind als die unvermeidlichen Ablesungsfehler. Um sich nach vollendeter Bestimmung der Verbesserungen von dem Erfolge der Untersuchung zu überzeugen, muss man die unmittelbaren Ablesungen durch die Angaben der Tafel verbessern, die Fadenlängen im Mittel aus allen Beobachtungen bestimmen und hiermit den Fehler jeder einzelnen Beobachtung suchen. Für das hier gegebene Beispiel finden sich diese Fehler:

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
−0,08	+0,04	−0,05	+0,12	+0,07	−0,03	+0,03	−0,05
0,00	+0,07	−0,02	−0,03	−0,03	+0,05	+0,02	−0,09
0,00	−0,04	+0,13	−0,05	+0,05	0,00	+0,03	0,00
+0,03	+0,01	+0,10	+0,06	+0,05	−0,03	+0,10	−0,03
+0,06	+0,05	−0,07	−0,05	−0,02	−0,05	+0,01	−0,10
−0,04	+0,03	+0,01	+0,04	−0,08	−0,05	−0,03	−0,04
+0,11	−0,05	+0,05	−0,01	−0,09	−0,01	−0,09	−0,03
+0,02	−0,03	+0,05	−0,10	−0,07	+0,06	+0,11	+0,01
+0,02	+0,05	−0,03	0,00	−0,05	−0,06	+0,05	+0,03
−0,02	−0,02	0,00	0,00	−0,02	−0,06	+0,08	+0,04
−0,03	−0,09	0,00	+0,02	0,00	−0,06	+0,02	−0,02
−0,05	0,00	−0,11	+0,01	−0,13	+0,09	−0,06	+0,03
	+0,04	+0,07	−0,12	+0,08	+0,04	−0,06	−0,04
		−0,07	+0,09	+0,08	+0,10	−0,02	−0,07
			−0,04	+0,01	0,00	+0,01	−0,11
				+0,08	0,00	−0,06	+0,13
					−0,02	−0,03	+0,03
							+0,20

Diese Fehler sind, mit einziger Ausnahme des letzten, bei welchem ein zufälliger Irrthum vorgefallen sein muss, in den Grenzen derjenigen, welche man bei der Ablesung des oberen und bei der Stellung des unteren Fadenendes auf einen Theilstrich begehen kann; sie zeigen daher den vollständigen Erfolg der Untersuchung.

9.

Um das Thermometer nun in Beziehung auf die festen Punkte zu berichtigen, wurde der Siedepunkt durch den von CAVENDISH empfohlenen Apparat bestimmt, und (für die Barometerhöhe = 0,76 Meter) 220°9 der Scale entsprechend gefunden; der Eispunkt fand sich bei 31°8. Man hat daher nach der Tafel der Verbesserungen:

$$s + \varphi s = 210{,}94$$
$$e + \varphi e = 29{,}78$$

und, nach der Formel im 2. Art., den dem Punkte x der Scale entsprechenden wahren Fahrenheit'schen Grad:

$$f = 32 + 180 \cdot \frac{x + \varphi x - 29{,}78}{191{,}16}$$
$$= 3°959 + 0{,}94162\,(x + \varphi x)$$

oder die Verbesserung, welche man dem Punkte x hinzufügen muss, um die wahre Temperatur zu erhalten:

$$f - x = 3{,}^{\circ}959 - 0{,}05838 \cdot x + 0{,}94162 \cdot \varphi x$$

aus welcher Formel folgende Verbesserungstafel des Thermometers hervorgeht:

Scale.	$f-x$	Scale.	$f-x$
-40°	$-0{,}^{\circ}73$	90°	$-1{,}^{\circ}10$
-30	$-0{,}64$	100	$-1{,}78$
-20	$-0{,}50$	110	$-2{,}54$
-10	$-0{,}26$	120	$-3{,}20$
0	$-0{,}14$	130	$-3{,}79$
$+10$	$-0{,}04$	140	$-4{,}43$
20	$+0{,}08$	150	$-5{,}05$
30	$+0{,}18$	160	$-5{,}63$
40	$+0{,}30$	170	$-6{,}18$
50	$+0{,}45$	180	$-6{,}64$
60	$+0{,}34$	190	$-7{,}05$
70	$+0{,}07$	200	$-7{,}52$
80	$-0{,}52$	210	$-8{,}09$
90	$-1{,}10$	220	$-8{,}84$

10.

Es ist nun noch übrig, dass ich zeige, wie man eine sehr schnelle Convergenz der Rechnung zur Wahrheit in allen Fällen erhalten kann. Dieselbe findet sich ohne weitere Vorbereitung, wenn wenigstens eine Hälfte des Thermometers nur Unregelmässigkeiten, nicht progressiv fortgehende bedeutende Verlängerungen oder Verkürzungen der Fadenlängen zeigt; es ist nämlich dann hinreichend, dass man den Anfang der Rechnung mit dieser Hälfte mache und also nicht zuerst durch die obere die untere bestimme, wie in dem gegebenen Beispiele, sondern umgekehrt durch die untere die obere, wenn in der ersteren die Fäden sich weniger stark progressiv verändern. In diesem Falle ist es leichter für die Rechnung, wenn man nicht die unteren, sondern die oberen Enden der Fäden auf runde Zahlen der Scale stellt; wobei ich noch bemerke, dass es in jedem Falle nicht ohne Vortheil ist, eine doppelte Beobachtungsreihe zu machen, bei welcher man ein Mal von den unteren runden Zahlen, das andere Mal von den oberen ausgeht.

Findet sich aber weder die untere noch die obere Hälfte der Röhre der Scale einigermassen entsprechend und erleiden die Fadenlängen grosse progressive Aenderungen, so besteht das Mittel, welches man anwenden muss, um dennoch eine schnelle Annäherung der Rechnung zu erhalten, darin, dass man die Punkte der Scale vorläufig so corrigirt, dass das Progressive der Veränderungen verkleinert oder vernichtet wird; man gründet dann die erste Annäherung nicht auf die unmittelbaren Ablesungen, sondern auf die corrigirten. Die Correctionen aber dürfen in jedem Falle nur beiläufig bekannt sein und man muss bei ihrer Festsetzung nur vermeiden, sie so unregelmässig fortschreiten zu lassen, dass daraus eine Schwierigkeit in der Interpolation für Punkte, welche nicht auf runde Zahlen der Scale fallen, entsteht.

Man kann diese vorläufige Correction der Scale auf mehr als eine Art erlangen; die leichteste scheint mir zu sein, dass man einen sehr kurzen Faden, z. B. von etwa 30° Länge, abtrennt, denselben mit seinem einen Ende auf den höchsten Punkt der Scale bringt, und den Ort a der Scale, welcher dem anderen Ende entspricht, anmerkt; dann mit dem oberen Ende auf a und dem unteren auf einen neuen Punkt a' u. s. w., bis er etwa die Hälfte der Scale oder mehr durchlaufen hat. Nimmt man die Länge dieses Fadens willkürlich, etwa so, wie eine der Beobachtungen sie gibt, so erhält man φa, $\varphi a'$, $\varphi a''$, ... und hieraus interpolirt man für die runden Zahlen der Scale vom oberen Ende bis etwa zu der Mitte derselben. Die hieraus hervorgehenden vorläufigen Verbesserungen der Beobachtungen werden hinreichen, der spätern Rechnung eine sehr schnelle Annäherung zu geben.

---

142. Tafel zur Reduction der Abwägungen.*)

(Astron. Nachr. 7, p. 373.)

Die Reductionen, vermöge welcher man aus unmittelbaren Abwägungen, sowohl in der umgebenden Luft als im destillirten Wasser, das wahre Gewicht und die specifische Schwere eines gewogenen Körpers erhält, habe ich in eine logarithmische Tafel gebracht, deren Mittheilung an diesem Orte entschuldigt werden mag, da auch den Astronomen das Wägen wohl vorkömmt, so wie es mir bei Gelegenheit meiner Pendelversuche vorgekommen ist.

Unter specifischer Schwere eines Körpers wird hier der Quotient seiner Masse dividirt durch die Masse des Wassers, welches er aus der Stelle drängt, verstanden,

*) [236 d. a. Verz.]

das Wasser im Zustande der grössten Dichtigkeit und die Ausdehnung des Körpers der Temperatur des schmelzenden Eises entsprechend angenommen. Bezeichnet man diese specifische Schwere durch Δ, die Masse des Körpers durch M, und das Verhältniss einer seiner Dimensionen bei den Temperaturen des Eispunktes und des Versuches durch $1 : R$, so ist der Raum, welchen der Körper ausfüllt

$$= \frac{M}{\Delta} R^3,$$

und er drängt eine Masse Flüssigkeit

$$= \frac{M}{\Delta} R^3 Q$$

aus der Stelle, wenn Q die specifische Schwere derselben bedeutet. Er zieht also an einem der Arme der Wage mit der Kraft

$$M\left\{1 - \frac{R^3 Q}{\Delta}\right\}.$$

An dem anderen Arme der Wage zieht das Gewicht $= m$ mit der Kraft

$$m\left\{1 - \frac{r^3 q}{\delta}\right\}$$

wo die kleinen Buchstaben in Beziehung auf das Gewicht dieselbe Bedeutung haben, wie die grossen in Beziehung auf den Körper. Sind der Körper und die Gewichte im Gleichgewichte, so ist

$$M\left\{1 - \frac{R^3 Q}{\Delta}\right\} = m\left\{1 - \frac{r^3 q}{\delta}\right\}.$$

Nun werde ich zuerst den Körper und die Gewichte in der Luft befindlich annehmen, wodurch $Q = q$ und

$$M\left\{1 - \frac{R^3 q}{\Delta}\right\} = m\left\{1 - \frac{r^3 q}{\delta}\right\}$$

wird. Ferner werde ich den Körper in reinem Wasser, die Gewichte in der Luft annehmen, wodurch, wenn Q die specifische Schwere des Wassers bedeutet,

$$M\left\{1 - \frac{R^3 Q}{\Delta}\right\} = m\left\{1 - \frac{r^3 q}{\delta}\right\}.$$

Da bei dem letzten Versuche aber die Temperaturen des Wassers und der Luft verschieden sein können, die letzte auch nicht nothwendig der bei dem ersten Versuche stattfindenden gleich ist, so will ich m, r, q, R für die Wägung in Wasser durch m', r', q', R' bezeichnen.

Eliminirt man aus beiden Gleichungen die Masse des Körpers, so erhält man

$$\Delta = \frac{mR'^3 Q(1-i) - m'R^3 q(1-i')}{m(1-i) - m'(1-i')}$$

wo i und i' für $\frac{r^3 q}{\delta}$ und $\frac{r'^3 q'}{\delta}$ geschrieben sind. Sobald Δ bekannt ist, hat man aus der ersten Gleichung:

$$M = m \cdot \frac{1-i}{1-I}$$

wo $I = \frac{R^3 q}{\Delta}$ ist. Will man nur die erste Potenz von i berücksichtigen, was, mit Ausnahme der elastischen Flüssigkeiten, keinen erheblichen Fehler veranlasst, so kann man statt der richtigen Formeln die Näherungen:

$$\Delta = \frac{m}{m-m'} R'^3 Q - \frac{m'}{m-m'} R^3 q + \frac{m \cdot m'}{(m-m')^2} Q(i'-i)$$

$$M = m + mI - mi$$

anwenden.

Die Tafel, welche ich hier zur bequemeren Berechnung dieser Formeln mittheile, setzt voraus, dass atmosphärische Luft in der Temperatur des Eispunktes und unter dem Drucke von 0,76 Meter Quecksilber die specifische Schwere $\frac{13,59606}{10475,6} = \frac{1}{770,488}$ hat; der Zähler dieses Bruches ist die specifische Schwere des Quecksilbers nach Brisson's Versuchen, und Hallström's Rechnung; der Nenner ist das von den Herren Biot und Arago gefundene Verhältniss der Dichtigkeiten der Luft und des Quecksilbers. Hieraus folgt für die in Pariser Linien ausgedrückte und auf die Dichte des Quecksilbers in der Temperatur des Eispunktes reducirte Barometerhöhe b und die Temperatur der Luft t:

$$q = \frac{1}{770,488} \cdot \frac{b}{0,76 \times 443,296} \cdot \frac{1}{1 + t \,.\, 0,00375}$$

$$= \frac{b}{259581\,(1 + t \,.\, 0,00375)}$$

Nimmt man die Gewichte von Messing an, ihre specifische Schwere $= 8,4$ und ihre Längenausdehnung für jeden Centesimalgrad des Thermometers $= 0,000018785$, so erhält man hieraus

$$i = \alpha \,.\, b,$$

wo

$$\alpha = \frac{(1 + t \,.\, 0,000018785)^3}{8,4 \times 259581\,(1 + t \,.\, 0,00375)}$$

gesetzt worden ist. Den Logarithmen dieses α enthält die erste Columne der Tafel, deren Argument der Centesimalgrad des Thermometers ist. Es versteht sich, dass man i' eben so erhält, wenn man den Barometerstand und die Lufttemperatur zur Zeit der Abwägung in Wasser anwendet.

Setzt man die Ausdehnung des gewogenen Körpers für jeden Grad des Thermometers $= k$, so ist

$$I = \frac{\beta \,.\, b\,(1 + tk)^3}{\Delta}$$

und die zweite Columne der Tafel enthält den Logarithmen von

$$\beta = \frac{1}{259581\,(1 + t \,.\, 0,00375)}.$$

Mit diesen beiden Columnen reicht man aus, wenn Δ

gegeben ist. Soll es aber durch Abwägung in Wasser erst gefunden werden, so gebraucht man noch Q. Herr HALLSTRÖM in Åbo hat Untersuchungen über die specifische Schwere des Wassers wiederholt angestellt und neuerlich seine letzten Resultate in den Schwedischen Abhandlungen für 1823 mitgetheilt, wovon im 77. Bande der Annalen der Physik von POGGENDORFF eine Uebersetzung in unsere Sprache erschienen ist, welche eine Tafel für Q für jeden Grad des Thermometers enthält. Von diesen Werthen von Q gebe ich in der dritten Columne meiner Tafel die Logarithmen, zu welchen also $3 \log (1+tk)$ zu addiren ist, um $\log R'^3 Q$ zu erhalten; den Logarithmen von $R^3 q$ erhält man, indem man $\log b + 3 \log (1+tk)$ zu dem Logarithmen von β addirt.

Hierbei ist die specifische Schwere der Gewichte von Messing als bekannt angenommen $= 8{,}4$; es ist aber bekannt, dass dieselbe ziemlich verschieden ausfällt, je nachdem dieses Metall verschieden zusammengesetzt und bearbeitet ist. Will man daher alle mögliche Genauigkeit der Reductionen erhalten, so wird man δ für die Gewichte selbst durch eine Wägung in Wasser bestimmen müssen. Bringt man das Gewicht m im Wasser mit dem Gewichte m' in der Luft in Gleichgewicht, so ist

$$m \left\{1 - \frac{r^3 Q}{\delta}\right\} = m' \left\{1 - \frac{r'^3 q'}{\delta}\right\}$$

woraus

$$\delta = \frac{m r^3 Q - m' r'^3 q'}{m - m'}$$

folgt. Um auch hier leichter rechnen zu können, habe ich den Logarithmen von $r^3 Q$ in die vierte Columne der Tafel gebracht; $\log r'^3 q'$ ist $= \log \alpha + \log b + 0{,}92428$. Sobald δ bekannt geworden ist, hat man der ersten Columne der Tafel die beständige Verbesserung

$$0{,}92428 - \log \delta$$

hinzuzufügen.

Tafel zur Reduction der Abwägungen.

Therm. Cent.	log α	Diff.	log β	Diff.	log Q	Diff.	log $r^3 Q$	Diff.
0°	3,66145		4,58573		9,9999530		9,9999530	
		— 160		— 162		+ 201		+ 446
1	3,65985		4,58411		9,9999731		9,9999976	
		— 160		— 163		+ 146		+ 390
2	3,65825		4,58248		9,9999877		0,0000366	
		— 159		— 161		+ 89		+ 334
3	3,65666		4,58087		9,9999966		0,0000700	
		— 158		— 161		+ 32		+ 277
4	3,65508		4,57926		9,9999998		0,0000977	
		— 158		— 160		— 20		+ 225
5	3,65350		4,57766		9,9999978		0,0001202	
		— 157		— 159		— 75		+ 169
6	3,65193		4,57607		9,9999903		0,0001371	
		— 156		— 159		— 132		+ 113
7	3,65037		4,57448		9,9999771		0,0001484	
		— 156		— 159		— 186		+ 58
8	3,64881		4,57289		9,9999585		0,0001542	
		— 156		— 158		— 238		+ 7
9	3,64725		4,57131		9,9999347		0,0001549	
		— 154		— 157		— 292		— 47
10	3,64571		4,56974		9,9999055		0,0001502	
		— 155		— 156		— 345		— 100
11	3,64416		4,56818		9,9998710		0,0001402	
		— 153		— 157		— 397		— 153
12	3,64263		4,56661		9,9998313		0,0001249	
		— 153		— 155		— 451		— 206
13	3,64110		4,56506		9,9997862		0,0001043	
		— 153		— 155		— 503		— 258
14	3,63957		4,56351		9,9997359		0,0000785	
		— 153		— 155		— 554		— 309
15	3,63804		4,56196		9,9996805		0,0000476	
		— 151		— 154		— 602		— 357
16	3,63653		4,56042		9,9996203		0,0000119	
		— 150		— 153		— 656		— 412
17	3,63503		4,55889		9,9995547		0,9999707	
		— 151		— 153		— 707		— 462
18	3,63352		4,55736		9,9994840		0,9999245	
		— 150		— 152		— 756		— 512
19	3,63202		4,55584		9,9994084		0,9998733	
		— 149		— 152		— 807		— 562
20	3,63053		4,55432		9,9993277		0,9998171	
		— 149		— 151		— 853		— 608
21	3,62904		4,55281		9,9992424		0,9997563	
		— 148		— 151		— 906		— 662
22	3,62756		4,55130		9,9991518		0,9996901	
		— 148		— 150		— 952		— 707
23	3,62608		4,54980		9,9990566		0,9996194	
		— 147		— 150		— 1002		— 757
24	3,62461		4,54830		9,9989564		0,9995437	
		— 147		— 149		— 1051		— 807
25	3,62314		4,54681		9,9988513		0,9994630	

143. Reduction beobachteter Barometerhöhen auf Pariser Maass und die Dichte des Quecksilbers beim Eispunkte.

(Königsberger Beobacht. 12. Abth. p. IV.)

Ich nehme an, dass das Barometer eine Scale von Messing hat und dass die Längen derselben bei den Temperaturen des Eis- und Siedepunktes im Verhältnisse $1 : 1 + \alpha$ sind, ferner die Dichten des Quecksilbers bei denselben Temperaturen im Verhältnisse $1 + \beta : 1$. Bezeichnet b die abgelesene Barometerhöhe, in einem Maasse dessen Einheit $= k$ Pariser Linien ist, t und t' die Temperaturen des Quecksilbers und der Scale, τ die Temperatur, bei welcher die letztere ihre wahre Länge erhält, alle drei vom Gefrierpunkte an gerechnet und auf diejenige Thermometerscale bezogen, welche sich am Barometer befindet und welche den Zwischenraum zwischen beiden festen Punkten in 80, 100 oder 180, allgemein in n Theile theilt, so ist das wahre Pariser Maass der abgelesenen Höhe

$$= kb \cdot \frac{n + t'\alpha}{n + \tau\alpha}$$

und die auf die Dichte des Quecksilbers beim Eispunkte reducirte Barometerhöhe:

$$b' = kb \cdot \frac{n + t'\alpha}{n + \tau\alpha} \cdot \frac{n}{n + t\beta}$$
$$= \left(\frac{n + t\alpha}{n + t\beta}\right)\left(1 + \frac{(t' - t)\alpha}{n + t\alpha}\right)\left(\frac{kbn}{n + \tau\alpha}\right).$$

Nach dieser Formel kann man logarithmische Reductionstafeln berechnen, welche aber am bequemsten sein werden, wenn man sie so einrichtet, dass die Differenzen der Logarithmen von b' den Differenzen des Arguments nahe gleich werden, wodurch man die leichteste Interpolation erlangt. Dieses geschieht, wenn man nicht die gewöhnlichen Logarithmen, sondern die zu dem Systeme gehörigen nimmt, dessen Modul etwa die mittlere Barometerhöhe ist; ich habe 336 dafür angenommen. Nimmt man die Logarithmen in diesem Systeme, so ist das erste Glied der Formel:

$$336 + \log\frac{b'}{336} = \log\left(\frac{n + t\alpha}{n + t\beta}\right) + \log\left(1 + \frac{(t' - t)\alpha}{n + t\alpha}\right)$$
$$+ 336 + \log\left(\frac{kbn}{336\,(n + \tau\alpha)}\right)$$

für Werthe von b', welche von 336 Linien wenig verschieden sind, nahe $= b'$, so dass, wenn man $b' - x$ dafür schreibt, x eine kleine Quantität ist. Man muss nun drei Tafeln berechnen, welche enthalten:

*) [Aus 222 d. a. Verz.]

Argument.

I. $T = \log\left(\frac{n + t\alpha}{n + t\beta}\right) + \log\left(1 + \frac{(t' - t)\alpha}{n + t\alpha}\right)$ . . t und t'

II. $B = 336 + \log\left(\frac{kbn}{336\,(n + \tau\alpha)}\right)$ . . . . . b

III. $x = b' - 336 - \log\left(\frac{b'}{336}\right)$ . . . . . $B + T$.

Die erste dieser Tafeln besteht aus zwei Theilen, allein sie darf für den zweiten keine besondere Columne enthalten, indem er stets $t' - t$ proportional angenommen werden kann, selbst wenn man die Genauigkeit der Rechnung über die Tausendtel der Linien hinaustreiben wollte, was doch, wie es scheint, kein Interesse haben kann.

Die erste der so eingerichteten hier folgenden Tafeln [p. 237] ist für die drei gebräuchlichen Thermometerscalen berechnet; sie setzt $\alpha = 0{,}0018782$ nach Lavoisier und Laplace, und $\beta = 0{,}018018\ldots$ nach Dulong und Petit voraus. Die zweite [p. 238] ist für in Pariser Linien, Meter und Englische Zolle getheilte Barometerscalen brauchbar und enthält also resp.

$$336 + \log\frac{b}{336\,(1 + \alpha \,.\, 0{,}1625)}$$
$$336 + \log\frac{443{,}2958 \,.\, b}{336}$$
$$336 + \log\frac{b}{28 \times 1{,}065765\,(1 + \alpha \,.\, 0{,}1666\ldots.)}$$

Nachdem aus der ersten T und aus der zweiten B genommen ist, gibt die dritte mit dem Argumente $B + T$ die noch hinzuzufügende Verbesserung x. Die Summe ist das gesuchte b'.

Das (oben erwähnte) Newman'sche Barometer [der Königsberger Sternwarte] kann aber nicht nach dieser Tafel auf Pariser Linien und die Dichte des Quecksilbers beim Eispunkte reducirt werden, indem es ein Gefässbarometer ist, dessen Höhe nicht vom unteren Niveau des Quecksilbers an gerechnet, sondern an einer festen Scale beobachtet wird, so dass die Veränderung des Niveaus im Gefässe aus den inneren Weiten desselben und der Röhre, und dem vom Verfertiger angemerkten Stande des Barometers, bei welchem der Anfangspunkt der Scale mit dem Niveau zusammenfiel, berechnet werden muss. Dieser war, nach einer auf dem Instrumente selbst verzeichneten Notiz, 29,904 Zolle, bei der Tem-

peratur von 60° Fahrenheit. Der Raum in der Röhre verhält sich zu dem ausser derselben wie 1 : 46. Die Verbesserung wegen der Capillarität ist $= +0{,}044$ Zoll angegeben. Die Scale ist auf einer auf der hölzernen Fassung der Röhre befestigten Messingplatte verzeichnet, so dass ihre Ausdehnung durch die Wärme die des Holzes ist, welches man nicht kennt und daher vernachlässigen muss. Das Gefäss ist von Gusseisen.

Die Reduction der Beobachtungen eines solchen Barometers hängt, ausser von den angegebenen, noch von einigen andern Elementen ab. Wenn h die Höhe des Gefässes, vom Boden bis zu dem oberen Rande, wo Röhre und Scale befestigt sind, a die Länge des Theils der Röhre unterhalb der Befestigung, k der Punkt der Scale wo das Gefäss befestigt ist, d den inneren, δ den äusseren Querschnitt der Röhre, D den inneren des Gefässes bezeichnen und diese Bezeichnungen für die Temperatur gelten, bei welcher die Berichtigung des Barometers gemacht ist, so hat man den Ausdruck des, bei den auf dem Instrumente bemerkten Umständen, vom Quecksilber gefüllten Raums:

$$V = (29{,}904 + h - k)\,d + (h-k)(D-\delta) + (h-a)(\delta-d).$$

Wenn dieselben Grössen, bei einer anderen Temperatur, durch h', a', k, d', δ', D' angedeutet werden, das obere Ende der Quecksilbersäule aber dem Punkt s der Scale, das untere S entspricht, so ist alsdann:

$$V' = (s + h' - k)\,d' + (S + h' - k)(D' - \delta') + (h' - a')(\delta' - d').$$

Allein $s - S$ ist die [um] den Einfluss der Capillarität verminderte Barometerhöhe $= b - c$, oder $S = s - b + c$; ferner ist

$$\frac{V}{1+28\beta} = \frac{V'}{1+t\beta'},$$

wo β die Ausdehnung des Quecksilbers für jeden Grad des Fahrenheit'schen Thermometers, 28 und t die Anzahl der Thermometergrade über dem Gefrierpunkte bei der Berichtigung und bei der Beobachtung bezeichnen.

Tafel I.*)

Réaumur.			Centesimal.			Fahrenheit.					
t	T	Diff.	t	T	Diff.	t	T	Diff.	t	T	Diff.
− 24°	+ 1,632		− 24°	+ 1,305		− 18°	+ 1,511		+ 34°	− 0,060	
		− 137			− 109			− 61			− 60
− 22	+ 1,495		− 22	+ 1,196		− 16	+ 1,450		+ 36	− 0,120	
		− 136			− 109			− 61			− 61
− 20	+ 1,359		− 20	+ 1,087		− 14	+ 1,389		+ 38	− 0,181	
		− 136			− 109			− 60			− 60
− 18	+ 1,223		− 18	+ 0,978		− 12	+ 1,329		+ 40	− 0,241	
		− 136			− 109			− 61			− 60
− 16	+ 1,087		− 16	+ 0,869		− 10	+ 1,268		+ 42	− 0,301	
		− 136			− 109			− 60			− 60
− 14	+ 0,951		− 14	+ 0,760		− 8	+ 1,208		+ 44	− 0,361	
		− 136			− 108			− 61			− 60
− 12	+ 0,815		− 12	+ 0,652		− 6	+ 1,147		+ 46	− 0,421	
		− 136			− 109			− 60			− 61
− 10	+ 0,679		− 10	+ 0,543		− 4	+ 1,087		+ 48	− 0,482	
		− 136			− 109			− 61			− 60
− 8	+ 0,543		− 8	+ 0,434		− 2	+ 1,026		+ 50	− 0,542	
		− 136			− 108			− 60			− 60
− 6	+ 0,407		− 6	+ 0,326		0	+ 0,966		+ 52	− 0,602	
		− 136			− 109			− 61			− 60
− 4	+ 0,271		− 4	+ 0,217		+ 2	+ 0,905		+ 54	− 0,662	
		− 135			− 108			− 60			− 60
− 2	+ 0,136		− 2	+ 0,109		+ 4	+ 0,845		+ 56	− 0,722	
		− 136			− 109			− 61			− 60
0	0,000		0	0,000		+ 6	+ 0,784		+ 58	− 0,782	
		− 136			− 108			− 60			− 60
+ 2	− 0,136		+ 2	− 0,108		+ 8	+ 0,724		+ 60	− 0,842	
		− 135			− 109			− 60			− 60
+ 4	− 0,271		+ 4	− 0,217		+ 10	+ 0,664		+ 62	− 0,902	
		− 136			− 108			− 61			− 60
+ 6	− 0,407		+ 6	− 0,325		+ 12	+ 0,603		+ 64	− 0,962	
		− 135			− 108			− 60			− 60
+ 8	− 0,542		+ 8	− 0,433		+ 14	+ 0,543		+ 66	− 1,022	
		− 135			− 109			− 61			− 60
+ 10	− 0,677		+ 10	− 0,542		+ 16	+ 0,482		+ 68	− 1,082	
		− 135			− 108			− 60			− 60
+ 12	− 0,812		+ 12	− 0,650		+ 18	+ 0,422		+ 70	− 1,142	
		− 135			− 108			− 60			− 60
+ 14	− 0,947		+ 14	− 0,758		+ 20	+ 0,362		+ 72	− 1,202	
		− 135			− 108			− 61			− 60
+ 16	− 1,082		+ 16	− 0,866		+ 22	+ 0,301		+ 74	− 1,262	
		− 135			− 108			− 60			− 60
+ 18	− 1,217		+ 18	− 0,974		+ 24	+ 0,241		+ 76	− 1,322	
		− 135			− 108			− 60			− 60
+ 20	− 1,352		+ 20	− 1,082		+ 26	+ 0,181		+ 78	− 1,382	
		− 135			− 108			− 60			− 60
+ 22	− 1,487		+ 22	− 1,190		+ 28	+ 0,121		+ 80	− 1,442	
		− 135			− 108			− 61			− 60
+ 24	− 1,622		+ 24	− 1,298		+ 30	+ 0,060		+ 82	− 1,502	
					− 108			− 60			− 60
			+ 26	− 1,406		+ 32	0,000		+ 84	− 1,562	
								− 60			− 60
						+ 34	− 0,060		+ 86	− 1,622	
Zweiter Theil von T $= +0{,}0079\,(t'-t)$			Zweiter Theil von T $= +0{,}0063\,(t'-t)$			Zweiter Theil von T $= +0{,}0035\,(t'-t)$					

*) [Im Original von Grad zu Grad fortschreitend.]

Man erhält hieraus die auf die Dichte des Quecksilbers beim Eispunkte reducirte Barometerhöhe:

$$b' = \frac{s+c}{1+t\beta} + \frac{d'(s+h'-k)+(D'-\delta')(h'-k)+(\delta'-d')(h'-a')}{(D'-\delta')(1+t\beta)} - \frac{d(29{,}904+h-k)+(D-\delta)(h-k)+(\delta-d)(h-a)}{(D'-\delta')(1+28\beta)}$$

Bezeichnet man die Ausdehnung des Eisens für jeden Grad des Thermometers durch α, die des Glases durch α', so hat man:

$$h' = h + h.\ \alpha\,(t-28)$$
$$a' = a + a.\ \alpha'(t-28)$$
$$D' = D + D.\,2\alpha\,(t-28)$$
$$\delta' = \delta + \delta.\,2\alpha'(t-28)$$
$$d' = d + d.\,2\alpha'(t-28)$$

und wenn man diese substituirt und kleine Quantitäten, welche auf die Reduction keinen merklichen Einfluss haben, vernachlässigt:

$$b' = \frac{s\left(1+\frac{2d\alpha'}{D-\delta}(t-28)\right)+c+(s-29{,}904)\frac{d}{D-\delta}\left(1-\frac{2D}{D-\delta}\alpha(t-28)+\frac{2\delta}{D-\delta}\alpha'(t-28)\right)}{1+t\beta} - 29{,}904\,\beta\frac{d}{D-\delta}(t-28) - \left\{h(\beta-3\alpha)\frac{D}{D-\delta} - k(\beta-2\alpha)\frac{D}{D-\delta} + k(\beta-2\alpha')\frac{\delta-d}{D-\delta} + a(\beta-3\alpha')\frac{\delta-d}{D-\delta}\right\}(t-28)$$

Nach der Angabe ist $D-\delta = 46\,d$; δ scheint etwa $= 4\,d$ zu sein; α nehme ich $= 0{,}00000633$, $\alpha' = 0{,}00000431$, $\beta = 0{,}0001001$. Hiermit wird

Tafel II.

Pariser Linien.			Metrische Scale.*)			Englische Zolle.		
b	B	Diff.	b	B	Diff.	b	B	Diff.
318	317,397		0,718	317,802		28,0	314,494	
		1 + 0,055			935			1,198
319	318,452		0,720	318,737		28,1	315,692	
		1 + 0,052			932			1,194
320	319,504		0,722	319,669		28,2	316,886	
		1 + 0,048			929			1,189
321	320,552		0,724	320,598		28,3	318,075	
		1 + 0,045			927			1,185
322	321,597		0,726	321,525		28,4	319,260	
		1 + 0,042			925			1,181
323	322,639		0,728	322,450		28,5	320,441	
		1 + 0,039			922			1,177
324	323,678		0,730	323,372		28,6	321,618	
		1 + 0,035			919			1,173
325	324,713		0,732	324,291		28,7	322,791	
		1 + 0,033			917			1,168
326	325,746		0,734	325,208		28,8	323,959	
		1 + 0,029			913			1,165
327	326,775		0,736	326,121		28,9	325,124	
		1 + 0,026			913			1,161
328	327,801		0,738	327,034		29,0	326,285	
		1 + 0,023			909			1,156
329	328,824		0,740	327,943		29,1	327,441	
		1 + 0,019			907			1,153
330	329,843		0,742	328,850		29,2	328,594	
		1 + 0,017			904			1,149
331	330,860		0,744	329,754		29,3	329,743	
		1 + 0,014			902			1,145
332	331,874		0,746	330,656		29,4	330,888	
		1 + 0,010			900			1,140
333	332,884		0,748	331,556		29,5	332,028	
		1 + 0,007			897			1,138
334	333,891		0,750	332,453		29,6	333,166	
		1 + 0,005			895			1,133
335	334,896		0,752	333,348		29,7	334,299	
		1 + 0,002			892			1,129
336	335,898		0,754	334,240		29,8	335,428	
		1 − 0,002			891			1,126
337	336,896		0,756	335,131		29,9	336,554	
		1 − 0,004			887			1,122
338	337,892		0,758	336,018		30,0	337,676	
		1 − 0,008			886			1,118
339	338,884		0,760	336,904		30,1	338,794	
		1 − 0,010			883			1,114
340	339,874		0,762	337,787		30,2	339,908	
		1 − 0,013			880			1,111
341	340,861		0,764	338,667		30,3	341,019	
		1 − 0,016			879			1,107
342	341,845		0,766	339,546		30,4	342,126	
		1 − 0,019			876			1,104
343	342,826		0,768	340,422		30,5	343,230	
		1 − 0,022			874			1,099
344	343,804		0,770	341,296		30,6	344,329	
		1 − 0,025			871			1,097
345	344,779		0,772	342,167		30,7	345,426	
		1 − 0,027			870			1,092
346	345,752		0,774	343,037		30,8	346,518	
		1 − 0,031			867			1,089
347	346,721		0,776	343,904		30,9	347,607	
		1 − 0,033			865			1,086
348	347,688		0,778	344,769		31,0	348,693	
			0,780	345,631	862			
			0,782	346,492	861			
			0,784	347,450	858			

Tafel III.

$B+T$	x	Diff.
316	+ 0,584	
317	+ 0,527	− 57
318	+ 0,474	− 53
319	+ 0,423	− 51
320	+ 0,375	− 48
321	+ 0,330	− 45
322	+ 0,288	− 42
323	+ 0,248	− 40
324	+ 0,212	− 36
325	+ 0,178	− 34
326	+ 0,147	− 31
327	+ 0,120	− 27
328	+ 0,095	− 25
329	+ 0,073	− 22
330	+ 0,053	− 20
331	+ 0,037	− 16
332	+ 0,024	− 13
333	+ 0,013	− 11
334	+ 0,006	− 7
335	+ 0,001	− 5
336	0,000	− 1
337	+ 0,001	+ 1
338	+ 0,006	+ 5
339	+ 0,013	+ 7
340	+ 0,024	+ 11
341	+ 0,037	+ 13
342	+ 0,054	+ 17
343	+ 0,073	+ 19
344	+ 0,096	+ 23
345	+ 0,122	+ 26
346	+ 0,150	+ 28
347	+ 0,182	+ 32
348	+ 0,217	+ 35
349	+ 0,255	+ 38
350	+ 0,296	+ 41

*) [Im Original Argument Millimeter.]

$$b' = \frac{1\{1 + 0{,}00000019\,(t-28)\} + 0{,}044 + \frac{1}{46}(s - 29{,}904)\{1 - 0{,}000013\,(t-28)\}}{1 + t\,.\,0{,}0001001} - 0{,}0000651\,(t-28)$$
$$- \{h\,.\,0{,}000088 - k\,.\,0{,}000089 + a\,.\,0{,}000006\}(t-28)$$

Der von h, k, a abhängige Theil dieser Formel ist, wenn die Temperatur nicht nahe dieselbe ist, welche bei der Berichtigung stattgefunden hat, von merklichem Einflusse; man sollte wenigstens $h - k$ kennen, um eine richtigere Reduction der Beobachtungen zu erhalten. Da der Werth davon aber nicht angegeben ist, auch das Gefäss des Barometers nicht geöffnet werden kann, so ist vorläufig nichts anderes übrig geblieben, als $h - k$ willkürlich anzunehmen; ich habe 2 Zoll dafür gesetzt, indem dieser Werth mit der Form und Grösse des Gefässes vereinigt werden kann; allein durch Vergleichung des Barometers bei sehr verschiedenen Temperaturen mit einem anderen, welches sich vollständig reduciren lässt, wird man den unbekannten Einfluss von $h - k$ näher bestimmen können. Indessen kann man die Formel abkürzen, ohne dass dadurch ein Fehler erzeugt wird, welcher einige Zehntausendtheile eines Zolles übersteigt. Ich habe dieses, indem die Reduction ohnehin auf einer hypothetischen Annahme beruht, gethan und die Formel

$$b' = \frac{s + 0{,}0507 + \frac{1}{46}(s - 29{,}904) - 0{,}0002411\,.\,t}{1 + t\,.\,0{,}0001001}$$

angewandt.

---

144. Bemerkungen über eine angenommene Atmosphäre des Mondes.*)

(Astron. Nachr. **11**, p. 411.)

Es ist so häufig von einer Atmosphäre des Mondes die Rede gewesen, dass es einiges Interesse hat, auf eine zwar nicht neue, aber dennoch nicht gehörig durch den Calcul verfolgte Bemerkung, welche dem Dasein einer Atmosphäre von einigermassen erheblicher Dichtigkeit zu widersprechen scheint, zurückzukommen. Es ist nämlich längst bekannt, dass das Licht eines Fixsterns, in dem Augenblicke in welchem er den Mondrand berührt, nicht merklich von seiner geradlinigen Bewegung abgelenkt wird. Man erkennt dieses aus der Vergleichung der beiden Werthe des Mondhalbmessers, welche man einerseits aus directer Messung, andrerseits aus der Dauer des Verweilens vor einem Fixsterne, ableiten kann; wäre eine Strahlenbrechung am Rande des Mondes vorhanden, so müsste die zweite Bestimmung den Halbmesser um das Doppelte derselben kleiner ergeben als die erste, wogegen aber beide Bestimmungen so nahe übereinstimmen, dass man keinen entschiedenen Unterschied derselben hat finden können.

Um dem Monde dennoch eine Atmosphäre zuzuschreiben, muss man sie entweder als unfähig die Strahlen zu brechen annehmen, oder man muss behaupten, dass der Rand des Mondes mit Bergen besetzt und deren Höhe so beträchtlich sei, dass die Sterne, indem sie an dem Rande derselben verschwinden und wiedererscheinen, durch eine schon so verdünnte Schichte der Atmosphäre gesehen werden, dass sie daselbst keine merkliche Strahlenbrechung mehr erleiden. Die erste Annahme schneidet offenbar alle weiteren Erörterungen ab, verstösst aber wohl zu sehr gegen die Analogie aller uns bekannten Flüssigkeiten, als dass man sie für richtig zu halten geneigt sein könnte; die zweite ist von den Vertheidigern der Mondatmosphäre wirklich gemacht worden. Indessen haben sie unterlassen, die Dichtigkeiten der Atmosphäre in der Höhe der angenommenen Randgebirge und an der Oberfläche des Mondes mittelst des Mariotte'schen Gesetzes mit einander zu vergleichen, und daher, ohne ihren Glauben rechtfertigen zu können, geglaubt, dass trotz des Mangels oder der Unerheblichkeit der Strahlenbrechung in der Höhe der angenommenen Gebirge, die Atmosphäre an der Oberfläche des Mondes selbst eine erhebliche Dichtigkeit, welche SCHRÖTER auf $\frac{1}{29}$ der Dichtigkeit unserer Luft schätzt, haben könne. Was hier vermisst wird, werde ich jetzt zu ergänzen suchen.

Wenn die Atmosphäre des Mondes eine elastische Flüssigkeit ist, deren Dichte sich zu der Dichte unserer Luft, beide unter gleichem Drucke und in gleicher Temperatur angenommen, wie λ zu 1 verhält, so ist ihre Dichte unter demselben Drucke, welchen eine Quecksilbersäule von 336,905 Linien (= 0,76 Meter) Höhe auf der Oberfläche der Erde äussert, und in der Temperatur des schmelzenden Eises, den Versuchen von BIOT und ARAGO zufolge

$$= \frac{\lambda}{10466{,}8}$$

wobei die Dichte des Quecksilbers in der Temperatur des schmelzenden Eises zur Einheit angenommen ist.

*) [277 d. a. Verz. — Br. m. O. II. 321, 326 (O.), 335 (O.), 383, 386 (O.), 394 (O.).]

Wenn aber der Druck dem Drucke, welchen eine Quecksilbersäule von der Höhe p auf der Oberfläche der Erde äussert, gleich und die Temperatur $= t$ Graden der Centesimalscale wird, so ist die Dichte, dem Mariotte'schen Gesetze und der sich für alle Gasarten bewährenden gleichen Ausdehnbarkeit durch die Wärme zufolge:

$$\varrho = \frac{p}{336{,}905} \cdot \frac{\lambda}{10466{,}8} \cdot \frac{1}{1+t.0{,}00375} \quad \ldots\ldots (1)$$

Bezeichnet man die von dem Mittelpunkte des Mondes an gezählte Entfernung der Schichte seiner Atmosphäre, für welche ϱ, p und t gültig sein sollen, durch r, den Halbmesser des Mondes durch a, den der Erde durch a', die Masse des Mondes in Theilen der Erdmasse ausgedrückt durch m, so ist ferner:

$$dp = -\varrho dr \cdot m \frac{a'a'}{rr} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Aus beiden Gleichungen zusammengenommen folgt

$$\frac{dp}{p} = \frac{ma'a'\lambda d\frac{1}{r}}{336{,}905 \times 10466{,}8\,[1+t.0{,}00375]}$$

und wenn man die Toise statt der Linie zur Maasseinheit nimmt und

$$l = \frac{336{,}905}{864} \cdot 10466{,}8 = 4081{,}39 \text{ Toisen}$$

setzt,

$$\frac{dp}{p} = \frac{ma'a'\lambda d\frac{1}{r}}{l[1+t.0{,}00375]} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Integrirt man dieses Differential von der Oberfläche des Mondes, oder von $r = a$ an, und bezeichnet man den Druck an dieser Oberfläche durch (p), so erhält man:

$$p = (p) e^{\frac{ma'a'\lambda}{l} \int_a^{} \frac{d\frac{1}{r}}{1+t.0{,}00375}}$$

und da der Formel (1) zufolge

$$\frac{\varrho\,[1+t.0{,}00375]}{(\varrho)\,[1+(t).0{,}00375]} = \frac{p}{(p)}$$

ist,

$$\varrho[1+t.0{,}00375] = (\varrho)[1+(t).0{,}00375] e^{\frac{ma'a'\lambda}{l} \int_a^{} \frac{d\frac{1}{r}}{1+t.0{,}00375}}$$

oder

$$(\varrho)[1+(t).0{,}00375] = \varrho[1+t.0{,}00375] e^{-\frac{ma'a'\lambda}{l} \int_a^{} \frac{d\frac{1}{r}}{1+t.0{,}00375}} \quad (4)$$

Diese Formel ergibt, wenn die Function von r, welche t ausdrückt, bekannt ist, so dass die angedeutete Integration ausgeführt werden kann, die Dichte der Atmosphäre an der Oberfläche des Mondes aus der als bekannt angenommenen, in einer gegebenen Entfernung r vom Mittelpunkte des Mondes stattfindenden. Man sieht leicht, dass für die erstere die grösstmögliche Grenze gefunden wird, wenn die Temperatur auf dem Monde nicht abnehmend mit der Höhe, sondern gleichförmig angenommen wird. Die Dichte der Atmosphäre an der Oberfläche des Mondes kann daher die Grenze

$$\varrho e^{-\frac{ma'a'\lambda}{l(1+t.0{,}00375)} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

wofür man näherungsweise, und indem man λ' für $\frac{\lambda}{1+t.0{,}00375}$ schreibt,

$$\varrho e^{\frac{ma'a'\lambda'}{laa}(r-a)} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

setzen kann, nicht überschreiten.

Die Relation zwischen der in der Höhe $r - a$ über der Oberfläche des Mondes stattfindenden horizontalen Strahlenbrechung R und der ebendaselbst stattfindenden Dichte ϱ der Atmosphäre ist mit hinreichender Annäherung in der Formel (Méc. Cél. IV. p. 252)

$$R = \alpha \sqrt{\frac{a\pi}{2l}}$$

enthalten. Die durch α bezeichnete Grösse ist das Product der Dichte der Atmosphäre in die Brechungskraft derselben multiplicirt; also wenn R sowohl als α in Secunden ausgedrückt werden, und wenn die Brechungskraft unserer atmosphärischen Luft als Einheit der Brechungskraft der Mondatmosphäre angenommen, oder die erstere zur letzteren im Verhältnisse $1:\mu$ gesetzt wird, so ist, nach der meinen Refractionstafeln zum Grunde liegenden Bestimmung der Constante, $\alpha = 60{,}''73\,\mu\varrho$ zu setzen. Statt des l der Formel ist hier

$$\frac{l}{\lambda}(1+t.0{,}00375) = \frac{l}{\lambda'}$$

zu schreiben; a ist der Halbmesser des Mondes, π die halbe Kreisperipherie. Man hat also

$$R = 60{,}''73\,\mu\varrho \sqrt{\frac{a\lambda'\pi}{2l}} \quad \ldots\ldots (6)$$

oder

$$\varrho = \frac{R}{60{,}''73\,\mu} \sqrt{\frac{2l}{a\lambda'\pi}}$$

wodurch die Grenze der Dichtigkeit der Atmosphäre an der Oberfläche des Mondes (5) sich in

$$\frac{R}{60{,}''73\,\mu} \sqrt{\frac{2l}{a\lambda'\pi}} \cdot e^{\frac{ma'a'\lambda'}{aal}(r-a)} \quad \ldots\ldots (7)$$

verwandelt. Nimmt man für a' den Halbmesser des Erdäquators $= 3271922{,}1$ Toisen, $a = 0{,}2725\,a'$, $m = \frac{1}{87{,}73}$, so wird diese Formel:

$$\frac{R}{\mu} \cdot \frac{1}{1125\sqrt{\lambda'}} \cdot e^{\frac{\lambda'(r-a)}{26598}} \quad \ldots\ldots (8)$$

Um hieraus ein Resultat ziehen zu können, muss ich die einzelnen Elemente der Formel näher betrachten. Einer unmittelbaren Bestimmung fähig ist die Horizontalstrahlenbrechung am Mondrande R. Die genügendste vorhandene Bestimmung des Halbmessers des Mondes, so

wie derselbe sich in den Vorübergängen vor anderen Himmelskörpern zeigt, scheint mir die von Herrn DE FERRER auf 8 Sonnenfinsternisse und Sternbedeckungen gegründete zu sein, deren Resultat (Conn. des Tems 1817 p. 319) den mittleren Werth dieses Halbmessers $= 15' 31,''69$ ergibt. Der von BURCKHARDT aus den Meridianbeobachtungen des Mondes gefolgerte Werth ist dagegen $= 15' 31,''95$. Der letztere überschreitet den ersteren um $0,''26$ und gibt also für R den kleinen, ganz in der Grenze der Unsicherheit der Bestimmungen liegenden Werth $0,''13$. Ich selbst habe ein paar günstige Gelegenheiten benutzt, den Halbmesser des Mondes in verschiedenen Richtungen gegen die Declinationskreise mit dem Heliometer zu messen und werde bei dieser Veranlassung die Resultate davon mittheilen. Ich wählte zu diesen Messungen die Zeiten der beiden Mondfinsternisse am 2. September 1830 und 26. December 1833, weil unmittelbar vor dem Anfange und nach dem Ende einer Mondfinsterniss die Erleuchtung des Mondes am vollständigsten ist; während der totalen Verdunkelung war beide Male der Himmel bewölkt. Die erste Finsterniss hat das, was man dem in den Ephemeriden von ENCKE angegebenen Halbmesser hinzusetzen muss, um ihn mit den Beobachtungen übereinstimmend zu machen, folgendermassen ergeben:

Positionswinkel	
0^0	$+0,''46$
30	$-0,08$
60	$+0,14$
90	$-0,41$
120	$-0,21$
150	$+0,12$

die zweite:

0	$+0,''82$
30	$+0,78$
60	$+0,83$
90	$+0,51$
120	$+0,88$
150	$+0,57$

Beide Messungsreihen lassen keinen Zweifel darüber, dass der Mond sehr nahe kreisförmig erscheint; die Uebereinstimmung der verschiedenen Halbmesser ist grösser, als die die Genauigkeit der Messungen beeinträchtigenden Ungleichheiten an dem Rande des Mondes vorher erwarten liessen. Ich führe dieses an, weil daraus hervorzugehen scheint, dass man trotz der Ungleichheiten des Randes, welche oft zwei Secunden übersteigen, den allgemeinen Zug desselben ziemlich sicher erkennen kann, und dass diese Beobachtungen nicht nöthigen, anzunehmen, dieser Zug des Randes habe an verschiedenen Stellen einen verschiedenen Halbmesser. Die erste Reihe ergibt den Halbmesser des Mondes, im Mittel, ganz übereinstimmend mit den (Burckhardt'schen) Tafeln; die zweite gibt ihn $0,''73$ grösser. Der Unterschied beider Reihen hat meiner Meinung nach seinen Grund in einer Unvollkommenheit der Tafeln in Beziehung auf die Parallaxe. Obgleich es bei so bewandten Umständen schwer sein wird, eine ganz sichere Bestimmung des Halbmessers des Mondes zu erhalten, so zweifle ich doch nicht, dass der Unterschied der durch Sternbedeckungen und durch directe Messungen bestimmten Halbmesser des Mondes nicht so weit bezweifelt werden kann, dass er in der Wirklichkeit $2''$ betrüge. Ich halte also die Annahme $R = 1''$ für die äusserste, deren weiterer Vergrösserung durch die Beobachtungen entschieden widersprochen wird.

Für $r - a$ (in der Formel (8)) sollte die Höhe über der Mondoberfläche gesetzt werden, in welcher die Verschwindungen und Wiedererscheinungen der Sterne sich ereignen, auf welche also die eben angeführte Bestimmung der Grenze von R sich bezieht. Diese Höhe muss beträchtlich kleiner sein als die Höhe der höchsten Berge des Mondes, denn man sieht den Rand, wie ich schon angeführt habe, noch mit Ungleichheiten besetzt, welches nicht sein könnte, wenn nur die höchsten Berge den Rand begrenzten. Die Berge, welchen SCHRÖTER die grösste Höhe von 4000 Toisen beilegt, hat er gerade am Rande gefunden, und auch ihre Höhen durch ihre Hervorragung über den allgemeinen Zug des Randes bestimmt. Man sieht also weder in den vorher angeführten Messungen, noch in dem Anblicke, den der Mondrand gewährt, und den SCHRÖTER durch seine Messungen der Randgebirge selbst anerkennt, einen Grund, welcher die Annahme rechtfertigte, dass die vom Monde bedeckt werdenden Sterne immer am hohen Gebirge verschwinden und wiedererscheinen; vielmehr ist bei Weitem wahrscheinlicher, dass am Rande sowohl als an anderen Theilen der Oberfläche Berg und Thal mit einander abwechseln und dass ein Fixstern sehr häufig im Thale verschwinden und im Thale wiedererscheinen wird, in welchem Falle die beobachtete Strahlenbrechung unmittelbar für die Oberfläche des Mondes gültig ist. Um indessen den Vertheidigern der Mondatmosphäre so viel zuzugeben, als sie irgend zu fordern geneigt sein können, will ich $r - a$ der angegebenen Höhe der höchsten Gebirge gleich, d. h. $= 4000$ Toisen annehmen.

Setzt man $\lambda' = 1$ und $\mu = 1$, oder nimmt man an, dass die Atmosphäre des Mondes aus unserer Luft besteht und dass sie die Temperatur des schmelzenden Eises besitzt, so ergibt die Formel (8) die Dichte an der Oberfläche, trotz der übertriebenen Werthe von R

und $r - a$, doch nicht grösser als $\frac{1}{968}$ der Dichte der Luft an der Oberfläche der Erde.

Die Herren BIOT und ARAGO haben indessen nicht bloss für die atmosphärische Luft, sondern für sieben verschiedene Gasarten sowohl λ als μ bestimmt. Ich habe alle diese Zahlen in die Formel gesetzt und gefunden, dass nur das Sauerstoffgas, für welches

$$\lambda = 1{,}10359\,,\ \mu = 0{,}86161$$

ist, eine Dichte gibt, welche die vorher bezeichnete überschreitet und bis auf $\frac{1}{968}$ steigt. Das Stickstoffgas gibt sie etwas kleiner, die übrigen Gasarten aber geben sie beträchtlich kleiner als atmosphärische Luft. In dieser Rechnung ist, wie ich schon gesagt habe, $t = 0$ gesetzt; gibt man ihm einen negativen Werth, so vergrössert derselbe die Dichte an der Oberfläche; allein man müsste $t = -240^0$ voraussetzen, um selbst die Dichte der Sauerstoffgasatmosphäre auf $\frac{1}{500}$ zu bringen.

Aus diesen Entwickelungen geht hervor, dass die Vereinbarkeit der unerheblichen oder ganz fehlenden Strahlenbrechung am Mondrande mit einer erheblichen Dichte der Atmosphäre an der wahren Oberfläche des Mondkörpers nicht so leicht zugegeben werden kann, als die Vertheidiger der Aehnlichkeiten des Mondes mit der Erde geglaubt haben. Ich weiss in der That kein Mittel, dem Monde eine Atmosphäre zu retten, als die Annahme einer nicht-strahlenbrechenden. Ob man sich lieber hierzu, oder zu der Aufsuchung neuer Erklärungen der Beobachtungen, aus welchen man das Vorhandensein der Atmosphäre gefolgert hat, entschliessen wird, muss ich erwarten.

Ohne mich selbst auf diese neuen Erklärungen einlassen zu wollen, werde ich doch Einiges über die zu erklärenden Beobachtungen bemerken. Die unzweideutigste scheint mir SCHRÖTER's Wahrnehmung einer schwachen Erleuchtung nahe an der Lichtgrenze gelegener Flächen zu sein; dieses schwache Licht schrieb er einer Dämmerung zu, welche nicht ohne Atmosphäre stattfinden kann; die Höhe der atmosphärischen Schichte, welche Dämmerungslicht noch zu verbreiten im Stande sei, bestimmte er aus der Ausdehnung des von ihm beobachteten Phänomens = 1313 Toisen. Auch zur Zeit einer Sonnenfinsterniss ist ihm nicht allein der Ausschnitt in der Sonnenscheibe, sondern auch der Rand des vorliegenden Mondes selbst erschienen, was er derselben Dämmerung zuschreibt. Die letzte Erklärung muss man meines Erachtens gänzlich zurückweisen, indem das helle Licht der Sonne die Anwendung eines Dämpfglases vor dem Fernrohre fordert, durch welches man keinen Theil des Mondes, wenn derselbe bei Tage am Himmel steht, selbst nicht den dem directen Sonnenlichte ausgesetzten, also noch viel weniger den durch schwache Dämmerung überdies auf der leuchtenden Sonnenscheibe selbst liegenden Rand, sehen kann. Wenn man demzufolge diese Erklärung hier nicht annehmen kann, so sehe ich keinen Grund, welcher zu der Annahme derselben Erklärung der ähnlichen, allein bei Nacht und in Berührung mit der Lichtgrenze wahrgenommenen schwachen Erleuchtung zwingen könnte. Wenn man aber die Aehnlichkeit beider Wahrnehmungen nicht anerkennen, sondern das gegen die Erklärung der einen Angeführte als die der anderen nicht schwächend ansehen will, so bleibt nur noch die Annahme einer das Licht nicht brechenden, wohl aber zurückwerfenden Atmosphäre möglich. Gegen eine Atmosphäre dieser Art spricht aber nicht nur, dass sie aller Analogie entbehrt, sondern auch die allen Beobachtern bekannte Art der Verschwindung und Wiedererscheinung eines Fixsterns am dunkeln Mondrande; das Licht desselben bleibt unmittelbar vor der ersteren und nach der anderen ungeschwächt, so dass ich wenigstens nie einen Stern anders verschwinden oder wiedererscheinen gesehen habe, als im vollen Glanze. Andere für Andeutungen einer Atmosphäre des Mondes angesehene Wahrnehmungen scheinen mir noch weniger unzweideutig zu sein. SCHRÖTER hat z. B. kleine, auf dem Monde vorhandene Gegenstände zu gewissen Zeiten nicht sehen können und erklärt diese Unsichtbarkeit derselben durch über ihnen liegende Wolken. Allein wer den Mond unter verschiedenen Beleuchtungen und in verschiedenen Lagen der Gesichtslinie betrachtet hat, wird zahllose Gegenstände bemerkt haben, welche bei diesen Umständen sichtbar, bei jenen unsichtbar sind. Da genau dieselben Umstände schwerlich je wiederkehren, so wird man ein Recht haben, zu fragen, wodurch die Sicherheit erlangt worden sei, dass die von SCHRÖTER zuweilen nicht wahrgenommenen nicht aus dieser Ursache, sondern durch Gewölk unsichtbar geworden seien?

Ich glaube, dass nach der Berücksichtigung dieser Zweifel gegen die Erklärungen der für Andeutungen einer Mondatmosphäre genommenen Wahrnehmungen kein Grund für das Dasein derselben übrig bleiben wird, welcher wahrscheinlicher wäre als der Grund, welchen die Unmerklichkeit der Strahlenbrechung am Mondrande gegen dieselbe gibt. Die Stärke dieses Grundes vollständig darzulegen war der Zweck dieses Aufsatzes, der übrigens nicht für Die geschrieben ist, welche ein Vergnügen darin finden, von Aehnlichkeiten zwischen dem Monde und der Erde zu träumen: darin wünsche ich sie durch mathematisches Raisonnement nicht zu stören.

145. Ueber Höhenbestimmungen durch das Barometer.*)

(Astron. Nachr. **12**, p. 241.)

Die Anwendung des Barometers zur Messung des Höhenunterschiedes zweier Punkte beruhet auf der Voraussetzung des Gleichgewichtes der Atmosphäre; sie würde nichts zu wünschen übrig lassen, wenn diese Voraussetzung mit vollem Rechte gemacht werden könnte. Dann könnte als wahr angenommen werden, dass die Höhe des Quecksilbers im Barometer dem Gewichte der über demselben befindlichen Luftsäule proportional wäre, während dieses nicht angenommen werden kann, wenn diese Luftsäule, oder ein Theil derselben, eine dem Horizonte nicht parallele Bewegung hat. Auch würden Schichten der Atmosphäre von gleicher Dichtigkeit horizontal sein, und man würde die Messung des Höhenunterschiedes zweier Punkte mit voller Sicherheit erhalten, diese Punkte möchten beide in einer Lothlinie, oder in kleinerer oder grösserer Entfernung von einander liegen. Bei dem Zustande der Atmosphäre, so wie er wirklich ist, ist nicht mit Sicherheit darauf zu rechnen, dass das Barometer das genaue Maass des Gewichtes der über demselben befindlichen Luftsäule angebe; noch viel weniger aber kann auf die Horizontalität der Luftschichten von gleicher Dichtigkeit gerechnet werden. Die Störungen dieser Horizontalität sind oft so gross und anhaltend, dass der aus den Beobachtungen eines ganzen Monats abgeleitete mittlere Unterschied der Barometerhöhen zweier, 30 oder 40 Meilen von einander entfernter Punkte, mehr als eine pariser Linie von der Wahrheit abweichen kann, wie unter anderen aus den sorgfältigen Beobachtungen dieser Art hervorgeht, welche die Astron. Nachrichten früher von Altona und von Apenrade mitzutheilen pflegten. Obgleich also das Barometer in keinem Falle eine völlig sichere Bestimmung des Höhenunterschiedes zweier Punkte geben kann, so wächst doch die Unsicherheit mit der Entfernung der miteinander zu vergleichenden Punkte so sehr, dass der Fall, in welchem sie in einer Lothlinie liegen, als der bei weitem vortheilhaftere angesehen werden muss.

Will man durch das Barometer den Höhenunterschied zweier Punkte mit mehr als roher Annäherung an die Wahrheit bestimmen, so muss man sich entweder auf Punkte beschränken, welche in geringen Entfernungen von einander liegen, oder man muss die Beobachtungen lange fortsetzen, um das Mittel der verschiedenen dabei vorkommenden Zustände der Atmosphäre, mit einigem Grunde, als den Zustand des Gleichgewichtes ansehen zu können. Hierdurch wird die Bestimmung der Höhen sehr vieler Punkte eines Landes von einigermassen beträchtlicher Ausdehnung sehr schwierig: wenn man auch nicht jeden derselben durch lange fortgesetzte Vergleichungen mit dem Punkte von bekannter Höhe, der den übrigen zur Grundlage dienen soll, bestimmen will, so ist doch wenigstens erforderlich, dass eine beträchtliche Zahl etwa gleichmässig im Lande vertheilter Punkte auf diese Art bestimmt und dann zur Vergleichung mit den übrigen benutzt werde. Dieses erfordert entweder die gleichzeitige Beschäftigung vieler Beobachter, oder eine lange Zeit, wenn wenige es leisten sollen.

Vor einigen Jahren wurde der Vorschlag gemacht, die Höhen der ausgezeichnetsten Punkte in dem diesseits der Weichsel liegenden Theile von Preussen zu bestimmen; man wollte die Höhen der Hügelreihen, der horizontalen Ebenen, der Landseen, das Gefälle der Flüsse und die Tiefen der Thäler kennen lernen. Da vorherzusehen war, dass die gewöhnliche Anwendungsart des Barometers, welche in der Vergleichung weniger Beobachtungen an den zu bestimmenden Punkten mit fortlaufenden an einem festen Punkte besteht, keinen nutzbaren Erfolg herbeigeführt haben würde, so bemühte ich mich, eine andere Anwendungsart aufzufinden, welche schon durch einige Besuche jedes zu bestimmenden Punktes ein sicheres Resultat liefern sollte. Obgleich der Vorschlag später zurückgenommen wurde, ich also nicht in den Stand gekommen bin, den Erfolg der Methode, welche ich angewandt zu sehen wünschte, kennen zu lernen, so zweifle ich doch nicht an ihrem Gelingen in ähnlichen Fällen und theile sie daher hier mit. Sie geht darauf aus, die Störungen des Gleichgewichtes der Atmosphäre unschädlicher zu machen, auch den beständigen Unterschieden der zu den Beobachtungen angewandten Barometer keinen Einfluss auf die Resultate einzuräumen.

Das erstere glaube ich durch eine zweckmässige Combination der Beobachtungen erlangen zu können, welche anhaltend an Barometern gemacht werden, welche an mehreren Punkten des Umfanges des Landes, in

*) [283 d. a. Verz. — S. auch Poggendorff's Annalen XXXVI, p. 187.]

dessen Inneren die Höhen bestimmt werden sollen, aufgestellt sind; das andere wird durch fortgesetzte Vergleichungen des tragbaren Barometers mit jenen, ihren Ort nicht verändernden, hervorgebracht. Diese letzteren geben nämlich, indem sie den Druck der Atmosphäre an mehreren Punkten bestimmen, das Mittel, ihn für Punkte im Inneren durch eine Interpolation kennen zu lernen, durch deren Anwendung der Einfluss einer Störung des Gleichgewichtes, wie ich glaube, fast ganz vernichtet werden kann. Die folgende Entwickelung dieser Ansicht der Sache wird sie weiter erläutern.

1.

Der zu einer gegebenen Zeit stattfindende Druck der Atmosphäre auf einen Punkt einer horizontalen Oberfläche ist von dem Orte des Punktes auf dieser Oberfläche abhängig; dieselbe Abhängigkeit findet auch bei der Wärme einer horizontalen Luftschichte statt, sowie auch bei jeder, auf den Stand der meteorologischen Instrumente, oder auf daraus zu ziehende Resultate wirkenden Störung des Gleichgewichtes der Atmosphäre. Indem man diese Abhängigkeit verfolgt, kann man den Einfluss der Störungen des Gleichgewichts auf die gesuchte Höhe eines Punktes über der Meeresfläche dadurch aus der Rechnung schaffen, dass man die daselbst beobachteten Stände des Barometers und Thermometers nicht mit Einer, an Einem anderen Punkte gemachten ähnlichen Beobachtung, sondern mit Beobachtungen an mehreren, den ersteren umgebenden Punkten vergleicht. Denn aus diesen Beobachtungen kann man durch Interpolation folgern, was die meteorologischen Instrumente an einem bestimmten Punkte der Lothlinie des Punktes von unbekannter Höhe angegeben haben würden, wenn man sie daselbst beobachtet hätte; die Vergleichung dieser reducirten Beobachtung mit der an dem zu bestimmenden Punkte wirklich gemachten ergibt dann seine Höhe über der Meeresfläche. Man erlangt hierdurch die Zurückführung des nachtheiligen Falles auf den vortheilhafteren, nämlich auf den Fall des senkrechten Uebereinanderliegens zweier zu vergleichender Punkte. Ich werde jetzt die anzuwendende Art der Interpolation aufsuchen.

Einen Punkt auf einer horizontalen Fläche, deren Erhöhung über der Meeresfläche ich durch z bezeichnen werde, werde ich durch die horizontalen, auf der Meeresfläche liegenden Coordinaten x und y (etwa Entfernungen von dem Meridiane und dem Perpendikel auf den Meridian eines gegebenen Punktes) angeben. Eine von dem Orte des Punktes auf der horizontalen Fläche abhängige Grösse u kann dann unter die Form:

$$u = A + Bx + Cy + Dxx + Exy + Fyy + \text{etc.} \ldots\ldots (1)$$

gebracht werden. Der Werth von u ist bestimmt, wenn die Coefficienten $A, B, C \ldots$ bekannt sind; es versteht sich jedoch, dass dieser Ausdruck, falls er nicht aus einer endlichen Anzahl von Gliedern besteht, nur für Werthe von x und y angewandt werden kann, welche nicht ausser den Grenzen seiner Convergenz liegen. Insofern die Theorie der Grösse u nicht als bekannt angesehen werden kann, kann über die Ausdehnung dieser Grenzen nichts bestimmt werden; allein es leuchtet ein, dass der Ausdruck, falls u wirklich eine stetige Function von x und y ist, immer innerhalb gewisser Grenzen convergirt, und dass man ihn selbst auf seine Glieder der ersten Ordnung beschränken kann, wenn man nur x und y so klein annimmt, dass die höheren Ordnungen keinen merklichen Einfluss mehr erhalten. Ich werde annehmen, dass diese Bedingung wirklich erfüllt werde und also

$$u = A + Bx + Cy \ldots\ldots\ldots (2)$$

setzen. Bis zu welcher Grenze diese Abkürzung statthaft ist, hängt von der Natur der Function u ab; wenn diese unbekannt ist, so können nur gemachte Beobachtungen der Werthe von u, für verschiedene Werthe von x und y, zeigen, ob diese die Grenze der Anwendbarkeit der Abkürzung überschreiten oder nicht.

Wenn man den Ausdruck von u auf seine drei ersten Glieder beschränkt, so reichen drei (an nicht in gerader Linie liegenden Punkten gemachte) Beobachtungen des Werthes von u zu seiner Bestimmung hin; mehrere Beobachtungen können benutzt werden, der Bestimmung von A, B, C grössere Sicherheit zu geben. Will man auch die Glieder der zweiten Ordnung berücksichtigen, so sind 6 Beobachtungen erforderlich, welche aber, wenn ihre Fehler die Bestimmung der Coefficienten nicht beträchtlich entstellen sollen, entweder sehr genau sein, oder zu grösseren Werthen von x und y gehören müssen; für solche Werthe von x und y würde aber der Zweifel über die Grösse des Einflusses der Glieder der dritten und folgenden Ordnungen eine neue Unsicherheit erzeugen. Ich bin daher der Meinung, dass man den Ausdruck auf die Glieder der ersten Ordnung beschränken, und wo man mit diesen nicht ausreicht, auf seine Anwendung ganz Verzicht leisten müsse. Durch diese Beschränkung wird auch die Schwierigkeit, die zur Bestimmung von u nöthige Anzahl von Beobachtungen herbeizuschaffen, so viel wie möglich verkleinert.

Indem nun u die Entfernung des durch x und y bestimmten Punktes einer Ebene von einer anderen

Ebene wird, läuft die Voraussetzung des Ausdruckes (2) darauf hinaus, die Grösse u, aus deren beobachteten Werthen auf andere geschlossen werden soll, als durch eine gegen den Horizont geneigte Ebene begrenzt anzunehmen. Wenn man, wie bisher, nur die Beobachtung Einer Barometerhöhe zur Vergleichung mit einer anderen anwendet, so sieht man u als unveränderlich $= A$, oder Luftschichten von gleicher Dichtigkeit als horizontal an; wenn man dagegen meine Ansicht verfolgt, also wenigstens drei Beobachtungen zur Vergleichung anwendet, so leistet man dadurch auf die Annahme der Horizontalität dieser Schichten Verzicht. Durch diese Bemerkung wird anschaulich, von welcher Art der Gewinn ist, den ich herbeizuführen beabsichtige.

Ich werde mich nicht auf drei Vergleichungspunkte beschränken, sondern eine willkürlich grössere Zahl derselben ($= n$) annehmen und die ihnen zugehörigen Werthe von x und y durch a', b'; a'', b''; .... $a^{(n)}$, $b^{(n)}$; sowie die beobachteten Werthe von u durch m', m'', ... $m^{(n)}$ bezeichnen. Man hat also A, B, C so zu bestimmen, dass die Summe der Quadrate der Grössen

$$\begin{aligned} &m' - A - Ba' - Cb' \\ &m'' - A - Ba'' - Cb'' \\ &\quad\vdots \\ &m^{(n)} - A - Ba^{(n)} - Cb^{(n)} \end{aligned}$$

ein Minimum wird. Aus dieser Bedingung folgen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} (m) &= n\,A + (a)\,B + (b)\,C \\ (am) &= (a)A + (aa)B + (ab)C \\ (bm) &= (b)A + (ab)B + (bb)\,C \end{aligned}$$

welche man aber vereinfachen kann, wenn man $(a) = 0$ und $(b) = 0$ setzt, oder den Mittelpunkt der Coordinaten in den Schwerpunkt sämmtlicher Beobachtungspunkte verlegt. Sie verwandeln sich dann in:

$$\begin{aligned} (m) &= n\,A \\ (am) &= (aa)B + (ab)C \\ (bm) &= (ab)B + (bb)C \end{aligned}$$

und ergeben:

$$A = \frac{1}{n}(m)$$

$$B = \frac{(ab)(bm) - (bb)(am)}{(aa)(bb) - (ab)^2}$$

$$C = \frac{(aa)(bm) - (ab)(am)}{(aa)(bb) - (ab)^2}$$

also auch:

$$u = \frac{1}{n}(m) + x\,\frac{(ab)(bm) - (bb)(am)}{(aa)(bb) - (ab)^2} + y\,\frac{(aa)(bm) - (ab)(am)}{(aa)(bb) - (ab)^2} \quad \ldots\ldots (3)$$

Wenn die Punkte, an welchen die zur Bestimmung von u anzuwendenden Beobachtungen gemacht werden, immer dieselben bleiben, so kann man diese Formel noch bequemer für die Rechnung einrichten. Sie kann

$$u = \frac{1}{n}(m) + \frac{m'}{N}\{[(aa)b' - (ab)a']y - [(bb)a' - (ab)b']x + \frac{m''}{N}\{[(aa)b'' - (ab)a'']y - [(bb)a'' - (ab)b'']x\} + \text{etc.}$$

geschrieben werden, wo N den Nenner der Ausdrücke von B und C bedeutet. Führt man nun statt x und y die Entfernung r des Mittelpunkts der Coordinaten von dem Punkte, für welchen man den Werth von u kennen lernen will, und das Azimuth des letzteren $= A$, in die Rechnung ein, so dass

$$x = r\,\sin A, \qquad y = r\,\cos A$$

ist, und setzt man ferner

$$(aa)b' - (ab)a' = \frac{N}{r'}\sin A'$$

$$(bb)a' - (ab)b' = \frac{N}{r'}\cos A'$$

$$(aa)b'' - (ab)a'' = \frac{N}{r''}\sin A''$$

$$(bb)a'' - (ab)b'' = \frac{N}{r''}\cos A''$$

u. s. w.

so verwandelt (3) sich in:

$$u = \frac{1}{n}(m) + m'\frac{r}{r'}\sin(A' - A) + m''\frac{r}{r''}\sin(A'' - A) + \text{etc....}$$

wofür ich abgekürzt

$$u = \frac{1}{n}(m) + p'm' + p''m'' + \ldots + p^{(n)}m^{(n)} \ldots\ldots (4)$$

schreiben werde. Die Werthe von A', A'' .... $A^{(n)}$ und r', r'' .... $r^{(n)}$ sind bei allen Anwendungen dieser Formel dieselben, und können also ein für allemal berechnet werden. Da die getroffene Wahl des Mittelpunktes der Coordinaten zur Folge hat, dass

$$\frac{1}{r'}\sin(A' - A) + \frac{1}{r''}\sin(A'' - A) + \text{etc.} \ldots\ldots$$

für jeden Werth von A verschwindet, so können auch m', m'' ... $m^{(n)}$ um eine willkürliche Grösse verändert werden, ohne dass

$$p'm' + p''m'' + \ldots\ldots + p^{(n)}m^{(n)}$$

dadurch verändert wird; man kann also, wenn m', m'' ... $m^{(n)}$ grosse, zur Rechnung nicht bequeme Zahlen sind, statt ihrer die kleineren Reste anwenden, welche sie nach der Subtraction einer willkürlichen Zahl übrig lassen.

Dass die Punkte, an welchen die zur Bestimmung von u führenden Beobachtungen gemacht werden, mit

Rücksicht auf die Sicherheit dieser Bestimmung zu wählen sind, darf ich kaum erwähnen: so viel die Umstände erlauben, muss man dahin sehen, dass sie gleichförmig um den Raum vertheilt sind, in welchem die Höhen bestimmt werden sollen. Sollte man ihn für zu gross halten, so würde man ihn in Theile zerlegen können.

2.

Ich werde nun annehmen, dass an verschiedenen Punkten des Umfanges eines Landes, in dessen Innerem man viele Höhen durch das Barometer bestimmen will, gleichzeitige Barometer- und Thermometerbeobachtungen gemacht werden. Für alle diese Punkte nehme ich x und y, sowie auch ihre Höhen z über der Meeresfläche als bekannt an. Für einen derselben bezeichne ich die Coordinaten x und y durch a' und b'; die Höhen z durch c'; die auf eine bestimmte Temperatur des Quecksilbers bezogene Höhe des Barometers durch β'; die Temperatur der Luft, in Graden der Centesimalscale ausgedrückt, durch t'; für den zweiten Punkt erhalten dieselben Buchstaben zwei Striche; für den dritten drei u. s. w. Für den Punkt, dessen Höhe zu bestimmen ist, werde ich die Zeichen x, y, z, β, t anwenden.

Die erste Anwendung, welche ich von der Formel (4) machen werde, soll in der Bestimmung der Temperatur T bestehen, welche in der Lothlinie des Punktes, dessen Höhe gesucht wird, in einer Höhe Z über der Meeresfläche stattfindet. Bezeichnet man die Aenderung der Temperatur für jede Toise der Aenderung der Höhe durch k, so hat man die Temperatur in der Höhe Z, in den Lothlinien der verschiedenen Vergleichungspunkte:

$$t' + k(c' - Z)$$
$$t'' + k(c'' - Z)$$
$$t''' + k(c''' - Z) \text{ u. s. w.}$$

Diese Temperaturen sollten, damit die Atmosphäre im Gleichgewichte sein könnte, entweder gleich, oder wenigstens doch nur von der Polhöhe jedes der Punkte abhängig sein; in der Wirklichkeit ist aber hierauf nicht zu rechnen, und man kann aus denselben nur auf T schliessen, indem man die im vorigen § erläuterte Interpolation darauf anwendet. Setzt man demnach diese Ausdrücke der Temperaturen, statt m', m'', ... $m^{(n)}$, in die Formel (4), so erhält man:

$$T = \frac{1}{n}(t) + p't' + p''t'' + \ldots + p^{(n)}t^{(n)} + k\left\{\frac{1}{n}(c) + p'c' + p''c'' + \ldots + p^{(n)}c^{(n)} - Z\right\}$$

Dieser Ausdruck wird unabhängig von k, wenn man die bis jetzt willkürlich gelassene Höhe über der Meeresfläche:

$$Z = \frac{1}{n}(c) + p'c' + p''c'' + \ldots + p^{(n)}c^{(n)} \quad \ldots (5)$$

annimmt; man erhält dadurch:

$$T = \frac{1}{n}(t) + p't' + p''t'' + \ldots + p^{(n)}t^{(n)} \quad \ldots (6)$$

welche Formeln also das angeben, was man für die Temperatur eines Punktes in der Lothlinie des zu bestimmenden Punktes, aus den an den Vergleichungspunkten gemachten Beobachtungen folgern kann.

Man kann nun die an den Vergleichungspunkten beobachteten Barometerhöhen auf die Höhe Z über der Meeresfläche reduciren, indem man die daselbst stattfindende Temperatur $= T$ annimmt. Wenn man der Theorie und den Angaben im IV. Theile der Mécanique Céleste folgen will, und die auf Z reducirten an den einzelnen Vergleichungspunkten beobachteten Barometerhöhen, durch B' B''... $B^{(n)}$ bezeichnet, so hat man für den ersten dieser Punkte:

$$\log\left\{\frac{B'}{\beta'}\left(\frac{a+c'}{a+Z}\right)^2\right\} = \frac{(g)}{Kl} \cdot \frac{c'-Z}{1+\frac{c'+Z}{2a}} \cdot \frac{500}{500+t'+T}$$

in welcher Formel $a = 3266331$ Toisen, und wenn man unter dem Logarithmen den Brigg'schen versteht und die Polhöhe durch φ' bezeichnet,

$$\frac{(g)}{Kl} = \frac{1+0{,}002845\cos 2\varphi'}{9407{,}73}$$

ist; durch die Annahme dieser Zahlen werden c' und Z in Toisen ausgedrückt angenommen. Indem man

$$\log\left\{\frac{a+c'}{a+Z}\right\}^2 = (c'-Z)\frac{0{,}86858896}{3266331}$$

setzt, folgt aus dieser Formel:

$$\log B' = \log\beta' + (c'-Z) \times$$
$$\times\left\{\frac{1+0{,}002845\cos 2\varphi'}{9407{,}73\left(1+\frac{c'+Z}{2a}\right)} \cdot \frac{500}{500+t'+T} - \frac{1}{3760503}\right\} \quad \ldots (7)$$

Für die übrigen Vergleichungspunkte sind die ihnen zukommenden Bezeichnungen statt der sich hier auf den ersten derselben beziehenden zu schreiben. Indem rechts von dem Gleichheitszeichen nur bekannte Grössen vorkommen, kann man die Werthe von

$$\log B', \quad \log B'', \quad \ldots \log B^{(n)}$$

berechnen. Sie würden sämmtlich übereinstimmen, wenn der Druck der Atmosphäre auf die in der Höhe Z über der Meeresfläche befindliche horizontale Fläche an allen Vergleichungspunkten gleich gross wäre. Die wirklich sich zeigenden Unterschiede, welche aus vorhandenen Störungen des Gleichgewichtes der Atmosphäre entstehen, werden durch die Anwendung der Formel (4) auf diese Werthe möglichst unschädlich gemacht. Man erhält dadurch die Barometerhöhe B in der Lothlinie

des zu bestimmenden Punktes und in der Höhe Z über der Meeresfläche, nämlich:

$$\log B = \frac{1}{n}(\log B) + p' \log B' + p'' \log B'' + \ldots . \\ \ldots . + p^{(n)} \log B^{(n)} \ldots (8)$$

Indem aber

$$\frac{1}{n}(c) + p'c' + p''c'' + \ldots . + p^{(n)} c^{(n)} = Z$$
$$p' + p'' + \ldots . + p^{(n)} = 0$$

ist, so verschwindet das letzte, kleine Glied der Formel (7) aus dem Ausdrucke von $\log B$; man kann dieses Glied also bei der Berechnung von $\log B'$, $\log B'' \ldots$ $\log B^{(n)}$ weglassen.

Es ist nun noch nöthig, aus der Vergleichung der gefundenen Werthe von B, T, Z mit den an dem zu bestimmenden Punkte beobachteten β und t, die Höhe dieses Punktes z abzuleiten. Dieses geschieht durch die Umkehrung der Formel (7), in welcher, in dem jetzigen Falle, B, β, z, t statt B', β', c', t' geschrieben werden. Man erhält dadurch:

$$z - Z = \frac{9407{,}73 \log \frac{B}{\beta} \left\{ 1 + \frac{z+Z}{2a} \right\} V}{1 + 0{,}002845 \cos 2\varphi} \ldots . . (9)$$

wo V für

$$\frac{500 + t + T}{500 - \frac{9407{,}73}{3760503}(500 + t + T) \frac{1 + \frac{z+Z}{2a}}{1 + 0{,}002845 \cos 2\varphi}}$$

geschrieben ist, allein ohne merklichen Fehler mit dem allein von $t + T$ abhängigen Factor

$$\frac{500 + t + T}{498{,}74943 - \frac{t+T}{3997{,}3}}$$

vertauscht werden kann. Dass man nicht nur diesen Factor in eine Tafel bringen, sondern auch die übrigen erforderlichen Rechnungen durch zweckmässig eingerichtete Tafeln erleichtern, oder auch schon vorhandene anwenden wird, darf hier nicht weiter ausgeführt werden.

3.

Durch das Vorhergehende ist die beabsichtigte Elimination der Störungen des Gleichgewichts der Atmosphäre, in soweit ich sie für ausführbar halte, erlangt worden. Die Höhen c', c'', c''' .... der Vergleichungspunkte über der Meeresfläche sind aber als bekannt angenommen worden, und es bleibt mir noch übrig, anzugeben, auf welche Art ich sie gefunden zu sehen wünsche. Wenn die Höhen der zu bestimmenden Punkte nicht von der Höhe eines der Vergleichungspunkte, sondern von der Meeresfläche an gezählt werden sollen, so muss offenbar wenigstens eine der Höhen $c', c'', \ldots c^{(n)}$ anderweitig bekannt geworden sein.

Ich denke mir Barometer und Thermometer an allen zu Vergleichungspunkten ausersehenen Punkten aufgestellt und daselbst befindliche Beobachter angewiesen, die Angaben derselben, zu bestimmten Zeiten, etwa 3mal täglich, anzuschreiben. Ausser diesen Beobachtern muss noch einer vorhanden sein, welcher, mit einem tragbaren Barometer und einem Thermometer versehen, sowohl die zu bestimmenden Punkte als auch die Vergleichungspunkte besucht. Er findet sich zuerst an dem Vergleichungspunkte I ein, vergleicht seine Instrumente, einen Tag lang, mit den daselbst aufgestellten und geht dann nach dem Vergleichungspunkte II, den er aber nicht auf geradem Wege, sondern auf einem Umwege erreicht, welcher über alle diejenigen der zu bestimmenden Punkte führt, welche nicht gar zu weit aus der Richtung I—II liegen; an jedem derselben verweilt er einen Tag, um seine Instrumente zu den Zeiten zu beobachten, zu welchen auf den Vergleichungspunkten beobachtet wird. Am Punkte II verweilt er einen Tag, um die Instrumente zu vergleichen; dann geht er, auf dieselbe Art, wie er von I nach II gelangt ist, d. h. durch Umwege, von II nach III; nach der dortigen Vergleichung von III nach IV u. s. w., bis er alle zu bestimmende Punkte berührt hat und wieder in I ankömmt. Die hier aufs Neue vorzunehmende Vergleichung der Instrumente muss von dem unveränderten Zustande derselben während der Reise überzeugen. Eine Wiederholung dieser Reise muss das durch die erste Gefundene bestätigen, auch durch den Erfolg zeigen, ob die Vergleichungspunkte vielleicht zu weit von einander liegen, um trotz der Interpolation nicht noch merkliche Unsicherheiten übrig zu lassen. Wenn man dieses wegen zu grosser Ausdehnung des Landes fürchtete, so würde es der Vorsicht angemessen sein, einen der Vergleichungspunkte in das Innere des Landes zu verlegen, so dass die Interpolation auf weniger entfernte Beobachtungspunkte gegründet werden könnte.

Indem man durch den wiederholten Besuch aller Vergleichungspunkte und durch die Vergleichung der an denselben befindlichen Instrumente mit den Instrumenten des Reisenden ein sicheres Mittel erhält, die beständigen Unterschiede aller angewandten Instrumente zu erkennen, so kann man diese Unterschiede völlig aus der Rechnung schaffen, also die beobachteten Zahlen auf die zurückführen, welche man mit einem und demselben Apparate an allen Punkten erhalten haben würde. In Beziehung auf das Thermometer sind jedoch bekanntlich sichere Mittel vorhanden, es durch Anwendung einer Verbesserungstafel absolut richtig zu machen, so dass es sich eigentlich nur um die Vergleichung der Barometer handelt.

Die auf diese Art berichtigten Beobachtungen werden die Unterschiede der Höhen c', c'' ... $c^{(n)}$ geben, wenn sie lange genug fortgesetzt sind, um die Annahme der Verschwindung des Einflusses der Störungen aus ihrem mittleren Resultate zu rechtfertigen. Wie lang die Fortsetzung gemacht werden muss, um zu dieser Annahme zu berechtigen, kann im Allgemeinen nicht angegeben werden; ihre Dauer hängt von den Entfernungen und auch von der Beschaffenheit des Landes ab, denn es ist leicht zu übersehen, dass die Annäherung an einen mittleren Zustand in einem nicht sehr unebenen Lande früher eintreten wird, als in einem mit hohen Bergen bedeckten, welche selbst fortwährende Störungen des Gleichgewichts erzeugen. Ich glaube aber, dass in Fällen, in welchem die Anwendung der hier mitgetheilten Methode wirklich versucht werden möchte, eine Fortsetzung der Beobachtungen an den Vergleichungspunkten, durch zwei volle Jahre hindurch, zwei einjährige Mittel liefern würde, deren Uebereinstimmung die Furcht vor merklichen, übriggebliebenen Fehlern zum Schweigen bringen würde. Ich würde übrigens für zweckmässig halten, Beobachtungen, welche durch ganz örtliche Störungen, d. h. Gewitter und heftige Stürme, entstellt sind, von dem Mittel auszuschliessen.

So wie über die Dauer der zur Bestimmung der Höhen der Vergleichungspunkte dienenden Beobachtungen vor einem gemachten Versuche nichts festgesetzt werden kann, so ist auch vorher der wahrscheinliche Fehler nicht anzugeben, welchen ein einmaliger Besuch eines zu bestimmenden Punktes übrig lassen wird. Ob er unbedeutend oder merklich wird, hängt allein davon ab, ob die Entfernungen nicht zu gross oder zu gross sind, um der Interpolation Sicherheit zu geben. Für Entfernungen bis zu einer gewissen Grenze hat sie volle Sicherheit; diese Grenze kann aber nur durch gemachte Versuche bestimmt werden. Man würde sehr leicht eine Uebersicht über die zu erwartende Sicherheit erlangen, wenn man zwischen zweien, vielleicht 30 Meilen von einander entfernten Oertern, an welchen fortlaufende Barometerbeobachtungen gemacht werden, noch ein Barometer, in der Richtung und etwa in der Mitte zwischen beiden, aufstellte und dieses einige Monate lang gleichfalls beobachtete: zeigte dieses Barometer Aenderungen, welche dem Mittel der durch die beiden äusseren angegebenen sehr nahe gleich sind, so kann man daraus schliessen, dass die Entfernung von 30 Meilen nicht zu gross ist, um die Interpolation zu erlauben; im entgegengesetzten Falle muss man sich auf kleinere Entfernungen beschränken.

4.

Ich glaube, die vorgeschlagene Methode noch anschaulicher machen zu können, wenn ich ein vollständiges Beispiel davon gebe. Es ist zwar nur ein fingirtes, was aber den eben angegebenen Zweck seiner Mittheilung nicht beeinträchtigt.

Ich nehme an, dass man für die oben schon erwähnte barometrische Nivellirung von Preussen fünf Punkte zu Vergleichungspunkten gewählt habe, nämlich Königsberg, Gumbinnen, Johannisburg, Thorn und Danzig, und dass ihre Entfernungen von dem Meridiane von Königsberg und dem Perpendikel (in Meilen ausgedrückt) folgende Werthe haben:

	x	y
Königsberg	0,0	0,0
Gumbinnen	+ 14,4	— 1,9
Johannisburg . . .	+ 11,3	— 15,2
Thorn	— 16,5	— 25,4
Danzig	— 16,0	— 5,5

Das arithmetische Mittel dieser Zahlen ist:

— 1,36; — 9,60;

man hat also die auf den im 1. Art. angenommenen Mittelpunkt bezogenen Coordinaten der fünf Vergleichungspunkte:

$a^{\mathrm{I}} = + 1{,}36$	$b^{\mathrm{I}} = + 9{,}60$
$a^{\mathrm{II}} = + 15{,}76$	$b^{\mathrm{II}} = + 7{,}70$
$a^{\mathrm{III}} = + 12{,}66$	$b^{\mathrm{III}} = - 5{,}60$
$a^{\mathrm{IV}} = - 15{,}14$	$b^{\mathrm{IV}} = - 15{,}80$
$a^{\mathrm{V}} = - 14{,}64$	$b^{\mathrm{V}} = + 4{,}10$

Hieraus findet man:

$(aa) = 854{,}054$; $(ab) = -235{,}727$; $(bb) = 449{,}260$

und ferner $\log N = 5{,}51605$

$A^{\mathrm{I}} = 71^\circ 23'4$	$\log \frac{1}{r^{\mathrm{I}}} = 8{,}43769$
$A^{\mathrm{II}} = 49\ 10{,}5$	$\log \frac{1}{r^{\mathrm{II}}} = 8{,}61750$
$A^{\mathrm{III}} = 337\ 37{,}9$	$\log \frac{1}{r^{\mathrm{III}}} = 8{,}15846$
$A^{\mathrm{IV}} = 238\ 21{,}0$	$\log \frac{1}{r^{\mathrm{IV}}} = 8{,}78594$
$A^{\mathrm{V}} = 179\ 29{,}0$	$\log \frac{1}{r^{\mathrm{V}}} = 8{,}23316$

Diese Zahlen dürfen nur ein für allemal berechnet werden und dienen zur Berechnung der sich auf jeden der zu bestimmenden Punkte beziehenden Formel. Wäre z. B. an einem Punkte beobachtet, dessen Entfernungen vom Königsberger Meridian und Perpendikel — 3,0 und — 8,2 wären; also auf den angenommenen Mittelpunkt der Coordinaten bezogen:

$x = -1{,}64 \qquad y = +1{,}40$

so würde für diesen Punkt

$A = 310^0\,29'{,}2, \qquad \log r = 0{,}33371$

sein und man würde für ihn erhalten:

$\log p^{\mathrm{I}} = 8{,}70490$	$\log p^{\mathrm{IV}} = 9{,}09819\,n$
$\log p^{\mathrm{II}} = 8{,}94619$	$\log p^{\mathrm{V}} = 8{,}44463\,n$
$\log p^{\mathrm{III}} = 8{,}15137$	

Nimmt man die Höhen der Vergleichungspunkte über der Meeresfläche, die daselbst beobachteten und auf eine bestimmte Wärme des Quecksilbers bezogenen Barometerhöhen und die Temperaturen der Luft folgendermassen an:

$c^{\mathrm{I}} = 11{,}^{\mathrm{T}}0$	$\beta^{\mathrm{I}} = 337{,}^{\mathrm{L}}81$	$t^{\mathrm{I}} = 16{,}^0 3$
$c^{\mathrm{II}} = 42{,}0$	$\beta^{\mathrm{II}} = 335{,}40$	$t^{\mathrm{II}} = 15{,}9$
$c^{\mathrm{III}} = 125{,}0$	$\beta^{\mathrm{III}} = 328{,}63$	$t^{\mathrm{III}} = 16{,}4$
$c^{\mathrm{IV}} = 45{,}0$	$\beta^{\mathrm{IV}} = 335{,}61$	$t^{\mathrm{IV}} = 18{,}6$
$c^{\mathrm{V}} = 10{,}0$	$\beta^{\mathrm{V}} = 338{,}00$	$t^{\mathrm{V}} = 14{,}0$

so erhält man daraus:

$Z = 46{,}^{\mathrm{T}}7195; \qquad T = 15{,}^0 9818.$

Diese Werthe von Z und T in die Formel (7) gesetzt ergeben, wenn man das letzte Glied derselben weglässt:

$\log B^{\mathrm{I}} = 2{,}52511;$	$\varphi^{\mathrm{I}} = 54^0\,43'$	angenommen
$\log B^{\mathrm{II}} = 2{,}52509;$	$\varphi^{\mathrm{II}} = 54\ 35$	„
$\log B^{\mathrm{III}} = 2{,}52452;$	$\varphi^{\mathrm{III}} = 53\ 37$	„
$\log B^{\mathrm{IV}} = 2{,}52566;$	$\varphi^{\mathrm{IV}} = 53\ 1$	„
$\log B^{\mathrm{V}} = 2{,}52524;$	$\varphi^{\mathrm{V}} = 54\ 21$	„

Die Formel (8) gibt endlich $\log B = 2{,}52504$. Man hat also die Beobachtungen an den 5 Vergleichungspunkten auf Eine, für einen Punkt geltende, welcher in der Lothlinie des zu bestimmenden Punktes, $46{,}^{\mathrm{T}}7195$ über der Meeresfläche liegt, reducirt und für den ersteren gefunden:

$\log B = 2{,}52504; \qquad T = 15{,}^0 9818.$

Die Vergleichung dieser Beobachtung mit der an dem zu bestimmenden Punkte gemachten, ergibt die gesuchte Höhe desselben auf die gewöhnliche Art, nach der Formel (9).

---

146. Bemerkungen über barometrisches Höhenmessen.*)

(Astron. Nachr. **15**, p. 329.)

1.

Die Atmosphäre der Erde ist bekanntlich aus Stickstoffgas, Sauerstoffgas, Kohlensäuregas und Wasserdampf zusammengesetzt und es wird angenommen, dass diese Bestandtheile derselben keine chemische Wirkung auf einander äussern, oder dass willkürliche Massen derselben zusammengemischt, unter gleichem Drucke und in gleicher Wärme, einen Raum füllen, welcher der Summe der von den einzelnen gefüllten Räume gleich ist. Wenn die Bestandtheile der Atmosphäre zu allen Zeiten und in allen Höhen, in einem gleichen Verhältnisse vermischt angenommen werden, so ist die Kenntniss dieses Verhältnisses, insofern es sich um die Bedingungen ihres Gleichgewichts handelt, unnöthig; wenn man aber die Freiheit behalten will, den Untersuchungen darüber auch andere Voraussetzungen zum Grunde zu legen, so darf man die Art der Zusammensetzung der Atmosphäre nicht stillschweigend übergehen.

Die drei Gasarten, welche sich in der Atmosphäre befinden, können vielleicht, an einem bestimmten Punkte der Oberfläche der Erde, nicht immer in genau gleichem Verhältnisse vorhanden sein; allein die Veränderungen, welche dieses Verhältniss von einer Zeit zur andern erfährt, sind jedenfalls so klein, dass sie, durch die Methoden der Chemie, nur in Folge oft wiederholter Versuche entdeckt werden können; nicht mit so grosser Leichtigkeit, dass man das stattfindende Verhältniss als in jedem einzelnen Falle durch Beobachtung erkennbar betrachten könnte. Man muss also ein bestimmtes Verhältniss annehmen.

Nach der Angabe von Berzelius sind die Räume, welche die drei Gasarten, in der Reihenfolge, in welcher ich sie oben angeführt habe, einnehmen, in dem Verhältnisse:

$77{,}96 : 21{,}15 : 0{,}07;$

oder der Raum 1 trockner atmosphärischer Luft, an der Oberfläche der Erde, wird gefüllt durch:

$v = 0{,}78605$ Stickstoffgas

$v_{,} = 0{,}21325$ Sauerstoffgas

$v_{,,} = 0{,}00070$ Kohlensäuregas.

Derselbe grosse Chemiker gibt die Dichtigkeiten dieser drei Gasarten, wenn sie alle demselben Drucke ausgesetzt werden, welcher ihrem Gemische eine Dichtigkeit D gibt:

des Stickstoffgases . . . . . $= 0{,}9691\,D = d\,D$

des Sauerstoffgases . . . . $= 1{,}1026\,D = d_{,}D$

des Kohlensäuregases . . $= 0{,}5260\,D = d_{,,}D$

*) [316 d. a. Verz. — Br. m. O. II, 432.]

Diese 6 Zahlen bedürfen indessen einer Ausgleichung untereinander, indem sie der Relation:

$$1 = vd + v_{,}d_{,} + v_{,,}d_{,,} \ldots\ldots\ldots (1)$$

der sie entsprechen müssen, nicht entsprechen. Man hat nämlich, wenn M, m, $m_{,}$, $m_{,,}$ die in der Raumeseinheit enthaltenen Massen des Gemisches und seiner Bestandtheile, D, δ, $\delta_{,}$, $\delta_{,,}$ ihre Dichtigkeiten bezeichnen, durch die Voraussetzung der gleichförmigen Vertheilung in diesem Raume:

$$D : M = \delta : m = \delta_{,} : m_{,} = \delta_{,,} : m_{,,}; \ldots\ldots (2)$$

ferner, wenn P, p, $p_{,}$, $p_{,,}$ die Drücke bezeichnen, welche das Gemisch und seine Bestandtheile, diese einzeln genommen, auf die Einheit der Oberfläche des sie einschliessenden Raumes ausüben, durch das Mariotte'sche Gesetz:

$$P : d\ D = p : \delta$$
$$P : d_{,} D = p_{,} : \delta_{,}$$
$$P : d_{,,} D = p_{,,} : \delta_{,,}$$

und auch

$$P : 1 = p : v = p_{,} : v_{,} = p_{,,} : v_{,,}$$

also

$$\delta = vdD; \quad \delta_{,} = v_{,}d_{,}D; \quad \delta_{,,} = v_{,,}d_{,,}D.$$

Setzt man diese Ausdrücke von δ, $\delta_{,}$, $\delta_{,,}$ in die obige Proportion (2), so erhält man:

$$m = vdM, \quad m_{,} = v_{,}d_{,}M, \quad m_{,,} = v_{,,}d_{,,}M$$

und da $M = m + m_{,} + m_{,,}$ ist, die Relation (1). Damit ihr entsprochen werde, habe ich d und $d_{,}$ ein wenig geändert und das erstere in 0,9711, das andere in 1,1048 verwandelt.

Die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft, nämlich des Gemisches der drei Gasarten, haben Biot und Arago bestimmt. Sie haben gefunden, dass sie, wenn sie sich an der Oberfläche der Erde und in der Wärme des schmelzenden Eises unter dem Drucke, welchen eine gleich warme Quecksilbersäule von 336,905 Pariser Linien Höhe unter dem 45. Grade der Polhöhe äussert, befindet, 10466,8 mal leichter ist als Quecksilber. Unter diesen Umständen ist also das obige

$$D = \frac{1}{10466{,}8}.$$

So wie die Wärme zunimmt, nimmt auch die specifische Elasticität der Luft zu, oder der Raum, den eine Masse Luft einnimmt, vergrössert sich bei gleichbleibendem Drucke. Gay-Lussac hat das merkwürdige Resultat gefunden, dass die specifische Elasticität aller Gasarten und Dämpfe, bei gleicher Aenderung der Wärme, sich gleichviel verändert und dass diese Aenderung den Graden des Quecksilberthermometers proportional ist. Wenn sie für die Wärme des schmelzenden Eises $= 1$ und ihre Aenderung für eine, einem Grade der Thermometerscale entsprechenden Aenderung der Wärme $= k$ gesetzt wird, so ist also ihr Werth für die Angabe t des Thermometers:

$$E = 1 + kt.$$

Für die Wärme des siedenden Wassers fand Gay-Lussac $E = 1{,}375$.

Zu den drei Gasen gesellt sich in der Atmosphäre noch Wasserdampf, und es ist bekannt, dass er in veränderlicher Menge, welche in jedem besonderen Falle nur durch einen Versuch bestimmt werden kann, vorhanden ist. Was sich hierauf bezieht, werde ich später berühren, zuerst aber die atmosphärische Luft als trocken betrachten.

2.

Die barometrischen Höhenmessungen beruhen auf der Vergleichung des beobachteten Verhältnisses der Drücke der Luft in verschiedenen Höhen, mit dem Ausdrucke, welchen die Bedingung des Gleichgewichts der Luft dafür gibt. Obgleich dieser Ausdruck in der Mécanique Céleste und später in vielen anderen Schriften entwickelt worden ist, so werde ich seine Entwickelung doch auch hier nicht unterlassen: es wird mir dadurch leichter werden, sowohl eine kleine Veränderung anzubringen, als später Vorkommendes anzuknüpfen.

Das Mariotte'sche Gesetz fordert, dass die Dichtigkeit δ der Luft in dem Verhältnisse des Druckes p, den sie erfährt und folglich, im Gleichgewichte, selbst wieder ausübt, und in dem umgekehrten Verhältnisse ihrer specifischen Elasticität E oder dass

$$\frac{\delta E}{p}$$

beständig ist. Hierbei ist Luft von gleicher Beschaffenheit in allen Höhen vorausgesetzt. Nimmt man zum Maasse von p den Druck an, welchen eine Quecksilbersäule von der Wärme des schmelzenden Eises und der Höhe von 336,905 Par. Linien, an der Oberfläche der Erde und unter dem 45. Grade der Polhöhe, auf eine Flächeneinheit äussert; als Maass von δ die Dichtigkeit des Quecksilbers in der Wärme des schmelzenden Eises und als Maass von E die specifische Elasticität der Luft in derselben Wärme, und setzt man $\delta = D$ für $p = 1$ und $E = 1$, so ist

$$\delta E = pD \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Der Druck der Luft in einer Höhe x über der Oberfläche der Erde oder in einer Entfernung $a + x$ von ihrem Mittelpunkte, ist die Summe der Drücke aller über x liegenden Schichten. Eine Schichte zwischen

den Höhen x und $x + dx$ hat, für jede Einheit ihrer Oberfläche, die Masse $\delta . dx$, äussert also auf diese Einheit den Druck:

$$(g)\,\delta\left(\frac{a}{a+x}\right)^2 dx,$$

wo (g) die Schwere an der Oberfläche der Erde, senkrecht unter dem Punkte, auf welchen x und δ sich beziehen, in Theilen der Schwere unter dem 45. Grade der Polhöhe ausgedrückt, bedeutet. Allein um die durch das Wegnehmen dieser Schichte von den über x liegenden erzeugte Verminderung des Druckes durch dasselbe Maass zu messen, durch welches oben p gemessen worden ist, muss der eben gegebene Ausdruck durch dieses Maass dividirt werden und ergibt dann:

$$dp = -\frac{(g)\,\delta}{336{,}905}\left(\frac{a}{a+x}\right)^2 dx,$$

oder, wenn man a und x nicht durch die Pariser Linie, sondern durch die Toise messen will:

$$dp = -\frac{(g)\,864.\delta}{336{,}905}\left(\frac{a}{a+x}\right)^2 dx \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Wenn man δ durch die Verbindung beider Gleichungen eliminirt, erhält man:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{(g)\,864.D}{336{,}905}\left(\frac{a}{a+x}\right)^2 \frac{dx}{E}.$$

Durch das Integral dieser Gleichung werden die Werthe von p, welche in zwei verschiedenen Höhen über der Oberfläche der Erde, für $x = h$ und $x = h'$ vorhanden sind, miteinander verglichen; nämlich wenn man sie durch P und P' bezeichnet und die Logarithmen des Brigg'schen Systems, für dessen Modul μ geschrieben wird, annimmt:

$$\log\frac{P'}{P} = -\frac{(g)\,864.D.\mu}{336{,}905}\int_h^{h'}\left(\frac{a}{a+x}\right)^2\frac{dx}{E}$$

oder wenn man

$$\frac{336{,}905}{864.D.\mu} = 9397{,}74 = l = (g)\,l'$$

setzt:

$$\log\frac{P'}{P} = -\frac{1}{l'}\int_h^{h'}\left(\frac{a}{a+x}\right)^2\frac{dx}{E} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Die noch auszuführende Integration setzt voraus, dass man die Relation zwischen x und E, oder das Gesetz kenne, nach welchem die in beiden Höhen beobachteten, der Wärme der Luft entsprechenden Thermometerstände τ und τ' ineinander übergehen. Man kennt dieses Gesetz in keinem Falle und hat daher keinen Grund, die Aenderung der Wärme anders als der Aenderung der Höhe proportional anzunehmen. LAPLACE setzt, um dieser Absicht näherungsweise zu entsprechen und um zugleich dem Integrale die möglichst einfache Form zu geben,

$$(1+kt)^2 + \frac{iax}{a+x}$$

für alle zusammengehörigen Werthe von t und x als beständig voraus und bestimmt die Constante i so, dass sie den beiden beobachteten Temperaturen τ und τ' genügt. Hierdurch wird:

$$(1+kt)^2 + iX = (1+k\tau)^2 + iH = (1+k\tau')^2 + iH'$$

wo ich X, H, H' für $\frac{ax}{a+x}$, $\frac{ah}{a+h}$, $\frac{ah'}{a+h'}$ geschrieben habe. Man erhält dadurch:

$$i = \frac{2k(\tau-\tau')\left(1+k\frac{\tau+\tau'}{2}\right)}{H'-H}$$

und

$$dX = \left(\frac{a}{a+x}\right)^2 dx = -\frac{2k}{i}(1+kt)\,dt$$

und ferner

$$\left(\frac{a}{a+x}\right)^2\frac{dx}{E} = -\frac{2k}{i}dt,$$

wovon das von h bis h' genommene Integral ist:

$$\frac{2k}{i}(\tau-\tau') = \frac{H'-H}{1+k\frac{\tau+\tau'}{2}}.$$

Man hat also, der Laplace'schen Annahme des Gesetzes der Wärmeänderung zufolge, die Formel (5) in

$$\log\frac{P}{P'} = \frac{1}{l'}\cdot\frac{H'-H}{1+k\frac{\tau+\tau'}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

verwandelt.

3.

Ich habe hierbei die Luft als trocken angenommen, muss also den immer darin enthaltenen Wasserdampf noch berücksichtigen. Wenn das sich in einem begrenzten Raume befindende Gemisch der trockenen Bestandtheile der Luft auf die begrenzende Oberfläche den Druck p ausübt, der Wasserdampf den Druck $p_,$, und wenn die specifischen Schweren beider durch D und $d,D,$ der feuchten, aus ihrer Mischung entstandenen Luft durch D' bezeichnet werden, so ist der Gleichung (1) zufolge:

$$1 = v\frac{D}{D'} + v_,\frac{d,D}{D'}$$

und

$$v = \frac{p}{p+p_,}, \quad v_, = \frac{p_,}{p+p_,},$$

also

$$D' = D\,\frac{p+p_,d_,}{p+p_,}$$

oder, wenn man (um kein neues Zeichen einzuführen) den ganzen Druck $(= p+p_,)$ jetzt durch p bezeichnet:

$$D' = D\left\{1 - \frac{p_,}{p}(1 - \quad\right\} \ldots\ldots\ldots (7)$$

Für feuchte Luft verwandelt sich also die Gleichung (3) in

$$\delta E = \{p - p_,(1 - d_,)\} D$$

und ihre Verbindung mit (4) ergibt:

$$0 = dp + \frac{1}{\mu l'} p \frac{dX}{E} - \frac{(1-d_,)}{\mu l'} p_, \frac{dX}{E} \ldots\ldots (8)$$

Um diese Gleichung integriren zu können, muss man wissen, wie $p_,$ von den übrigen veränderlichen Grössen abhängt. Wenn keine Beobachtung, welche die in der Luft enthaltene Quantität Wasserdampf für einen besonderen Fall bestimmt, vorhanden ist, so muss man seine Berechnung auf die Voraussetzung entweder eines mittleren, oder eines den sonstigen jedesmaligen Umständen angemessen erscheinenden Zustandes der Atmosphäre gründen. Ich werde diesen Fall zuerst untersuchen, indem ich voraussetzen werde, dass an jedem Punkte der Atmosphäre ein bestimmter Theil derjenigen Menge Wasserdampfes vorhanden ist, welche sie, ihrer Wärme gemäss, daselbst aufnehmen kann. Wenn dieses Maximum des Wasserdampfes den Druck $(p_,)$ äussert, nehme ich also

$$p_, = \alpha(p_,)$$

an, wo ich unter α einen beständigen Factor, nicht grösser als 1 verstehe, dessen Werth der späteren Wahl überlassen bleibt.

Den Ausdruck von $(p_,)$ durch die Angabe t des Centesimalthermometers hat Laplace (Méc. Cél. IV. p. 273) aus Versuchen von Dalton, in der im vorigen Art. gewählten Einheit des Druckes ausgedrückt:

$$= 10^{(t-100)\,0{,}0154547 - (t-100)^2\,0{,}0000625826}$$

abgeleitet, wofür man auch

$$(p_,) = 0{,}0067407 \times 10^{t\,.\,0{,}0279712 - tt\,.\,0{,}0000625826} \ldots (9)$$

schreiben kann. Man hat also der Voraussetzung gemäss

$$p_, = \alpha\beta\, 10^{at - ctt}$$

wo

$$\beta = 0{,}0067407$$
$$a = 0{,}0279712$$
$$c = 0{,}0000625826$$

sind.

Multiplicirt man die Differentialgleichung (8) mit

$$10^{\frac{1}{l'}\int\frac{dX}{E}}$$

so kann man das Product integriren, nämlich:

$$C = p.10^{\frac{1}{l'}\int\frac{dX}{E}} - \frac{(1-d_,)}{\mu l'}\int p_, 10^{\frac{1}{l'}\int\frac{dX}{E}}\frac{dX}{E}.$$

Der Laplace'schen Annahme des Gesetzes der Aenderung der Wärme zwischen zwei Höhen, für welche sie durch Beobachtung gegeben ist (Art. 2), zufolge ist:

$$\frac{dX}{E} = -\frac{2k}{i}dt;$$

substituirt man dieses und auch den Ausdruck von $p_,$, so wird

$$C = p.10^{-\frac{2k}{l'i}t} + \frac{2\alpha\beta(1-d_,)k}{\mu l'.i}\int 10^{\left(a-\frac{2k}{l'i}\right)t - ctt}dt.$$

Durch diese Gleichung erhält man die Relation zwischen den Drücken der Atmosphäre P und P' in den Höhen h und h', nämlich:

$$P.10^{-\frac{2k}{l'i}\tau} - P'.10^{-\frac{2k}{l'i}\tau'} = \frac{2\alpha\beta(1-d_,)k}{\mu l'.i}\int_{\tau}^{\tau'} 10^{\left(a-\frac{2k}{l'i}\right)t - ctt}dt.$$

Setzt man T für $\frac{1}{2}(\tau+\tau')$ und $T+z$ für t, so verwandelt das noch zu suchende Integral sich in:

$$-10^{-\frac{2k}{l'i}T}10^{aT-cT^2}\int_{-\frac{1}{2}(\tau-\tau')}^{\frac{1}{2}(\tau-\tau')} 10^{\left(a-\frac{2k}{l'i}-2cT\right)z - czz}dz.$$

Wenn man, um abzukürzen,

$$u = \frac{2\alpha\beta(1-d_,)k}{l'i}10^{aT-cT^2}\int_{-\frac{1}{2}(\tau-\tau')}^{\frac{1}{2}(\tau-\tau')} 10^{\left(a-\frac{2k}{l'i}-2cT\right)z - czz}dz$$

schreibt, hat man also:

$$P.10^{-\frac{2k}{l'i}\tau} - P'.10^{-\frac{2k}{l'i}\tau'} = -\frac{u}{\mu}10^{-\frac{2k}{l'i}T}$$

oder

$$P.10^{-\frac{2k}{l'i}(\tau-\tau')} + \frac{u}{\mu}\cdot 10^{-\frac{2k}{l'i}\left(\frac{\tau-\tau'}{2}\right)} = P'$$

woraus folgt

$$10^{-\frac{2k}{l'i}(\tau-\tau')} = \frac{P'\sqrt{4\mu^2PP'+uu} - u}{P\sqrt{4\mu^2PP'+uu}+u}$$

und wenn man die Brigg'schen Logarithmen beider Glieder dieser Gleichung nimmt und bis uu incl. richtig entwickelt:

$$\frac{2k}{l'i}(\tau-\tau') = \log\frac{P}{P'} + \frac{u}{\sqrt{PP'}}.$$

Der angewandten Relation zwischen der Wärme und der Höhe zufolge ist aber (Art. 2):

$$\frac{2k}{i}(\tau-\tau') = \frac{H'-H}{1+kT},$$

wodurch man erhält:

$$\log\frac{P}{P'} = \frac{1}{l'}\frac{H'-H}{1+kT} - \frac{u}{\sqrt{PP'}} \ldots\ldots (10)$$

Das in dem Ausdrucke von u vorkommende Integral findet man, durch Reihenentwickelung der Exponentialgrösse,

$$= (\tau-\tau')\left\{1 + \frac{(\tau-\tau')^2}{24\mu^2}\left[\left(a - \frac{2k}{l'i} - 2cT\right)^2 - 2c\mu\right] + \text{etc.}\right\}$$

Um die Grösse des zweiten Gliedes dieser Reihe einigermassen zu schätzen, kann man annehmen, dass der Stand des Centesimalthermometers für 85 Toisen der Zunahme der Höhe um einen Grad abnimmt. Dann ist dieses Glied für $H'-H = n.1000$ Toisen und für $T = 0, = nn.0{,}0093$; es ist also für kleine Höhenunterschiede ein unbedeutender Theil des ersten Gliedes, während es selbst für die grössten, welche noch zugänglich sind, nicht auf ein Zehntel desselben steigt. Die Voraussetzung über die Vertheilung des Wasserdampfes in der Atmosphäre, worauf die gegenwärtige Rechnung beruhet, besitzt weit grössere Unsicherheit; weshalb ich glaube, dass es wenig Interesse haben kann, ihr durch eine zusammengesetztere Rechnung ganz treu zu bleiben. Ich vereinfache diese daher und nehme

$$u = \frac{2\alpha\beta(1-d_{,})k(\tau-\tau')}{l'i}\,10^{aT-cT^2}$$

an. Nach der Angabe von BERZELIUS ist $d_{,} = 0{,}62$ und oben ist gezeigt worden, dass

$$\beta = 0{,}0067407$$
$$\frac{2k(\tau-\tau')}{i} = \frac{H'-H}{1+kT}$$

ist. Hierdurch wird

$$u = \alpha\frac{H'-H}{l'}\cdot\frac{10^{aT-cT^2}}{1+kT}\,0{,}002561$$

und man erhält durch die Substitution dieses Ausdruckes in die Gleichung (10):

$$\log\frac{P}{P'} = \frac{H'-H}{l'(1+kT)}\left\{1-\alpha\cdot\frac{0{,}002561}{\sqrt{PP'}}\,10^{aT-cT^2}\right\} \ldots (11)$$

Will man die Berechnung des Höhenunterschiedes der beiden Punkte, wo der Druck und die Wärme der Luft beobachtet sind, auf die Voraussetzung des mittleren Zustandes zwischen Trockenheit und grösster Feuchtigkeit der Luft gründen, so muss man $\alpha = \frac{1}{2}$ annehmen. Es scheint aber, dass man, auch ohne unmittelbare Bestimmung der jedesmal wirklich vorhandenen Menge des Wasserdampfes, durch Berücksichtigung äusserer Umstände, in geeigneten Fällen grössere Genauigkeit erlangen kann, als durch die Voraussetzung $\alpha = \frac{1}{2}$: wenn es z. B. in der ganzen Luftmasse zwischen beiden Punkten regnet, so ist $\alpha = 1$; wenn die beiden Punkte sich in einem weit von dem Meere entfernten, schon als ausgezeichnet trocken bekannten Lande*) befinden, so wird es angemessen sein, α kleiner als $\frac{1}{2}$ anzunehmen.

*) Dieses ist z. B. der Fall mit einem grossen Theile von Nordasien, wie aus A. ERMAN's Reise um die Erde B. II S. 67 u. s. w. hervorgeht. Man lernt daselbst nicht nur die Thatsache kennen, sondern auch die geographischen Verhältnisse, wovon sie die Folge ist.

Damit man unmittelbar übersehe, wie gross der Einfluss der Feuchtigkeit auf barometrische Höhenmessungen werden kann, werde ich ihn weiter entwickeln. Die Vergrösserung, welche ein unter der Voraussetzung trockener Luft berechneter Höhenunterschied durch die Berücksichtigung des Wasserdampfes erfährt, ist der Gleichung (11) zufolge

$$= \frac{\alpha w}{1-\alpha w}(H'-H)$$

wo w für

$$\frac{0{,}002561}{\sqrt{PP'}}\,10^{aT-cT^2}$$

geschrieben ist. Vernachlässigt man das Quadrat dieser Grösse und setzt man

$$P' = P.10^{-\frac{H'-H}{l'(1+kT)}}$$

was gleichfalls nur einen Fehler von der Ordnung w^2 erzeugt, so wird

$$w = \frac{0{,}002561}{p}\,10^{\frac{H'-H}{2l'(1+kT)}}\cdot 10^{aT-cT^2}$$

und daher der Einfluss des Wasserdampfes:

$$= \alpha\cdot\frac{0{,}002561}{p}(H'-H).10^{\frac{H'-H}{2l'(1+kT)}}\cdot 10^{aT-cT^2}\ldots(12)$$

Nimmt man den in dieser Formel vorkommenden Druck in der Höhe $h = 1$, oder den Barometerstand daselbst $= 336{,}905$ und $k = 0{,}00375$ an, so findet man die in α zu multiplicirende Grösse für verschiedene Werthe von $H'-H$ und T, so wie folgende Tafel sie angibt:

$T = \frac{1}{2}(\tau+\tau')$

$H'-H$	0^0	10^0	20^0
500^T	$1{,}^T36$	$2{,}^T55$	$4{,}^T64$
1000	2,90	5,41	9,83
1500	4,62	8,61	15,60
2000	6,55	12,18	22,02
2500	8,70	16,15	29,14
3000	11,10	20,55	37,02

Man kann aus diesen Zahlen beurtheilen, wie gross der Einfluss einer Unsicherheit über den Werth von α in einem vorkommenden Falle ist.

4.

Seit der Erfindung des Daniell'schen Hygrometers und des August'schen Psychrometers kann man die jedesmal in der Luft enthaltene Menge des Wasserdampfes leicht und mit hinreichender Genauigkeit erkennen. Die Forderung, dass an beiden Punkten, deren Höhenunterschied barometrisch gemessen werden soll, ausser dem Barometer und Thermometer auch das Psychrometer beobachtet werde, kann leicht erfüllt werden

und gewährt dann dem Resultate der Beobachtungen den Vortheil, von einer willkürlichen Annahme über die vorhandene Menge des Wasserdampfes etwa in derselben Art frei zu sein, als es durch die Beobachtung der Luftwärme an beiden Punkten von einer Willkür in dieser Beziehung befreiet wird. Ich werde daher die Rechnungsvorschrift aufsuchen, welche anzuwenden ist, wenn man auch die Beobachtungen des Psychrometers besitzt.

Das Psychrometer beruhet auf der Vergleichung des Standes $\tau_,$ eines Thermometers, dessen Kugel befeuchtet wird, mit dem Stande τ eines anderen nicht befeuchteten Thermometers. Wenn der grösste Druck, welchen Wasserdampf von der Wärme t ausüben kann, durch φt und der in Pariser Linien ausgedrückte Barometerstand durch b bezeichnet werden, so ist der Druck, welchen der in der Luft wirklich vorhandene Wasserdampf ausübt:

$$= \varphi\tau_, - \frac{0{,}558\,(\tau - \tau_,)\,b}{336{,}905\,(m - \tau_,)}$$

wo, in dem Falle eines positiven Werthes von $\tau_,$, $m = 640$; in dem Falle eines negativen, einen Eisüberzug der befeuchteten Thermometerkugel bedingenden Werthes aber $m = 715$ ist. Diese Formel ist von dem Erfinder des Psychrometers, AUGUST, gegeben und stützt sich auf die Vergleichung von Versuchen mit physischen Betrachtungen*). Den Ausdruck von φt durch t leitet AUGUST aus Beobachtungen über den Druck, welchen Wasserdampf von verschiedener Wärme ausübt, ab, indem er ein von KÄMPTZ aus den von DALTON, URE, SCHMIDT und ARTZBERGER darüber angestellten, gezogenes mittleres Resultat anwendet. Diese Beobachtungen sind aber, mit Ausnahme der beiden zuerst angeführten Reihen, so wenig übereinstimmend untereinander, dass es zweifelhaft wird, ob man alle vier vereinigen darf. Ich ziehe daher vor, bei dem oben schon angewandten, von LAPLACE gegebenen, sich an DALTON'S Beobachtungen, also auch an die ihnen nahe kommenden von URE, anschliessenden Ausdrucke zu bleiben. Es ist im Allgemeinen meine Meinung, dass man sehr bekannt gewordene und häufig angewandte Formeln nicht eher ändern sollte, als bis die Nothwendigkeit der Aenderung als entschieden betrachtet werden kann, was in dem gegenwärtigen Falle keineswegs stattfindet. Die ausgezeichneten späteren Untersuchungen ARAGO'S über denselben Gegenstand betreffen nur die Elasticität des Wasserdampfes in sehr hohen Wärmegraden, und es ist nicht darauf zu rechnen, dass dieselbe Interpolationsformel, welche diese befriedigend darstellt, auch auf weit geringere anwendbar sei.

*) POGGENDORFF Annalen der Physik Bd. 81, S. 69 und Bd. 90 (14 der neuen Folge) S. 137.

Wenn man den Laplace'schen Ausdruck anwendet, erhält man den Druck, welchen der in der Luft enthaltene Wasserdampf ausübt, der angeführten Formel zufolge:

$$p_, = 0{,}0064707 \times 10^{a\tau_, - c\tau,\tau_,} - 0{,}0016562\,\frac{(\tau - \tau_,)\,b}{(m - \tau_,)}$$

und wenn man ihn durch

$$(p_,) = 0{,}0064707 \times 10^{a\tau - c\tau\tau}$$

oder durch den Druck dividirt, den der Wasserdampf ausüben würde, wenn die Luft damit gesättigt wäre, das oben durch α bezeichnete Verhältniss, also:

$$\alpha = \frac{10^{a\tau_, - c\tau,\tau_,}}{10^{a\tau - c\tau\tau}} - 0{,}2457\,\frac{b}{m - \tau_,}\,\frac{\tau - \tau_,}{10^{a\tau - c\tau\tau}} \ldots . (13)$$

Zur Erleichterung der Berechnung von α theile ich hier eine Tafel mit, deren erste Spalte für alle Werthe von t, von -20^0 bis $+30^0$,

$$\log 10^{at - ctt} = ft,$$

der zweite

$$\log \frac{0{,}2457}{m - t}\,10^{-at + ctt} = \psi t$$

enthält. Man erlangt dadurch:

$$\log A = f\tau_, - f\tau$$

$$\log B = \log A + \psi\tau_, + \log(\tau - \tau_,) + \log b$$

und das gesuchte $\alpha = A - B$.

t	ft		ψt	
-20^0	9,4155		7,1086	
		304		298
-19	9,4459		7,0788	
		303		297
-18	9,4762		7,0491	
		302		296
-17	9,5064		7,0195	
		300		295
-16	9,5364		6,9900	
		299		293
-15	9,5663		6,9607	
		298		292
-14	9,5961		6,9315	
		297		290
-13	9,6258		6,9025	
		295		290
-12	9,6553		6,8735	
		294		288
-11	9,6847		6,8447	
		293		287
-10	9,7140		6,8160	
		292		285
-9	9,7432		6,7875	
		290		285
-8	9,7722		6,7590	
		289		283
-7	9,8011		6,7307	
		288		282
-6	9,8299		6,7025	
		287		280
-5	9,8586		6,6745	
		285		279
-4	9,8871		6,6466	
		284		278
-3	9,9155		6,6188	
		283		277
-2	9,9438		6,5911	
		282		276
-1	9,9720		6,5635	
		280	6,5361	274
0	0,0000		6,5842	
		279		272
$+1$	0,0279		6,5570	
		278		271
2	0,0557		6,5299	
		277		270
3	0,0834		6,5029	

t	ft		ψt	
+ 3°	0,0834		6,5029	
4	0,1109	275	6,4761	268
5	0,1383	274	6,4493	268
6	0,1656	273	6,4227	266
7	0,1927	271	6,3963	264
8	0,2198	271	6,3699	264
9	0,2467	269	6,3437	262
10	0,2735	268	6,3176	261
11	0,3001	266	6,2916	260
12	0,3266	265	6,2658	258
13	0,3530	264	6,2401	257
14	0,3793	263	6,2145	256
15	0,4055	262	6,1890	255
16	0,4315	260	6,1637	253
17	0,4574	259	6,1385	252
18	0,4832	258	6,1134	251
19	0,5089	257	6,0885	249
20	0,5344	255	6,0636	249
21	0,5598	254	6,0389	247
22	0,5851	253	6,0143	246
23	0,6102	251	5,9899	244
24	0,6353	251	5,9656	243
25	0,6602	249	5,9414	242
26	0,6849	247	5,9173	241
27	0,7096	247	5,8934	239
28	0,7341	245	5,8695	239
29	0,7585	244	5,8458	237
30	0,7828	243	5,8223	235

Bestimmt man auf diese Art die Werthe von α für beide Höhen, so wird man sie selten von gleicher Grösse finden. Da man das Gesetz des Ueberganges von dem einen zu dem anderen nicht kennt, so ist die Willkür unvermeidlich. Ich halte für das Angemessenste, das Mittel aus beiden Werthen von α zur Berechnung der Formel (11) anzuwenden.

5.

Es scheint mir nöthig, die verschiedenen Voraussetzungen näher zu untersuchen, durch welche ich die Formel (11) erlangt habe. Die erste Voraussetzung aller Untersuchungen, welche den Druck und die Dichte der Atmosphäre in unbestimmten Höhen betreffen, ist die ihres Gleichgewichts. Dass sie nicht richtig ist, darf nicht erst hier gesagt werden. Ihre Unrichtigkeit zeigt sich sowohl in den Schwankungen des Barometerstandes um seinen mittleren Werth für jeden Punkt der Erde, als auch in der Verschiedenheit dieses Werthes für verschiedene Punkte, selbst wenn sie in der Oberfläche des Meeres angenommen werden. Die Kenntniss dieser Verschiedenheit haben wir erst im J. 1831 durch eine Untersuchung ADOLPH ERMAN'S erlangt*), durch welche er, theils aus eigenen auf einer Reise um die Erde gemachten Beobachtungen, theils aus fremden sowohl im nördlichen Asien und Amerika gesammelten, als auch auf der Russischen Corvette Krotkoi, unter der Leitung des Kapitäns HAGEMEISTER angestellten, gezeigt hat, dass die von dem Aequator entferntere Grenze der Zone der Passatwinde einen höheren Barometerstand hat als die ihm nähere; und ferner, dass dieser Stand auch unter verschiedenen Meridianen verschieden ist. Das erstere Resultat beruhet auf Beobachtungen, welche während des achtmaligen Durchschiffens der Passatzone gesammelt worden sind und ist auch später auf der, für die Astronomie denkwürdigen Reise HERSCHEL'S nach dem Vorgebirge der guten Hoffnung hervorgetreten; das andere beruhet auf einer Vergleichung der in dem atlantischen und dem stillen Meere gemachten Beobachtungen. Die Unterschiede gehen bis auf mehrere Linien und lassen nicht zweifelhaft, dass der mittlere Barometerstand an verschiedenen Punkten der wahren Oberfläche der Erde von der geographischen Länge und Breite dieser Punkte abhängig ist.

Die als zufällig zu betrachtenden Schwankungen des Barometerstandes müssen Abweichungen einzelner barometrischer Bestimmungen eines Höhenunterschiedes, von dem Mittel aus vielen, hervorbringen; die mittleren Verschiedenheiten, welche von der Länge und Breite abhängen, müssen aber, wenn man sie nicht kennt, Fehler zur Folge haben, welche selbst aus dem Mittel vieler Beobachtungen nicht verschwinden, ausser in dem Falle, dass beide Punkte, deren Höhenunterschied bestimmt werden soll, in einer Lothlinie lägen. Es geht aus der erlangten Kenntniss dieser Verschiedenheiten hervor, dass die barometrische Bestimmung des Höhenunterschiedes zweier Punkte, selbst wenn sie auf jahrelang wiederholten Beobachtungen beruhet, desto zweifelhafter bleibt, je weiter die Punkte voneinander entfernt sind. Denkt man sich Oberflächen, in welchen der mittlere Luftdruck gleich ist, um die Erde gelegt, so kann durch das Barometer nichts anderes erlangt werden, als die Bestimmung des auf diese Oberflächen bezogenen Höhenunterschiedes; ob aber diese Oberflächen da wo die beiden Punkte sich befinden, sich mehr oder weniger von dem Parallelismus mit der Oberfläche der Erde entfernen, bleibt gänzlich unbekannt, so lange man die Function der Länge und Breite nicht kennt, welche die beziehungsweise Lage beider bestimmt. Hierdurch wird den Beobachtungen über den Luftdruck einer neuer Gesichtspunkt eröffnet, indem durch sie die Absicht verfolgt werden muss, an allen Punkten der

*) POGGENDORFF Annalen der Physik und Chemie Bd. 99 (23 der neuen Folge) S. 144.

Erde die Höhe der Oberfläche eines bestimmten Druckes zu erfahren. Allein für jetzt kann die aus der allenthalben gleichen Annahme dieser Höhe hervorgehende Grösse der Unsicherheit noch nicht näher bestimmt werden; gleichfalls kann die von den als zufällig zu betrachtenden Schwankungen erzeugte nicht näher angegeben werden; und selbst wenn man, um sie näher kennen zu lernen, lange fortgesetzte Beobachtungen an Punkten in verschiedener Höhe machen wollte, so würden ihre Unterschiede untereinander immer nur als der Erfolg der Vermischung dieser Ursache mit anderen, gleichfalls unvermeidlich fehlerhaften Voraussetzungen zu betrachten sein.

Die Beschaffenheit der trockenen Luft ist so vorausgesetzt worden, wie sie zu der Zeit war, als BIOT und ARAGO für ihre Dichtigkeit die im 1. Art. angeführte Bestimmung erhielten. Aenderte sich der Sauerstoffgehalt derselben um n Hundertel, so würde sich ihre Dichtigkeit um $n.0{,}001337$ verändern, und ein unter der Annahme $D = \frac{1}{10466{,}8}$ bestimmter Höhenunterschied müsste in dem Verhältnisse $1 : 1 + n.0{,}001337$ geändert werden. HUMBOLDT und GAY-LUSSAC haben aber an 19 Tagen, zwischen dem 17. Novbr. und 23. Decbr. 1804, keine merkliche Veränderung des Sauerstoffgehaltes der Luft gefunden, weshalb die Voraussetzung eines beständigen Verhältnisses der beiden hauptsächlichen Bestandtheile der atmosphärischen Luft als gerechtfertigt betrachtet werden darf.

Indessen hat DALTON bekanntlich für wahrscheinlich gehalten, dass jeder der Bestandtheile der Luft nur von den höheren Schichten seiner eigenen Materie, nicht aber von der ganzen höheren Masse zusammengedrückt werde, also in verschiedenen Höhen die Dichtigkeit besitze, welche er besitzen würde, wenn er ausschliesslich vorhanden wäre. Hieraus muss ein mit der Höhe veränderliches Mischungsverhältniss und damit auch ein anderes Verhältniss der Drücke der Luft in verschiedenen Höhen entstehen, als aus der älteren im 2. Art. verfolgten Annahme. Die barometrischen Höhenmessungen sind deshalb als ein Mittel vorgeschlagen, zwischen beiden Annahmen zu entscheiden. Die Aufmerksamkeit, welche die Ansichten eines Physikers, wie DALTON, erheischen, fordert, dass ich auch hier die seinige verfolge.

Die Formel (6) ist nun nicht mehr für die atmosphärische Luft, sondern nur für jeden ihrer Bestandtheile richtig; sie bezieht sich auf den einen oder den anderen derselben, jenachdem man seine specifische Schwere statt der der Luft im Allgemeinen darin voraussetzt. Setzt man die Drücke, welche die drei Bestandtheile der Luft in den Höhen h und h' äussern, $= p, p_{,}, p_{,,}$ und $p', p'_{,}, p'_{,,}$ und ihre specifischen Schweren Dd, $Dd_{,}$, $Dd_{,,}$, und schreibt man, um abzukürzen, U für

$$\frac{1}{l'} \cdot \frac{H' - H}{1 + kT},$$

so wird der Formel (6) gemäss:

$$p' = p \,.10^{-Ud}$$
$$p'_{,} = p_{,}.10^{-Ud_{,}}$$
$$p'_{,,} = p_{,,}.10^{-Ud_{,,}}$$

und da

$$P = p + p_{,} + p_{,,}$$
$$P' = p' + p'_{,} + p'_{,,}$$
$$p = vP; \quad p_{,} = v_{,}P; \quad p_{,,} = v_{,,}P$$

ist,

$$P' = P\{v.10^{-Ud} + v_{,}.10^{-Ud_{,}} + v_{,,}.10^{-Ud_{,,}}\}$$

oder

$$P' = P.10^{-U}\{v.10^{U(1-d)} + v_{,}.10^{U(1-d_{,})} + v_{,,}.10^{U(1-d_{,,})}\}$$

wofür ich, um abzukürzen,

$$P' = P.10^{-U}.\psi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

schreiben werde. Die Grösse ψ ist in allen zugänglichen Höhen wenig von 1 verschieden, wie die folgende, nach den im 1. Art. angeführten Werthen:

$v = 0{,}78605$ $\quad d = 0{,}9711$
$v_{,} = 0{,}21325$ $\quad d_{,} = 1{,}1048$
$v_{,,} = 0{,}00070$ $\quad d_{,,} = 0{,}5260$

berechnete Tafel zeigt:

U	ψ	$\log \psi$
0,0	1,0000000	0,0000000
0,1	1,0000840	0365
0,2	1,0003334	1148
0,3	1,0007444	3232
0,4	1,0013135	5701
0,5	1,0020375	8840

Wenn das Verhältniss $P' : P$ aus der Beobachtung hervorgegangen ist und daraus das dem Höhenunterschiede proportionale U gesucht wird, so findet es sich, wie diese Tafel zeigt, nach der Dalton'schen Ansicht etwas grösser als nach der älteren, in einem Verhältnisse, welches die Tafel (deren Zahlen nahe wie das Quadrat des Arguments fortschreiten) ergibt. Will man mit einer, in allen vorkommenden Fällen kaum von der Wahrheit abweichenden Näherung zufrieden sein, so kann man (14) weiter entwickeln. Man hat nämlich:

$$U = \log \frac{P}{P'} + \log \psi$$

und wenn man für $\log \psi$ das erste Glied seiner Entwickelung, oder

$$\frac{UU}{2\mu}\left\{v(1-d)^2+v_{,}(1-d_{,})^2+v_{,,}(1-d_{,,})^2\right\}=UU.0{,}003675$$

und für U seinen Ausdruck schreibt:

$$\frac{H'-H}{l'(1+kT)}=\log\frac{P}{P'}+\left\{\frac{H'-H}{l'(1+kT)}\right\}^2 0{,}003675.$$

Die Aenderung, welche die Befolgung der Dalton'schen Ansicht von der Zusammensetzung der Luft, in dem nach der älteren berechneten Werthe von $H'-H$ hervorbringt, ist also:

$$+\frac{(H'-H)^2}{l'(1+kT)}0{,}003675$$

und, wenn man $H'-H=n.1000$ Toisen setzt,

$$=+\frac{nn.0{,}^{T}391}{1+kT} \quad \ldots\ldots\ldots (15)$$

Diese Aenderung ist viel zu klein, als dass man je hoffen dürfte, durch barometrische Höhenmessungen eine Entscheidung für oder wider die Ursache, aus welcher sie hervorgeht, zu erhalten. Sie wird weit überwogen von dem Einflusse der immer vorhandenen Störungen des Gleichgewichts der Atmosphäre, sowie auch von der Unsicherheit des im 2. Art. angewandten Gesetzes der Wärmeänderung zwischen beiden Höhen, wo der Thermometerstand beobachtet ist. Selbst der geometrischen Messung des Höhenunterschiedes würde äusserst schwer eine Sicherheit gegeben werden können, welche gross genug wäre, um ein Urtheil über eine Grösse zu gewähren, welche so klein ist als die, auf welcher die Entscheidung zwischen beiden Annahmen beruhet.

6.

Die nothwendige Verfolgung der Dalton'schen Annahme in Beziehung auf die barometrischen Höhenmessungen gibt mir Veranlassung, auch meine Ansicht dieses vielbesprochenen Gegenstandes mitzutheilen. Diese Annahme stützt sich hauptsächlich auf das Verhalten des Wasserdampfes, sowohl für sich allein, als in seiner Vermischung mit Luft.

Wenn eine Flüssigkeit in einen leeren Raum gebracht wird, so entwickelt sie Dämpfe, so lange, bis diese eine bestimmte, von der Wärme des Raumes abhängige Dichtigkeit erlangt haben. DALTON hat diese Dichtigkeit im Falle des Wasserdampfes, für alle Wärmeabstufungen zwischen den Wärmen des gefrierenden und des siedenden Wassers bestimmt und durch unzweifelhafte Versuche gezeigt, dass die Dämpfe, ebensowohl wenn der Raum Anfangs mit trockener Luft von beliebiger Dichtigkeit gefüllt, als wenn er Anfangs leer ist, genau dieselbe Dichtigkeit erlangen. Jeder Versuch, diese Dichtigkeit (bei gleichbleibender Wärme) zu vergrössern, ist erfolglos: wird der mit reinem dichtesten Dampfe gefüllte Raum im Verhältnisse $1:1-n$ verkleinert, so verwandelt sich ein Theil des Dampfes, welcher sich zu dem Ganzen verhält wie $n:1$, in Flüssigkeit; genau dieselbe Verwandlung tritt ein, wenn der mit der Mischung von dichtestem Dampfe und beliebig dichter Luft gefüllte Raum in demselben Verhältnisse verkleinert wird; die Luft des Gemisches erfährt dadurch aber keine Verwandlung, sondern eine Vermehrung ihrer Dichtigkeit in dem Verhältnisse $1-n:1$.

Dieses ist das reine Ergebniss von DALTON'S Versuchen. Es bestimmt den Unterschied zwischen Dampf und Luft, indem es jenem ein von der Wärme abhängiges Maximum von Dichtigkeit beilegt, welches für diese nicht vorhanden ist. Es zeigt ferner, dass den Kräften an der Oberfläche der Flüssigkeit, welche ihre Verdampfung im leeren Raume bewirken, nicht durch den Druck entgegengewirkt wird, welchen diese Oberfläche von sie berührender Luft erfährt. In dieser letzteren Beziehung erinnere ich, dass POISSON aus ganz anderen Erscheinungen, den sogenannten capillaren, gefolgert hat, dass die Dichtigkeit der Oberfläche der Flüssigkeiten unendlich klein ist. Ob die Luftarten sämmtlich ein von der Wärme abhängiges Maximum der Dichtigkeit besitzen (wie von dem Kohlensäuregase schon bekannt ist), ob sie sich also von den Dämpfen nur durch die Grösse dieses Maximums, oder specifisch unterscheiden, kann für jetzt nicht entschieden werden, hier aber auch unberührt bleiben.

So lange die Dämpfe eine kleinere Dichtigkeit besitzen, als die grösste, die sie in ihrer jedesmaligen Wärme erlangen können, sind sie nicht physisch von den Gasen verschieden. Sie befolgen nämlich das Mariotte'sche Gesetz, und GAY-LUSSAC hat gezeigt, dass sie dieselbe Ausdehnbarkeit durch die Wärme besitzen, welche allen Gasarten gemeinschaftlich ist. Sie verhalten sich also, so lange sie das Maximum ihrer Dichtigkeit nicht erreicht haben, sowohl für sich allein als in der Vermischung mit Gasen, genau wie die letzteren. Ein Druck bringt eben so wenig in den Dämpfen als in den Gasen eine Veränderung ihrer Beschaffenheit hervor, sondern diese tritt, die Dämpfe mögen rein oder mit Gasen vermischt sein, erst ein, wenn ein Versuch gemacht wird, ihre Dichtigkeit ihr Maximum überschreiten zu lassen; sie kann z. B. immer durch Verkleinerung des Raumes, in welchem sie sich befinden, hervorgebracht werden, und zwar in dem letzteren Falle ebensowohl als in dem ersteren, indem die unbegrenzte Zusammendrückbarkeit der Gase die dazu erforderliche Verkleinerung des Raumes jedesmal möglich macht. Wenn ferner ein Raum durch eine Luftart gefüllt ist, welche auf eine Einheit

seiner Oberfläche einen Druck p ausübt, so hat die Hineinbringung einer anderen Luftart, welche für sich allein auf dieselbe Einheit den Druck p, ausüben würde, keinen anderen physischen Erfolg als den, dass diese Einheit nun den Druck $p + p$, erfährt; genau denselben Druck erfährt sie aber, wenn statt der zweiten Luftart Dampf hineingebracht wird, welcher gleichfalls für sich allein den Druck p, ausüben würde. Endlich vermischen sich sowohl verschiedene Luftarten unter sich, als auch mit Dämpfen in jedem beliebigen Verhältnisse.

Es ist also zwischen dem physischen Verhalten eines Gemisches eines Gases mit einem anderen und eines Gemisches des ersteren mit Dampf durchaus kein Unterschied. Folglich kann dieses Verhalten des zweiten Gemisches nichts lehren, was durch das Verhalten des ersten nicht gelernt werden kann. Das Verhalten des mit Luft vermischten Wasserdampfes, welches DALTON's Versuche vollständig an den Tag legen, ist also auch nicht lehrreicher, als das Verhalten jedes Gemisches zweier Gase, und eine Theorie, die auf das letztere nicht hätte gebauet werden können, kann auch in dem ersteren keine Stütze finden. Es würde auch aus dem Verhalten eines Gemisches von Dampf und Luft nicht haben gefolgert werden können, dass die Luft den Dampf nicht drücke, wenn nicht als sich von selbst verstehend vorausgesetzt worden wäre, dass Druck den Dampf in Flüssigkeit verwandele, für welche Voraussetzung nichtsdestoweniger keine, ihre Rechtmässigkeit andeutende Thatsache vorhanden ist.

Dieser Ansicht der über die Dämpfe erlangten Kenntnisse zufolge geben sie keine Veranlassung zu der Annahme, Dampf werde nur von Dampf, nicht aber von Luft gedrückt. Mit dieser Veranlassung geht auch die Analogie verloren, welche für das ähnliche Verhalten des Gemisches verschiedener Gase geltend gemacht worden ist. Allein DALTON hat seine Annahme auch durch eine von den Versuchen über den Wasserdampf unabhängige Wahrnehmung unterstützt, nämlich dadurch, dass ein specifisch schwereres Gas sich mit einem leichteren vermischt, selbst wenn dieses Anfangs höher liegt. Die Dalton'sche Annahme erklärt diese Wahrnehmung allerdings, allein damit kann nicht behauptet werden, dass sie allein sie begreiflich mache; das Aufsteigen von Flüssigkeiten in Röhren, welche durch sie benetzt werden, könnte z. B. durch die Annahme, die Schwere äussere innerhalb der Röhre ihre Wirkung unvollständig, erklärt werden; seine wahre Erklärung ist aber bekanntlich hiervon verschieden.

Wenn ich nicht irre, so ist auch die Kleinheit der Veränderung der Beschaffenheit der Luft in einem Raume, in welchem sich viele Personen befinden, deren Athmen das Sauerstoffgas vermindern und das Kohlensäuregas vermehren muss, als für die Richtigkeit der Dalton'schen Annahme sprechend, angeführt worden. In der That muss das Sauerstoffgas sich vorzugsweise aus der äusseren Luft ersetzen und das Kohlensäuregas vorzugsweise in diese übergehen, wenn die einzelnen Bestandtheile der inneren Luft nur von den gleichartigen der äusseren gedrückt werden. Die ersten Versuche dieser Art sind in einem der Pariser Schauspielhäuser von HUMBOLDT und GAY-LUSSAC vorgenommen*) und haben eine Verminderung des Sauerstoffgehaltes von 0,007, sowie einen nicht näher bestimmten Kohlensäuregehalt ergeben. Neuerlich hat DALTON diese Versuche in Räumen wiederholt**), welche gleichfalls durch zahlreiche Versammlungen gefüllt waren und den Sauerstoffgehalt = 0,20325 gefunden, während er ihn in freier Luft = 0,2090 fand; auch zeigte sich mehr Kohlensäuregas als in freier Luft; in einem Falle, in welchem es bestimmt wurde, betrug es 0,01. Diese Versuche zeigen also wirkliche Veränderungen der Beschaffenheit der Luft und es kommt nur darauf an, zu untersuchen, ob sie kleiner sind als die Veränderungen, die man nach der älteren Theorie erwarten durfte. Wenigstens die früheren dieser Versuche scheinen nicht in der Absicht angestellt zu sein, dadurch die Richtigkeit der Dalton'schen Theorie zu prüfen; allen fehlen die näheren Angaben, welche einer Berechnung zum Grunde gelegt werden müssten, namentlich die Angaben des kubischen Inhalts der Räume, deren Luft untersucht worden ist; der Anzahl der darin befindlichen Menschen und Lichtflammen und der Stärke der letzteren; der Verbindungen zwischen dem Inneren und Aeusseren und der Wärme in verschiedenen Höhen; auch ist der untersuchte Fall wohl nicht einfach genug, um ihn streng richtig berechnen zu können. Um aber eine ohngefähre Uebersicht zu erhalten, bin ich von der in den Preussischen Staaten beobachtet werdenden Regel, die Räume, welche Versammlungen aufnehmen sollen, nicht kleiner zu machen als 100 Kubikfuss für jeden Menschen, ausgegangen, habe aber diesen Raum noch um ein Drittel vermindert; ferner habe ich nach DAVY's Versuchen***) angenommen, dass jeder Mensch in einer Minute die Luft um 4,9 Kubikzoll Stickstoffgas und 19,5 Kubikzoll Sauerstoffgas vermindert, dagegen um 15,4 K.-Z. Kohlensäuregas vermehrt. Wenn man das, bei der Verminderung von

*) GILBERT's Annalen der Physik. Bd. XX, S. 88.

**) Phil. Transact. 1837. P. II, p. 363.

***) Nach GILBERT's Berechnung. Annalen der Physik Bd. XIX, S. 312.

9 K.-Z. in einer Minute nothwendige Eindringen der äusseren Luft durch die jedesmal vorhandene Vermehrung der Wärme ausgeglichen annimmt, so findet man aus diesen Zahlen, dass das im 1. Art. angeführte Verhältniss der drei in der Luft Anfangs befindlichen Gasarten, nämlich:

$$v = 0{,}78605, \quad v_{,} = 0{,}21325, \quad v_{,,} = 0{,}00070$$

sich nach Verlauf einer Stunde in

$$v = 0{,}78719, \quad v_{,} = 0{,}20405, \quad v_{,,} = 0{,}00876$$

ändert. Entzieht man der vermischten Luft das Kohlensäuregas, so ist das Verhältniss der beiden anderen Gase Anfangs $= 0{,}7866 : 0{,}2134$ und nach Verlauf der Stunde $= 0{,}7941 : 0{,}2059$. Dieses Resultat der Rechnung ist dem Resultate der Versuche nicht so unähnlich, dass man daraus schliessen dürfte, die Voraussetzung, auf welche die erstere gebauet ist, sei unrichtig; vielmehr scheint es, dass man diese Vergleichung beider leichter gegen als für die Dalton'sche Annahme geltend machen könnte. Ich glaube überhaupt, dass, wenn man Versuche zu haben wünscht, welche unmittelbar gegen oder für diese Annahme entscheiden, man sie am leichtesten erhalten wird, indem man das Eindringen atmosphärischer Luft in einen, mit einem ihrer Bestandtheile oder auch mit beiden in einem anderen Verhältnisse gefüllten, nicht luftdicht verschlossenen Raum beobachtet. Um diese Versuche zu vereinfachen und die Grundlagen ihrer Berechnung leichter zu erhalten, müsste der Raum nicht das Innere eines Saales, sondern das Innere einer Glasglocke sein.

Wenn keine besondere Hypothese über die moleculare Beschaffenheit der Gase und Dämpfe gemacht wird, so ist offenbar, dass ein Gastheilchen ein angrenzendes Theilchen von gleicher oder ungleicher Beschaffenheit mit gleicher Kraft (mit derselben, womit es sich auszudehnen strebt) drücken muss. Ohne eine solche Hypothese ist also die Dalton'sche Annahme im Widerspruche mit den Grundsätzen der Aërostatik. Unbedingt aber kann dieses nicht eher behauptet werden, als bis der Beweis geführt sein wird, dass keine Hypothese dieser Art mathematisch möglich sei. Die von mir entwickelte Ansicht des Verhaltens der Dämpfe bedarf dagegen nicht der Rechtfertigung durch eine besondere Hypothese, indem als unmittelbares Resultat der Erfahrung und als Unterscheidungszeichen zwischen Dämpfen und Gasen angesehen wird, dass die Dichtigkeit der Dämpfe nicht über einen gewissen, von der Wärme abhängigen Grad gesteigert werden kann. Will man aber auch auf die moleculare Beschaffenheit eingehen, so ist leicht begreiflich, dass eine Entfernung der kleinsten Theilchen der Dämpfe stattfinde, für welche ihre Anziehungskraft der aus der Wärme hervorgehenden Abstossungskraft gleich wird, so dass jede kleinere Entfernung die erstere überwiegend macht und die Vereinigung der Theilchen zur Folge hat.

7.

Wenn ich die Dalton'sche Annahme, trotz dem, was ich eben darüber gesagt habe, in Beziehung auf die trockenen Bestandtheile der Luft verfolgt habe (Art. 5), so darf ich noch weniger unterlassen, zu untersuchen, was daraus in Beziehung auf den in der Atmosphäre enthaltenen Wasserdampf hervorgeht. Auch muss man diese Untersuchung durchführen, wenn man erfahren will, ob Beobachtungen über die Vertheilung des Wasserdampfes in der Atmosphäre für oder wider die Daltonsche Annahme geltend gemacht werden können.

Ich werde also nach DALTON annehmen, der Wasserdampf in der Atmosphäre werde nur durch höhere Schichten seiner eigenen Art zusammengedrückt oder er bilde eine, durch ihr eigenes Gleichgewicht bestehende Atmosphäre. Die Aenderung des Druckes dieser Dampfatmosphäre, welche der Vergrösserung dx der Höhe x entspricht, ist der Formel (4) zufolge:

$$dp_{,} = -\frac{(g)\,864.\delta}{336{,}905}\left(\frac{a}{a+x}\right)^{2} dx$$

oder, nach später eingeführten Bezeichnungen,

$$dp_{,} = -\frac{\delta}{\mu l' D}\, dX.$$

Ihre Dichtigkeit δ folgt, bis sie ihr Maximum erreicht, dem Mariotte'schen Gesetze, oder entspricht der Gleichung (3), welche für den gegenwärtigen Fall

$$\delta E = p_{,} D d_{,}$$

ist; wozu noch die zum Gleichgewichte wesentlich erforderliche Bedingung hinzukommt, dass das aus dieser Gleichung hervorgehende δ in keiner Höhe grösser werde, als das der Wärme angemessene Maximum der Dichtigkeit; oder, der Bezeichnung des 4. Art. zufolge, die Bedingung, dass

$$p_{,} < \varphi t$$

sei.

Eliminirt man δ, so erhält man:

$$\frac{dp_{,}}{p_{,}} = -\frac{d_{,}}{\mu l'}\frac{dX}{1+kt};$$

ein ganz ähnliches Differential ist schon im 2. Art. unter der Voraussetzung integrirt, dass die Wärme zwischen den beiden Höhen, wo sie beobachtet ist, sich so verändere, wie LAPLACE es annimmt. Dieser Voraussetzung zufolge ist

$$\frac{dX}{1+kt} = -\frac{2k}{i}dt$$

und daher das von der Höhe h, wo der Thermometerstand τ ist, und für welche ich den Druck des Wasserdampfes durch $P_,$ bezeichnen werde, an gezählte Integral:

$$\log\frac{P_,}{p_,} = \frac{d_,}{l'}\frac{2k}{i}(\tau - t)$$

oder

$$p_, = P_,.10^{-\frac{d_,}{l'}\frac{2k}{i}(\tau-t)} \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

Nimmt man den Druck $P_,$ in der Höhe $h = \alpha\varphi\tau$ an, wo α nicht grösser als 1 sein kann, so fordert die zu erfüllende Bedingung, dass für jeden Werth von t

$$\alpha\varphi\tau.10^{-\frac{d_,}{l'}\frac{2k}{i}(\tau-t)} \lessgtr \varphi t$$

oder

$$\alpha\varphi\tau.10^{-\frac{d_,}{l'}\frac{2k}{i}\tau} \lessgtr \varphi t.10^{-\frac{d_,}{l'}\frac{2k}{i}t} \quad \ldots\ldots (17)$$

und wenn für $\varphi\tau$ und φt der Ausdruck (9) gesetzt wird, dass

$$\alpha.10^{-\left(\frac{d_,}{l'}\frac{2k}{i}-a\right)\tau - c\tau\tau} \lessgtr 10^{-\left(\frac{d_,}{l'}\frac{2k}{i}-a\right)t - ctt} \quad \ldots (18)$$

sei.

Wenn man t mit zunehmender Höhe ohne Begrenzung kleiner werdend annimmt, so muss es zwar einen negativen Werth erlangen, für welchen selbst bei dem kleinsten Werthe von α diese Bedingung nicht mehr erfüllt wird; man darf aber hieraus nicht schliessen, dass die Dalton'sche Annahme mit dem Vorhandensein einer im Gleichgewichte befindlichen Wasserdampfatmosphäre von nicht verschwindender Dichtigkeit, unter allen Umständen unvereinbar sei. Das Abnehmen von t geht nämlich nicht ins Unendliche, sondern nur bis zu dem Werthe, den es an der Grenze der Atmosphäre besitzt; auch ist die Formel (9), worauf der Ausdruck der Bedingung beruhet, nur eine Interpolationsformel, deren Form nicht gerechtfertigt werden kann, und für welche nichts anderes geltend gemacht wird, als ihre mehr oder weniger genügende Uebereinstimmung mit den Dalton'schen, zwischen $t = 0$ und $t = 100^0$ gemachten Beobachtungen.

Wenn man indessen die Logarithmen der beiden Grössen, zwischen welchen die Bedingung stattfindet, nimmt, so folgt daraus:

$$\log\alpha \lessgtr \left(\frac{d_,}{l'}\frac{2k}{i} - a + c(\tau+t)\right)(\tau - t)$$

und man weiss überdies, dass $\alpha \lessgtr 1$, also $\log\alpha$ nicht positiv sein muss. Hieraus geht hervor, dass die Bedingung erfüllt wird oder die Wasserdampfatmosphäre möglich ist, auch das ihre Dichtigkeit in der Höhe h bestimmende $\alpha(<1)$ willkürlich bleibt, wenn

$$\frac{d_,}{l'}\frac{2k}{i} > a - c(\tau+t) \quad \ldots\ldots\ldots (19)$$

ist, was bis zur Grenze der Atmosphäre stattfinden muss; ferner, dass im entgegengesetzten Falle, wenn also, selbst in der Höhe h,

$$\frac{d_,}{l'}\frac{2k}{i} < a - c(\tau+t) \quad \ldots\ldots\ldots (20)$$

ist, zwar auch eine sich im Gleichgewichte befindende Wasserdampfatmosphäre möglich ist, ihre Dichtigkeit in der Höhe h aber durch die Bedingung beschränkt wird, dass α kleiner sein muss, als

$$10^{\left(\frac{d_,}{l'}\frac{2k}{i} - a + c(\tau+t)\right)(\tau-t)} \quad \ldots\ldots\ldots (21)$$

für den Werth von t ist, welcher an der Grenze der Atmosphäre stattfindet. In einem besonderen Falle der Wärmeabnahme kann die Wasserdampfatmosphäre in allen Höhen so dicht sein, als ihre Wärme erlaubt; dieser Fall fordert, dass

$$\frac{dp_,}{p_,} = -\frac{d_,}{\mu l'}\frac{dX}{1+kt} = \frac{d\varphi t}{\varphi t}$$

oder, unter Voraussetzung des immer angewandten Ausdruckes von φt,

$$-\frac{d_,}{l'}dX = (a - 2ct)(1+kt)\,dt$$

sei. Hieraus folgt durch Integration:

$$a(\tau-t) + \left(\frac{ak}{2} - c\right)(\tau^2 - t^2) - \tfrac{2}{3}ck(\tau^3 - t^3) = \frac{d_,}{l'}(X - H)$$

wofür auch geschrieben werden kann:

$$X - H = \frac{l'}{d_,}\left\{(a - 2c\tau)(1+k\tau)(\tau - t) - \left(\frac{ak}{2} - c + 2ck\tau\right)(\tau-t)^2 - \tfrac{2}{3}ck(\tau-t)^3\right\} \quad \ldots\ldots (22)$$

Setzt man die oben schon angewandten Werthe von l', $d_,$, a, c, k in diese Gleichung, so erhält man das Gesetz der Wärmeabnahme, welches unter der Voraussetzung der Dalton'schen Annahme, allein mit einer allenthalben durch Wasserdampf gesättigten Atmosphäre vereinbar ist:

$$X - H = 424^{\mathrm{T}}0\,(1 - \tau.0{,}00447)(1 + \tau.0{,}00375)(\tau - t) + 0^{\mathrm{T}}15\,(1 - \tau.0{,}0463)(\tau-t)^2 - 0^{\mathrm{T}}003\,(\tau-t)^3.$$

Setzt man ferner dem 2. Art. zufolge

$$\frac{2k}{i} = \frac{H' - H}{\tau - \tau'}\cdot\frac{1}{1+kT}$$

und bezeichnet man den Werth, welchen t an der äussersten Grenze der Atmosphäre hat, durch (t), so verwandelt sich die Bedingung (19) in:

$$\frac{H'-H}{\tau-\tau'} > \frac{l'}{d,}(1+kT)\{a - c[\tau+(t)]\}$$
$$> \{424,^{T}0 - 0,^{T}95[\tau+(t)]\}(1+kT)$$

In der Wirklichkeit ist die Veränderung der Höhe, welche eine Abnahme des Thermometerstandes von 1^0 hervorbringt, weit kleiner, etwa = 85 Toisen. Mit diesem wirklichen Zustande der Atmosphäre kann also der Dalton'schen Annahme zufolge ihre Sättigung durch Wasserdampf, an der Oberfläche der Erde, nicht vereinigt werden. Wird aber die Bedingung (20) erfüllt, oder ist

$$\frac{H'-H}{\tau-\tau'} < (424,^{T}0 - 1,9\tau)(1+kT),$$

so ist der Formel (21) zufolge, nachdem man darin den Ausdruck von $\frac{2k}{i}$ substituirt hat,

$$\log\alpha < \left\{\frac{H'-H}{\tau-\tau'}\cdot\frac{1}{1+kT}\cdot\frac{d,}{l'} - a + c[\tau+(t)]\right\}[\tau-(t)]$$

oder

$$(1+kT)\frac{l'}{d,}\log\alpha < \left\{\frac{H'-H}{\tau-\tau'} - (424,^{T}0 - 0,^{T}95[\tau+(t)])(1+kT)\right\}[\tau-(t)]$$

woraus

$$\tau-(t) < \frac{-\frac{l'}{d,}\log\alpha(1+kT)}{\{424,0 - 0,95[\tau+(t)]\}(1+kT) - \frac{H'-H}{\tau-\tau'}}$$

folgt. Kennt man also das letzte Glied des Nenners und zugleich α, so kann man nach dieser Formel einen Werth von $\tau-(t)$ berechnen, der, unter der verfolgten Voraussetzung der Dalton'schen Annahme, grösser ist als der Wärmeunterschied zwischen der Höhe h und der Grenze der Atmosphäre. Nimmt man z. B. $\frac{H'-H}{\tau-\tau'} = 85$ Toisen und $T=0$ und setzt man die Atmosphäre an der Oberfläche der Erde halb gesättigt mit Wasserdampf voraus, so erhält man näherungsweise $\tau-(t) < 13,^{0}5$, was kaum die gewöhnliche Wärmeabnahme in 1200 T. Höhe, geschweige denn an der Grenze der Atmosphäre erreicht; ist die letztere $= n.13,^{0}5$, so wird die grösste Grenze von $\alpha = \frac{1}{2^n}$. Die Dalton'sche Annahme ist also nur mit einer sehr geringen Menge Wasserdampfes in der Atmosphäre und nicht mit der wirklich darin vorkommenden vereinbar. Wenn man die in dieser Untersuchung gemachte Voraussetzung des Gleichgewichtes der Atmosphäre als richtig ansehen könnte, so würde das Vorkommen einer beträchtlichen Menge Wasserdampfes in ihr ein nicht zu beseitigendes Argument gegen die Dalton'sche Annahme sein; dieses Gleichgewicht ist aber nie wirklich vorhanden, und namentlich verdanke ich Herrn Professor NEUMANN die Bemerkung, dass die Dichtigkeit von der Oberfläche der Erde aufsteigenden Wasserdampfes durch den Widerstand vermehrt werden muss, welchen die Luft ihm entgegensetzt.

8.

Ich komme nun zu der Untersuchung der Voraussetzung, dass die Wärme zwischen beiden Höhen, wo sie beobachtet ist, sich nach dem von LAPLACE dafür angenommenen Gesetze (Art. 2) verändere. Die Gleichung zwischen t und X, welche dieses Gesetz ausspricht, ist, wie aus dem 2. Art. hervorgeht:

$$(1+kt)^2 = (1+k\tau)^2\frac{H'-X}{H'-H} + (1+k\tau')^2\frac{X-H}{H'-H} \quad .. (23)$$

Man hat aber keinen Grund, mässige Abweichungen des Ueberganges der Wärme von τ zu τ', von der durch diese Gleichung ertheilten Vorschrift als unstatthaft zu betrachten; es bleibt z. B. gänzlich zweifelhaft, ob nicht zwischen den beiden Höhen ein Unterschied der wahren Wärme von der aus dieser Vorschrift hervorgehenden vorhanden ist, welcher bis auf ein Zehntel von $\tau-\tau'$ steigt. Es ist daher nicht überflüssig, den Einfluss solcher Abweichungen weiter zu verfolgen.

Ich werde voraussetzen, dass der wahre Werth von

$$\frac{1}{E} = \frac{1 - 4\alpha k\frac{(\tau-t)(t-\tau')}{\tau-\tau'}}{1+kt}$$

ist, wo t den der Gleichung (23) entsprechenden Werth des Thermometerstandes in der Höhe x, und α einen beständigen Coefficienten bezeichnet, dessen grössere oder kleinere Annahme die Grösse der Abweichung von dem Gesetze bestimmt. Dieser Ausdruck von $\frac{1}{E}$ ist so gewählt, dass er in den beiden Grenzen mit dem vorigen übereinstimmt und dass die Abweichung der Wärme, welche er voraussetzt, von der aus der angenommenen Gleichung folgenden, etwa für $t = \frac{1}{2}(\tau+\tau')$, oder $x = \frac{1}{2}(h+h')$, ihr Maximum $= \alpha(\tau-\tau')$ erlangt. Man erhält dadurch:

$$\left(\frac{a}{a+x}\right)^2\frac{dx}{E} = -\frac{2k}{i}dt\left\{1 - 4\alpha k\frac{(\tau-t)(t-\tau')}{\tau-\tau'}\right\}$$

und das von h bis h' genommene Integral:

$$= \frac{2k}{i}(\tau-\tau')\left\{1 - \tfrac{2}{3}\alpha k(\tau-\tau')\right\}$$
$$= \frac{H'-H}{1+kT}\left\{1 - \tfrac{2}{3}\alpha k(\tau-\tau')\right\} \quad \ldots\ldots (24)$$

Ich glaube nicht, dass man in irgend einem vorkommenden Falle geneigt sein wird, für wahrscheinlich zu halten, dass α sich innerhalb sehr enger Grenzen, z. B. $\pm \frac{1}{10}$ befinde; erreicht es eine dieser Grenzen, so ist die daraus folgende Verbesserung des unter der Voraussetzung des Gesetzes (23) gefundenen Höhenunterschiedes

$$= \pm \frac{H' - H}{1 + kT} \cdot \frac{\tau - \tau'}{4000},$$

also z. B. für einen Höhenunterschied von 1000 Toisen, für welchen $\tau - \tau'$ gewöhnlich 12^0 ist, etwa $\pm$ 3 Toisen. Man wird desto weniger geneigt sein, α als nothwendig sehr klein vorauszusetzen, da man nicht übersehen wird, dass die Wärme der Luft, welche man an einem in der Ebene oder auf einer Höhe liegenden Punkte beobachtet, immer an der Wärme der Oberfläche der Erde an diesem Punkte Theil nimmt. Man sieht hieraus, wie wenig geeignet barometrische Höhenmessungen schon aus diesem Grunde allein sind, über Fragen zu entscheiden, deren Beantwortung auf kleinen Verschiedenheiten zwischen einer Theorie und der Erfahrung beruhet. Es ist übrigens nicht unwahrscheinlich, dass spät in der Nacht vorgenommene barometrische Höhenmessungen besser untereinander übereinstimmen werden als am Tage gemachte, wo die Sonne die Oberfläche der Erde erwärmt.

9.

Es ist bekannt, dass GAY-LUSSAC den hier durch k bezeichneten Werth durch fast vollkommen untereinander übereinstimmende Versuche $= 0{,}00375$ gefunden hat; auch dass DALTON aus den seinigen genau dasselbe Resultat erhalten hat. Beide grosse Physiker haben beabsichtigt, die Vergrösserung unmittelbar zu bestimmen, welche die Raumeseinheit trockener Luft erfährt, indem man sie bei gleichbleibendem Drucke aus der Wärme des gefrierenden Wassers in die des siedenden bringt. Nicht nur die Uebereinstimmung der einzelnen Versuche beider Reihen untereinander, sondern auch der Resultate beider hat die Annahme allgemein gemacht, dass die Bestimmung $k = 0{,}00375$ zu den sichersten gehöre, welche man besitzt; und es würde kein Grund diese Annahme in Zweifel zu ziehen vorhanden sein*), wenn nicht neuerlich eine Arbeit von RUDBERG bekannt geworden wäre, welche sich durch grosse darauf verwandte Vorsicht, namentlich in der Austrocknung der angewandten Luft, auszeichnet, allein ein beträchtlich kleineres Resultat, nämlich $k = 0{,}003648$, ergibt. Indessen sollte jede neuere Bestimmung, welche gegen eine ältere, durch eigenes Gewicht und durch häufige allgemeine Anwendung gewissermassen klassisch gewordene, streitet, immer nur von einer genauen Kritik der älteren begleitet auftreten; nur wenn sich aus dieser Kritik Gründe zum Misstrauen gegen die ältere ergeben, darf billigerweise angenommen werden, dass die neuere den Vorzug verdient. RUDBERG hat sich auf diese Kritik nicht eingelassen. Da der Unterschied beider Bestimmungen nicht durch die zufälligen Fehler der Versuche, so wie sie sich aus der Uebereinstimmung der einzelnen, sowohl der früher als der später gemachten, ergeben, erklärt werden kann, also auf einen beständigen Fehler deutet, so darf von dem arithmetischen Mittel beider Resultate nicht die Rede sein. Meiner Meinung nach darf für jetzt nichts Anderes geschehen, als beide Resultate anzuwenden und über den Unterschied des dadurch Erlangten spätere Entscheidung abzuwarten.

10.

Nachdem ich die verschiedenen Voraussetzungen, welche der Formel (11) zum Grunde liegen, durchgegangen bin, kehre ich zu dieser Formel zurück und werde nun zeigen, welche Anwendung auf barometrische Höhenmessungen davon gemacht werden muss.

Die Drücke P und P' in den Höhen h und h' kann man aus den daselbst gemachten Barometerbeobachtungen ableiten. Bezeichnet man eine Barometerhöhe durch b, die Wärme des Quecksilbers und der Scale, auf welcher sie gemessen worden ist, durch t, und nimmt man an, dass diese, wie gewöhnlich, von Messing verfertigt ist, so erhält man die Masse Quecksilbers, welche jede Flächeneinheit trägt,

$$= b \cdot \frac{53242 + t}{53242 + (t)} \cdot \frac{5550}{5550 + t'}$$

wo (t) die Normaltemperatur der Maasseinheit der Barometerscale bedeutet und wo die Raumeseinheit Queck-

*) Ich selbst habe zwar die Zahl, welche man statt k bei der Berechnung der astronomischen Strahlenbrechungen anwenden muss, aus meinen Beobachtungen bestimmt und $= 0{,}0036438$ gefunden; allein diese Zahl muss verschieden von k und zwar kleiner sein, wie aus der VII. Abthl. meiner Beobb. S. XI hervorgeht [vgl. Abh. 33]. Man könnte ihre Aufsuchung ersparen, wenn man für die Zeit jeder Beobachtung einer Strahlenbrechung auch die Beobachtung des Wasserdampfgehaltes der Luft besässe; der Mangel dieser Beobachtung sollte und musste durch meine Untersuchung, in soweit er ohne Kenntniss des jedesmaligen, zufälligen Zustandes der Luft beseitigt werden kann, weniger nachtheilig gemacht werden. Als ein Beitrag zur Bestimmung von k ist ihr Resultat nicht anzusehen, sondern nur als ein Beitrag zur Kenntniss der astronomischen Strahlenbrechungen.

silber in der Wärme des schmelzenden Eises zur Einheit der Masse genommen ist. Diese Masse drückt im Verhältnisse der Schwere welcher sie ausgesetzt ist, also mit der Kraft

$$(g)\left(\frac{a}{a+h}\right)^2,$$

und der Druck, den sie ausübt, ist das Product beider, durch die angenommene Einheit des Druckes (= 336,905) dividirt. Man erhält also:

$$P = \frac{(g)\,b}{336{,}905}\left(\frac{a}{a+h}\right)^2 \cdot \frac{53242+t}{53242+(t)} \cdot \frac{5550}{5550+t}$$

und seinen in der Formel (11) vorkommenden Briggschen Logarithmen mit hinreichender Annäherung:

$$= \log b - \log\frac{336{,}905\,[53242+(t)]}{53242} - \mu t\left\{\frac{1}{5550}-\frac{1}{53242}\right\} - \frac{2\mu}{a}H.$$

Setzt man für a das geometrische Mittel beider halben Axen des Erdsphäroids (nach Astron. Nachrichten Nr. 333 [Abh. 131, p. 47] ist sein log = 6,5140838) und für (t) die Normaltemperatur des französischen Fussmaasses = 16°,25, so wird

$$\log P = \log b - \log 337{,}008 - t\,.\,0{,}000070095 - \frac{H}{3760707}.$$

Man erhält also:

$$\log\frac{P}{P'} = \log b_{,} - \log b'_{,} + \frac{H'-H}{3760707}$$

wo $\log b_{,}$ und $\log b'_{,}$, um abzukürzen, für

$$\log b - t\,.\,0{,}00007 \text{ und } \log b' - t'\,.\,0{,}00007$$

gesetzt sind. Ferner erhält man ohne merklichen Fehler:

$$\sqrt{PP'} = \frac{\sqrt{b,b'_{,}}}{337{,}008}.$$

Setzt man beides in (11) und überdies $\frac{l}{(g)}$ für l', so wird diese Gleichung:

$$\log b_{,} - \log b'_{,} = \frac{(g)\,(H'-H)}{l(1+kT)} \times \left\{1 - \frac{l(1+kT)}{(g)\cdot 3760707} - \alpha\frac{0{,}863}{\sqrt{b,b'_{,}}}10^{\alpha T - c T^2}\right\}$$

Verwechselt man (g) im Nenner des zweiten Gliedes mit 1, was keinen merklichen Einfluss hat, und nimmt man für α die halbe Summe seiner Werthe an beiden Beobachtungspunkten $= \frac{1}{2}(\alpha+\alpha')$, so wird die in den Klammern befindliche Grösse

$$= \frac{399{,}17-kT}{400{,}17}\left\{1-(\alpha+\alpha')\frac{172{,}67}{\sqrt{b,b'_{,}}}\cdot\frac{10^{\alpha T - c T^2}}{399{,}17-kT}\right\}.$$

Bezeichnet man daher

$$l(1+kT)\frac{400{,}17}{399{,}17-kT} \text{ durch } V$$

$$\frac{172{,}67\times 10^{\alpha T - c T^2}}{399{,}17-kT} \text{ durch } W$$

so ergibt die Gleichung:

$$H'-H = \frac{\log b_{,} - \log b'_{,}}{(g)}\cdot\frac{V}{1-\frac{(\alpha+\alpha')\,W}{\sqrt{b,b'_{,}}}}$$

und da

$$H'-H = \frac{ah'}{a+h'} - \frac{ah}{a+h} = h' - h - \frac{h'h'}{a} + \frac{hh}{a}$$

ist:

$$h'-h-\frac{h'h'}{a}+\frac{hh}{a} = \frac{\log b_{,} - \log b'_{,}}{(g)}\cdot\frac{V}{1-\frac{(\alpha+\alpha')\,W}{\sqrt{b,b'_{,}}}} \quad \ldots(25)$$

Dieses ist die zur Anwendung bequemste Umformung der Gleichung (11). Sie kann nicht weiter abgekürzt werden, wenn die Freiheit nicht aufgeopfert werden soll, den Wasserdampfgehalt der Luft, so wie man ihn jedesmal durch das Psychrometer erkennen kann, richtig in Rechnung zu bringen. Man kann auch den, zur Erleichterung der Rechnung bestimmten Hülfstafeln eine Einrichtung geben, welche die Mühe, den Wasserdampf gehörig zu berücksichtigen, höchst unbedeutend macht.

11.

Ich werde noch diese Hülfstafeln erklären. Sie sind logarithmisch eingerichtet, so wie die kleinen, sehr bequemen Tafeln von Gauss. Sie sind aber etwas weitläufiger; sowohl weil sie das gesuchte Resultat unter den beiden Annahmen von k, nämlich = 0,00375 und 0,003648 ergeben sollen, als auch weil der Einfluss des Wasserdampfes vollständiger in Rechnung gebracht werden soll, als nach der von Laplace gewählten Formel geschieht.

Bezeichnet man

$\log B r\{\log b_{,} - \log b'_{,}\}$ durch B

$\frac{1}{1-\frac{(\alpha+\alpha')\,W}{\sqrt{b,b'_{,}}}}$ „ V'

$\frac{1}{(g)}\ldots\ldots\ldots$ „ G

so ist der Logarithme von $h'-h-\frac{h'h'}{a}+\frac{hh}{a}$

$$= B + \log V + \log V' + \log G.$$

Die Tafel I enthält in ihrer ersten Spalte für $k = 0{,}00375$, in der letzten für $k = 0{,}003648$ berechnet:

$$\log V = \log\frac{9397{,}74\times 400{,}17(1+kT)}{399{,}17-kT}$$

ihr Argument ist $2T = \tau + \tau_,$; in der zweiten Spalte enthält sie

$$\log W = \log \frac{172{,}67 \times 10^{a\,T - c\,T^2}}{399{,}17 - k\,T}$$

und zwar hat die Verschiedenheit der beiden Annahmen von k keinen Einfluss auf die letzte Decimalstelle von $\log W$, weshalb nur eine Spalte damit gefüllt werden durfte. Wenn man von dem daraus entnommenen Werthe von $\log W$ die halbe Summe der (schon aufgesuchten) Logarithmen von b, und $b'_,$ abzieht, so ist der Rest der Logarithme von

$$\frac{(\alpha + \alpha')\,W}{\sqrt{b, b'_,}}$$

unter der Voraussetzung $\alpha = \alpha' = \frac{1}{2}$; sollen α und α' anders angenommen werden, so muss noch $\log(\alpha + \alpha')$ addirt werden. Hierdurch hat man das Argument von Tafel II, welche $\log V'$ enthält. Tafel III enthält, mit dem Argumente φ = Polhöhe:

$$\log G = \log \frac{1}{1 - 0{,}0026257 \cos 2\varphi},$$

welche Formel auf dem Werthe der Zunahme der Secundenpendellänge von dem Aequator bis zu den Polen beruhet, welchen Herr Baily aus der Berechnung aller bekannt gewordenen Beobachtungen des Pendels im VII. Bande der Schriften der Astron. Society p. 94 abgeleitet hat.

Die Summe von B und der aus den drei Tafeln genommenen Zahlen ist $= \log \left\{ h' - h - \frac{h'h'}{a} + \frac{hh}{a} \right\}$; um aus dem hierdurch bekannt werdenden Werthe dieser Grösse $h' - h$ selbst zu finden, muss man $\frac{h'h'}{a}$ addiren und $\frac{hh}{a}$ subtrahiren, welche beide durch Tafel IV gegeben werden, indem man mit h' und mit h in sie eingeht.

Um alle Bezeichnungen und Vorschriften beisammen zu haben, setze ich sie noch einmal her:

- b, b' Barometerstände auf einer in Pariser Linien getheilten Scale abgelesen.
- t, t' Stände des Centesimalthermometers am Barometer.
- τ, τ' Stände des Centesimalthermometers in freier Luft.
- α, α' Sättigungsgrade der Luft durch Wasserdampf.

Die Berechnung des Höhenunterschiedes der Punkte, wo diese Beobachtungen gemacht worden sind, fordert die Aufsuchung von:

1. $\log b, = \log b - t.0{,}00007$; $\log b'_, = \log b' - t'.0{,}00007$.
2. $B = \log\{\log b, - \log b'_,\}$.
3. $\log V$ und $\log W$, welche mit dem Argumente $\tau + \tau'$ aus Tafel I genommen werden.
4. $\log V'$, welchen Tafel II mit dem Argumente $\log \frac{(\alpha + \alpha')\,W}{\sqrt{b, b'_,}}$ ergibt.
5. $\log G$, welchen Tafel III mit dem Argumente Polhöhe $= \varphi$ ergibt.
6. log des genäherten Höhenunterschiedes $= B + \log V + \log V' + \log G$.
7. Der wahre Höhenunterschied ist der genäherte + dem Unterschied der kleinen Verbesserungen, welche man aus Tafel IV mit den Argumenten grössere und kleinere Höhe erhält.

Zum Beispiele wähle ich eine von d'Aubuisson's Messungen der Höhe des Monte-Gregorio über einem Punkte, dessen Höhe $h = 128{,}3$ Toisen ist; sie findet sich im Traité de Géognosie, I p. 481. Da der Wasserdampfgehalt der Luft nicht beobachtet ist, so nehme ich $\alpha = \alpha' = \frac{1}{2}$.

$b = 329^{L}{,}013$, $t = 19^{0}{,}85$, $\tau = 19^{0}{,}95$
$b' = 268{,}215$, $t' = 10{,}5$, $\tau' = 9{,}9$

$\log b = 2{,}51721$; $7.t = 139$; $\log b, = 2{,}51582$,
$\log b' = 2{,}42848$; $7.t' = 73{,}5$; $\log b'_, = 2{,}42774{,}5$ } halbe Summe*)

$\log \frac{b,}{b'_,} = 0{,}088075$

$B = 8{,}94485$

Tafel.		$B = 8{,}94485$		
I.	$\tau + \tau' = 29^{0}{,}85$ ($k = 0{,}00375$)	$\log V =$	3,99782	$\log W =$ 0,0397
II. Arg.	$= 7{,}5679$	$\log V' =$	161	*) 2,4718
III.	$\varphi = 45^{0}\,32'$	$\log G =$	−2	7,5679
			2,94426	
	genäherter Höhenunterschied		$879^{T}{,}54$	
IV.	$h' = 1007{,}8$, $h = 128{,}3$		+ 0,31	
		$h' - h$	879,85	

d'Aubuisson berechnet selbst $879^{T}{,}7$; aus den Gaussischen Tafeln erhält man $879^{T}{,}63$. Will man $k = 0{,}003648$ annehmen, so erhält man $1^{T}{,}26$ weniger. Nimmt man die Luft ganz trocken an, so erhält man $3^{T}{,}24$ weniger; nimmt man sie ganz feucht an, $3^{T}{,}28$ mehr.

Tafel I.

Argument $= \tau + \tau'$ (Centesimalscale).

$\tau+\tau'$	0,00375 log V	log W	0,003648 log V	$\tau+\tau'$	0,00375 log V	log W	0,003648 log V
— 20°	3,95747	9,3501	3,95793	+ 20°	3,99014	9,9096	3,98971
— 19	3,95832	9,3646	3,95875	21	3,99093	9,9229	3,99048
— 18	3,95916	9,3792	3,95958	22	3,99171	9,9362	3,99124
— 17	3,96001	9,3937	3,96040	23	3,99249	9,9495	3,99200
— 16	3,96085	9,4083	3,96122	24	3,99328	9,9628	3,99277
— 15	3,96169	9,4227	3,96203	25	3.99406	9,9760	3,99353
— 14	3,96253	9,4372	3,96285	26	3,99484	9,9892	3,99428
— 13	3,96337	9,4516	3,96366	27	3,99561	0,0023	3,99504
— 12	3,96420	9,4660	3,96447	28	3,99639	0,0155	3,99580
— 11	3,96504	9,4803	3,96529	29	3,99716	0,0285	3,99655
— 10	3,96587	9,4946	3,96610	30	3,99794	0,0416	3,99731
— 9	3,96670	9,5089	3,96690	31	3,99871	0,0546	3,99806
— 8	3,96753	9,5232	3,96771	32	3,99948	0,0677	3,99881
— 7	3,96836	9,5374	3,96851	33	4,00025	0,0806	3,99956
— 6	3,96918	9,5516	3,96932	34	4,00102	0,0936	4,00031
— 5	3,97001	9,5657	3,97012	35	4,00179	0,1065	4,00106
— 4	3,97083	9,5799	3,97092	36	4,00255	0,1193	4,00180
— 3	3,97165	9,5940	3,97172	37	4,00332	0,1322	4,00255
— 2	3,97247	9,6080	3,97252	38	4,00408	0,1450	4,00329
— 1	3,97329	9,6221	3,97332	39	4,00484	0,1578	4,00403
0	3,97411	9,6361	3,97411	40	4,00560	0,1705	4,00477
+ 1	3,97493	9,6500	3,97490	41	4,00636	0,1833	4,00551
2	3,97574	9,6640	3,97570	42	4,00712	0,1960	4,00625
3	3,97655	9,6779	3,97649	43	4,00787	0,2086	4,00699
4	3,97736	9,6918	3,97728	44	4,00863	0,2212	4,00772
5	3,97817	9,7056	3,97806	45	4,00938	0,2338	4,00846
6	3,97898	9,7194	3,97885	46	4,01013	0,2464	4,00919
7	3,97979	9,7332	3,97963	47	4,01088	0,2589	4,00992
8	3,98059	9,7470	3,98042	48	4,01163	0,2714	4,01066
9	3,98140	9,7607	3,98120	49	4,01238	0,2839	4,01139
10	3,98220	9,7744	3,98198	50	4,01313	0,2963	4,01211
11	3,98300	9,7880	3,98276	51	4,01388	0,3087	4,01284
12	3,98380	9,8017	3,98354	52	4,01462	0,3211	4,01357
13	3,98460	9,8153	3,98431	53	4,01536	0,3335	4,01429
14	3,98539	9,8288	3,98509	54	4,01611	0,3458	4,01502
15	3,98619	9,8424	3,98586	55	4,01685	0,3581	4,01574
16	3,98698	9,8559	3,98663	56	4,01759	0,3703	4,01646
17	3,98777	9,8693	3,98741	57	4,01832	0,3824	4,01718
18	3,98856	9,8828	3,98818	58	4,01906	0,3946	4,01790
19	3,98935	9,8962	3,98894	59	4,01980	0,4068	4,01862
20	3,99014	9,9096	3,98971	60	4,02053	0,4189	4,01933

Tafel II.

Argument $= \log\left(\frac{(\alpha+\alpha')\,W}{\sqrt{b,b'}}\right)$

Arg.	log V'	Arg.	log V'	Arg.	log V'
5,0	0	7,55	154	7,95	389
5,1	1	7,56	158	7,96	398
5,2	1	7,57	162	7,97	407
5,3	1	7,58	165	7,98	417
5,4	1	7,59	169	7,99	427
5,5	1	7,60	173	8,00	437
5,6	2	7,61	177	8,01	447
5,7	2	7,62	181	8,02	457
5,8	3	7,63	186	8,03	468
5,9	3	7,64	190	8,04	479
6,0	4	7,65	194	8,05	490
6,1	5	7,66	199	8,06	502
6,2	7	7,67	204	8,07	513
6,3	9	7,68	208	8,08	525
6,4	11	7,69	213	8,09	538
6,5	14	7,70	218	8,10	550
6,6	17	7,71	223	8,11	563
6,7	22	7,72	229	8,12	576
6,8	27	7,73	234	8,13	590
6,9	34	7,74	239	8,14	604
7,0	43	7,75	245	8,15	618
7,1	55	7,76	251	8,16	632
7,2	69	7,77	256	8,17	647
7,3	87	7,78	262	8,18	662
7,4	109	7,79	269	8,19	678
7,41	112	7,80	275	8,20	694
7,42	114	7,81	281	8,21	710
7,43	117	7,82	288	8,22	727
7,44	120	7,83	295	8,23	744
7,45	123	7,84	302	8,24	761
7,46	125	7,85	309	8,25	779
7,47	128	7,86	316	8,26	798
7,48	131	7,87	323	8,27	816
7,49	134	7,88	331	8,28	835
7,50	138	7,89	338	8,29	855
7,51	141	7,90	346	8,30	875
7,52	144	7,91	354	8,31	896
7,53	147	7,92	363	8,32	917
7,54	151	7,93	371	8,33	939
7,55	154	7,94	380	8,34	961
		7,95	389	8,35	983

Tafel III.

Argument = Polhöhe.

φ	log G'	φ	log G'
0°	114	40°	20
1	114	41	16
2	114	42	12
3	114	43	8
4	113	44	4
5	112	45	0
6	112	46	— 4
7	111	47	— 8
8	110	48	— 12
9	109	49	— 16
10	107	50	— 20
11	106	51	— 24
12	104	52	— 28
13	103	53	— 31
14	101	54	— 35
15	99	55	— 39
16	97	56	— 43
17	95	57	— 46
18	92	58	— 50
19	90	59	— 54
20	87	60	— 57
21	85	61	— 60
22	82	62	— 64
23	79	63	— 67
24	76	64	— 70
25	73	65	— 73
26	70	66	— 76
27	67	67	— 79
28	64	68	— 82
29	60	69	— 85
30	57	70	— 87
31	54	71	— 90
32	50	72	— 92
33	46	73	— 94
34	43	74	— 97
35	39	75	— 99
36	35	76	—101
37	31	77	—102
38	28	78	—104
39	24	79	—106
40	20	80	—107

Tafel IV.

Arg. Höhe $\begin{cases} h'+ \\ h- \end{cases}$ h' et h	
100^T	$0,^T00$
200	0,01
300	0,03
400	0,05
500	0,08
600	0,11
700	0,15
800	0,20
900	0,25
1000	0,31
1100	0,37
1200	0,44
1300	0,52
1400	0,60
1500	0,69
1600	0,78
1700	0,88
1800	0,99
1900	1,11
2000	1,22
2100	1,35
2200	1,48
2300	1,62
2400	1,76
2500	1,91
2600	2,07
2700	2,23
2800	2,40
2900	2,58
3000	2,76
3100	2,94
3200	3,13
3300	3,33
3400	3,54
3500	3,75

147. Ueber das Nordlicht vom 18. October 1836.*)

(Astron. Nachr. **14**, p. 149.)

Indem ich die Bitte der Redaction dieser Zeitung erfülle und eine Beschreibung des Nordlichts liefere, welches den Jahrestag der Leipziger Schlacht auszeichnete, muss ich vorher bemerken, dass ich diese schöne Erscheinung nicht ununterbrochen angesehen habe. Astronomische Beobachtungen, welche nicht versäumt werden durften, nahmen den grössten Theil meiner Zeit an diesem ganz heiteren Abende in Anspruch; sie liessen aber Zwischenzeiten frei, in welchem ich gesehen habe, was ich mittheilen werde.

Bald nach dem Untergange der Sonne zeigte sich westlich von Norden eine Helligkeit des Himmels, welche man einem Nordlichte zuschreiben konnte, zumal da ihre Mitte etwa in der Richtung des magnetischen Meridians lag und da einige Tage vorher auch Nordlichter erschienen waren. Denn die Nordlichter haben meistentheils ihren Mittelpunkt in dieser Richtung, und es ist nicht ungewöhnlich, dass sie sich in kurzer Zeit wiederholen. Das erste Nordlicht, welches ich in diesem Herbste gesehen habe, war am 11. Octbr., ein zweites erschien am 12. Jenes gehörte zu den schöneren, indem es häufige Strahlen über den Polarstern hinauftrieb; dieses erhob sich nur wenig über den Horizont und zeigte keine Strahlen. Das am 18. Octbr. erscheinende entwickelte sich so vollständig, dass es, wenigstens für unsere Gegenden, zu den sehr seltenen Erscheinungen gehört und an die schöne Beschreibung von MAUPERTUIS erinnert, den die Nordlichterpracht in Tornea entzückte, als er sich, jetzt gerade vor 100 Jahren, daselbst befand, um eine denkwürdige wissenschaftliche Unternehmung rühmlich auszuführen.

Unser Nordlicht zeigte zunächst einen röthlichen Schimmer, welcher mehrere Theile des nördlichen Himmels bedeckte, aber wenig lebhaft und von kurzer Dauer war. Dann strömte die Gegend um seinen Mittelpunkt herum häufige Strahlen aus, welche, wie es bei Nordlichtern gewöhnlich ist, in wenigen Augenblicken entstanden, fast bis zu dem Scheitelpunkte aufschossen, wieder verschwanden und durch neue ersetzt wurden. Diese Strahlen sind geraden Cometenschweifen durchaus ähnlich; oft drängen sich so viele zusammen, dass sie an die geraden Bäume eines dichten Tannenwaldes erinnern; ihr Licht pflegt nicht so lebhaft zu sein, dass so heller Mondschein, als der des 18. Octobers war, die Schönheit ihres Anblickes und ihrer fortwährenden Aenderungen nicht beeinträchtigen sollte.

Bis hierher war die Erscheinung von der des 11. Octobers und von denen, die sich in diesen Gegenden zu gewissen Zeiten nicht selten zeigen, nicht wesentlich verschieden. Allein um 7¼ Uhr erschienen zwei Strahlen, welche sich sowohl durch ihre Lebhaftigkeit als auch durch die Himmelsgegenden, wo sie sich befanden, auszeichneten. Beide entstanden an entgegengesetzten Punkten des Horizonts, der eine etwa 15 Grad nördlich von Osten, der andere eben so weit südlich von Westen. Sie schossen in Richtungen aufwärts, welche südlich von dem Scheitelpunkte vorbeigingen. Sie hatten die Helligkeit hoher, weisser, durch starkes Mondlicht erleuchteter Strichwolken. Man sah deutlich, dass die Ausströmung, welche sie erzeugte, kräftig unterhalten wurde, denn ihre Verlängerungen und Verkürzungen waren gross und schnell. Als diese Strahlen kaum entstanden waren, zeigte sich an dem nördlichen Rande jedes derselben ein Auswuchs; beide Auswüchse verlängerten sich und näherten ihre Enden, so dass sie bald zusammenstiessen und nun einen Bogen bildeten, welcher beide Strahlen miteinander verband und dessen höchster Punkt etwa 30 Grad nördlich von dem Scheitelpunkte lag. Dieser Bogen erschien, sowie die Strahlen, von welchen er ausging, in lebhaftem weissen Lichte und würde vermuthlich einen noch weit schöneren Anblick gewährt haben, wenn nicht der Mond seinen Glanz geschwächt hätte. Indessen blieb er nicht lange in seiner anfänglichen Lage; er bewegte sich dem Scheitelpunkte zu, ging dann über ihn hinaus auf die Südseite und kam auf dieser bis zu einer Entfernung von 40 oder 45 Grad, wo er sich nach und nach wieder verlor. Ehe dieses geschah, nahm er auf der Westseite eine unregelmässige Krümmung an und zeigte sich sehr auffallend schlangenförmig; auf der Ostseite blieb er bis zu seiner gänzlichen Auflösung regelmässig gekrümmt.

Nach der Verschwindung dieses Bogens zeigte das Nordlicht nur noch eine beträchtliche Helligkeit am nördlichen Himmel, welche trotz des Mondscheins oft bis zu der Höhe von 30 Graden wahrgenommen werden konnte. Hin und wieder schoss es einzelne blasse

*) [299 d. a. Verz. — Aus der Königsberger Hartung'schen Zeitung, Beilage zu Nr. 250; s. auch POGGENDORFF's Annalen XXXIX, p. 206.]

Strahlen aufwärts, welche jedoch mit keinen ungewöhnlichen Erscheinungen verbunden waren. Allein um 9½ Uhr wurde sein Ansehen prachtvoll! die Nordhälfte des Himmels bedeckte sich mit einer rothen Farbe, welche so satt wurde, dass sie nur mit der Farbe des Karmins verglichen werden kann; dabei war ihr Licht so stark, dass es trotz des Mondlichtes sichtbaren Schatten verursachte. Diese Röthe des Himmels ging im Norden nicht bis zu dem Horizonte herab, sondern ein bogenförmiger Raum, dessen Scheitel etwa 30 Grad Höhe haben mochte, blieb ungefärbt.

Ueber diesem freien Raume sah der Himmel aus, als würde er durch einen Vorhang von einem hochrothen, durchsichtigen Stoffe bedeckt. Hinter dem Vorhange schossen blendend weisse Strahlen hervor, welche durch ihn hindurchschimmerten. Einige glänzende Sternschnuppen, welche sich an dem verhängten Theile des Himmels zeigten, vermehrten noch die Pracht und die Abwechselung der Scene.

Etwa nach einer Viertelstunde trennte sich der rothe Vorhang, um den in der Richtung des magnetischen Nordens liegenden Theil des Himmels wieder in seiner gewöhnlichen Farbe erscheinen zu lassen. Der ungefärbte Raum vergrösserte sich nun nach beiden Seiten und bald war keine rothe Farbe mehr, sondern nur noch einige Helligkeit am nördlichen Horizonte sichtbar.

Zum Schluss führe ich noch an, dass nach Maupertuis die hochrothe Farbe des Himmels auch in Tornea so selten vorkömmt, dass allerlei Aberglauben daran geknüpft wird; dass aber alle anderen Färbungen häufig sind. Es scheint daher, dass unser Nordlicht selbst für höhere Breiten eine ungewöhnliche Erscheinung gewesen sein würde. Helle Bögen, wie der um 7¼ Uhr gesehene, kommen im hohen Norden häufig vor; die an demselben wahrgenommene Bewegung ist dort gleichfalls nichts Ungewöhnliches. Auch bewegen sich häufig mehrere derselben von Norden und von Süden gegeneinander und vereinigen sich in der Gegend des Scheitelpunktes. Da aber mein angeführter vortrefflicher Gewährsmann meint, die Pracht und der Reichthum dieser Erscheinungen gehe über die Kraft seiner Beschreibung hinaus, so geht sie gewiss über die der meinigen, der ich sie nie gesehen habe. Indessen mag unser Nordlicht uns einen Begriff davon gegeben haben.

148. Gibt es Irrlichter?*)

(Poggendorff's Ann. Bd. XXXXIV, p. 366.)

Da neuere Wahrnehmungen sogenannter Irrlichter nicht bekannt geworden sind, so wünschten Sie, mein hochgeehrter Freund, eine Nachricht, welche ich von einer von mir selbst gesehenen Erscheinung dieser Art ertheilen kann, in Ihre Annalen aufzunehmen. — Diese Erscheinung habe ich am 2. Decbr. 1807, früh Morgens, in einer völlig trüben und windstillen Nacht, in welcher von Zeit zu Zeit ein schwacher Regen fiel, wahrgenommen. Sie bestand aus zahlreichen Flämmchen, welche über einem, an vielen Stellen mit stehendem Wasser bedeckten Grunde entstanden, und, nachdem sie einige Zeit geleuchtet hatten, wieder verschwanden. — Die Farbe dieser Flämmchen war etwas bläulich, ähnlich der Farbe des verbrennenden, aus Eisen und verdünnter Schwefelsäure gewonnenen unreinen Wasserstoffgases. — Ihre Lichtstärke muss unbeträchtlich gewesen sein, da ich nicht bemerken konnte, dass der Grund, über welchem ein einzelnes Flämmchen brannte, merklich erleuchtet worden wäre, oder dass ihre oft grosse Zahl eine merkliche Helligkeit verbreitet hätte. Bestimmtere Angaben der Lichtstärke kann ich nicht machen, da die Dunkelheit der Nacht einer Schätzung der Entfernung der einzelnen Flämmchen jede Sicherheit raubte; einige, die sich durch grössere Lichtstärke vor anderen auszeichneten, wurden für sehr nahe, vielleicht 15 bis 20 Schritte entfernt gehalten, aber ich bin nicht im Stande, die Richtigkeit dieses Urtheils zu vertreten. — Ueber die Zahl der gleichzeitig sichtbaren Flämmchen und über die Dauer ihres Brennens kann ich, weil sie, der Natur der Sache nach, sehr veränderlich waren, nichts einigermassen Bestimmtes angeben; die unbestimmten Angaben Hunderte für die Zahl, und eine Viertelminute für die Dauer, können beide vielleicht einigermassen anschaulich machen. Oft blieben die Flämmchen in unveränderter Stellung; oft nahmen sie eine Bewegung in horizontaler Richtung an, welche gewöhnlich zahlreiche Gruppen derselben gleichzeitig erfuhren. Ich erinnere mich, dass Einer der Gegen-

) [315 d. a. Verz. — Schreiben an Professor Poggendorff vom 25. Mai 1838.]

wärtigen die beweglichen Flämmchengruppen mit scharenweise ziehenden Wasservögeln verglich; ich führe auch diesen, ohne Zweifel nicht ganz treuen Vergleich an, weil er zur Versinnlichung der Erscheinung beitragen mag.

Ich halte eine Beschreibung der Oertlichkeit der Erscheinung für nöthig. Sie ereignete sich in einer Gegend der grossen Moore des Herzogthums Bremen, welche 1¼ bis 2 Meilen nordöstlich von dem Amte und der ehemaligen Sternwarte Lilienthal entfernt liegt. Durch diese Gegend fliesst das Flüsschen Wörpe, auf welchem ich mich auf einem Kahne befand. Dieses Flüsschen nähert sich einer durch das Moor geführten, etwa eine Meile weit fortgehenden Landstrasse, welcher entlang das zu den älteren Moorcolonien gehörige Dorf Wörpedorf angelegt ist. Auf dem Grunde zwischen der Strasse und dem Flusse, auf welchem die Irrlichter erschienen, haben die Moorcolonisten vielen Torf gegraben, wodurch der Boden uneben und der Ansammlung des Wassers günstig geworden ist. Die abgegrabenen Stellen fangen neben dem Flusse an und erstrecken sich über einen grösseren oder geringeren Theil des Raumes zwischen diesem und der Landstrasse; wie weit sie sich im Jahre 1807 ausdehnten, kann nicht im Allgemeinen angegeben werden, weil sie unregelmässig begrenzt waren; dass sie sich beträchtlich über 100 Ruthen weit von dem Flusse erstreckt haben sollten, glaube ich nicht, sowohl nach dem Zeugnisse des Gedächtnisses, welches mir diese Stelle des Moores (welche ich oft am Tage besucht habe) noch ziemlich lebhaft vergegenwärtigt, als nach dem Zeugniss der Pape'schen Karte, welche zeigt, dass die Entfernung der Wörpe von der Landstrasse, an der Stelle von welcher ich rede, ihren Krümmungen zufolge zwischen 120 und 250 Ruthen wechselt. Die abgegrabenen Stellen erstrecken sich aber nie bis an die Landstrasse; die Irrlichter schienen nie das hohe Moor zu ersteigen, sondern sich nur in dem abgegrabenen zu zeigen und zu bewegen. Obgleich ich keine bestimmte Angabe über ihre Entfernung machen kann, so geht aus dieser Beschreibung der Oertlichkeit doch eine Grenze für dieselbe hervor.

Die Ruderer des Kahns, auf welchem ich mich befand, befuhren den Fluss gewöhnlich bei Nacht, indem sie ihn zur Ueberbringung ihres Torfs nach Bremen benutzten, wo sie die Marktzeit nicht verfehlen durften. Sie betrachteten die Erscheinung als etwas Gewöhnliches und waren weit entfernt, davon überrascht zu sein. Falls die Beschaffenheit des Bodens in den verflossenen 30 Jahren nicht wesentliche Aenderungen erfahren hat, so ist kaum zu bezweifeln, dass man die Irrlichter an der bezeichneten Stelle noch häufig sehen wird. Vielleicht veranlasst diese Beschreibung, von dem nahen, wissenschaftlichen Bremen aus, eine Expedition nach dem Moore, deren Zweck es ist, die Bedingungen, unter welchen die Irrlichter erscheinen und ihre Beschaffenheit näher zu erforschen. Als Zeugniss von ihrem wirklichen Vorkommen wird das Gegenwärtige hinreichen.

---

149. Ueber eine bei einer Feuersbrunst beobachtete Lufterscheinung.*)

(Königsberger Hartung'sche Zeitung 1842, Nr. 1.)

Als gestern Abend eine helle Feuersbrunst den hier sehr dunstigen Himmel erleuchtete, zog ein heller Flecken desselben allgemeine Aufmerksamkeit auf sich. Er hatte das Ansehen, welches ein sehr heller, durch den Nebel durchschimmernder Comet gezeigt haben würde; und wirklich war die Aehnlichkeit so täuschend, dass man die Erscheinung, ohne nähere Untersuchung, durch die unerwartete Ankunft eines grossen Cometen zu erklären geneigt sein musste. Indessen hatte Herr Schlüter, von der Sternwarte, Gelegenheit, sie genügend kennen zu lernen. Neben dem Feuer war sie ganz rund und befand sich im Scheitelpunkte; in einiger Entfernung wurde sie in der auf das Feuer zugehenden Richtung und verlängert gesehen, so dass eine Bewegung des Beobachters um das Feuer herum sie in einem Kreise um den Scheitelpunkt bewegte. Auf der, etwa 400 Ruthen entfernten Sternwarte befand die Mitte der Erscheinung sich vor dem Sterne Capella, welcher damals 30 Grad vom Scheitelpunkte entfernt war. — Durch diese Wahrnehmungen wird unzweifelhaft, dass die Erscheinung ein Lichtreflex in der Luft war, zu der Art der Erscheinungen der Nebensonnen gehörend, welche von Wassertheilchen erzeugt werden, von denen die Luft angefüllt ist. Eine Art dieser Erscheinungen rührt von Eiskrystallen her, und solche Krystalle müssen

*) [351 d. a. Verz. — Schreiben Bessel's an die Redaction vom 2. Jan. 1842].

auch die von der Feuersbrunst hervorgebrachte zur Folge gehabt haben. — Man wird übrigens etwas Aehnliches wohl selten sehen, da das Zusammentreffen der zu seinem Hervortreten erforderlichen Umstände selten vorkommen wird. Die Wahrnehmung scheint auch nicht ohne einiges Interesse zu sein, indem sie auf eine parallele Lage der Axen der Krystalle, von welchen das Licht zurückgeworfen wurde, deutet.

---

150. Ueber das preussische Längenmaass und die zu seiner Verbreitung durch Copien ergriffenen Maassregeln.*)

(Astron. Nachr. **17**, p. 193.)

Die jetzt vollständig gewordene Durchführung von Maassregeln, welche nicht allein die Festsetzung der Einheit des preussischen Längenmaasses, sondern auch die leichte Erlangung sehr genauer Copien derselben beabsichtigten, fordert mich auf, den Lesern der Astron. Nachr. das Wesentlichste davon mitzutheilen.

Jeder der, gleich mir, bemüht gewesen ist, genaue Längenmessungen, z. B. der Secundenpendellänge, oder eines Bogens auf der Erdoberfläche auszuführen, wird bemerkt haben, dass die Erlangung des, diesen Messungen zum Grunde zu legenden Maasses, Schwierigkeiten darbietet, deren Ursache nicht etwa in dem Mangel eines Urmaasses, sondern in der Unzulänglichkeit der Mittel dasselbe zu copiren, gesucht werden muss. Ich kann dieses durch die Vergleichung dreier Copien der Toise du Pérou belegen, welche ich im Jahre 1835 durch einen Apparat und eine Verfahrungsart ausgeführt habe, deren Genauigkeit einen über einige Zehntausendtel der Linie gehenden Fehler unwahrscheinlich macht. Eine dieser Copien, von Fortin verfertigt und durch die gütigen Bemühungen der Herren Arago und Zahrtmann mit dem Urmaasse der Toise verglichen, befindet sich im Besitze der Königsberger Sternwarte [s. p. 193]; die beiden anderen gehören zu dem reichen Instrumentenvorrathe, welcher durch Herrn Etatsrath Schumacher in Altona gesammelt worden ist; die eine derselben ist gleichfalls von Fortin, die andere von Gambey verfertigt und beide sind, nicht minder authentisch als die hiesige, nach ihrer Vollendung mit dem Urmaasse verglichen. Alle drei sind mit Certificaten versehen, welche ihre Längen:

der ersten = 1 Toise − 0,0008
der zweiten = 1 Toise (genau)
der dritten = 1 Toise + 0,00021

bestimmen. Dagegen hat meine erwähnte Vergleichung dieser drei Copien untereinander gezeigt, dass die zweite 0,00333 kürzer, die dritte 0,00390 länger ist als die erste. Man erhält hierdurch, verbunden mit der pariser Angabe der Längen dieser Copien, drei Bestimmungen jeder von ihnen, z. B. für die erste:

durch ihr eigenes Certificat = 1 Toise − 0,00080
„ die 2. und ihre = − 0,00333
„ die 3. Certificate = + 0,00411

Hieraus geht hervor, dass die Copien der Toise du Pérou Unsicherheiten besitzen können, welche zwar für die meisten Anwendungen nicht von grosser Bedeutung sind, jedoch keineswegs als unerheblich betrachtet werden dürfen, wenn Messungen beabsichtigt werden, denen die grösste erreichbare Genauigkeit angeeignet werden soll. Ich finde auch nicht, dass das, was über die Vergleichung anderer Urmaasse mit ihren Copien bekannt geworden ist, eine grössere Sicherheit verheisst.

Ich muss also der Meinung sein, dass die Mittel, welche bisher zum Copiren vorhandener Urmaasse ergriffen worden sind, noch etwas zu wünschen übrig lassen. Allein ich betrachte die Anordnung genügender Mittel dieser Art als einen nicht minder wesentlichen Theil der Regulirung eines Maasssystems, als die Festsetzung seiner Einheit selbst ist. Ich habe daher eine mir zu Theil gewordene Veranlassung benutzt, den Versuch der Herbeiführung einer Genauigkeit der Copien zu machen, welche die bisherige weit überschreiten und nichts Wesentlich erscheinendes mehr zu wünschen übrig lassen sollte. Diese Veranlassung ist mir durch den Auftrag der preussischen Regierung gegeben worden, unser Längenmaass definitiv in Ordnung zu bringen; womit sich die Absicht der dänischen Regierung vereinigt hat, zugleich und übereinstimmend mit der in Preussen einzuführenden ihre Längeneinheit festzusetzen. Inwiefern jetzt, durch die Verfolgung eines ordnungsmässigen und Jedem zugänglichen

*) [335 d. a. Verz. — Br. m. O. II, 395 fl., 404 (O.), 413, 423, 425.]

Weges, zuverlässiges Längenmaass erlangt werden kann, wird man aus dem Folgenden ersehen. Jedoch muss ich eine vollständigere Uebersicht über die Arbeiten mittheilen, welche aus den erwähnten Veranlassungen hervorgegangen sind; denn nur dadurch kann ich die das Copiren der Maasseinheit betreffenden Maassregeln mit den übrigen wesentlichen Theilen des Geschäftes in die gehörige Verbindung bringen. Ein erschienenes Werkchen von mir:

Darstellung der Untersuchungen und Maassregeln, welche in den J. 1835 bis 1838, durch die Einheit des preussischen Längenmaasses veranlasst worden sind. Bekannt gemacht durch das Ministerium der Finanzen und des Handels. Berlin 1839. [334 d. a. Verz.]

verfolgt das ganze Geschäft in seine Einzelnheiten und kann daher das ergänzen, was die gegenwärtige Uebersicht zu wünschen übrig lassen wird.

Im J. 1816 ist ein Gesetz erschienen, wodurch die Länge des preussischen Fusses durch ein Urmaass erklärt wird, welches damals bei dem Ministerio der Finanzen und des Handels niedergelegt worden ist. Dieses Urmaass wird durch einen Stab von Eisen gegeben, welcher wenig länger ist als drei preussische Fusse, und auf welchen die Länge von drei Fussen, sowie auch ihre Eintheilungen in 36 Zolle und des letzten Zolls in 12 Linien, durch Striche aufgetragen sind, welche zwei, auf einer seiner breiteren Seiten, der ganzen Länge nach, in etwa 0,4 Lin. Entfernung von einander gezogene Parallelen senkrecht durchschneiden. Die Striche sind auf Silber gezogen, und zwar für die Zolle auf Stiften dieses Metalls, für die Linien auf einer eingelegten Platte. Dieser Stab ist von Herrn PISTOR, zugleich mit drei, an geeigneten Orten niedergelegten Copien, verfertigt worden. Die von dem Gesetze ausgesprochene Absicht, welche seine Verfertigung leitete, war, den preussischen Fuss = 139‴,13 des französischen zu machen und ihn dadurch dem in Deutschland viel gebräuchlichen rheinländischen Fusse so nahe zu bringen, als die über diesen bestehende Unsicherheit erlaubte.

Dieses Gesetz lässt einige Festsetzungen unerwähnt, welche zur unzweideutigen Erklärung des preussischen Fusses durch sein Urmaass erforderlich sind. Als unzweifelhaft darf man indessen ansehen, dass dieser Fuss das Drittel der Entfernung der beiden äussersten Striche der Scale sein soll, gemessen in der Mitte zwischen den beiden Parallelen, zwischen welchen sie gezogen sind, und in derselben Wärme (= 16°,25 des hunderttheiligen Thermometers), welche die Toise du Pérou besitzen muss, wenn sie 6 französische Fusse lang sein soll. Dagegen glaube ich nicht, dass man die mangelnde Vorschrift über die Figur, welche der Stab haben muss, damit er drei französische Fusse angebe, ohne nachträgliche Festsetzung ergänzen darf. Diese Vorschrift würde ohne Zweifel nicht fehlen, wenn die von KATER gemachte Bemerkung des beträchtlichen Einflusses, welchen kleine Aenderungen der Figur eines Stabes auf die Entfernung zweier Punkte auf seiner Oberfläche äussern, im Jahre 1816 schon bekannt gewesen wäre. Sie hätte bestimmen müssen, ob der Stab bei seinen Anwendungen vollkommen gerade sein soll, oder ob er die Krümmung besitzen soll, welche er bei seiner Auflegung an zwei bestimmten Punkten durch seine eigene Schwere erhält. Ich finde, durch eine theoretische, von den Abmessungen des Stabes und der specifischen Schwere und Biegsamkeit seines Materials ausgehende Untersuchung [s. Abh. 151], unter der Voraussetzung seines ursprünglich (d. h. ohne Spannung) geraden Zustandes, dass die beiden äussersten seiner Theilstriche dieselbe Entfernung von einander, welche sie in diesem Zustande besitzen, wieder erhalten, wenn man ihn an zwei, 0,2113 seiner Länge von seinen Enden entfernten Punkten auflegt; dass diese Entfernung sich aber um 0‴,006482 verkürzt, wenn er an den Enden aufliegt. Auch hätte bestimmt werden müssen, wie verfahren werden soll, wenn man den Stab, ursprünglich oder später, ohne Spannung nicht gerade finden sollte. Der Mangel dieser Bestimmungen erzeugt eine Unsicherheit der von ihrem Urmaasse entlehnten Einheit des preussischen Maasssystems, welche nur durch eine nachträgliche Untersuchung des jetzigen Zustandes desselben und eine hierauf gegründete Festsetzung beseitigt werden könnte; welche aber nothwendig beseitigt werden muss, wenn die erste der an ein Maasssystem zu machenden Forderungen, nämlich dass es eine unzweideutige Einheit besitze, nicht unerfüllt bleiben soll.

Die Entfernung von einander, in welcher die beiden äussersten Striche dieses Stabes erschienen, während er auf einer Fläche ruhete, welche wenig von der Ebene verschieden gewesen sein kann, habe ich mit der Toise verglichen, und dadurch erfahren, dass die Absicht, den preussischen Fuss = 139,13 Linien des französischen zu machen, durch Herrn PISTOR so vollständig erreicht worden ist, dass sich kein Unterschied davon angeben lässt, indem der aus dieser Vergleichung hervorgegangene weit innerhalb der Grenzen der bisherigen Unbestimmtheit des preussischen Fusses, sowie auch der Unsicherheit der Copien der Toise, liegt. Indem man Mittel ergreift, die preussische Maasseinheit

von jeder Unbestimmtheit völlig frei festzusetzen, hat man also nicht sowohl eine vorhandene Bestimmung derselben, als die Absicht, welcher gemäss sie versucht worden ist, zu verfolgen. Offenbar bleibt die Erfüllung dieser Absicht, und damit die zu treffende Wahl der Einheit des preussischen Maasssystems, in denselben Grenzen willkürlich, in welchen das, aus Copien der Toise du Pérou abzuleitende französische Maass (durch welches die Absicht ausgesprochen ist) willkürlich bleibt. Aber diese Willkür hat keinen weiteren Einfluss auf das preussische Maasssystem, sondern nur Einfluss auf das Verhältniss seiner Einheit zu der Einheit des französischen. Jene Einheit kann, der Natur jedes neu einzuführenden, oder von einer vorhandenen Unbestimmtheit zu befreienden Maasssystems zufolge, in der That willkürlich, oder innerhalb gewisser Grenzen willkürlich, festgesetzt werden. Ich habe für das Angemessenste gehalten, über das was im gegenwärtigen Falle willkürlich bleibt, so zu verfügen, dass ich die Einheit des preussischen Maasssystems so genau = 139,13 solcher Linien, deren die Königsberger Copie der Toise 863,9992 hat, gemacht habe, als sehr sorgfältige Messungen diese Länge haben angeben können. Die dieser Copie der Toise gemässe Annahme des französischen Maasses habe ich den Annahmen, welche auf die beiden anderen Copien hätten gegründet werden können, vorgezogen, nicht etwa weil ich die erstere für sicherer hielte, oder weil sie zwischen den beiden anderen liegt, sondern weil dieselbe Annahme schon den Messungen der Pendellängen in Königsberg, Güldenstein und Berlin und des Bogens auf der Erdoberfläche, worauf die Ostpreussische Gradmessung beruhet, zum Grunde gelegt worden ist.

Ich muss nun die Mittel angeben, durch welche die unzweideutige Festsetzung der Einheit des preussischen Maasssystems erlangt worden ist. Man konnte diese Einheit entweder durch die Entfernung zweier Punkte (oder Striche) auf einer Oberfläche, oder durch die Entfernung zweier Oberflächen erklären; bekanntlich ist die Erklärung des englischen Fusses von der ersten, des französischen von der zweiten Art. Ich habe, in der schon erwähnten Schrift, die Gründe vollständig darzustellen gesucht, wodurch die Wahl zwischen beiden Arten der Einrichtung eines Urmaasses geleitet werden kann, und bin dadurch zu dem Schlusse gelangt, dass es in jeder Beziehung am vortheilhaftesten ist, ein Endflächenmaass zum Urmaasse zu wählen. Seine Vorzüge bestehen in erreichbarer und leichter vor Beeinträchtigung durch Zufälligkeiten zu schützender, völliger Unzweideutigkeit; in der Möglichkeit, ihm eine grössere Dauerhaftigkeit zu geben; in der grösseren Leichtigkeit seines Copirens. Es ist also ein Endflächenmaass zum Urmaasse der preussischen Längeneinheit gewählt worden. Dieses ist ein Stab von Gussstahl, dessen quadratische Durchschnitte Seiten von 9 Linien haben; seine Endflächen sind durch abgekürzte Kegel von Sapphir armirt, deren grössere Grundflächen sich im Inneren des Stabes befinden, und deren kleinere sehr wenig über seine ebenen Endflächen hervorragen; diese Kegel sind in Gold gebettet und die Construction ihrer Befestigungsart beabsichtigt, die Unveränderlichkeit ihrer Entfernungen von einander, trotz der Zufälligkeiten, welche das Urmaass bei seinen Anwendungen erfahren mag, zu verbürgen; ihre Härte schützt sie vor Abnutzung und Beschädigung. Die Entfernung der äusseren Oberflächen der Sapphire, in der Axe des Stabes und in der Wärme von $16^{0}25$ des hunderttheiligen Thermometers gemessen, dient zur Erkennung von drei preussischen Fussen. Eine Vorschrift über die Auflegungsart des Stabes bei seiner Anwendung ist unnöthig, da selbst die, die Entfernung seiner Endflächen am meisten verkürzende, nur eine Wirkung von $0^{L}0000145$ äussert.

Dieser Stab ist von Herrn Baumann in Berlin verfertigt worden, welchem ausgezeichneten Künstler ich auch alle übrigen Apparate verdanke, welche im Laufe meiner Beschäftigungen mit dem preussischen Längenmaasse angewandt worden sind. Ich vermeide hier jede Beschreibung dieser Apparate, indem ich auf die in meiner angeführten Schrift gegebene und die sie erläuternden Zeichnungen verweise. Ich glaube aber nicht unerwähnt lassen zu dürfen, dass ich den Apparat, welcher zu der Vergleichung verschiedener Copien der Toise untereinander, sowie auch einer von ihnen, sowohl mit dem 1816 verfertigten Strichmaasse, als auch mit dem neuen Endflächenmaasse dienen sollte, so habe einrichten lassen, dass die miteinander zu vergleichenden Maassstäbe und die Mikrometer, durch welche ihre Vergleichung erlangt wird, sich in einem Bade von Weingeist befinden; nur durch dieses Mittel kann, meinen Erfahrungen zufolge, die Wärme der miteinander zu vergleichenden Stäbe erfolgreich ausgeglichen werden, und nur bei seiner Anwendung darf man hoffen, die Genauigkeit der Messungen über ein Tausendtel einer Linie hinauszutreiben. Ferner glaube ich erwähnen zu müssen, dass ich die Messung des Unterschiedes zwischen der doppelten Länge von drei preussischen Fussen und der Länge der Toise nicht etwa durch eine Scale, sondern durch ein neues, weit sichereres, auf Berührung beruhendes Verfahren erlangt habe. Die Mikrometerschrauben

des Apparats habe ich einer strengen Prüfung unterworfen und daraus die Kenntniss der Verbesserungen ihrer unmittelbaren Angaben gezogen, welche zwar nur in den Zehntausendteln der Linie stattfinden, jedoch zu den übrigen Unvollkommenheiten der Messungen nicht ein so kleines Verhältniss haben, dass ihre Vernachlässigung als ganz gleichgültig angesehen werden dürfte.

Den beschriebenen Stab, welcher jetzt das preussische Urmaass geworden ist, habe ich an acht verschiedenen Tagen 48mal mit der Königsberger Copie der Toise verglichen, und daraus gefolgert, dass seine Länge 417,38939 solcher Linien ist, deren jene 863,9992 besitzt. Die sich am meisten von diesem Mittel entfernende Messung ist $0^{L},00051$ davon verschieden; der mittlere Fehler einer Messung ist $= \pm 0^{L},000254$, des angegebenen Mittels aus allen $= \pm 0^{L},0000375$. Ich habe auch keine Ursache, beständig in Einem Sinne wirkende Fehler zu fürchten, und halte daher das Resultat dieser Messungen für äusserst genau.

Der der Verfertigung des Stabes zum Grunde gelegten Absicht zufolge sollten drei preussische Fusse $= 3 \times 139{,}13 = 417{,}39$ Linien des als französisches angenommenen Maasses sein. Eine sehr kleine Abweichung des Stabes von dieser Absicht, welche zwar wohl nach seiner Vollendung durch genaue Messungen erkannt, nicht aber vor derselben vermieden werden konnte, kann nicht Ursache werden, sie zu verlassen. Demzufolge ist die Länge des Stabes nicht als drei preussische Fusse, sondern 0,00061 französische, oder 0,00063 preussische Linien kürzer als diese, erklärt worden, und der Stab hat die Aufschrift:

> Urmaass der preussischen Längeneinheit. 1837. Dieser Stab, in der Wärme von $16^{0},25$ des hunderttheiligen Thermometers, in seiner Axe gemessen, ist 0,00063 Linien kürzer, als drei Fusse.

erhalten. Hierdurch wird er die unzweideutige und einzige Erklärung des preussischen Fusses. Um hierüber keine Undeutlichkeit zu lassen, bemerke ich noch, dass die frühere gesetzliche Bedeutung des im J. 1816 verfertigten Strichmaasses diesem jetzt gesetzlich entzogen und dem neuen Endflächenmaasse beigelegt worden ist.

Zugleich ist die Vergleichung des hierdurch fest bestimmten preussischen Fusses mit dem französischen erlangt worden. Nimmt man diesen so an, wie er den angeführten drei Messungen der Pendellänge und der Gradmessung zum Grunde gelegt worden ist, so ist das Verhältniss beider

$$139{,}13 : 144 = 1 : 1{,}03500323 = 0{,}96618056 : 1$$

so nahe richtig, als die angeführten Messungen es haben ergeben können. Ihr mittlerer Fehler ist noch keine volle Einheit der 7. Decimalstelle.

Ich komme nun zu den Mitteln, welche ergriffen worden sind, um Copien des preussischen Maasses zu gewähren. Eine authentische Copie davon muss ein Stab von weichem Gussstahl (von demselben Material aus welchem das Urmaass verfertigt worden ist) sein; beide haben auch gleiche Dicke und gleiche, oder sehr nahe gleiche Länge. Statt der Endflächen von Sapphir, welche das Urmaass besitzt, hat die Copie Endflächen von gehärtetem Stahl, welche, nach ihrer festen Verbindung mit dem Stabe, eben und genau senkrecht auf seine Axe abgeschliffen und polirt sind. Um diese Endflächen vor Staub und Rost zu schützen, werden sie durch cylindrische Kapseln von Messing verdeckt, welche auf die cylindrisch abgedrehten Enden des Stabes geschoben werden. Die so eingerichteten Stäbe verfertigt Herr Baumann. Wenn sie gänzlich vollendet sind, werden sie mit dem Urmaasse verglichen, wodurch man ihre Länge (in der Wärme, in welcher die Vergleichung vorgenommen ist) in preussischem Maasse ausgedrückt, erfährt. Dann erhält der Stab die Aufschrift:

> (Jahrszahl). Dieser Stab, in der Wärme von ** Graden des hunderttheiligen Thermometers, in der Axe seiner cylindrischen Enden gemessen, ist ** Linien länger (oder kürzer) als drei preussische Fusse.

Durch diese Aufschrift wird er zur authentischen Copie des preussischen Maasses. Um eine solche zu erlangen, muss man sich an die Königl. Normal-Eichungs-Commission in Berlin wenden, welche derselben auch die Originalvergleichungen beilegt, woraus die in den Stab eingegrabenen Zahlen hervorgegangen sind. Die Kosten einer solchen Copie betragen 60 preussische Thaler.

Diese Nachricht würde kaum Anspruch haben, die Aufmerksamkeit Derer zu erregen, für welche der Besitz zuverlässigen Längenmaasses einen Werth hat, wenn ich nicht zugleich die Art der Vergleichung der Copien näher erläutern wollte, um dadurch ein Urtheil über den Grad ihrer Zuverlässigkeit herbeizuführen. Der Apparat, welcher die Vergleichungen ergibt, besteht im Wesentlichen aus zwei sehr feinen, mit Repsoldschen Wasserwagen-Fühlhebeln versehenen, auf einem 7 Zoll 2 Linien starken Balken von Mahagoniholz befestigten Mikrometern, zwischen welche abwechselnd das Urmaass und die Copie gebracht werden können. Beide Stäbe liegen, um dieses zu bewirken, nebeneinander, auf einem Wagen von Messing, welcher, auf

5 einander parallel und senkrecht auf die Mikrometerlinie gelegten Schienen, vor und zurück geführt, sowie auch an zwei Orten arretirt wird, nämlich genau da, wo die Axe entweder des einen, oder des andern Stabes sich in der Mikrometerlinie befindet. Bei der Anwendung fährt man erst den Wagen bis zu einer der Arretirungen, bringt dadurch einen der Stäbe zwischen die Mikrometer und diese dann zur Berührung mit seinen Endflächen; dann zieht man die Mikrometer zurück, führt den Wagen bis zur zweiten Arretirung und wiederholt das Vorige an dem andern Stabe. Hierdurch erhält man eine Vergleichung der Längen beider Stäbe; allein es ist ein Grund vorhanden, welcher nothwendig macht, die Vergleichung nach der Umwendung beider Stäbe zu wiederholen. Das mittlere Resultat beider Vergleichungen ist, insofern nur die Messungsfehler in Betracht gezogen werden, schon eine sehr beträchtliche Annäherung an die Wahrheit; denn der Apparat ist so gut gemacht, und seine Mikrometer sind so fein, dass bei gehöriger Prüfung und Berücksichtigung ihrer Schrauben eine einzelne Messung nicht mehr als wenige Zehntausendtel einer Linie zweifelhaft lässt. Allein diese Genauigkeit der Messungen würde keinen Werth haben, wenn man nicht Mittel gefunden hätte, beide Stäbe stets in so nahe gleicher Wärme zu erhalten, dass so kleine Theile einer Linie nicht durch eine Ungleichheit derselben alle Bedeutung verlieren. Um die aus der Wärme hervorgehende Schwierigkeit der genauen Vergleichung beider Stäbe richtig zu würdigen, muss man bemerken, dass eine Aenderung derselben um ein Vierundvierzigstel eines hunderttheiligen Grades eine Längenänderung der Stäbe von ein Zehntausendtel Linie hervorbringt; dass weit grössere Unterschiede der Wärmen beider Stäbe aus der Verschiedenheit der Wärmestrahlung nach und von den entgegengesetzten Seiten des Zimmers, in welchem der Apparat sich befindet, hervorgehen können und werden, dass die Ausgleichung vorhandener Wärmeverschiedenheiten der Stäbe, ohne die Hülfe einer beide umgebenden Flüssigkeit, so äusserst langsam vor sich geht, dass man weit eher erwarten kann, eine neue Ungleichheit entstehen, als eine vorhandene ganz verschwinden zu sehen. Die Schwierigkeit, wovon hier die Rede ist, wird nicht eher ein sehr fühlbares Hinderniss der Messungen, als bis man anfängt von ihnen eine Sicherheit zu fordern, welche beträchtlich innerhalb eines Tausendtels einer Linie liegt; grössere Ungleichheiten der Wärme sind verhältnissmässig leicht zu vermeiden. Wenn frühere Maassvergleichungen durch diese Schwierigkeit nicht in ihrem Fortgange gehemmt worden sind, so darf man daraus, meiner Meinung nach, nicht auf ihr Nichtvorhandensein schliessen; sondern man muss annehmen, dass die Sicherheit der Resultate der Messungen, welche man entweder von den getroffenen Einrichtungen zu erwarten berechtigt war, oder welche man für hinreichend hielt, nicht so eng begrenzt war, dass kleine Wärmeverschiedenheiten sie wesentlich hätten beeinträchtigen können.

Das sich am ersten darbietende Mittel, das aus Ungleichheiten der Wärme beider Stäbe hervorgehende Hinderniss ihrer genauen Vergleichung zu beseitigen, wäre das Messen in einem Weingeistbade gewesen, welches schon bei den oben erwähnten früheren Messungen so gute Dienste geleistet hatte. Bei aufmerksamer Betrachtung zeigte sich aber, dass die Verfolgung dieses Mittels die Zahl der Möglichkeiten, das Urmaass zu beschädigen, vermehrt haben würde, wenn es ihm auch, bei der Anwendung gehöriger Vorsicht, keine Gefahr bringen kann. Da es sich hier um die Ergreifung einer Maassregel handelt, welche nicht etwa jetzt allein, sondern während einer unbestimmt langen Zeit befolgt werden soll, so ist meine Meinung, dass man sie so wählen muss, dass dadurch auch Unachtsamkeit und Nachlässigkeit nicht leicht die Kraft erhalten, einen nachtheiligen Einfluss auf das Urmaass auszuüben. Ich glaubte daher, auf die Anwendung einer Flüssigkeit Verzicht leisten, und ein anderes Mittel, den Zweck zu erreichen, suchen zu müssen. Offenbar wurde es nun wesentlich, die Copien von demselben Material, denselben Abmessungen und derselben Art der Bearbeitung zu machen, welche das Urmaass besitzt; denn ohne diese Uebereinstimmungen verschwindet alle Aussicht, die Wärme beider Stäbe, trotz der äusseren Störungen und des nie fehlenden Schwankens der Wärme der sie umgebenden Luft, fortwährend gleich zu erhalten.

Um den Einfluss der Ein- und Ausstrahlungen der Wärme zu vermeiden, liess ich den ganzen Vergleichungsapparat, d. i. die Mikrometer, den Wagen und die darauf liegenden zu vergleichenden Stäbe, durch einen genau anschliessenden Deckel von Mahagoniholz verdecken, aus welchem nur die Knöpfe und Trommeln der Mikrometerschrauben hervorragen, und welcher nur zwei verglasete Oeffnungen hat, unter welchen sich die Scalen der auf den Stäben liegenden Thermometer befinden; auch diese Oeffnungen sind durch Holz verdeckt, welches nur, wenn man ablesen will, abgehoben wird. In diesem Zustande stellte ich den Apparat in meinem Zimmer auf und verglich die Längen der beiden Stäbe, nachdem sie hinreichend lange nebeneinander gelegen hatten; obgleich dieses nur dann geschah, wenn ich die

Wärme im Zimmer nicht für schnell wachsend oder abnehmend hielt, so ergaben doch die von Zeit zu Zeit vorgenommenen Wiederholungen der Vergleichungen Schwankungen des Längenunterschiedes beider Stäbe zu erkennen, welche oft über ein Tausendtel einer Linie gingen. Ich versuchte nun Aenderungen der Stellung des Apparats, beziehungsweise auf die Fenster und den Ofen, und umgab diesen durch einen Schirm; allein der Erfolg wurde nicht besser; vielmehr führten diese Versuche zu der Ueberzeugung, dass nur ein weit gleichförmiger erwärmter Raum als ein geheiztes Zimmer ist, einen besseren hervorbringen könne.

Ich brachte daher den Apparat in ein unbewohntes und ungeheiztes Zimmer des Kellergeschosses der Sternwarte, verschloss dieses und ging nur von Zeit zu Zeit hinein, um eine Vergleichung zu machen. Unter diesen Umständen gelangen die Vergleichungen erwünschtermaassen, und damit war die Bedingung gefunden, unter welcher die versuchte Verfahrungsart den beabsichtigten Erfolg wirklich herbeiführt. Damit man diese näher beurtheilen könne, führe ich an, dass unter 14 vollständigen Vergleichungen des preussischen Urmaasses mit einer Copie, keine Abweichung von ihrem Mittel vorkommt, welche bis auf $0^{l},0002$ stiege, und dass nur 4 darunter sind, deren Abweichung $0^{l},0001$ überschreitet. Eine solche vollständige Vergleichung setzt 8 Messungen des Längenunterschiedes beider Stäbe voraus, und nach der ersten Hälfte derselben eine Umwendung beider. Jede dieser beiden Hälften der Vergleichung erfordert einen Zeitaufwand von einer Viertelstunde oder etwas mehr; zwischen beiden mag man einen Tag verstreichen lassen, damit der Einfluss der Körperwärme des Beobachters, welcher bei dem Abnehmen der Verdeckung des Apparats und der Umwendung der Stäbe nothwendig eintritt, hinreichende Zeit erhalte, sich auszugleichen.

Die durch dieses einfache und leicht auszuführende Verfahren zu erlangenden Copien des preussischen Längenmaasses besitzen eine Sicherheit, welche, wie ich glaube, alle Wünsche befriedigen wird. Sie haben auch den Vorzug, unmittelbar von dem Urmaasse, und nicht etwa von einer vermittelnden Copie desselben, genommen zu werden. Diesen mir sehr erheblich erscheinenden und das Urmaass in seine rechte Stellung versetzenden Vortheil konnte man durch die Härte seiner Endflächen herbeiführen, indem hierdurch die Furcht beseitigt wird, dass lange fortgesetzte, häufige Vergleichungen seine Länge ändern möchten. Auch gegen Zufälle, welche aus Unvorsichtigkeit entstehen können, schützt das Verfahren bei den Vergleichungen das Urmaass so sehr als möglich: als Aufbewahrungsort ist ihm nämlich sein Lager auf dem Vergleichungs-Apparate angewiesen, welcher selbst sich in einem, gegen äussere Ereignisse möglichst gesicherten Raume befindet, welcher nur geöffnet wird, wenn eine Copie verglichen werden soll. Bei einer solchen Vergleichung darf das Urmaass nur einmal mit den Händen berührt werden, nämlich bei seiner Umwendung auf seinem Lager; es ist kaum möglich, dass es bei dieser Gelegenheit falle, oder heftige Stösse erfahre, und überdies glaube ich, dass es sich gegen Zufälle dieser Art ziemlich unempfindlich erweisen würde. In der That ist ein Stab von Stahl von 9 Linien Dicke so fest, dass eine beträchtliche Kraft erfordert wird, um die Grenze seiner Elasticität zu übertreffen.

Es ist vielleicht noch nöthig, dass ich die Art, wie die Länge einer Copie durch ihre Aufschrift angegeben wird, rechtfertige. Diese Aufschrift gibt nicht etwa ihre Länge, so wie sie bei der Vergleichung unmittelbar, d. h. durch den Zustand des Urmaasses, welchen die Wärme zur Zeit der Vergleichung mit sich brachte gemessen, erschien, sondern ihre Länge in wahrem preussischen Maasse. Um diese kennen zu lernen, musste man die Veränderungen kennen, welche Wärmeänderungen in der Länge des Urmaasses hervorbringen; man musste eine besondere Untersuchung vornehmen, wodurch die Ausdehnbarkeit des Urmaasses durch die Wärme bestimmt worden ist. Sie ist auf einen eigenen Apparat gegründet worden, dessen Beschreibung und Zeichnung man in meiner erwähnten Schrift findet, und welcher ergeben hat, dass die Wirkung jedes hunderttheiligen Grades des Steigens des Thermometers auf die Länge des Urmaasses $= 0{,}004375$ preussische Linien ist. Hierdurch wird die Länge bekannt, welche die Copie in der, zur Zeit ihrer Vergleichung stattgefundenen Wärme besitzt; wie sie in jeder anderen, z. B. der Normalwärme der preussischen Maassstäbe ($= 16°25$ C.) ist, kann man nur nach Erlangung der Kenntniss ihrer Ausdehnbarkeit durch die Wärme erfahren, welche, so wie die Ergreifung aller Mittel zur Benutzung der Copie, ihrem Besitzer überlassen bleiben muss. Wüsste man, dass das Urmaass und die Copie gleiche Ausdehnbarkeit durch die Wärme besässen, so würde man, durch die unmittelbare Angabe der Vergleichung, in welcher Wärme diese auch vorgenommen sein mag, ihre Länge in der Normalwärme erfahren; allein, wenn auch beide aus einem gleichen Material (weichem Gussstahl) bestehen, so scheint doch dadurch ihre gleiche Ausdehnbarkeit nicht so sicher verbürgt zu werden, dass man für angemessen halten

könnte, dem Besitzer der Copie in dem Urtheile vorzugreifen, ob er die Annahme der gleichen Ausdehnbarkeit machen, oder durch eine eigene, sich auf seine Copie beziehende Untersuchung ersetzen will. Will er das erstere, so erhält er die Länge der Copie in der Normalwärme, indem er ihrer auf dem Stabe eingegrabenen Länge die Veränderung des Urmaasses zwischen dieser und der Wärme zur Zeit der Vergleichung hinzusetzt.

Nachdem die leichte und sichere Art der Vergleichungen von Copien mit dem Urmaasse, wovon ich das Wesentliche angeführt habe, gefunden und erprobt war, wurde der Apparat von Königsberg nach Berlin gebracht, dort ein Zimmer für ihn eingerichtet, welches die als nöthig erkannten Eigenschaften besitzt und seine fernere Anwendung der Königl. Normal-Eichungs-Commission überlassen. Diese hat ihrerseits, um nichts zu wünschen übrig zu lassen, Herrn BAUMANN — den Künstler selbst, der den Apparat verfertigt hat — mit der Anstellung der Vergleichungen beauftragt.

Man wird aus dem, was ich jetzt, seinen Hauptgesichtspunkten nach auseinandergesetzt habe, ersehen, in wiefern die Absicht erreicht worden ist, ausser der Festsetzung des preussischen Längenmaasses (von dessen Vergleichung mit dem französischen ich oben das Nöthige gesagt habe) auch die Möglichkeit und Leichtigkeit seines, selbst für wissenschaftliche Anwendungen hinreichend genauen Copirens herbeizuführen. Ich selbst hege die Hoffnung, dass es in der Folge keine Schwierigkeit mehr haben wird, das lange gefühlte Bedürfniss der Erlangung zuverlässigen Längenmaasses zu befriedigen, und zwar nicht allein in Berlin, sondern auch in Copenhagen, wo Herr Etatsrath SCHUMACHER ganz ähnliche Maassregeln ergriffen hat und gleichfalls der allgemeinen Benutzung bald eröffnen wird.

---

151. Einfluss der Schwere auf die Figur eines, auf zwei Punkten von gleicher Höhe aufliegenden Stabes.*)

(Darstellung der Untersuchungen und Maassregeln über die Einheit des Preussischen Längenmaasses. Berlin 1839. Beilage I.)

1.

Durch die Mécanique analytique ist bekannt, dass die Figur des Gleichgewichts des Stabes das Kennzeichen hat, dass willkürliche, jedoch mit dem Zusammenhange seiner Theile vereinbare, unendlich kleine Variationen ihrer Coordinaten, jede in die auf ihre Richtung projicirten, an den durch die Coordinaten bestimmten Punkten wirkenden Kräfte multiplicirt, eine verschwindende Summe haben. Die wirkende Kraft ist ursprünglich die Schwere; ihr widersetzt sich aber die Elasticität des Stabes; beides zusammengenommen, bringt eine Aenderung der Figur des Stabes hervor, welche, nach der Lagrange'schen Methode, unter den Voraussetzungen untersucht werden soll, dass er ursprünglich gerade sei und dass seine Mittellinie ihre Länge nicht ändere. Die letztere dieser Voraussetzungen fordert, dass der Stab, in seinem geraden Zustande, durch eine horizontale, durch seine Mittellinie gelegte Ebene, in zwei ihrer Figur, Masse und Spannkraft nach symmetrische Hälften geschnitten werden kann.

Bezeichnet man die wagerechte Coordinate eines Punktes der Mittellinie des Stabes durch x, die lothrechte durch y und nimmt man y nach Oben positiv, nach Unten negativ, so ist die Summe der Producte der Schwere und der in ihrer Richtung stattfindenden Variationen

$$= -\int \mu\, ds\, \delta y,$$

wo μ die Masse einer Längeneinheit des Stabes und ds ein Element der Mittellinie bedeuten. Wenn der Winkel des Elements ds mit der Axe der x durch φ bezeichnet, oder

$$ds \cos\varphi = dx, \quad ds \sin\varphi = dy$$

gesetzt wird, kann die Kraft, mit welcher der Stab sich seiner Krümmung widersetzt, als eine Kraft angesehen werden, welche den Winkel φ zu ändern strebt. Ist ihre Grösse, an einem Hebelarme $= 1$ angebracht, $= E$, und das Differential der Richtung des Elements ds in der Curve des Gleichgewichts und in der variirten $d\varphi$ und $d\varphi + d\delta\varphi$, so ist die Summe der Producte dieser Kraft und der auf ihre Richtung projicirten Variation der Coordinaten

$$= \int E d\delta\varphi.$$

Man hat also die Bedingung des Gleichgewichts des Stabes:

$$0 = \int \{ -\mu\, ds \delta y + E d\delta\varphi \}.$$

*) [Aus 334 d. a. Verz.]

Allein durch die Annahme, dass seine Mittellinie ihre Länge nicht ändere, oder dass

$$0 = \int \left\{ \frac{dx}{ds} d\delta x + \frac{dy}{ds} d\delta y \right\}$$

sei, werden δx und δy von einander abhängig. Man kann sie aber ferner als unabhängig betrachten, indem man den letzten Ausdruck, unter dem Integralzeichen, mit einem unbestimmten Factor λ multiplicirt und das Product dem ersten Ausdrucke hinzufügt. Hierdurch erhält man die zu erfüllende Gleichung:

$$0 = \int \left\{ -\mu ds \delta y + E d\delta\varphi + \lambda \frac{dx}{ds} d\delta x + \lambda \frac{dy}{ds} d\delta y \right\}.$$

Es ist aber

$$\delta\varphi = \frac{dx d\delta y - dy d\delta x}{ds^2}$$

und wenn man dieses anwendet und die Gleichung integrirt, erhält man statt ihrer:

$$\begin{aligned} 0 = {} & E\delta\varphi + \delta x \left\{ \frac{dy\,dE}{ds^2} + \lambda \frac{dx}{ds} \right\} - \delta y \left\{ \frac{dx\,dE}{ds^2} - \lambda \frac{dy}{ds} \right\} \\ & - \int \delta x \left\{ d \cdot \frac{dy\,dE}{ds^2} + d \cdot \lambda \frac{dx}{ds} \right\} \\ & + \int \delta y \left\{ d \cdot \frac{dx\,dE}{ds^2} - d \cdot \lambda \frac{dy}{ds} - \mu ds \right\} \ldots\ldots\ldots (1) \end{aligned}$$

2.

Für alle freien, d. h. nicht mit den Unterlagen in Berührung befindlichen Theile des Stabes müssen δx und δy willkürlich bleiben, also die unter den Integralzeichen befindlichen

$$d \cdot \frac{dy\,dE}{ds^2} + d.\lambda \frac{dx}{ds}$$

und

$$d \cdot \frac{dx\,dE}{ds^2} - d.\lambda \frac{dy}{ds} - \mu ds$$

verschwinden. Man erhält hierdurch, wenn c und c' willkürliche Constanten bedeuten:

$$c = \frac{dy\,dE}{ds^2} + \lambda \frac{dx}{ds}$$

$$c' = \frac{dx\,dE}{ds^2} - \lambda \frac{dy}{ds} - \mu s$$

und es folgt daraus:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= c \frac{dx}{ds} - (c' + \mu s) \frac{dy}{ds} \\ \frac{dE}{ds} &= c \frac{dy}{ds} + (c' + \mu s) \frac{dx}{ds} \end{aligned} \right\} \ldots\ldots\ldots (2)$$

Die ausser dem Integralzeichen befindlichen Theile der Gleichung (1) werden durch die Substitution dieser Ausdrücke:

$$0 = E\delta\varphi + c\delta x - (c' + \mu s)\delta y \ldots\ldots (3)$$

welcher Gleichung für den Anfang und das Ende des Stabes entsprochen werden muss, indem diese Punkte von den Unterlagen frei sind. Da $\delta\varphi$, δx, δy willkürlich bleiben müssen, erhält man $E = 0$, $c = 0$, $c' = -\mu s_,$, wo unter $s_,$ die beiden, dem Anfange und dem Ende des Stabes zugehörigen Werthe von s zu verstehen sind. Bezeichnet man die Länge des Stabes durch $2l$, und zählt man s von seiner Mitte an, negativ nach dem Anfangspunkte, positiv nach dem Endpunkte, so wird $s_, = -l$ und $= l$, und man erhält zur Bestimmung der Figur des Stabes zwischen seinen Ruhepunkten und Endpunkten die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} dE &= \mu(s + l)\, dx \\ dE &= \mu(s - l)\, dx \end{aligned} \right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Die auf den Unterlagen befindlichen Punkte des Stabes können nur Verschiebungen in der krummen Linie selbst, welche der Stab bildet, erfahren, oder die ihnen zugehörigen Variationen von x und y müssen der Bedingung

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dy}{dx}$$

entsprechen. Hierdurch verwandeln sich die ausser den Integralzeichen befindlichen Theile der Gleichung (1) in:

$$0 = E\delta\varphi + \delta x . \lambda \frac{ds}{dx}.$$

Diese Gleichung fordert, da δx willkürlich bleibt, dass λ an den Ruhepunkten verschwinde; ferner dass $E\delta\varphi$ für beide Ruhepunkte gleich, aber von entgegengesetztem Zeichen sei. Da, der ersten der Gleichungen (2) zufolge, an Punkten, an welchen $\lambda = 0$ ist,

$$c = (c' + \mu s) \frac{dy}{dx}$$

sein muss, so ist für die Werthe von s und $\frac{dy}{dx}$, welche den Ruhepunkten entsprechen und welche ich durch $-\sigma$ und σ' und durch $\operatorname{tg}\varphi'$ und $\operatorname{tg}\varphi''$ bezeichnen werde,

$$c = (c' - \mu\sigma) \operatorname{tg}\varphi'$$

$$c = (c' + \mu\sigma') \operatorname{tg}\varphi''$$

oder

$$c(\operatorname{tg}\varphi'' - \operatorname{tg}\varphi') = \mu(\sigma + \sigma') \operatorname{tg}\varphi' \operatorname{tg}\varphi''$$

$$c'(\operatorname{tg}\varphi'' - \operatorname{tg}\varphi') = -\mu(\sigma \operatorname{tg}\varphi' + \sigma' \operatorname{tg}\varphi'').$$

Man erhält, indem man diese Ausdrücke der Constanten in die zweite der Gleichungen (2) setzt, die Differentialgleichung der Figur des Stabes zwischen seinen beiden Ruhepunkten:

$$\begin{aligned} dE = {} & \frac{\mu}{\operatorname{tg}\varphi'' - \operatorname{tg}\varphi'} \Big\{ (\sigma + \sigma') \operatorname{tg}\varphi' \operatorname{tg}\varphi'' dy + \\ & + (s - \sigma') \operatorname{tg}\varphi'' dx - (s + \sigma) \operatorname{tg}\varphi' dx \Big\} \ldots\ldots (5) \end{aligned}$$

3.

Um die Gleichungen (4) und (5) integriren zu können, muss man wissen, auf welche Art E von der Krümmung des Stabes abhängt. Es ist bekanntlich dem Krümmungshalbmesser umgekehrt proportional, oder wenn dieser durch ϱ und eine Constante durch ν bezeichnet wird, ist

$$E = \frac{\nu}{\varrho}$$

und, wenn man für ϱ seinen Ausdruck schreibt,

$$E = -\frac{\nu\, dx\, d^2y}{ds^3}.$$

Aus der Vergleichung dieses Ausdruckes mit (4) und (5) geht hervor, dass y eine Grösse von der Ordnung von $\frac{\mu}{\nu}$ ist; wenn die Figur des Stabes sich sehr wenig von der geraden entfernt, also y sehr klein ist, ist auch diese Grösse sehr klein. Wenn man, um die Integrationen abzukürzen, $s = x$, $ds = dx$ setzt, so begeht man dadurch einen Fehler von der Ordnung von $\frac{\mu}{\nu} yy$, oder von der dritten Ordnung, welche für die aufzulösende Aufgabe unmerklich ist. Man kann also

$$E = -\nu \frac{d^2y}{dx^2}$$

und statt der Gleichungen (4)

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{\mu}{\nu}(x+l) \quad \text{und} \quad \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{\mu}{\nu}(x-l)$$

annehmen. Die Integrationen ergeben:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\mu}{2\nu}(x \pm l)^2 + h$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\mu}{6\nu}(x \pm l)^3 + hx + h'$$

$$y = -\frac{\mu}{24\nu}(x \pm l)^4 + \frac{h}{2}x^2 + h'x + h''.$$

Zur Bestimmung der Constanten h, h', h'' dienen die Bedingungen, dass $\frac{d^2y}{dx^2}$ für beide Endpunkte des Stabes verschwindet; dass $\frac{dy}{dx}$ für seine beiden Ruhepunkte resp. $= \operatorname{tg}\varphi'$ und $= \operatorname{tg}\varphi''$ ist, und dass y für dieselben Punkte einen gegebenen Werth erhält. Setzt man, um zu vereinfachen, gleich Anfangs voraus, was bei jeder Anwendung stattfinden wird, nämlich dass die Mitte des Stabes sich in der Mitte zwischen beiden Ruhepunkten befinde, bezeichnet man die Entfernungen dieser Punkte von den Enden des Stabes durch a und zählt man die y von der horizontalen, beide Ruhepunkte verbindenden Linie an, so wird x für den Anfangspunkt des Stabes $= -l$, für den Endpunkt $= l$, für den ersten Ruhepunkt $= -(l-a)$, für den zweiten $= l-a$, und die Bestimmung der Constanten geht aus den Gleichungen:

$$0 = h$$

$$\operatorname{tg}\varphi' = -\frac{\mu}{6\nu}a^3 - h(l-a) + h'$$

$$0 = -\frac{\mu}{24\nu}a^4 + \frac{h}{2}(l-a)^2 - h'(l-a) + h''$$

$$0 = h$$

$$\operatorname{tg}\varphi'' = \frac{\mu}{6\nu}a^3 + h(l-a) + h'$$

$$0 = -\frac{\mu}{24\nu}a^4 + \frac{h}{2}(l-a)^2 + h'(l-a) + h''$$

hervor, welche

$$h = 0$$

$$h' = \operatorname{tg}\varphi' + \frac{\mu}{6\nu}a^3$$

$$h'' = \operatorname{tg}\varphi'(l-a) + \frac{\mu}{24\nu}a^3\{4l-3a\}$$

$$h = 0$$

$$h' = \operatorname{tg}\varphi'' - \frac{\mu}{6\nu}a^3$$

$$h'' = -\operatorname{tg}\varphi''(l-a) + \frac{\mu}{24\nu}a^3(4l-3a)$$

ergeben. Man hat also für die beiden Theile des Stabes, welche ausserhalb der Ruhepunkte liegen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{\mu}{2\nu}(x+l)^2 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{\mu}{6\nu}\left\{(x+l)^3 - a^3\right\} + \operatorname{tg}\varphi' \\ y &= -\frac{\mu}{24\nu}\left\{(x+l)^4 - a^4\right\} + \frac{\mu}{6\nu}a^3(x+l-a) \\ &\qquad + \operatorname{tg}\varphi'(x+l-a) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots(6)$$

und

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{\mu}{2\nu}(x-l)^2 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{\mu}{6\nu}\left\{(x-l)^3 + a^3\right\} + \operatorname{tg}\varphi'' \\ y &= -\frac{\mu}{24\nu}\left\{(x-l)^4 - a^4\right\} + \frac{\mu}{6\nu}a^3(x-l+a) \\ &\qquad + \operatorname{tg}\varphi''(x-l+a) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots(7)$$

Die Differentialgleichung für den zwischen den Ruhepunkten liegenden Theil des Stabes (5) verwandelt sich, wenn man Grössen der dritten Ordnung vernachlässigt und $\sigma = \sigma' = l-a$ setzt, in:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\mu}{\nu(\operatorname{tg}\varphi'' - \operatorname{tg}\varphi')}\left\{(x-l+a)\operatorname{tg}\varphi'' - (x+l-a)\operatorname{tg}\varphi'\right\}$$

und ihre Integrale sind:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\mu}{2\nu(\operatorname{tg}\varphi'' - \operatorname{tg}\varphi')}\left\{(x-l+a)^2\operatorname{tg}\varphi'' - (x+l-a)^2\operatorname{tg}\varphi'\right\} + h$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\mu}{6\nu(\operatorname{tg}\varphi'' - \operatorname{tg}\varphi')}\left\{(x-l+a)^3\operatorname{tg}\varphi'' - (x+l-a)^3\operatorname{tg}\varphi'\right\} + hx + h'$$

$$y = \frac{-\mu}{24\nu(\operatorname{tg}\varphi'' - \operatorname{tg}\varphi')}\left\{(x-l+a)^4\operatorname{tg}\varphi'' - (x+l-a)^4\operatorname{tg}\varphi'\right\} + \frac{h}{2}x^2 + h'x + h''$$

Zur Bestimmung der Constanten sind die Bedingungen vorhanden, dass an beiden Ruhepunkten, oder für $x = -(l-a)$ und $x = l-a$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ und $\frac{dy}{dx}$ die Werthe erhalten, welche (6) und (7) dafür geben, und dass y verschwinde. Die erste dieser Bedingungen ergibt die Gleichungen:

$$-\frac{\mu}{2\nu}a^2 = \frac{-2\mu}{\nu(\operatorname{tg}\varphi'' - \operatorname{tg}\varphi')}(l-a)^2\operatorname{tg}\varphi'' + h$$

$$= \frac{2\mu}{\nu(\operatorname{tg}\varphi'' - \operatorname{tg}\varphi')}(l-a)^2\operatorname{tg}\varphi' + h$$

und zeigt dadurch, dass

$$\operatorname{tg}\varphi'' = -\operatorname{tg}\varphi'$$

$$h = \frac{\mu}{2\nu}\left\{2(l-a)^2 - a^2\right\}$$

sind, die zweite ergibt die Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{2\mu}{3\nu}(l-a)^3 - h(l-a) + h'$$

$$= \frac{2\mu}{3\nu}(l-a)^3 - h(l-a) - h'$$

also

$$h' = 0$$

$$\operatorname{tg}\varphi' = -\frac{\mu}{6\nu}\left\{2(l-a)^2 - 3a^2\right\}\{l-a\} = -\operatorname{tg}\varphi'';$$

die dritte endlich ergibt:

$$0 = -\frac{\mu}{3\nu}(l-a)^4 + \frac{h}{2}(l-a)^2 - h'(l-a) + h''$$

$$= -\frac{\mu}{3\nu}(l-a)^4 + \frac{h}{2}(l-a)^2 + h'(l-a) + h''$$

und es folgt daraus:

$$h'' = -\frac{\mu}{12\nu}\left\{2(l-a)^2 - 3a^2\right\}(l-a)^2.$$

Durch die Substitution dieser Ausdrücke der Constanten findet man:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{\mu}{2\nu}\left\{xx - l(l-2a)\right\} \\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{\mu}{6\nu}x\left\{xx - 3l(l-2a)\right\} \\
y &= -\frac{\mu}{24\nu}\left\{xx - (l-a)^2\right\}\times \\
&\quad \times\left\{xx + (l-a)^2 - 6l(l-2a)\right\}
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots(8)$$

Indem man den gefundenen Ausdruck von

$$\operatorname{tg}\varphi' = -\operatorname{tg}\varphi''$$

auch anwendet, die Formeln (6) und (7) von φ' und φ'' zu befreien, werden ihre beiden letzten:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -\frac{\mu}{6\nu}\left\{(x+l)^3 + l(2ll - 6al + 3aa)\right\} \\
y &= -\frac{\mu}{24\nu}\left\{(x+l)^4 - a^4\right\} \\
&\quad -\frac{\mu}{6\nu}(x+l-a)\,l(2ll - 6al + 3aa)
\end{aligned}\right\} \ldots.(6^*)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -\frac{\mu}{6\nu}\left\{(x-l)^3 - l(2ll - 6al + 3aa)\right\} \\
y &= -\frac{\mu}{24\nu}\left\{(x-l)^4 - a^4\right\} \\
&\quad +\frac{\mu}{6\nu}(x-l+a)\,l(2ll - 6al + 3aa)
\end{aligned}\right\} \ldots.(7^*)$$

4.

Die Grösse der Entfernung der Mittellinie des Stabes von der geraden Linie ist, wie hieraus hervorgeht, der Grösse $\frac{\mu}{\nu}$ proportional. Ehe man diese Untersuchung anwenden kann, muss diese Grösse für den Fall der Anwendung bestimmt werden. Ich werde zeigen, wie sie mit der Beschaffenheit des Stabes und der Spannkraft seiner Materie zusammenhängt.

Das Gewicht μ jeder Längeneinheit des Stabes ist

$$= f.\Delta.k,$$

wo f die Fläche seines Querschnittes, Δ das specifische Gewicht seiner Materie, und k das Gewicht einer Raumeseinheit des dichtesten Wassers bezeichnen. Die Grösse ν hängt von der Spannkraft der Materie des Stabes und der Figur seines Querschnittes ab. Zum Maasse der ersteren haben die Physiker die Verkürzung der Längeneinheit jeder Dimension eines Körpers gewählt, welche durch den allseitigen Druck einer Atmosphäre erzeugt wird. Poisson hat gezeigt, dass jede Zusammendrückung eines Körpers in einer Richtung, welche seine Abmessung in dieser Richtung in dem Verhältnisse $1:1-\alpha$ verändert, eine Veränderung der beiden anderen Abmessungen in dem Verhältnisse $1:1+\frac{1}{4}\alpha$ zur Folge hat. Die Verkürzung durch den allseitigen Druck der Atmosphäre ist also nur halb so gross, als die aus ihrem einseitigen Drucke hervorgehende, oder das von jenem hergenommene Maass muss verdoppelt werden, wenn es Grundlage von Untersuchungen der Folgen

eines einseitigen Druckes werden soll. Ich werde es durch β bezeichnen.

Nimmt man die Atmosphäre, worauf dieses Maass sich bezieht, so schwer an, wie sie bei dem Barometerstande = 0,76 Met. = 336^{L},902 ist, auch das specifische Gewicht des Quecksilbers, welches bei diesem Barometerstande in der Wärme des schmelzenden Eises vorausgesetzt ist, = 13,596, so wird das auf jede Flächeneinheit, wofür ich die Pariser Quadratlinie annehme, drückende Gewicht, welches die Verkürzung 2β erzeugt,

$$= 336{,}902 \times 13{,}596\, k = 4580{,}5\, k.$$

Bezeichnet man ferner, wie oben, den Krümmungshalbmesser der Mittellinie des Stabes durch ϱ, so ist die Ausdehnung eines von dem Mittelpunkte der Krümmung $\varrho + u$ entfernten Längenelementes des Stabes, dessen Länge in seinem geraden Zustande $= ds$ ist:

$$= ds\left\{1 + \frac{u}{\varrho}\right\}.$$

Unter der Annahme, dass die Verkürzung, welche ein Druck erzeugt, seiner Stärke proportional ist, kann man die Kraft bestimmen, welche die eben angegebene Veränderung hervorbringt. Sie folgt aus der Proportion:

$$2\beta : 4580{,}5k = -\frac{u}{\varrho} : P$$

oder sie ist:

$$P = \frac{-2290{,}25\, k.u}{\beta\varrho}.$$

Denkt man sich den Stab durch zwei unendlich wenig von einander entfernte, auf seine Oberfläche normale Ebenen geschnitten, so dass sie im geraden Zustande des Stabes parallel sind, im gekrümmten aber sich im Mittelpunkte der Krümmung durchschneiden, bezeichnet man die Breite des Stabes in der Entfernung u von seiner Mittellinie durch φu und nimmt man an, dass diese Mittellinie, von dem einen Zustande zu dem anderen, ihre Ausdehnung nicht ändere, so ist die Kraft, welche in dem Mittelpunkte der Krümmung angebracht werden muss, um das Auseinandergehen der Ebene zu verhindern, das von dem grössten negativen bis zu dem grössten positiven Werthe von u genommene Integral:

$$-\frac{1}{\varrho}\int P\varphi u.u\,du,$$

oder, wenn sie in der Entfernung 1 von der Mittellinie des Stabes angebracht wird,

$$-\int P\varphi u.u\,du = \frac{2290{,}25\, k}{\beta\varrho}\int \varphi u.uu\,du.$$

Dieses ist also der Ausdruck der vorher durch E bezeichneten Kraft durch die Elemente wovon sie abhängt. Indem sie $= \frac{\nu}{\varrho}$ gesetzt worden ist, hat man

$$\nu = \frac{2290{,}25\, k}{\beta}\int \varphi u.uu\,du$$

und das in den Formeln für die Figur, welche der Stab durch die Schwere annimmt, vorkommende

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{f.\Delta.\beta}{2290{,}25 \int \varphi u.uu\,du} \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Wenn der Stab ein Parallelepipedum von der Dicke $2d$ und der Breite b ist, so ist

$$f = 2db; \quad \varphi u = b; \quad \int \varphi u.uu\,du = \tfrac{2}{3} b d^3$$

und

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{3\Delta\beta}{2290{,}25.dd} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Wenn er cylindrisch vom Halbmesser d ist, ist

$$f = \pi dd; \quad \varphi u = 2\sqrt{dd - uu}; \quad \int \varphi u.uu\,du = \tfrac{1}{4}\pi d^4$$

und

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{4\Delta\beta}{2290{,}25.dd} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Für einen Hohlcylinder, vom äusseren Halbmesser d und inneren d' ist endlich

$$f = \pi(dd - d'd'); \quad \int \varphi u.uu\,du = \frac{\pi}{4}\{d^4 - d'^4\}$$

und

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{4\Delta\beta}{2290{,}25\{dd + d'd'\}} \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

5.

Ich werde zuerst den Einfluss aufsuchen, welchen die Schwere auf die Entfernung der Endflächen eines Stabes von der Länge $2l$ hat, welcher auf zwei Punkten aufliegt, deren Entfernung von seinem Ende $= a$ ist. Er ist offenbar das über die ganze Länge des Stabes ausgedehnte Integral von $dx - ds$, oder

$$= \int dx\left\{1 - \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right\}$$

und mit hinreichender Annäherung

$$= -\int \frac{dy^2}{2dx}.$$

Durch die Ausdrücke von $\frac{dy}{dx}$, welche durch die Formeln (6*), (8), (7*) gegeben sind, wird dieser Einfluss die Summe dreier Integrale, deren jedes sich über eine der Abtheilungen des Stabes erstreckt, nämlich:

$$= -\frac{1}{72}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 \int_{-l}^{-l+a} \left[(x+l)^3 + l(2ll - 6al + 3aa)\right]^2 dx$$

$$-\frac{1}{72}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 \int_{-l+a}^{l-a} \left[x^3 - 3l(l-2a)x\right]^2 dx$$

$$-\frac{1}{72}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 \int_{l-a}^{l} \left[(x-l)^3 - l(2ll - 6al + 3aa)\right]^2 dx$$

und nach vollständiger Entwickelung:

$$= -\frac{1}{360}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 l^7\left\{\frac{136}{7} - 96\left(\frac{a}{l}\right) + 120\left(\frac{a}{l}\right)^2 + 40\left(\frac{a}{l}\right)^3 - 120\left(\frac{a}{l}\right)^4 + 42\left(\frac{a}{l}\right)^5 + \left(\frac{a}{l}\right)^6\right\} \ldots\ldots\ldots (13)$$

Der Werth von $\frac{a}{l}$ für welchen dieser Ausdruck ein Minimum wird, findet sich durch die Auflösung der Gleichung:

$$0 = -96 + 240\left(\frac{a}{l}\right) + 120\left(\frac{a}{l}\right)^2 - 480\left(\frac{a}{l}\right)^3 + 210\left(\frac{a}{l}\right)^4 - 6\left(\frac{a}{l}\right)^5 \ldots\ldots (14)$$

und ist $= 0{,}44062$. Der Stab verkürzt sich also am wenigsten, wenn man ihn 0,22031 seiner ganzen Länge, von den Endpunkten entfernt, auflegt. Dann beträgt die Verkürzung:

$$-\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 l^7 . 0{,}0000836,$$

während sie, bei der Auflegung an den Endpunkten selbst, also für $a = 0$,

$$-\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 l^7 . 0{,}0539683$$

beträgt.

Ich werde diese Formeln auf die Toise und auf das neue Original des Preussischen Längenmaasses anwenden. Die Copie der ersteren, welche ich zu den Pendelversuchen u. s. w. angewandt habe, hat eine Dicke von 4,2 Linien, oder d ist $= 2{,}1$; ihr specifisches Gewicht Δ werde ich $= 7{,}821$ annehmen, und den Werth von β, zufolge der vortrefflichen Versuche LAGERHIELM's, = einem Viermillionentel; l ist $= 432$. Hiernach ergibt die Formel (10):

$$\log \frac{\mu}{\nu} = 0{,}76399 - 10$$

und die Entfernung der Endflächen vermindert sich durch die vortheilhafteste Auflegung um $0^L{,}000079$, durch die Auflegung an den Enden aber um $0^L{,}05111$. In diesem letzten Falle entfernt sich die Toise in ihrer Mitte von der geraden, durch ihre Enden gelegten Linie um mehr als 4^L; man wird aber ohne Zweifel nie eine so unzweckmässige Anwendung derselben versuchen, wie die sein würde, die die Auflegung eines so langen und dünnen Stabes an seinen Enden erforderte.

Für das neue Original des Preussischen Längenmaasses ist $d = 4{,}5$, $l = 208{,}7$, und die dem Stahl zukommenden Werthe von Δ und β können den für das Eisen angenommenen gleich geschätzt werden. Hierdurch erhält man:

$$\log \frac{\mu}{\nu} = 0{,}10200 - 10$$

und die Verminderung der Entfernung der Endflächen beträgt, selbst bei der Auflegung an den Enden, nur $0^L{,}0000145$.

6.

Ferner werde ich den Einfluss der Schwere, auf die Entfernung zweier, auf der höchstliegenden Fläche eines Stabes verzeichneten Punkte aufsuchen. Er besteht offenbar aus zwei Theilen, nämlich der Verkürzung, welche die Entfernung der den Punkten entsprechenden Punkte der Mittellinie des Stabes erfährt, und der Veränderung, welche daraus hervorgeht, dass die Krümmung derselben die Entfernungen auf der Seite ihres Mittelpunktes verkürzt und auf der ihm entgegengesetzten Seite verlängert. Wenn die beiden Punkte gleich weit von der Mitte des Stabes entfernt sind und diese Entfernung durch $l - a'$ bezeichnet wird, ist der erste Theil

$$= -\int_{-l+a'}^{l-a'} \frac{dy^2}{2dx}$$

und man findet, unter der Voraussetzung, dass $a' > a$ ist, oder dass die auf dem Stabe verzeichneten Punkte ausserhalb der Ruhepunkte liegen, durch die Ausführung der Integrationen des vorigen Art., diesen Theil

$$= -\frac{1}{72}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2\left\{\frac{2}{7}(a^7 - a'^7) + l(2ll - 6al + 3aa)(a^4 - a'^4) + 2ll(2ll - 6al + 3aa)^2(a - a') + \frac{2}{7}(l-a)^7 - \frac{12}{5}l(l-2a)(l-a)^5 + 6ll(l-2a)^2(l-a)^3\right\}.$$

Der zweite Theil ist offenbar

$$= -d(\varphi_1 - \varphi_0),$$

wo d die Entfernung der Punkte von der Mittellinie des Stabes bezeichnet, und φ_0 und φ_1 die zu dem Anfangspunkte und dem Endpunkte gehörigen Werthe von φ bedeuten. Da die Formeln (6*) und (7*)

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{-\mu}{6\nu}\left\{a'^3 + l(2ll - 6al + 3aa)\right\}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\mu}{6\nu}\left\{a'^3 + l(2ll - 6al + 3aa)\right\}$$

ergeben und die Tangenten von φ_0 und φ_1 mit den Bögen verwechselt werden können, ist der zweite Theil

$$= -\frac{\mu d}{3\nu}\left\{a'^3 + l(2ll - 6al + 3aa)\right\}$$

und beide vereinigt ergeben die ganze Veränderung der Entfernung:

$$= -\frac{\mu d}{3\nu}\left\{a'^3 + l(2ll - 6al + 3aa)\right\} - \frac{1}{72}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2\left\{\frac{2}{7}(a^7 - a'^7) + l(2ll - 6al + 3aa)(a^4 - a'^4)\right.$$
$$\left. + 2ll(2ll - 6al + 3aa)^2(a - a') + \frac{2}{7}(l-a)^7 - \frac{12}{5}l(l-2a)(l-a)^5 + 6ll(l-2a)^2(l-a)^3\right\} \ldots . (15)$$

Das erste Glied dieses Ausdruckes verschwindet für die Annahme

$$\frac{a}{l} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1 - \left(\frac{a'}{l}\right)^3};$$

das zweite ist für alle Stäbe, welche sich zur Erklärung eines, auf die hier betrachtete Art verzeichneten Maasses eignen, sehr klein, weshalb es dann immer einen, sich dem eben angegebenen Werthe nähernden Werth von a gibt, für welchen das Maass genau so lang erscheint, als es erscheinen würde, wenn der dasselbe tragende Stab auf einer Ebene läge. Dieser Werth geht für einen gegebenen Stab, oder für gegebene Werthe von b und a', aus der Auflösung der Gleichung hervor, welche man erhält wenn man den Ausdruck (15) $= 0$ setzt. Bringt man die beiden Unterlagen des Stabes an den so gefundenen Punkten an, so hat seine Biegsamkeit keinen Einfluss auf das durch ihn erklärte Maass.

Wenn aber der Fall, welchen die Formel (15) voraussetzt, nicht der vorhandene ist, also die auf dem Stabe verzeichneten Punkte innerhalb der Ruhepunkte liegen, kann man diese Formel nicht länger anwenden. Dann ist der erste Theil der für diesen Fall gehörigen Formel:

$$= -\frac{1}{72}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2\left\{\frac{2}{7}(l-a)^7 - \frac{12}{5}l(l-2a)(l-a')^5 + \right.$$
$$\left. + 6ll(l-2a)^2(l-a')^3\right\}$$

und der zweite Theil:

$$= -\frac{\mu d}{3\nu}\left\{(l-a')^3 - 3l(l-2a)(l-a')\right\}$$

Beide zusammen ergeben die Veränderung der Entfernung:

$$= \frac{\mu d}{3\nu}\left\{(l-a')^3 - 3l(l-2a)(l-a')\right\}$$
$$- \frac{1}{72}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2\left\{\frac{2}{7}(l-a')^7 - \frac{12}{5}l(l-2a)(l-a')^5 + \right.$$
$$\left. + 6ll(l-2a)^2(l-a')^3\right\} . (16)$$

Auch diese Formeln werde ich auf zwei vorhandene Fälle anwenden. Einer von ihnen ist das im Jahre 1816 verfertigte Original des Preussischen Maasses. Für den Stab von Eisen, auf welchen es verzeichnet ist, ist $l = 212{,}0$, $d = 2{,}45$; die Entfernung der das Maass bestimmenden Striche von den Enden des Stabes, oder a', ist $= 3{,}5$. Wendet man die schon angewandten Werthe von Δ und β wieder an, so wird

$$\log \frac{\mu}{\nu} = 0{,}63009 - 10;$$

bringt man die beiden Unterlagen des Stabes genau unter den Endpunkten des darauf verzeichneten Maasses an, oder setzt man $a = a' = 3{,}5$, so ergibt die Formel (15) die hieraus entstehende Verkürzung des Maasses $= 0^L{,}006482$. Der Stab entfernt sich dann in seiner Mitte $0^L{,}168$ von der geraden Linie. Soll das Maass die Länge welche es hat, indem der Stab auf einer Ebene liegt, durch seine Auflegung auf zwei Unterlagen nicht verändern, so müssen diese 0,2113 der Länge des Stabes von seinen Enden entfernt sein.

Der andere Fall, auf welchen ich die Formeln (15) und (16) anwenden werde, wird durch die auf die Oberfläche einer Röhre aufgetragene Scale gegeben, welche Herr Baily für die Astronomical Society hat verfertigen lassen. Die Röhre ist 63 Englische Zolle lang und ihr äusserer und innerer Durchmesser sind 1,12 und 0,74 Zoll; die Endpunkte einer auf die Röhre aufgetragene Entfernung von 3 Engl. Fussen sind 13,5 Zoll von ihren Enden entfernt. Die von Herrn Baily als normal gewählte Auflegungsart auf zwei Punkten setzt diese ein Viertel der Länge $= 15{,}75$ Zoll von den Enden entfernt voraus; er hat aber auch Versuche über die Veränderungen angestellt, welche die drei Fuss erfuhren, wenn die Ruhepunkte 31, 17,75, 13,75, 1 Zoll von den Enden der Röhre entfernt wurden. Verwandelt man das Englische Maass in Pariser Linien, so erhält man

$$l = 354{,}7, \quad a' = 152{,}0, \quad d = 6{,}31, \quad d' = 4{,}17,$$

und a für die verschiedenen, nach und nach angewandten Auflegungsarten,

349,05; 199,86; 177,34; 154,82; 11,26,

wovon der mittlere Werth der normale ist.

Den Werth von β haben Savart und Chladni*) für Messing, woraus die Röhre gemacht ist,

$$= \frac{1}{2123000}$$

gefunden, welche Bestimmung aber von der Unbestimmtheit der Mischungsverhältnisse des Messings nicht frei sein kann. Nimmt man sie an und setzt man $\Delta = 8{,}45$, so erhält man durch die Formel (12):

*) Frankenheim. Die Lehre von der Cohäsion. Breslau 1835. S. 256.

$$\log \frac{\mu}{\nu} = 0{,}08464 - 10.$$

Die vier ersten Versuche sind in dem Falle, welchen die Formel (15) voraussetzt, die fünfte aber ist in dem von (16) vorausgesetzten. Das erste Glied beider Formeln hat den Werth:

$+ 0^{L}{,}010500;\quad + 0^{L}{,}003980;\quad + 0^{L}{,}001953;$
$- 0{,}000358;\quad - 0{,}016184;$

das zweite ist weit kleiner und beträgt nur

$+ 0^{L}{,}000067;\quad - 0^{L}{,}000006;\quad - 0^{L}{,}000001;$
$- 0{,}000001;\quad - 0{,}000123.$

Beide Glieder zusammengenommen ergeben die ganze Veränderung des Maasses von drei Fuss, in den verschiedenen Auflegungsarten,

$+ 0^{L}{,}010433;\quad + 0^{L}{,}003974;\quad + 0^{L}{,}001952;$
$- 0{,}000359;\quad - 0{,}016307;$

oder, von der normalen an gerechnet,

$+ 0^{L}{,}008481;\quad + 0^{L}{,}002022;\quad - 0^{L}{,}002311;\quad - 0^{L}{,}018259.$

Herr BAILY hat diese Veränderungen beobachtet, und auf Pariser Linien reducirt, folgende Werthe derselben erhalten:

$+ 0^{L}{,}00709;\quad + 0^{L}{,}00169;\quad - 0^{L}{,}00266;\quad - 0^{L}{,}01947.$

---

152. Ueber die Grundformeln der Dioptrik.*)

(Astr. Nachr. 18, p. 97.)

Herr Professor MÖBIUS hat den Nutzen der Einführung der Kettenbrüche in die Dioptrik, in zwei schönen, im 5. und 6. Bande von CRELLE's Journal für reine und angewandte Mathematik erschienenen Abhandlungen verfolgt. Wenn ich dieselbe Materie zum Gegenstande noch eines Aufsatzes mache, so ist der Grund davon nicht sowohl, dass ich der Theorie selbst wesentlich neue Sätze hinzuzufügen hätte, als dass ich zu zeigen beabsichtige, dass alle Elemente der Construction eines Linsensystems, d. h. die beiden Krümmungshalbmesser jeder Linse, ihre Dicke in der Axe, ihr Ort in dem Systeme und das ihrem Glase zugehörige Brechungsverhältniss vollständig in die (die Quadrate und Producte der Winkel vernachlässigenden) Formeln aufgenommen werden können, ohne ihre Einfachheit zu vermindern. Meine Formeln sind also nicht näherungsweise, sondern vollkommen genau mit jedem aus Glaslinsen zusammengesetzten Instrumente vergleichbar und können, in demselben Sinne genommen, zur Grundlage neuer Constructionen gemacht werden.

1.

Ich werde zuerst die trigonometrischen Formeln anführen, welche einen Strahl, in seinem Durchgange durch eine beliebige Anzahl beliebig gestellter Glaslinsen, deren Axen jedoch zusammenfallen, verfolgen. Ich nehme an, dass eine Ebene durch den einfallenden Strahl und die Axe gelegt werden könne. Ich werde folgende Bezeichnungen anwenden.

Die Halbmesser der Krümmung der ersten und zweiten Fläche der Linsen r, ϱ; $r_{,}$, $\varrho_{,}$;.... r_i, ϱ_i. Die Dicken der Gläser, in der Axe gemessen d, $d_{,}$,.... d_i. Die Entfernungen der einander zugewandten Flächen der Linsen, gleichfalls in der Axe gemessen, e, $e_{,}$,.... e_{i-1}. Die Brechungsverhältnisse des Glases, woraus die Linsen gemacht sind, $n:1$, $n_{,}:1$,.... $n_i:1$. Die den verschiedenen Linsen zugehörigen r nehme ich positiv oder negativ, je nachdem ihre ersten Flächen convex oder concav sind; die ϱ als positiv oder negativ, je nachdem die zweiten Flächen concav oder convex sind. Diese Wahl der Zeichen ist so, dass sowohl die r als auch die ϱ positiv sind, wenn die Mittelpunkte der Krümmung der Flächen, wozu sie gehören, von diesen aus nach Innen liegen; negativ wenn sie nach Aussen liegen.

Ein Strahl macht vor seinem Eintritte in die erste Linse den Winkel w mit der Axe, im Inneren der Linse den Winkel v, nach seinem Austritte den Winkel ω. Er durchschneidet die Axe vor seinem Eintritte in der Entfernung a von der ersten Fläche; wenn er sich im Inneren der Linse befindet in der Entfernung b von dieser, oder $\beta = b - d$ von der zweiten Fläche; nach seinem Austritte in der Entfernung α von der letzteren. Er trifft die erste Fläche an einem Punkte, zwischen welchem und der Axe, an dem Mittelpunkte ihrer Krümmung, der Winkel t liegt; die zweite an einem Punkte, welchem der ähnlich zu verstehende Winkel τ zugehört. Ich nehme a, b, β, α positiv, wenn die durch sie bestimmten Punkte der Axe, von den betreffenden Flächen der Linse aus, nach Innen liegen, welche Richtung vorher auch für r und ϱ als die positive angenommen worden ist.

*) [343 d. a. Verz. — Bis auf den einleitenden Satz identisch mit §§ 13—16 der Abh. „Besondere Untersuchung des Heliometers der Königsberger Sternwarte" (Astr. Unters. I, Abh. 71).]

Diesen Bezeichnungen zufolge ergeben sich alle Umstände des Durchganges des Strahls durch die erste Linse aus den Formeln:

$$\left.\begin{array}{ll} r\sin(t-w) = (a-r)\sin w & \\ n\sin(t-v) = \sin(t-w) & \\ (b-r)\sin v = r\sin(t-v); & \beta = b-d \\ \varrho\sin(\tau-v) = (\beta-\varrho)\sin v & \\ \sin(\tau-\omega) = n\sin(\tau-v) & \\ (\alpha-\varrho)\sin\omega = \varrho\sin(\tau-\omega) & \end{array}\right\} \ldots\ldots A$$

Wenn zwei der in der ersten Formel vorkommenden Grössen a, t, w gegeben sind, so bestimmt diese Formel die dritte; dann gibt die zweite Formel v, die dritte b, die vierte τ, die fünfte ω, die sechste α. Offenbar wiederholen sich diese Formeln für eine zweite Linse, für welche nur die Zeichen $r_,$, $a_,$, $t_,$, $w_,$,..... angewandt werden, und zu welcher der Uebergang von der ersten durch die Annahmen

$$a_, = \alpha - e, \quad w_, = \omega$$

stattfindet. Man kann dieselben Formeln auch für eine dritte Linse anwenden, wenn man r_2, a_2, t_2, w_2... schreibt und

$$a_2 = \alpha_, - e_, \quad w_2 = \omega_,$$

annimmt. Auf diese Art sind die Formeln A für jede Anzahl von Linsen anwendbar.

2.

Eine besondere Betrachtung verdient der Fall, in welchem die Winkel w, t, v, τ, ω unendlich klein sind. Wenn er vorhanden ist, kann man die Formeln A in die folgenden verwandeln:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{n}{b} = \frac{1}{a} + \frac{n-1}{r}; & a\,w = r\,t = b\,v; \quad \beta = b-d \\ \frac{n}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{n-1}{\varrho}; & \alpha\,\omega = \varrho\,\tau = \beta v \end{array}\right\} \ldots B$$

Geht derselbe Strahl durch eine zweite Linse, so hat man ferner:

$$a_, = \alpha - e, \quad w_, = \omega$$

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{n_,}{b_,} = \frac{1}{a_,} + \frac{n_,-1}{r_,}; & a_,w_, = r_,t_, = b_,v_,; \quad \beta_, = b_, - d_, \\ \frac{n_,}{\beta_,} = \frac{1}{\alpha_,} + \frac{n_,-1}{\varrho_,}; & \alpha_,\omega_, = \varrho_,\tau_, = \beta_,v_, \end{array}\right\} \ldots B_,$$

sowie ähnliche Formeln für alle folgenden Linsen.

Aus der Combination der Formeln

$$a\,w = r\,t = b\,v; \quad \alpha\omega = \varrho\tau = \beta v$$
$$a_,w_, = r_,t_, = b_,v_,; \quad \alpha_,\omega_, = \varrho_,\tau_, = \beta_,v_,$$

u. s. w.

für $i+1$ Linsen des Systems erhält man unmittelbar:

$$\left.\begin{array}{l} w_i = M_i \cdot w \\ r_i t_i = M_i \cdot a_i w \\ v_i = M_i \cdot \frac{a_i}{b_i} w \\ \varrho_i\tau_i = M_i \cdot \frac{a_i\beta_i}{b_i} w \\ \omega_i = M_i \cdot \frac{a_i\beta_i}{\alpha_i b_i} w \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots C$$

wo M_i um abzukürzen für

$$\frac{a.a_,.\ldots.a_{i-1}}{\alpha.\alpha_,.\ldots.\alpha_{i-1}} \cdot \frac{\beta.\beta_,.\ldots.\beta_{i-1}}{b.b_,.\ldots.b_{i-1}}$$

geschrieben ist. Es geht hieraus hervor, dass die Grössen a, a_1, a_2,...; b, b_1, b_2,...; β, β_1, β_2,...; α, α_1, α_2,.... auch sämmtliche Winkel des Strahls mit der Axe, also seinen Weg vollständig bestimmen. Auch für den Fall, in welchem a unendlich gross und w unendlich klein ist, braucht man keine anderen Formeln, indem die dann stattfindende scheinbare Unbestimmtheit der vorigen verschwindet, wenn man rt für aw schreibt. Ich habe also nur zweckmässige Ausdrücke jener Grössen aufzusuchen.

Aus den Gleichungen

$$\frac{n_i}{\beta_i} = \frac{1}{\alpha_i} + \frac{n_i - 1}{\varrho_i}$$

$$\frac{n_i}{b_i} = \frac{1}{a_i} + \frac{n_i - 1}{r_i}$$

folgt:

$$\alpha_i = \frac{1}{\frac{1-n_i}{\varrho_i} + \frac{n_i}{\beta_i}}$$

und da $\beta_i = -d_i + b_i$ ist:

$$\frac{n_i}{\beta_i} = \frac{1}{-\frac{d_i}{n_i} + \frac{b_i}{n_i}};$$

ferner:

$$\frac{b_i}{n_i} = \frac{1}{\frac{n_i - 1}{r_i} + \frac{1}{a_i}}$$

und da $a_i = -e_{i-1} + \alpha_{i-1}$ ist,

$$\frac{1}{a_i} = \frac{1}{-e_{i-1} + \alpha_{i-1}}.$$

Für die i^{te} Linse hat man offenbar die ähnlichen Ausdrücke:

$$\alpha_{i-1} = \frac{1}{\frac{1-n_{i-1}}{\varrho_{i-1}} + \frac{n_{i-1}}{\beta_{i-1}}}$$

$$\frac{n_{i-1}}{\beta_{i-1}} = \frac{1}{-\frac{d_{i-1}}{n_{i-1}} + \frac{b_{i-1}}{n_{i-1}}}$$

$$\frac{b_{i-1}}{n_{i-1}} = \frac{1}{\frac{n_{i-1}-1}{r_{i-1}} + \frac{1}{a_{i-1}}}$$

$$\frac{1}{a_{i-1}} = \frac{1}{-e_{i-2} + \alpha_{i-2}}$$

und wieder ähnliche für jede vorhergehende Linse. Schreibt man also den Kettenbruch

$$\frac{1}{\frac{1-n_i}{\varrho_i} + \frac{1}{\frac{-d_i}{n_i} + \frac{1}{\frac{n_{i-1}}{r_i} + \frac{1}{-e_{i-1} + \frac{1}{\frac{1-n_{i-1}}{\varrho_{i-1}} + \frac{1}{\frac{-d_{i-1}}{n_{i-1}} + \ldots + \frac{1}{\frac{1-n}{\varrho} + \frac{1}{\frac{-d}{n} + \frac{1}{\frac{n-1}{r} + \frac{1}{a}}}}}}}}}}$$

so drückt er, ganz genommen, die Grösse α_i aus; trennt man von ihm sein erstes Glied, so drücken die übrigbleibenden $\frac{n_i}{\beta_i}$ aus; der nach der Absonderung seiner zwei ersten Glieder übrigbleibende Theil ist $= \frac{b_i}{n_i}$; lässt man drei Glieder weg, so erhält man $\frac{1}{a_i}$; die Weglassung von vier Gliedern ergibt α_{i-1} u. s. w. Dieser Kettenbruch enthält daher Alles was zur Kenntniss des Weges eines Strahls durch ein beliebiges System von Glaslinsen erforderlich ist. Er ist der einfachste Ausdruck, welchen man dafür geben kann, denn er enthält jede, zur Construction des Linsensystems erforderliche Grösse nur einmal.

3.

Wenn das System, durch welches der Strahl geht, aus $i+1$ Linsen besteht, hat der Kettenbruch $4i+4$ Glieder, welche aus $2i+2$ Krümmungshalbmessern, $i+1$ Dicken, i Entfernungen zwischen den Linsen und der Grösse a entstehen. Ich werde ihn jetzt durch

$$[4i+3,a] = \frac{1}{(4i+3)} + \frac{1}{(4i+2)} + \frac{1}{(4i+1)} + \ldots + \frac{1}{(2)} + \frac{1}{(1)} + \frac{1}{a}$$

bezeichnen. Die hier eingeführten Bezeichnungen bedeuten also:

$$(1) = \frac{n-1}{r} \qquad (5) = \frac{n_1-1}{r_1} \cdot \ldots \cdot (4i+1) = \frac{n_i-1}{r_i}$$

$$(2) = -\frac{d}{n} \qquad (6) = -\frac{d_1}{n_1} \cdot \ldots \cdot (4i+2) = -\frac{d_i}{n_i}$$

$$(3) = \frac{1-n}{\varrho} \qquad (7) = \frac{1-n_1}{\varrho_1} \cdot \ldots \cdot (4i+3) = \frac{1-n_i}{\varrho_i}$$

$$(4) = -e \qquad (8) = -e_1$$

und man hat, dem vorigen § zufolge:

$$\left.\begin{array}{llll} -\alpha_i = [4i+3,a]; & \frac{n_i}{\beta_i} = [4i+2,a]; & \frac{b_i}{n_i} = [4i+1,a]; & \frac{1}{a_i} = [4i,a] \\ \alpha_{i-1} = [4i-1,a]; & \frac{n_{i-1}}{\beta_{i-1}} = [4i-2,a]; & \frac{b_{i-1}}{n_{i-1}} = [4i-3,a]; & \frac{1}{a_{i-1}} = [4i-4,a] \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots E$$

u. s. w.

$$\alpha = [3,a]; \qquad \frac{n}{\beta} = [2,a]; \qquad \frac{b}{n} = [1,a]$$

Wenn $p, q, r \ldots s$ beliebige Grössen bedeuten und man unter (p), (pq), (pr) u. s. w. folgende Grössen versteht:

$$(p) = p$$
$$(pq) = q(p) + 1$$
$$(pr) = r(pq) + (p)$$
$$(ps) = s(pr) + (pq)$$

u. s. w.

so ist der Kettenbruch

$$[p,s] = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \ldots\ldots + \frac{1}{s}$$

durch diese neuen Bezeichnungen ausgedrückt, bekanntlich

$$[p,s] = \frac{(q,s)}{(p,s)}.$$

Auch kann man die Reihenfolge der Elemente, aus welchen eine der so bezeichneten Grössen zusammengesetzt ist, nicht nur umkehren, sondern auch jede in Beziehung auf ihre Mitte symmetrische Versetzung mit ihnen vornehmen, ohne dass die daraus zusammengesetzte Grösse dadurch geändert wird. Man erhält z. B. einen und denselben Werth von (p, s) aus den vier Reihenfolgen

$$pqrs, \quad prqs, \quad sqrp, \quad srqp,$$

oder einen und denselben von (p, t) aus den folgenden:

$$pqrst, \quad psrqt, \quad tqrsp, \quad tsrqp.$$

Der Grund hiervon ist eine offenbare Folge der Art der Zusammensetzung dieser Grössen.

Führt man diese Bezeichnungen in die Formeln E ein, und bemerkt man, dass das Product der vier Ausdrücke jeder Zeile:

$$\frac{\alpha_i b_i}{a_i \beta_i} = [4i+3, a]\,[4i+2, a]\,[4i+1, a]\,[4i, a]$$

ist, so erhält man:

$$\frac{\alpha_i b_i}{a_i \beta_i} = \frac{(4i-1, a)}{(4i+3, a)}$$

und durch die Substitution dieses Ausdrucks in die Formeln C:

$$\left.\begin{aligned} w_i &= (4i-1, a)\, w \\ r_i t_i &= (4i, \quad a)\, w \\ n_i v_i &= (4i+1, a)\, w \\ \varrho_i \tau_i &= (4i+2, a)\, w \\ \omega_i &= (4i+3, a)\, w \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots F$$

Wenn a unendlich gross und w unendlich klein ist, werden diese Formeln scheinbar unbestimmt, was jedoch aufhört, wenn rt für aw geschrieben wird. Die Einführung derselben Bezeichnungen in die Formeln E verwandelt sie in:

$$\left.\begin{aligned} a_i &= \frac{(4i, a)}{(4i-1, a)} \\ b_i &= \frac{(4i, a)}{(4i+1, a)}\, n_i \\ \beta_i &= \frac{(4i+2, a)}{(4i+1, a)}\, n_i \\ \alpha_i &= \frac{(4i+2, a)}{(4i+3, a)} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots G$$

Durch diese beiden Systeme von Formeln ist Alles gegeben, was man von dem Wege des Strahls, sowohl im Innern des Linsensystems, als ausserhalb desselben, zu wissen wünschen kann. Die Producte $r_i t_i$ und $\varrho_i \tau_i$ sind die Entfernungen von der Axe, in welchen der Strahl die beiden Flächen der $i+1^{\text{ten}}$ Linse trifft, und man erhält, indem man $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$ annimmt, diese Entfernungen für alle Flächen des Systems. Will man nur den Weg des einfallenden Strahls mit seinem Wege nach dem Ausgange aus dem Linsensysteme vergleichen, so hat man nur mit den Ausdrücken von ω_i und α_i zu thun. Aus diesen werde ich jetzt einige Folgerungen ziehen.

4.

Bestimmt man einen Punkt in dem Strahle, nach seinem Durchgange durch die letzte Linsenfläche, durch die von dieser Fläche an gezählte Abscisse ξ und die auf die Axe bezogene Ordinate η, so hat man:

$$\eta = (\alpha_i - \xi)\, \omega_i = \{(4i+2, a) - \xi\,(4i+3, a)\}\, w$$

und wenn man die Ausdrücke

$$(4i+2, a) = a\,(4i+2, 1) + (4i+2, 2)$$
$$(4i+3, a) = a\,(4i+3, 1) + (4i+3, 2)$$

substituirt und sich erinnert, dass $aw = rt$ ist,

$$\eta = \{(4i+2, 1) - \xi\,(4i+3, 1\}\, rt + \{(4i+2, 2) - \xi\,(4i+3, 2)\}\, w \ldots\ldots H$$

Wenn parallele Strahlen einfallen, so ist w für alle gleich, aber t hat für jeden von ihnen einen anderen Werth. Trotz dieser Verschiedenheit gibt es einen Punkt, in welchem alle diese Strahlen nach ihrem Durchgange durch das Linsensystem sich durchkreuzen. Er wird durch die Bedingung bestimmt, dass das in das veränderliche t multiplicirte Glied des Ausdruckes von η verschwinde, wodurch man die beiden Gleichungen

$$0 = (4i+2, 1) - \xi\,(4i+3, 1)$$
$$\eta = \{(4i+2, 2) - \xi\,(4i+3, 2)\}\, w$$

erhält. Man erlangt dadurch die zu dem Vereinigungspunkte paralleler Strahlen gehörigen ξ und η, nämlich:

$$\xi = \frac{(4i+2, 1)}{(4i+3, 1)}$$

$$\eta = \frac{(4i+3, 1)\,(4i+2, 2) - (4i+3, 2)\,(4i+2, 1)}{(4i+3, 1)}\, w.$$

Allein der letzte Ausdruck kann in

$$\eta = \frac{-w}{(4i+3, 1)}$$

vereinfacht werden; denn man hat zwischen den Grössen, welche unter der angeführten Bezeichnung verstanden werden, die bekannte allgemeine Relation:

$$(1, n)\,(2, n-1) - (2, n)\,(1, n-1) =$$
$$= (n, 1)\,(n-1, 2) - (n, 2)\,(n-1, 1) = (-1)^n$$

welche, da der Zähler des Ausdruckes von η dem gegenwärtigen gleich ist, wenn $n = 4i+3$, ihn $= -1$ er-

gibt. Damit der Vereinigungspunkt wirklich, und ausserhalb des Linsensystems vorhanden sei, ist erforderlich, dass ξ einen endlichen und positiven Werth habe.

Zieht man von dem jetzt bestimmten Vereinigungspunkte paralleler Strahlen eine ihnen parallele Linie, so trifft sie die Axe an einem Punkte, dessen Entfernung von der letzten Linsenfläche ich durch γ bezeichnen werde; zur Bestimmung dieses Punktes hat man:

$$\gamma = \xi + \frac{\eta}{w} = \frac{(4i+2,1)-1}{(4i+3,1)} \quad \ldots\ldots\ldots I$$

Dieser Punkt, welcher von w unabhängig ist, ist der optische Mittelpunkt des Linsensystems; der Punkt, wo gerade Linien sich durchkreuzen, welche correspondirende Punkte eines unendlich entfernten Gegenstandes und seines Bildes mit einander verbinden. Allgemein zu reden hat jedes Linsensystem zwei ähnliche Punkte, nämlich einen für jede der beiden Richtungen, in welcher parallele Strahlen in kleinen Winkeln mit der Axe einfallen können. Um die Entfernung c des zweiten dieser Punkte von der ersten Fläche der ersten Linse zu bestimmen, werde ich die Entfernung des Vereinigungspunktes der in der zweiten Richtung einfallenden parallelen Strahlen, von derselben Fläche, durch $-x$, seine Entfernung von der Axe durch y bezeichnen, welche Grössen die den obigen analogen Ausdrücke

$$-x = \frac{(2,4i+3)}{(1,4i+3)}$$

$$y = \frac{-w}{(1,4i+3)}$$

haben, und wodurch man

$$c = x - \frac{y}{w} = \frac{-(2,4i+3)+1}{(1,4i+3)} = \frac{-(4i+3,2)+1}{(4i+3,1)} \quad \ldots\ldots K$$

erhält.

Die Entfernungen dieser beiden optischen Mittelpunkte des Linsensystems von den Vereinigungspunkten paralleler Strahlen, wozu sie gehören, sind:

$$\xi - \gamma = \frac{1}{(4i+3,1)}, \qquad -x+c = \frac{1}{(4i+3,1)},$$

also einander gleich. Ich werde diese gleichen Entfernungen die Brennweite des Linsensystems nennen und sie durch f bezeichnen. Wenn es nur auf die Vergleichung der Wege eines Strahls vor seinem Einfallen und nach seinem Ausgehen ankommt, so ist dazu keine weitere Kenntniss der Construction des Linsensystems erforderlich, als die von f, c, γ. Man hat nämlich (G):

$$\alpha_i = \frac{(4i+2,a)}{(4i+3,a)} = \frac{a(4i+2,1)+(4i+2,2)}{a(4i+3,1)+(4i+3,2)}$$

und

$$(4i+3,1)(4i+2,2) - (4i+3,2)(4i+2,1) = -1.$$

Wenn man $(4i+2,2)$ durch die letzte Gleichung aus der ersten wegschafft, so wird diese:

$$\alpha_i = \frac{(4i+2,1)\{a(4i+3,1)+(4i+3,2)\}-1}{(4i+3,1)\{a(4i+3,1)+(4i+3,2)\}}$$

oder

$$\left\{\alpha_i - \frac{(4i+2,1)}{(4i+3,1)}\right\}\left\{a + \frac{(4i+3,2)}{(4i+3,1)}\right\} = -\frac{1}{(4i+3,1)^2}.$$

Setzt man darin für die von der Construction des Linsensystems abhängigen Grössen ihre Ausdrücke durch f, c, γ, nämlich:

$$\frac{1}{(4i+3,1)} = f$$

$$\frac{(4i+3,2)}{(4i+3,1)} = f - c$$

$$\frac{(4i+2,1)}{(4i+3,1)} = f + \gamma$$

so verwandelt sie sich in

$$(\alpha_i - \gamma - f)(a - c + f) = -ff$$

und wenn man $-ff$ auf beiden Seiten weglässt und durch $f(\alpha_i - \gamma)(a-c)$ dividirt, in

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{c-a} + \frac{1}{\alpha_i - \gamma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots L$$

Diesen schönen Satz hat Herr Professor Möbius gegeben. Seine obige Ableitung zeigt, dass er durch die vollständige Berücksichtigung aller Elemente der Construction des Linsensystems nichts von seiner Einfachheit verliert.

[Die noch folgende Anwendung auf das Königsberger Heliometer findet sich Abh. 71, Bd. II, p. 147.]

[Literatur der Astron. Nachr. über Pendelbewegung, Pendellängen, Maasse: Walbeck, Secundenpendel-Beobb. Kater's und Länge des einfachen Sec.-P. (Bd. 1); Schumacher, über Kater's Reversionsp. und Collimator (4); Clausen, De reductione temporis quo oscillat. pend. absolv. etc., de resistentia aeris quomodo in motibus lentis a celeritate pendet (5); Moll, Vergleichung des Kilogramm mit dem Troy-Gewicht (9); Peters, Disquisit. de motu pend. in aere resist. (12); (Baumann), Copien des preuss. Maasses (15—18); Gambey, über seine Copie der Toise du Pérou (17); Schaub, Beweis der Wirkung der Erdrotat. auf die Schwingungsebene des P. (35); Baeyer, Copien der Bessel'schen Toise, Hansen, Anziehung eines Revolutionsellips. und Wirkung auf Pendelbew. (38); Lehmann, Einfluss der Erdrevol. auf die P.-Bew. (39), merkwürdige Form einer Störung der P.-Beweg. (40); Peters, Länge d. einfachen Sec.-P. für Güldenstein (40), über Pendelbeobb. in Berlin und Altona (76). — Höhenmessungen, terrestr. Refraction: Littrow (Navier), Ausdrücke für die Fehler der Höhenbeobb. durch Ba-

rometer (1); Dulong, neuer barometr. Coeffic., Schumacher, Zusatz zu Bessel's Bemerkungen über die Barom. (zu 243 d. a. Verz). (8); Baeyer, Bestimmung der Höhe von Berlin, Gauss, Coeffic. der terrestr. Refraction, (14); Denzler, über terrestr. Refr. (19); Mädler, Formel für die doppelte Horiz.-Refr. (29); Dippe, Tafel zur Red. der Barom.-Beobb. (zu Gauss's Tafeln) (44); d'Arrest, Problem der kürzesten Dämmerung (46); vgl. auch Literatur über Refraction Bd. I, p. 260. — Wärme: Argelander, Prüfung Bäcker'scher Thermom. (4); Winnerl, Metall-Max. und Min.-Thermom. (7); Koller, Temperat.-Formeln und Beobb. zu Kremsmünster (18); Erman, Ausdehnung von Olivenöl, Kochsalzlösung und Phosphor (23); Secchi, Vertheilung der Wärme auf der ⊙Oberfl. (35); d'Arrest, Ungleichheit der Temper. als Function der ⊙Meridiane und Vertheilung der Wärme auf der ⊙Oberfl. (37); Airy, Ungleichheit der Temper. als Function der ⊙Mer. (39); Saalschütz, Wärmeveränderungen in den höheren Erdschichten (56). — Optik: Schwerd, über dessen Beugungsuntersuchungen (12); Clausen, Beweis der 2 ersten Hauptheoreme der Dioptrik (18); Seidel, zur Theorie d. Fernrohrobjective (zu Abh. 71) (35), zur Dioptrik (37), (43); Oudemans, Bestimmung der Krümmungshalbmesser spiegelnder sphärischer Flächen (54); Listing, merkwürdige Punkte in Linsen u. Linsensystemen (68). — Verschiedenes: Gauss, Berichtigung der Schneiden an Waagen (14); Struve, über die Bestimmung der Erddichtigkeit (22); Mitchell, Geschwindigkeit elektrischer Wellen (30); Schlagintweit, H., über Durchsichtigkeit der Atmosph. und Himmelsfarbe in grösseren Höhen (31); Plana, Densité moyenne d. l. terre (35), Mém. sur la loi d. l. pesanteur (38); Ritter, Lichterscheinung in Göttingen (37).]

VIII. Verschiedenes.

153. Ueber die Sichtbarkeit der kleinen Planeten in Fernröhren verschiedener Oeffnung.*)

(Mon. Corresp. XIV, p. 193. — Aus einem Briefe an Lindenau vom 17. Juli 1806.)

Da die Juno dieses Jahr sehr lichtschwach war, so schien es mir interessant zu wissen, mit wie starken Fernröhren wir sie ferner, wenn sie dem Aphelio näher kommt, aufsuchen müssen. — Wenn ϱ, r die Abstände von Erde und Sonne sind, so verhält sich die Lichtstärke des Planeten wie $\frac{\alpha}{r^2\varrho^2}$, wo α ein vom Durchmesser und der sogenannten Weisse (Albedo) desselben abhängender Coefficient ist; ein Fernrohr von der Oeffnung d zeigt dann den Planeten mit einer Lichtstärke $l = \alpha\beta\frac{d^2}{r^2\varrho^2}$, wo β von dem Verluste abhängt, den das Licht durch Brechung oder Zurückwerfung im Fernrohre erleidet. Zu einer andern Zeit verwandeln sich $l = l' = \alpha\beta\frac{d'^2}{r'^2\varrho'^2}$. Will man nun den Planeten beidemal hell sehen, so wird $l = l'$, oder $d' = d\frac{r'\varrho'}{r\varrho}$. Hat man einmal einen Werth von d bestimmt, für den der Planet verschwindet, so findet man daraus die beständige Grösse $\frac{d}{r\varrho}$, und man kann also immer die Oeffnung d' angeben, die man einem Fernrohre wenigstens geben muss, um den Planeten dadurch sehen zu können. Die folgende kleine Tafel enthält diese Oeffnungen in englischen Zollen ausgedrückt. Die dabei zum Grunde liegende Grösse $\frac{d}{r\varrho}$ wurde mit einem siebenfüssigen Herschel'schen Teleskop 0,31125 Zolle gefunden.

		In der Opposition. E. Z.	In der Quadratur. E. Z.
Juno	im Perihelio	0,610	1,062
	in der mittlern Entfernung	1,380	2,048
	im Aphelio	2,436	3,361

Da diese Tafel auf Beobachtungen beruht, die mit einem Spiegel-Teleskop angestellt wurden, so werden für ein achromatisches Fernrohr die Oeffnungen etwas kleiner ausfallen.

154. Ueber die Figur des Saturns, mit Rücksicht auf die Attraction seiner Ringe.**)

(Mon. Corresp. XV, p. 239.)

Eben jetzt, nachdem Herr Doctor Herschel uns eine empirische Bestimmung der Figur des Saturns gegeben hat, scheint es uns interessant, diese mit derjenigen Figur zu vergleichen, die der Planet haben würde, wenn er Anfangs flüssig, einer Axendrehung und der Attraction seiner Ringe unterworfen gewesen wäre. Wir legen diese Untersuchung hier den Astronomen vor und ausser ihr werden wir noch einen Umstand berühren, der zu einer Beurtheilung der Herschelschen Beobachtung führen kann.

Die Hauptgleichungen dieses Problems, vorzüglich die Entwickelung der Attraction eines Sphäroids in Reihen, liegen, sowie die Fundamente zu allen Untersuchungen, die man in der Folge über die Mechanik des Himmels anstellen wird, in dem unsterblichen, diesem Gegenstande gewidmeten Werke des Herrn de la Place. Zur bessern Uebersicht führen wir hier diese ausserordentlich schönen analytischen Sätze in möglichster Kürze an: wir erlauben uns dabei, ihre Ordnung zuweilen etwas zu verändern, natürlich aus keinem andern Grunde, als weil uns die von uns gewählte Reihenfolge unserm Zwecke angemessener scheint.

Wenn V die Summe aller Theilchen eines Sphäroids,

*) [Aus 7 d. a. Verz. — Br. m. O. I. 41.]

**) [14 d. a. Verz. — Vgl. Abh. 21, Bd. I, p. 259. — Br. m. O. I. 32 (O.), 46. 61 (O.). 109. 174.]

jedes durch seinen Abstand von einem angezogenen Punkte dividirt, bedeutet, so hat man nach dem dritten Buche der Mécanique Céleste (II. Cap. 8. Satz):

$$0 = \left(\frac{d^2V}{da^2}\right) + \left(\frac{d^2V}{db^2}\right) + \left(\frac{d^2V}{dc^2}\right) \quad \ldots\ldots (1)$$

wo a, b, c die die Lage des Punkts bestimmenden Coordinaten sind. Durch eine veränderte Annahme dieser Coordinaten ändert sich auch die Form dieser Gleichung. Es sei der Abstand des angezogenen Punkts vom Anfangspunkte der Coordinaten r; ϑ sei der Winkel, den r mit der Achse der a macht, und ω der Winkel, den eine durch r und die Achse der a gehende Ebene mit einer durch die Achsen der a und b gelegten macht, so verwandelt sich die Gleichung in

$$0 = \left\{\frac{d\left[(1-\mu^2)\left(\frac{dV}{d\mu}\right)\right]}{d\mu}\right\} + \frac{\left(\frac{d^2V}{d\omega^2}\right)}{1-\mu^2} + r\left(\frac{d^2rV}{dr^2}\right) \quad \ldots (2)$$

wo man μ statt $\cos\vartheta$ gesetzt hat.

Liegt der angezogene Punkt ausser dem Sphäroide, so kann man V in eine nach den Potenzen von r fallende Reihe verwandeln, und man kann setzen:

$$V = \frac{U^{(0)}}{r} + \frac{U^{(1)}}{r^2} + \frac{U^{(2)}}{r^3} + \text{etc.} \quad \ldots\ldots (3)$$

Substituirt man diesen Werth von V in die oben gegebene Gleichung (2), so findet man durch Vergleichung der ähnlichen Glieder, dass allgemein $U^{(i)}$ der Gleichung (II. 9)

$$0 = \left\{\frac{d\left[(1-\mu^2)\left(\frac{dU^{(i)}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu}\right\} + \frac{\left(\frac{d^2U^{(i)}}{d\omega^2}\right)}{1-\mu^2} + i(i+1)U^{(i)} \ldots (4)$$

Genüge leisten muss.

Unter der Voraussetzung, dass das Sphäroid sehr wenig von einer Kugel abweicht, kann man die höheren Potenzen dieser Abweichung überall vernachlässigen und hierauf eine sehr beträchtliche Erleichterung und Vereinfachung des Calcüls gründen. Es existirt nämlich unter dieser Voraussetzung eine merkwürdige Gleichung für V. Wenn man den angezogenen Punkt auf der Oberfläche des Sphäroids annimmt und von ihm nach dem Mittelpunkte des Sphäroids eine gerade Linie zieht, so wird man sich eine Kugel denken können, deren Mittelpunkt sich auf dieser Linie befindet, deren Oberfläche den Punkt berührt und deren Halbmesser a von den Dimensionen des Sphäroids nur um Grössen verschieden ist, deren Quadrate und höhere Potenzen man nach der oben gemachten Voraussetzung vernachlässigen kann. Was bei dem Sphäroide V heisst, sei bei der Kugel A, so hat man:

$$V = A + s\int\frac{dm}{f} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

wo f den Abstand des Theilchens dm vom angezogenen Punkte bedeutet.

Man entferne den angezogenen Punkt um dr von den Oberflächen des Sphäroids und der Kugel, so erhält man dadurch die Gleichung (II. 10):

$$-a\left(\frac{dV}{dr}\right) = -a\left(\frac{dA}{dr}\right) - \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}V \quad \ldots (6)$$

Es ist aber bekannt, dass $A = \frac{4\pi a^3}{3r}$, also $-a\left(\frac{dA}{dr}\right) = \frac{4\pi a^4}{3r^2}$ ist; die Gleichung (6) verwandelt sich also in gegenwärtigem Falle, wo der Punkt sich auf der Oberfläche der Kugel befindet, wo man also für seine Entfernung vom Mittelpunkte r ihren Halbmesser anzunehmen hat, in (II. 10)

$$-a\left(\frac{dV}{dr}\right) = \frac{2\pi a^3}{3} + \tfrac{1}{2}V \quad \ldots\ldots (7)$$

Diese Gleichung bietet ein Mittel dar, V ohne irgend eine Integration zu bestimmen. Um dieses zu zeigen, wollen wir

$$r = a(1+\alpha y)$$

setzen, wo α ein beständiger Coefficient von der Ordnung der die kugelförmige Figur des Planeten störenden Kräfte und y eine Function von ϑ und π ist. In dem Reihenwerthe (3) von V ist das erste Glied $\frac{U^{(0)}}{r}$, und wir haben gesehen, dass V von $\frac{4\pi a^3}{3r}$ nur um Grössen von der Ordnung von α abweicht; man kann also setzen:

$$U^{(0)} = \frac{4\pi a^3}{3} + U'^{(0)}$$

wo $U'^{(0)}$ von der Ordnung α ist, und der für $U^{(i)}$ gefundenen Differentialgleichung noch immer Genüge leistet. Auch $U^{(1)}$, $U^{(2)}$ u. s. w. sind von der Ordnung von α, und man hat, wenn man die zweiten und höheren Potenzen von α überall vernachlässigt (II. 11):

$$\tfrac{1}{2}V = \tfrac{2}{3}\pi a^2(1-\alpha y) + \frac{U'^{(0)}}{2a} + \frac{U^{(1)}}{2a^2} + \frac{U^{(2)}}{2a^3} + \text{u. s. w.}$$

$$-a\left(\frac{dV}{dr}\right) = \tfrac{4}{3}\pi a^2(1-2\alpha y) + \frac{U'^{(0)}}{a} + \frac{2U^{(1)}}{a^2} + \frac{3U^{(2)}}{a^3} + \text{u. s. w.}$$

Wenn man diese Werthe in (7) setzt, so hat man:

$$4\alpha\pi a^2 y = \frac{U'^{(0)}}{a} + \frac{3U^{(1)}}{a^2} + \frac{5U^{(2)}}{a^3} + \text{u. s. w.} \quad \ldots (8)$$

so dass man für y eine Reihe von der Form

$$Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + Y^{(3)} \text{ u. s. w.} \quad \ldots\ldots (9)$$

annehmen kann, wo $Y^{(i)}$ der Gleichung (4) Genüge leistet, wenn man darin U in Y verwandelt. Unter $Y^{(i)}$ und $U^{(i)}$ existirt also die allgemeine Gleichung:

$$U^{(i)} = \frac{4\pi\alpha}{2i+1} a^{i+3} Y,$$

woraus V den Werth (II. 11)

$$\frac{4\pi a^3}{3r} + \frac{4\pi\alpha a^3}{r}\left[Y^{(0)} + \frac{a}{3r} Y^{(1)} + \frac{a^3}{5r^2} Y^{(2)} + \text{u. s. w.}\right] \ldots (10)$$

erhält. Man darf also nur den Radius r des Sphäroids durch die Reihe (9) ausdrücken, wo $Y^{(i)}$ der Differentialgleichung entsprechen muss, um unmittelbar V zu erhalten.

Wir dürfen freilich voraussetzen, dass diese La Place'schen Sätze unsern mathematischen Lesern bekannt sind; indess hoffen wir doch, dass man diese kurze Darstellung derselben, die wir der Deutlichkeit schuldig zu sein glaubten, hier nicht ungern sehen wird.

Bekanntlich erfordert das Gleichgewicht einer flüssigen Masse, dass die Summe aller in ein Theilchen ihrer Oberfläche wirkenden Kräfte, jede in das Element ihrer Richtung multiplicirt, einer beständigen Grösse gleich sein muss. Sehr leicht kann man übersehen, dass die Summe der Attractionen, die alle Theilchen des Sphäroids auf einen Punkt der Oberfläche äussern, jede durch das Element ihrer Richtung multiplicirt, $= V$ ist, und ebenso leuchtet es ein, dass dieselbe von den Ringen herrührende Wirkung sich durch eine ähnliche Function, die wir durch V' bezeichnen wollen, ausdrücken lässt. Allein ausser diesen Attractionen wirkt noch auf das Sphäroid die von der Rotation herrührende Centrifugalkraft, die, in das Element ihrer Richtung multiplicirt und integrirt,

$$= \tfrac{1}{2} g r^2 (1-\mu^2)$$

ist, wo g die Mittelpunktsfliehkraft, die der Rotation des Planeten in der Entfernung 1 zugehören würde, bedeutet. Die Bedingung des Gleichgewichts gibt also:

$$\text{Beständ. Grösse} = V + V' + \tfrac{1}{2} g r^2 (1-\mu^2) \ldots (11)$$

Wir vernachlässigen, wie schon gesagt, die Quadrate und Producte der störenden Kräfte, und deshalb ist es uns auch erlaubt, aus der separaten Betrachtung jeder dieser Kräfte eine kleine Vereinfachung zu ziehen. Wir dürfen also einstweilen die Rotation des Planeten ganz bei Seite setzen und gleich zu dem Hauptzwecke unserer Untersuchung, der Wirkung der Ringe, übergehen. Wir wollen ferner voraussetzen, dass die Masse der Ringe in einem Kreise von unendlich kleiner Breite und Dicke vereinigt ist, der mit dem mittlern Halbmesser des Ringes concentrisch um den Planeten beschrieben ist. Den Fehler, den wir geflissentlich hierdurch begehen, werden wir zu einer beträchtlichen Vereinfachung unseres Calcüls benutzen, allein wir werden in der Folge eine Methode geben, wie man diesem Fehler auf eine völlig scharfe Art ausweichen kann.

Nennt man nun den mittlern Halbmesser des Ringes ϱ, so kann man für V' die Reihe

$$S\left[N^{(0)} + N^{(1)}\frac{r}{\varrho} + N^{(2)}\frac{r^2}{\varrho^2} + N^{(3)}\frac{r^3}{\varrho^3} + \text{etc.}\right] \ldots (12)$$

setzen, wo S die Masse des Ringes, und $N^{(i)}$ eine Function von ϑ und ω ist, die ebenso wie $U^{(i)}$ der Differentialgleichung

$$0 = \left\{\frac{d\left[(1-\mu^2)\left(\frac{dN^{(i)}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu}\right\} + \frac{\left(\frac{d^2 N^{(i)}}{d\omega^2}\right)}{1-\mu^2} + i(i+1)N^{(i)} \quad (13)$$

entsprechen muss. Da aber bei der von allen Seiten gleich starken Attraction der Ringe das Sphäroid nothwendig eine durch Rotation einer Curve entstandene Figur haben muss, so kann $N^{(i)}$ kein ω enthalten, und man kann statt der vorigen Differentialgleichung setzen:

$$0 = \frac{d\left[(1-\mu^2)\left(\frac{dN^{(i)}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu} + i(i+1)N^{(i)} \ldots (14)$$

Diese Bemerkung trifft auch allemal, wenn von einem Rotationssphäroide die Rede ist, die Gleichungen (2), (4).

Substituirt man nun in (11) diesen Werth von V' und für V seinen durch (10) ausgedrückten, so hat man:

$$\text{Const.} = \tfrac{4}{3}\pi a + \tfrac{4}{3}\pi\alpha a^2\left(2Y^{(0)} - \tfrac{2}{5}Y^{(1)} - \tfrac{4}{7}Y^{(3)} - \text{etc.}\right)$$
$$+ S\left(N^{(0)} + N^{(1)}\frac{r}{\varrho} + N^{(2)}\frac{r^2}{\varrho^2} + N^{(3)}\frac{r^3}{\varrho^3} + \text{etc.}\right) \ldots (15)$$

Man wird sich erinnern, dass a noch immer unbestimmt ist, und dass man also jeden Werth dafür setzen kann, der der gemachten Bedingung, dass er von den Dimensionen des Sphäroids nur um Grössen von der Ordnung α verschieden sein soll, nicht zuwider ist. Indess sieht man leicht, dass nur ein Werth von a existirt, der in die Function y keine beständige Grösse bringt; allé andern werden ausser a und der Function von μ, die r enthält, noch eine Constante von der Ordnung α hinzufügen. Wir können also a willkürlich annehmen und nachher das Resultat unserer Untersuchung so modificiren, dass y kein von μ unabhängiges Glied enthält. Nach dieser Bemerkung werden wir also

$$\text{Const.} = \tfrac{4}{3}\pi a$$

setzen können, wodurch die Gleichung (15) sich in

$$0 = \frac{8\pi\alpha a^2}{3}\left(Y^{(0)} - \frac{1}{5}Y^{(2)} - \frac{2}{7}Y^{(3)} - \text{etc.}\right)$$
$$+ S\left(N^{(0)} + N^{(1)}\frac{r}{\varrho} + N^{(2)}\frac{r^2}{\varrho^2} + N^{(3)}\frac{r^3}{\varrho^3} + \text{etc.}\right) \ldots (16)$$

verwandelt. Eine Gleichung unter den ähnlichen Gliedern gibt:

$$\alpha Y^{(i)} = \frac{3S}{8\pi} \cdot \frac{2i+1}{i-1} \cdot \frac{a^{i-2}}{\varrho^i} N^{(i)} \ldots\ldots (17)$$

wobei man in den Coefficienten von $N^{(i)}$ a statt r gesetzt hat, welches wegen der Vernachlässigung der Quadrate von α erlaubt ist. Man kann also $a(1+\alpha y)$ durch $N^{(0)}$ u. s. w. ausdrücken, und wir dürfen nur noch eine Methode zu Erfindung dieser Grössen geben. Man hat für V' folgende Gleichung:

$$V' = \frac{S}{2\pi} \int \frac{d\omega}{(r^2+\varrho^2-2r\varrho\cos\omega\sqrt{1-\mu^2})^{\frac{1}{2}}} \ldots (18)$$

das Integral von $\omega = 0$ bis $\omega = 2\pi$ genommen. Die Grösse unter dem Wurzelzeichen ist

$$= \varrho^{-1}\left(1+\frac{r^2}{\varrho^2} - 2\frac{r}{\varrho}\cos\omega\sqrt{1-\mu^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \varrho^{-1}[1-(2\beta\cos\omega\, k - \beta^2)]^{-\frac{1}{2}}$$

wo β und k der Abkürzung wegen gesetzt sind. Wir wollen den x^{ten} Coefficienten eines zur y^{ten} Potenz erhobenen Binomii $P^{(x)}_{(y)}$ nennen, und wie gewöhnlich durch Σ die Summe einer Reihe andeuten, vor deren allgemeinem Gliede dieses Zeichen steht; nach dieser Erklärung haben wir die Irrationalgrösse in (18)

$$= \Sigma P^{(i)}_{(-\frac{1}{2})} (2\beta\cos\omega\, k - \beta^2)^i$$

wo das Summenzeichen sich auf alle ganze positive i erstreckt. Jedes dieser Glieder entwickelt sich in eine Reihe, deren allgemeines Glied

$$= \pm P^{(i)}_{(-\frac{1}{2})} P^{(v)}_{(i)} (2k\cos\omega)^{i-v} \beta^{i+v}.$$

Wenn man nun $i+v = n$ setzt, so hat man die Summe aller in $\beta^{(n)}$ multiplicirter Glieder, oder

$$N^{(n)} = \frac{1}{\varrho} \Sigma \pm P^{(i)}_{(-\frac{1}{2})} P^{(n-1)}_{(i)} (2k\cos\omega)^{2i-n}$$

wo $\pm$ gilt, wenn $n-i$ $\left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right\}$ ist. $(\cos\omega)^{2i-n}$ entwickelt sich in eine Reihe, die nach den Cosinussen der Vielfachen von ω fortgeht und die dann ein constantes oder in $\cos 0\omega$ multiplicirtes Glied enthält, wenn n gerade ist. Integrirt man die so entwickelten Reihen von $\omega = 0$ bis $\omega = 2\pi$, so verschwinden alle Glieder ausser den Constanten, und damit verschwinden auch alle $N^{(i)}$, wo i ungerade ist; wir dürfen also nur die von ω unabhängigen Theile betrachten. Man weiss, dass der constante Theil von $(\cos\omega 2k)^{2i-n}$

$$= k^{2i-n} P^{(i-\frac{1}{2}n)}_{(2i-n)}$$

ist; daher ist aus (18) und (19):

$$SN^{(n)} = \frac{S}{\varrho} \Sigma \pm P^{(i)}_{(-\frac{1}{2})} P^{(n-i)}_{(i)} P^{(i-\frac{1}{2}n)}_{(2i-n)} k^{2i-n}$$

und aus der Verbindung dieses Ausdrucks mit (17):

$$a\alpha Y^{(2)} = \frac{3S}{8\pi a\varrho} \Sigma \pm \frac{2n+1}{n-1} P^{(i)}_{(-\frac{1}{2})} P^{(n-i)}_{(i)} \times$$

$$\times P^{(i-\frac{1}{2}n)}_{(2i-n)} k^{2i-n} \beta^n \ldots\ldots\ldots (20)$$

Es würde eben so mühsam als wenig zweckmässig sein, wenn man nach diesen Reihen die wirkliche Figur des Planeten berechnen wollte. Wir werden deshalb diesen Ausdruck näher untersuchen und daraus eine sehr bequem zum Zwecke führende Methode ableiten. Wir setzen $2i-n = m$ und eliminiren dadurch i, so ist der Coefficient von k^m, der aus der Entwickelung von $a\alpha y$ entsteht, aus (20)

$$= \frac{3S}{8\pi a\varrho} \Sigma \pm \frac{2n+1}{n-1} P^{\left(\frac{n+m}{2}\right)}_{(-\frac{1}{2})} P^{\left(\frac{n-m}{2}\right)}_{\left(\frac{n+m}{2}\right)} P^{(\frac{1}{2}m)}_{(m)} \beta^n$$

wo das Summenzeichen sich auf alle gerade positive n bezieht und wo $\pm$ für ein $\left\{\begin{matrix}\text{gerades}\\ \text{ungerades}\end{matrix}\right\}$ $\frac{1}{2}(n-m)$ gilt. Auch diese Reihen würden noch sehr mühsam zu entwickeln sein, und für grosse m würden sie nicht mehr convergiren; wir suchten also ihre Summe in endlichen Ausdrücken auf, und dazu benutzten wir folgende Mittel. Man hat unter den Binomialcoefficienten die Gleichung:

$$P^{\left(\frac{n+m}{2}\right)}_{(-\frac{1}{2})} P^{\left(\frac{n-m}{2}\right)}_{\left(\frac{n+m}{2}\right)} = P^{(m)}_{(-\frac{1}{2})} P^{\left(\frac{n-m}{2}\right)}_{(-m-\frac{1}{2})}$$

welcher Lehrsatz sich aus den bekannten Eigenschaften des Binomii leicht beweisen lässt. Nennt man nun den Coefficienten von $k^{(m)}$, $L^{(m)}$, so hat man

$$L^{(m)} = \frac{3S}{8\pi a\varrho} P^{(\frac{1}{2}m)}_{(m)} P^{(m)}_{(-\frac{1}{2})} \Sigma \pm \frac{2n+1}{n-1} P^{\left(\frac{n-m}{2}\right)}_{(-m-\frac{1}{2})} \beta^n = \frac{3S}{8\pi a\varrho} P^{(\frac{1}{2}m)}_{(m)} P^{(m)}_{(-\frac{1}{2})} \Sigma \left(\pm 2 P^{\left(\frac{n-m}{2}\right)}_{(-m-\frac{1}{2})} \beta^n \pm \frac{3}{n-1} P^{\left(\frac{n-m}{2}\right)}_{(-m-\frac{1}{2})} \beta^n\right)$$

Man übersieht leicht, dass man hat:

$$\Sigma \pm 2 P^{\left(\frac{n-m}{2}\right)}_{(-m-\frac{1}{2})} \beta^n = \frac{2\beta^m}{(1+\beta^2)^{m+\frac{1}{2}}}$$

$$\Sigma \pm \frac{3}{n-1} P^{\left(\frac{n-m}{2}\right)}_{(-m-\frac{1}{2})} \beta^n = 3\beta \int \frac{\beta^{m-2} d\beta}{(1+\beta^2)^{m+\frac{1}{2}}}$$

Wenn man also statt β wieder $\frac{a}{\varrho}$ setzt, so ist:

$$L^{(m)} = \frac{3S}{8\pi a\varrho} P^{(\frac{1}{2}m)}_{(m)} P^{(m)}_{(-\frac{1}{2})} \left[\frac{2\left(\frac{a}{\varrho}\right)^m}{\left[1+\left(\frac{a}{\varrho}\right)^2\right]^{m+\frac{1}{2}}} + 3\left(\frac{a}{\varrho}\right) \int \frac{\left(\frac{a}{\varrho}\right)^{m-2} d\left(\frac{a}{\varrho}\right)}{\left[1+\left(\frac{a}{\varrho}\right)^2\right]^{m+\frac{1}{2}}}\right] \ldots\ldots\ldots (21)$$

Der zweite Theil dieses Coefficienten lässt sich immer durch eine Reihe endlicher Functionen von $\frac{a}{\varrho}$ ausdrücken.

Wenn man $\frac{a}{\varrho} = \operatorname{tg} \lambda$ setzt, so ist er

$$= \frac{3}{\cos\lambda}\left(\frac{\sin\lambda^m}{m-1} - \frac{m}{2}\cdot\frac{\sin\lambda^{m+2}}{m+1} + \frac{m.m-2}{2.4}\cdot\frac{\sin\lambda^{m+4}}{m+3} + \text{etc.}\right)$$

während der erste Theil $= 2\sin\lambda^m\cos\lambda^{m+1}$ ist. Man hat also aus (21):

$$r - r' = \frac{3S}{8\pi a^2}\cdot\frac{a}{\varrho}\left\{\begin{array}{l}\left(2\cos\lambda - \frac{3}{\cos\lambda}\right) + (1-\mu^2)\,\frac{2}{1}\cdot\frac{1.3}{2.4}\left(2\sin\lambda^2\cos\lambda^3 + \frac{3}{1}\cdot\frac{\sin\lambda^2}{\cos\lambda} - \frac{3}{3}\cdot\frac{\sin\lambda^4}{\cos\lambda}\right) \\ \qquad + (1-\mu^2)^2\frac{4.3}{1.2}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\left(2\sin\lambda^4\cos\lambda^5 + \frac{3}{3}\cdot\frac{\sin\lambda^4}{\cos\lambda} - \frac{3.4}{4.5}\cdot\frac{\sin\lambda^6}{\cos\lambda} + \frac{3}{7}\cdot\frac{\sin\lambda^8}{\cos\lambda}\right) \\ \qquad + (1-\mu^2)^3\frac{6.5.4}{1.2.3}\cdot\frac{1.3....11}{2.4....12}\left(2\sin\lambda^6\cos\lambda^7 + \frac{3}{5}\cdot\frac{\sin\lambda^6}{\cos\lambda} - \frac{3.6}{7.2}\cdot\frac{\sin\lambda^8}{\cos\lambda}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{3}{9}\cdot\frac{6.4}{2.4}\cdot\frac{\sin\lambda^{10}}{\cos\lambda} - \frac{3}{11}\cdot\frac{\sin\lambda^{12}}{\cos\lambda}\right)\end{array}\right\}$$

Hier ist r' der Radius, der ohne die Attraction der Ringe stattfinden würde. Was das nicht in $1-\mu^2$ multiplicirte Glied und die nicht von μ abhängenden Theile der übrigen bedeuten, das kann man aus dem oben über die willkürliche Annahme von a Gesagten abnehmen.

Bei diesem Resultate liegt die Voraussetzung zum Grunde, dass die Dimensionen des Ringes klein sind und dass man die ganze Masse als in seiner Mitte vereinigt annehmen kann. Will man sich diese Voraussetzung nicht erlauben, so kann man den Ring als in unendlich viele von der Breite $d\varrho$ getheilt annehmen, und dann wird man den berichtigten Werth von $r - r'$

$$= \Sigma\int L^{(m)}\,d\varrho\,(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m}$$

haben, wo das Integral zwischen beiden Grenzen von ϱ genommen werden muss. Auch dieses Integral kann man ohne Schwierigkeit erhalten, indess werden die Glieder der Reihe dadurch mehr zusammengesetzt, und die wirkliche Entwickelung möchte um so viel weniger der Mühe werth sein, da es den obigen Werth von $r - r'$ nur um Grössen von der Ordnung der dritten Potenz der Breite des Ringes ändert. Auf die Dicke der Ringe, von der wir nur wissen, dass sie ausserordentlich klein ist, können wir aus dieser Ursache keine Rücksicht nehmen.

Um den Werth von $r - r'$ in Zahlen zu bestimmen, setzen wir $\frac{a}{\varrho} = \frac{1}{2}$, wie es die neuesten und besten Beobachtungen geben. Daraus findet man, wenn man den Theil, der nicht in $1-\mu^2$ multiplicirt, also mit in a begriffen ist, vernachlässigt, den Ueberschuss der Radien über die in der elliptischen Hypothese stattfindenden

$$= 0{,}1615\,S\sin\vartheta^2 + 0{,}0078\,S\sin\vartheta^4 + 0{,}0034\,S\sin\vartheta^6 + 0{,}0015\,S\sin\vartheta^8 + \text{u. s. w.}$$

Es folgt aus diesem Resultate, dass die Glieder, die die Attraction der Ringe den Radien hinzusetzt, die elliptische Figur des Planeten nicht merklich ändern, indem der elliptische Theil von r auch sehr nahe dem $\sin\vartheta^2$ proportional ist. Nur die sehr kleinen in höhere Potenzen von $\sin\vartheta$ multiplicirten Glieder bringen eine Störung der elliptischen Figur hervor; indess sind diese Glieder so unbedeutend und kommen den Werthen, die sie in einer reinen Ellipse haben müssten, so nahe, dass es nie möglich sein wird, ihren Einfluss zu bemerken.

Die Herschel'sche Beobachtung ist also mit unserer Rechnung unverträglich, und die Theorie gibt nicht den leisesten Wink zu ihrer Bestätigung. Nichtsdestoweniger lässt sich die absolute Möglichkeit der beobachteten Figur nicht leugnen, denn es ist nicht bewiesen, dass Saturn anfangs flüssig war; aber wenn er es war, dann kann er auch keine andere, als eine sehr nahe elliptische Figur haben.

Ein Umstand, der gewiss jedem unserer Leser aufgefallen ist, ist der, dass Herrn Dr. Herschel's Beobachtungen über diesen Gegenstand nicht in die Zeit fallen, wo eine solche Abweichung am vortheilhaftesten unterschieden werden konnte. Wenn nämlich die Ebene des Saturn-Aequators durch die Erde geht, so muss jede Abweichung von der Kugelgestalt in ihrer vollen Grösse erscheinen, statt dass sie in jeder andern Lage von den übrigen Theilen des Sphäroids etwas verdeckt wird. Es bietet sich uns also bei dieser Gelegenheit die Aufgabe dar, aus der gesehenen Figur eines Körpers seine wirklichen Dimensionen zu bestimmen. Begreiflich ist die Auflösung der umgekehrten Aufgabe immer möglich, die der von uns betrachteten aber nur in gewissen Fällen, auf die wir nachher zurückkommen werden. Wir werden hier der Vollständigkeit halber beide Aufgaben auflösen.

Man denke von dem als unendlich entfernt angenommenen Auge des Beobachters nach dem Mittelpunkte

des Körpers eine Gesichtslinie gezogen, so wird die gesehene Figur des Körpers seine orthographische Projection auf eine dieser Gesichtslinie senkrechte Ebene sein. Die Radien des Körpers nenne man r, ihre Projection r', den Winkel, den sie mit der Polarachse machen ϑ, diesen Winkel in der Projection ϑ', die Neigung der Gesichtslinie gegen die Polarachse $90^0 - \mu$, endlich die Winkel zwischen den Radien und der Gesichtslinie b; dann hat man:

$$r' = r \sin b.$$

Die Bedingung, dass man den Umkreis der Projection bestimmen will, oder dass r' für jedes ϑ' ein Maximum sein soll, gibt:

$$0 = \left(\frac{dr'}{db}\right)$$

Diese beiden Gleichungen enthalten die ganze Theorie der Aufgabe. Die zweite gibt

$$\left(\frac{dr}{db}\right) = -\operatorname{cotg} b \,.\, r.$$

Setzt man nun statt r seinen in ϑ ausgedrückten Werth, und statt

$$\cos\vartheta = \cos\vartheta' \cos\mu \sin b - \sin\mu \cos b,$$

so kann man b eliminiren und r' durch eine Function von ϑ' ausdrücken. So findet man z. B., dass die Projection eines Rotations-Ellipsoids, dessen Achsen a und $a\sqrt{1-ee}$ sind, eine mit den Achsen a und $a\sqrt{1-ee\cos\mu^2}$ beschriebene Ellipse ist [vgl. auch Abh. 51 § 2].

Nicht immer ist, wie wir schon oben bemerkt haben, die Auflösung der andern Aufgabe möglich, und ausser der Projection des Körpers muss noch die Figur ähnlich liegender Durchschnitte derselben gegeben sein. Ist der Körper durch Rotation entstanden, so sind die Durchschnitte senkrecht auf die Rotationsachse Ellipsen, deren Achsen sich wie die Einheit zum Sinus des Neigungswinkels ihrer Ebenen gegen die Gesichtslinie verhalten, oder wie $1 : \sin\mu$. Diesen Fall wollen wir hier betrachten.

Wenn man den Körper durch eine Ebene schneidet, die durch die Rotationsachse und die Gesichtslinie geht, so wird der Durchschnitt sich als eine gerade Linie darstellen. Ein senkrecht auf diesen, auch durch die Polarachse geführter Durchschnitt wird als die unter dem Winkel $90^0 - \mu$ gesehene Figur eines Meridians erscheinen, d. i. wenn die Abscissen und Ordinaten des Meridians x, y sind, so werden sie in der gesehenen Figur x und $y\cos\mu$ sein. In dieser Curve werden die Scheitel der oben beschriebenen Ellipsen liegen und ihre grossen Achsen werden senkrecht auf die Polarachse stehen. Beschreibt man nun für alle y von 0 bis an den Pol des Sphäroids diese Ellipsen, so wird man durch die äussersten Punkte derselben eine Curve ziehen können, die keine andere sein wird, als die Projection des Sphäroids. Der Umstand, dass jede dieser Ellipsen die Curve berührt, gibt die Gleichung:

$$\sin\mu\,(x^2 - x'^2)^{\frac{1}{2}} = y' - y\cos\mu$$

wo x', y' den Berührungspunkt bestimmen. Durch partielle Differentiale, oder auch durch die Bedingung, dass Tangenten an den Berührungspunkt bei beiden Curven eine gleiche Lage haben, leitet man leicht die folgenden Gleichungen her:

$$-x' \sin\mu \left(\frac{dx'}{dy'}\right) = \sqrt{x^2 - x'^2}$$

$$-x' \sin\mu^2 \left(\frac{dx'}{dy'}\right) = y' - y\cos\mu$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann man x' und y' eliminiren, und man erhält so die gesuchte Relation zwischen x und y.

Wendet man diese Auflösung wieder auf den Körper an, dessen Projection eine Ellipse mit den Achsen a und $a\sqrt{1-ee}$ ist, so findet man für den Körper ein Ellipsoid mit den Achsen a und $a\sqrt{1-\frac{ee}{\cos\mu^2}}$, welches mit dem vorigen Resultate harmonirt. Diese Auflösung hat den Vortheil, dass sie auch dann, wenn die Gleichung der Projection sehr verwickelt ist, mit Nutzen angewandt werden kann; man kann nämlich in solchen Fällen für ein bestimmtes ϑ' und r' die zugehörigen ϑ und r berechnen, ohne dabei auf eine quadratische oder höhere Gleichung zu stossen; auf diese Weise kann man in der Figur der Meridiane des Körpers so viele Punkte bestimmen, als man will.

Um diese Auflösung auf die von HERSCHEL beobachtete Figur anzuwenden, ist es erforderlich, erst eine Gleichung zu suchen, die dieser Figur so gut wie möglich entspricht. Wir haben:

$$r' = 32 + \left[\alpha + \beta\left(2 - \frac{\vartheta'}{45^0}\right)^m\right] \cdot \left(\frac{\vartheta}{45^0}\right)^m$$

gefunden, wo die drei gemessenen Radien und die Bedingung, dass das Maximum von r' für $\vartheta' = 46^0\,40'$ stattfinden soll,

$$\alpha = 0{,}250843$$
$$\beta = 3{,}732578$$
$$m = 3{,}58016$$

geben. Diese Gleichung leistet der Herschel'schen Zeichnung für alle Werthe von ϑ' unter 65^0 sehr genau Genüge; um das dem Aequator näher liegende Stück, das von der Projection kaum verschieden sein kann, bekümmerten wir uns um so weniger, da es die Gleichung

noch mehr complicirt haben würde. Bei der Herschelschen Beobachtung war $90^0 - \mu = 13^0\,44'$; dieses und die obige Gleichung gab uns folgende Tafel, aus der man die Gestalt der Saturns-Meridiane beurtheilen kann, die dann stattfinden muss, wenn die Herschel'sche Zeichnung richtig ist.

ϑ'	r'	Correspondirendes ϑ	r
90°	35,000	90° 0′	35,000
63	35,489	63 30	35,498
54	35,707	54 45	35,721
45	35,983	46 47	35,985
36	35,338	40 7	35,447
27	34,040	36 14	34,641
18	32,765	33 1	33,777
9	32,097	20 57	32,232
0	32,000	13 14	32,000

Man sieht, dass die Figur des Planeten von ihrer Projection am meisten abweicht, wenn ϑ etwa 33° ist, und dass an dieser Stelle die Radien in der Projection etwa $\frac{1}{36}$ grösser sind, als in der Figur selbst. Man müsste also die Herschel'sche Figur, wenn sie wirklich existirte, noch viel augenfälliger sehen, wenn die Erde in der Ebene des Saturns-Aequators ist.

Sehr wichtige Zweifel gegen die Herschel'sche Beobachtung gibt also der Umstand, dass nie ein Astronom diese Eigenthümlichkeit des Planeten bemerkte. Mit den vortrefflichsten Teleskopen versehen, mit dem bewunderungswürdigsten Beobachtungs-Talente ausgerüstet, hat Herr Justizrath SCHRÖTER nie eine Spur einer Erscheinung, wie sie Herr Dr. HERSCHEL in den philosoph. Transactionen 1805 beschreibt und wovon man in dem Berliner astron. Jahrbuche 1809, S. 197 einen Auszug nebst einer Abbildung findet, wahrgenommen, und selbst nach erhaltener Nachricht von der Herschelschen Beobachtung konnte durch einen neuen sehr vorzüglichen 15füssigen Reflector nichts davon unterschieden werden.

Wir überlassen es unsern Lesern, aus den hier angeführten Gründen den Schluss zu ziehen, ob man die Herschel'sche Beobachtung als in der Wirklichkeit begründet, oder als eine optische Täuschung ansehen kann; indess gestehen wir, dass uns diese letztere Meinung die wahrscheinlichere zu sein scheint.

154 b. Ueber die Figur des Saturnschattens.

Für die Figur des Saturnschattens, wie er von der Erde erscheint, findet BESSEL die Gleichung (Briefw. mit OLBERS I. 109):

$$r = a\sqrt{\frac{1+(1-ee)\operatorname{cotg}\mu'^2}{(1+\operatorname{cotg}\mu^2\cos v^2)\{1+(1-ee)\operatorname{cotg}\mu'^2\cos(\varphi+L'-L)^2\}}}$$

wo v (von Nord nach Ost gezählt) der Winkel zwischen der kleinen Achse des Rings und dem den Umkreis des Schattens bestimmenden Radius r; μ und μ' Breite δ und $\odot$ über der Ringebene; L und L' Länge δ und $\odot$ auf dem Ringe gezählt; e die Excentricität des Planeten; a sein Aequatorhalbmesser; endlich $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{cotg} v}{\sin\mu}$.

155. Ueber den Sonnen- und Mond-Durchmesser.*)

(Monatl. Corresp. XX, p. 83. — Aus einem Briefe an LINDENAU vom 12. Juli 1809.)

. . . Sonderbar und merkwürdig sind die von Ihnen bemerkten Anomalien im Sonnendurchmesser, und sinnreich ist die Erklärung, die Sie von der periodischen Ungleichheit geben.**) Offenbar verdient wohl die Bestimmung der Sonnendurchmesser den Vorzug, die sich auf Messungen der horizontalen und verticalen Halbmesser gründet, denn bei der andern Methode stellt sich der Unterschied nie ganz dar, wird also durch Beobachtungsfehler weit mehr afficirt; ich würde mich also an das Achsenverhältniss $1 : 1 + \frac{1}{210}$ halten, indem das von $1 : 1 + \frac{1}{140}$ die Verticaldurchmesser gegen 14″ grösser geben würde als die horizontalen; dagegen würde aus der ersten Bestimmung nur eine periodische Ungleichheit von 0″,52 folgen, welche freilich nicht so gross ist als die berechnete, aber doch wahrscheinlich keine grössern Fehler übrig lässt, als die in den Beobachtungen übrig bleibende Unsicherheit. Man sieht aus dieser mühsamen Untersuchung, was dazu gehört, wenn man die Genauigkeit von einer Secunde erreichen will; — eine Erfahrung, die meine Rechnungen über BRADLEY's Beobachtungen auch bestätigen. Ehe ich Ihre Erklärung der periodischen Ungleichheiten empfing, dachte ich an etwas Anderes, welches auch eine Ungleichheit im scheinbaren Sonnendurchmesser erzeugen kann. Die Fäden im Passageninstrument sind unbeweglich und in einem Punkte befindlich, wo entfernte Gegenstände sich deutlich abbilden; allein das Rohr verändert seine Länge wegen Wärme und Kälte, und es leuchtet ein, dass man Fäden und Sonne nur dann

*) [Aus 42 d. a. Verz. — Br. m. O. I. 199 (O.), 209 fl., II. 58, 167.]

**) [Monatl. Corresp. XIX, p. 529 fl.]

zugleich deutlich sehen kann, wenn die Temperatur so ist, wie sie bei der Berichtigung des Fadennetzes war. Für alle andere Temperaturen wird der Beobachter, wenn er das Augenglas entweder gar nicht verrückt, oder so, dass die Fäden deutlich erscheinen, die Sonne undeutlich sehen, folglich ihren Durchmesser anders finden, als er wirklich ist (ob zu gross oder zu klein, müsste wohl auf eine andere Art entschieden werden). Wäre nun die Berichtigung des Instrumentes bei einer mittlern Temperatur vorgenommen, so würde der Sonnendurchmesser zwei Maxima und zwei Minima haben, die ohngefähr in die Zeit der Nachtgleichen und Sonnenwenden fallen würden, weil in diesen der Unterschied von der mittlern Temperatur etwa sein Maximum erreicht. Mir scheint diese Erklärungsart indess keinen andern Werth zu haben, als den, dass sie uns über die noch übrig bleibenden Unregelmässigkeiten und Abweichungen von Ihrer Theorie beruhigen kann. Man wird also auch Passageninstrumente mit Compensation verfertigen müssen. —

Eine ähnliche Arbeit für die Bestimmung des Mondhalbmessers wäre freilich auch verdienstlich, allein sie ist mit grossen Schwierigkeiten verknüpft und wird eben so viel Arbeit als die des Sonnendurchmessers erfordern. So sinnreich die Idee*) mit der Beobachtung eines in der Mitte gelegenen Mondfleckens ist, so glaube ich doch, dass man selbst für einen solchen die Librationen nicht genau genug berechnen kann. Wenn sich auch die von der ungleichen Bewegung des Mondes herrührende Libration bestimmen lässt, so zweifle ich doch, ob man die von der Ungleichheit der Rotationsbewegung des Mondes herrührende so genau als erforderlich angeben kann.

In den Bradley'schen Beobachtungen kommen häufig Angaben für die Culminationszeit oder Zenithdistanz des Mondcentrums vor, die gewöhnlich sehr genau sind und mir lange ein Räthsel waren; indessen leitete mich einiges Nachdenken auf die Art, wie BRADLEY diese Beobachtungen machte. Er brachte nämlich ohne Zweifel den einen Mondrand an den Horizontalfaden, so dass ein sehr kleines Segment darüber hervorblickte. Wurde dies vom Meridianfaden bisectirt, so war das Centrum des Mondes an diesem Faden, vorausgesetzt, dass beide Fäden sich genau in rechten Winkeln durchschnitten. So offenbar der Grund hiervon am Tage liegt, so ist es doch wahr, dass ich ihn nicht gleich Anfangs fand.**) Ob diese Methode so viel Genauigkeit gewährt, als zur Bestimmung des Halbmessers erforderlich ist, kann ich nicht sagen; allein oft habe ich so angestellte Beobachtungen gefunden, die vortrefflich harmonirten.

*) Diese Stelle bezieht sich auf eine Idee, die ich Hrn. BESSEL vor einiger Zeit in einem Briefe mittheilte, den Monddurchmesser eben so wie den der Sonne durch die Zeit und das Passageninstrument zu bestimmen. Die Art, wie ich dies bewerkstelligen wollte und zum Theil auch gethan habe, ging dahin, zu correspondirenden Epochen der Mondlunationen die Differenz in AR. eines in der Mitte liegenden Mondfleckens mit dem erleuchteten Mondrand zu beobachten. Würden dann mehrere solche Beobachtungen mit einander verbunden, so könnte daraus mit Anbringung aller erforderlichen Correctionen der Horizontalhalbmesser des Mondes erhalten werden. Dass die Beobachtungsart sehr gut und mit Genauigkeit ausführbar ist, kann ich aus Erfahrung behaupten, allein leider ist dies nicht so mit den anzuwendenden Correctionen der Fall, wo die oben von Hrn. BESSEL geäusserte Vermuthung ganz gegründet ist. Denn da die eine Art der Schwankung des Mondes physisch oder wirklich eine Ungleichförmigkeit der Rotation ist, so kommen hierbei Elemente ins Spiel, mit denen wir noch zu wenig bekannt sind, als dass man irgend eine genaue Bestimmung davon geben könnte. Abgesehen also, dass die hier zu berechnenden Correctionen sehr mühsam und schwierig sein würden, so würden sie auch noch ausserdem immer unsicher bleiben, und beides hat mich diesen Versuch, den Mondhalbmesser zu bestimmen, aufgeben lassen.

v. LINDENAU.

**) Astron. Obs. by N. MASKELYNE. Vol. I. Preface p. VII.

156. Zur Integration der Gleichung für die Fallzeit. ***)

(Monatl. Corresp. XXIV, p. 177. — Aus einem Briefe an LINDENAU vom 30. Juni 1811.)

. . . Die Integration der Gleichung für die Zeit des geradlinigen, sowie des elliptischen Falls eines Körpers von irgend einer Höhe R bis auf die Erdoberfläche ist sehr leicht, wenn man dabei den Widerstand der Luft, die elliptische Gestalt der Erde und fremde Störungen vernachlässigt, so wie es bei der Aufgabe, von der hier die Rede ist, geschehen kann.†) Nennt man den Erdhalbmesser a, die Fallhöhe in 1 Secunde g, den Abstand eines Punktes in der, der Kürze wegen geradlinig angenommenen, Bahn des Körpers vom Erdmittelpunkte r, so hat man bekanntlich

***) [Aus Nr. 66 d. a. Verz.]

†) Die Stelle bezieht sich auf COSSALI's Untersuchungen über den Fall eines Körpers vom Mond auf die Erde; vgl. Monatl. Corresp. XXII, p. 97.

$$\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{2ga^2}{r^2} = 0.$$

Ist nun die Geschwindigkeit in 1 Secunde v, so ist $vdt = -dr$, und hiermit

$$v^2 = c + \frac{4ga^2}{r}$$

oder wenn die Bewegung in R anfängt:

$$v^2 = 4ga^2\left\{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right\};$$

da aber

$$dt = -\frac{dr}{v} = \frac{-dr}{\sqrt{4ga^2}\left\{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

so ist, wenn man der Kürze wegen $\frac{r}{R} = \sin\psi^2$ setzt,

$$-dt = \frac{2R^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{4ga^2}} \sin\psi^2 d\psi$$

oder

$$T - t = \frac{R^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{4ga^2}} \{\psi - \tfrac{1}{2}\sin 2\psi\}.$$

Nimmt man beide Integrale bis zu $r = a$, so hat man $\frac{a}{R} = \sin\psi^1$ und endlich

die Geschwindigkeit $= \cos\psi^1\sqrt{4ag}$

die Fallzeit $= \frac{R^{\frac{3}{2}}}{2a\sqrt{g}}\{\pi - 2\psi^1 + \sin 2\psi^1\}$.

Indessen hat Cossali, wie ich bei einer nochmaligen Ansicht bemerke, die Störung des Falls durch den Mond mit in Rechnung gezogen und da ist es denn allerdings unmöglich, die Zeit durch ein endliches Integral zu erhalten. Die Reihen, die man dafür geben kann, erhalten, wie es mir scheint, eine ziemlich geschmeidige Form, deren Entwickelung aber kaum der Mühe werth sein möchte; sonst würde es wohl bequem sein, das Integral in mehreren Portionen zu suchen, weil man dadurch eine schnellere Convergenz erhält.

---

157. Kurze Beschreibung der Königsberger Sternwarte.*)

(Monatl. Corresp. XXVIII, p. 475. — Aus einem Briefe an Lindenau vom 22. Nov. 1813)

. . . . Da Sie ohne Zweifel lebhaften Antheil nehmen an den neuen Aussichten, die durch die hiesige Sternwarte der Astronomie eröffnet sind, und an dem Glücke, welches ich habe, indem ich einem so herrlichen, ganz nach meinen Wünschen eingerichteten, Institute vorstehe: so beschreibe ich Ihnen den neuen Uranien-Tempel etwas genauer, obgleich nicht im Einzelnen. — Die höchste Stelle des Königsberger Walles, an der Nordwestseite der Stadt, eine etwa 60 Fuss über dem Pregel erhabene Anhöhe, wurde zum Bau der Sternwarte ausgewählt, indem die schöne Aussicht, die man von diesem Punkte hat, ihn vorzüglich dem Zwecke aneignete; in der That ist der Horizont fast allenthalben ganz frei, und die wenigen über ihn merklich hervorragenden Thürme und Gebäude sind zu entfernt, um als wesentliche Hindernisse der Aussicht betrachtet werden zu können. Wenige Sternwarten an ebener Erde besitzen einen so freien Horizont, und dabei eine so schöne Aussicht in die sie umgebende Gegend, als die hiesige. — Das Gebäude ist von dem verdienstvollen und als Erbauer des hiesigen Schauspielhauses u. s. w. rühmlichst bekannten Regierungsrathe Mueller I. aufgeführt, und hat folgende Einrichtung, die ich Ihnen etwas speciell angebe, damit Sie sich in Gedanken leichter zu mir versetzen können. Der Haupteingang ist gegen Osten: rechts am Vorhause ist mein Entréezimmer, gegen Osten und Süden gelegen; an dieses stösst mein gleichfalls südliches Arbeitszimmer, welches ein Cabinet zum Schlafen und zur Aufbewahrung von Büchern neben sich hat. Auf der Nordseite des Hauses ist ein Zimmer für den Aufwärter und der Hörsaal. In der obern Etage sind Zimmer für die Familie des Astronomen, und in dem Souterrain befindet sich alles, was zum öconomischen Bedarf gehört. Sowohl mein Arbeitszimmer, als das Auditorium, haben unmittelbare Eingänge in zwei zur Sternwarte gehörige Säle, deren einer auf der Südseite das Wohngebäude so weit überflügelt, dass man aus ihm die südliche Hälfte des Himmels, und noch ein ansehnliches Stück mehr, ganz übersehen kann; der Saal auf der Nordseite ist symmetrisch mit diesem; beide zusammengenommen haben also freie Aussicht nach allen Seiten, und deshalb sind sie für die beweglichen Instrumente bestimmt. Ihre Höhe und Grösse, die Höhe der Fenster u. s. w. sind übrigens so eingerichtet, dass man selbst grössere Fernröhre ohne Unbequemlichkeit gebrauchen kann; durch quadratische Dachklappen ist für die Gegend des Zeniths gesorgt. Aus beiden Sälen geht man in einen dritten an der Westseite des Ganzen, der für die Meridian-Instrumente bestimmt und deshalb zweimal durchschnitten ist. Das ganze Gebäude hat

*) [Aus 92 d. a. Verz. — Etwas ausführlicher (mit Grundriss) in Königsb. Beobb. 1. Abth. p. I; eine kurze Beschreibung auch in: Beiträge z. Kunde Preussens VI. Bd. p. 367 (177 d. a. Verz.). — Br. m. O. I. 248, 252 fl., 282, 306, 352, 360.]

demnach die Form eines Kreuzes. — Der Saal für die festen Instrumente enthält zwischen zwei prächtigen Granitpfeilern das vierfüssige Mittagsfernrohr von DOLLOND, ein herrliches Instrument, mit Allem versehen, was die höchste Subtilität in die Beobachtungen bringen kann; — auf einem Granit-Cylinder den 25zolligen Cary'schen Kreis, ein Meisterwerk, dessen Schönheit sowohl in seiner soliden Construction, als in der Theilung zu suchen ist, und welches meine Erwartung bei näherer Untersuchung weit übertroffen hat. Dieses Instrument ist mit allem, was der Beobachter wünschen kann, versehen; mit den äusseren Mikrometern beobachtet man mit Sicherheit einzelne Secunden. Dieser Kreis scheint mir ganz RAMSDEN'S Einrichtung zu haben; vorzüglich vollkommen ist an ihm der Pendel- und Niveau-Apparat*). — An einem vierten Granitpfeiler ist die Repsold'sche Uhr aufgestellt, für deren vortrefflichen Gang der Name des geniereichen Künstlers bürgt; dass sie in den wenigen Tagen seit ihrer Aufstellung ihren Gang nicht merklich änderte, versteht sich wohl von selbst.

Sie sehen nun, dass es hinfort nur die Schuld des Wetters sein wird, wenn nicht aus der neuen Sternwarte eine herrliche Reihe von Beobachtungen hervorgeht. Am Anfange war dieses freilich nicht sehr günstig, denn ich habe in den verflossenen 10 Tagen nur zweimal den Mond und zweimal die Juno im Meridian beobachten können; doch hoffe ich noch die Opposition dieses Planeten vollständig zu erhalten. — Es wird mir grosse Freude machen, wenn ich Ihnen meine ersten Beobachtungen auf der neuen Sternwarte mittheilen werde; jetzt zögere ich noch damit, weil sie zu wenig zahlreich sind.

Sie erzeigen mir eine Gefälligkeit, wenn Sie die Vollendung meiner Sternwarte den Lesern Ihrer M. C. mittheilen. Für die Folge wird und muss sich das neue Institut selbst in Andenken erhalten; allein ich glaube, es wird für die Freunde der Sternkunde nicht nur, sondern auch für Alle, die an den Wissenschaften Theil nehmen, eine erfreuliche Erscheinung sein, aus Zeitverhältnissen, wie die gegenwärtigen, eine Anlage hervorgehen zu sehen, bei welcher weder Aufwand noch Mühe gespart wurde, um sie ganz dem Zwecke, den man bei ihrem Entwurf im Auge hatte, entsprechend zu machen. — Der Geist der Preussen regiert, konnte sich nicht deutlicher aussprechen, als durch die Erbauung einer der prächtigsten Sternwarten der Welt in den Jahren 1811 bis 1813; die Freigebigkeit des Königs, und der Eifer der Behörden hier und in Berlin, mussten so zusammen wirken, wie es wirklich geschah, um diesen Erfolg hervorzubringen. — Mit meinen ersten Beobachtungs-Registern werde ich eine Zeichnung und genaue Beschreibung der Sternwarte bekannt machen; Sie werden daraus das Zweckmässige ihrer Einrichtung und das Geschmackvolle ihres Aeussern, welches ich ganz dem Regierungsrathe MUELLER verdanke, kennen lernen. —

*) Da der wesentlichste Gebrauch des Kreises auf den Meridian beschränkt ist, so würde seine Aufstellung unter einer nach allen Seiten freie Aussicht gewährenden Drehkuppel keinen Vortheil erzeugt haben, der die davon unzertrennlichen Nachtheile hätte aufwiegen können. Um die freie Aussicht zu erlangen, würde man auf Kosten der Festigkeit sehr hoch haben gehen müssen, und ein Beobachter würde dann nicht mehr im Stande gewesen sein, eine Culmination an beiden Instrumenten zu observiren. Um indessen den Kreis auch an einigen Punkten ausser dem Meridiane, vorzüglich zu den Beobachtungen der Strahlenbrechung untergehender Gestirne, gebrauchen zu können, sind die beiden freien Ecken des Saals, in welchem er aufgestellt ist, im 45. Grade abgestumpft und mit grossen Fenstern versehen, sowie zu diesem Zwecke auch eine grosse, nach Westen gehende Thür angebracht wurde. (Königsb. Beobb. 1. Abth. p. III.)

158. Ueber die Schiefe der Ekliptik.**)

(Zeitschrift f. Astron. I, p. 167. — Aus einem Briefe an LINDENAU vom Juli(?) 1815.)

. . . . Ich halte es für höchst wahrscheinlich, dass ein reeller Unterschied zwischen den Abständen in der Winter- und Sommer- Sonnenwende nicht stattfindet. Der Unterschied zwischen meinen beiden Sonnenwenden ist nur 0″,67 und demnach so klein, dass ich ihn als aus zufälligen Beobachtungsfehlern entstanden ansehen kann. Nichtsdestoweniger glaube ich, dass der Unterschied noch kleiner werden wird, wenn ich erst meine Polhöhe mit der äussersten Genauigkeit bestimmt haben werde; denn nach meinen bisherigen Beobachtungen vermuthe ich eine kleine Verminderung damit vornehmen zu müssen [vgl. Abh. 91].

MASKELYNE'S Beobachtungen geben mir, wenn ich die von dem Beobachter selbst angegebene Fehlertabelle der Quadranten dabei anwende, für 1795:

**) [Aus 95 d. a. Verz. — Vgl. auch (84), (104), 130, (136), 170, (200), 211, (225), 248 d. a. Verz., sowie Abh. 23, 28, 37, 86, 89. — Br. m. O. I. 182. 370 (O.). 372. 397. II. 111.]

aus 10 Sommer-Sonnenwenden . . . 23° 27′ 57,″79
„ 10 Winter-Sonnenwenden 57,52
im Mittel 1795 . . . 23° 27′ 57,″66

Piazzi's Beobachtungen geben, mit Anbringung der Fehler, die ich bei den Declinationen des grossen Catalogs, verglichen mit meinen Bradley'schen gefunden habe, für 1798:

aus 10 Sommer-Sonnenwenden . . . 23° 27′ 55,″50
„ 10 Winter-Sonnenwenden 54,59
Mittel 1798 . . . 23° 27′ 55,″05

Diese Bestimmung ist anzusehen, als wäre sie unmittelbar mit meinen eignen Reductionselementen aus Piazzi's Beobachtungen hergeleitet; denn die Solstitien wurden mit denselben Elementen reducirt, die dem grossen Cataloge zum Grunde liegen und die Differenzen dieses letztern sind es, die ich dabei angebracht habe. Sie setzt also die mittlere Richtigkeit meines Bradley'schen Verzeichnisses voraus.

Pond's beobachtete drei Sonnenwenden von 1812 und Sommer 1813 geben mit vollkommener Uebereineinstimmung für

1813 . . . . 23° 27′ 49,″99

Meine eignen beiden Sonnenwenden geben für

1815 . . . . 23° 27′ 47,″38.

Nimmt man hierzu Bradley's und Tobias Mayer's Beobachtungen, so hat man unverwerfliche Zeugnisse für die wirkliche, sowohl ehemalige als gegenwärtige, Gleichheit der Entfernungen der beiden Wendekreise vom Aequator. Man wird sich kaum der Annahme entgegensetzen können, dass die mit kleinern Wiederholungskreisen beobachtete Verschiedenheit auf Rechnung der Instrumente kömmt, obgleich es sehr schwierig sein möchte zu entscheiden, wie dies eigentlich zugeht. Schreibt man den Unterschied den Instrumenten zu, so gibt es zwei Erklärungen, die sich sogleich darbieten: entweder geben diese Kreise alle Zenithdistanzen zu klein, und zwar um etwa 3″; oder sie geben nur die Zenithdistanzen der Sonne um etwa 6″ zu klein. Indessen sehe ich wohl, dass es eben so schwierig ist, die eine als die andere dieser Erklärungen anzunehmen. Die erste könnte z. B. stattfinden, wenn Theile des Kreises oder etwa das Fernrohr einer Biegung unterworfen wäre; allein sollte ein Reichenbach hierauf nicht alle mögliche Sorgfalt verwandt haben? Das Gegentheil lässt sich schwerlich annehmen. Die andere könnte weniger problematisch erscheinen, wenn die Kreise nicht wiederholende wären, auf welche die Sonnenwärme einen immer gleichen Einfluss äusserte; allein bei Wiederholungskreisen kann dies nicht der Fall sein, oder wenigstens gestehe ich, dieses nicht einzusehen. Es ist daher wahrscheinlich noch eine dritte Erklärung vorhanden, deren Auffindung vielleicht Ihnen oder andern Besitzern von Wiederholungskreisen gelingt. Ich meines Theils gestehe, dieser Aufklärung mit grossem Verlangen entgegen zu sehen.

Indessen kann ich nach den Prüfungen, die ich bei meinem Kreise angestellt habe, keine unbeachtete Fehlerquelle finden, die auch nur einen Unterschied von einer einzigen Secunde erklären könnte. Ich vertraue daher der gefundenen Uebereinstimmung noch lieber als der Abweichung die andere Instrumente geben, und dem zufolge nehme ich meine gegenwärtig bestimmte Schiefe für sehr sicher an. Vergleiche ich Bradley's Beobachtungen, die im Mittel aus sehr verschiedenartigen Untersuchungen für 1755, 23° 28′ 15,″32 ergaben, mit den oben angeführten Bestimmungen, so folgt die jährliche Veränderung

aus Maskelyne . . . — 0,″4415
„ Piazzi . . . . — 0,4714
„ Pond . . . . — 0,4364
„ Bessel . . . . — 0,4657

Nehme ich die letztere an, so finde ich, dass die verschiedenen Beobachtungen folgende Abweichungen von der Rechnung geben:

Maskelyne . . . . + 0,″96
Piazzi . . . . . — 0,25
Pond . . . . . + 1,68

Hiernach scheint also eine Verminderung der Venusmasse um etwa — 0,17 ihrer angenommenen Grösse nothwendig.

Bei Hrn. von Zach's Beobachtungen im XXVII. Bd. d. Monatl. Corr. habe ich die Aenderungen angebracht, die aus dem Unterschiede meiner und der Carlini'schen Refractionen folgen, um sie ganz mit denselben Elementen reducirt zu erhalten, die ich bei meinen Rechnungen zum Grunde legte. So finde ich für 1810:

4 Sommer-Sonnenwenden . . 23° 27′ 57,″88
4 Winter-Sonnenwenden 42,44
Mittel . . . 23° 27′ 50,″16

Dieses Mittel entfernt sich nur + 0,″45 von meiner Bestimmung. Allein ehe der Unterschied erklärt wird und ehe man zeigt, dass er aus in beiden Sonnenwenden gleichen Einwirkungen zusammengesetzt ist, wird man das arithmetische Mittel nicht mit Zuversicht annehmen können. — Diese Eigenheit der kleinern Wiederholungskreise bleibt immer eine sehr merkwürdige Er-

scheinung in der practischen Astronomie, und es kann nicht fehlen, dass wir etwas Interessantes dadurch lernen [vgl. auch Abh. 57].

Unter 112 Sternen, die ich in BRADLEY und sonst in keinem Verzeichnisse, aber dort nur einmal beobachtet finde, ist einmal Uranus. Die meisten werden ohne Zweifel Fixsterne sein und sich noch am Himmel vorfinden. Doch kann uns vielleicht das Verzeichniss davon noch eine Beobachtung eines neuen Planeten verschaffen.

---

159. Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Pothenot'sche Aufgabe.*)

(Zeitschrift f. Astron. IV, p. 290.)

[Die von BESSEL 1817 vorgenommene Prüfung der älteren Textor'schen Vermessung von Ost- und Westpreussen veranlasste die trigonometrische Bestimmung einiger Punkte in Königsberg, zunächst die Verbindung der Sternwarte, von welcher aus die Winkel nachgemessen wurden, mit dem Schlossthurm (früherer △Punkt). An den Endpunkten der zu diesem Zweck westlich von Königsberg (von HAGEN) gemessenen kleinen Basis wurden die Winkel nach dem Signal der Sternwarte, sowie nach 7 Königsberger Thürmen beobachtet, ferner dieselben von der Sternwarte nach den Basisendpunkten und 5 Thürmen. Für die Berechnung der rechtwinkligen Coordinaten der 7 Thürme in Bezug auf den Meridian bediente sich BESSEL dann der folgenden Methode:] Berechnet man (hiernach) die senkrechten Abstände von dem durch den nördlichen Endpunkt der Basis gezogenen Perpendikel auf den Meridian $= x$ und vom Meridian selbst $= y$, für die Sternwarte und einen der Thürme, so ergeben beide das Azimuth dieses Thurmes, welches auf der Sternwarte hätte beobachtet werden sollen, wenn alle Beobachtungen vollkommen genau wären. Der Unterschied dieses berechneten Azimuths und des wirklich beobachteten wird aber eine Verbesserung der für den Thurm angenommenen Coordinaten geben und dadurch werden diese, im Allgemeinen, eben so sicher bestimmt sein, als wenn man den Winkel am Thurme direct beobachtet hätte. Da die zu dieser Rechnung dienenden, nach der Methode der kleinsten Quadrate entwickelten Formeln auch sonst noch eine Anwendung finden können, so setze ich sie hierher.

Ich nehme die Coordinaten dreier Punkte, in welchen man die Winkel eines vierten mit, der Axe der x parallel gelegten Linien $= \alpha, \alpha', \alpha''$ beobachtet hat, als gegeben an; dann bestimme ich die Coordinaten des vierten Punkts x und y, so dass sie zweien der Winkel α und α' entsprechen und nenne den hieraus berechneten 3. Winkel α''. Alsdann sind die wahrscheinlichsten Coordinaten:

$$x + (\alpha'' - a'')\, r'' (b' r' \cos\alpha + br \cos\alpha')\, N$$
$$y + (\alpha'' - a'')\, r'' (b' r' \sin\alpha + br \sin\alpha')\, N$$

ferner die unter dieser Annahme der Coordinaten an die beobachteten Winkel anzubringenden Verbesserungen:

$$\varepsilon = -(\alpha'' - a'')\, b\ b''\, N$$
$$\varepsilon' = +(\alpha'' - a'')\, b'\, b''\, N$$
$$\varepsilon'' = -(\alpha'' - a'')\, b''\, b''\, N$$

Die Winkel sind hier von 0 bis 360°, nach der Richtung, nach welcher die y positiv sind, gezählt; r, r', r'' bezeichnen die Entfernungen des 4. Punkts von den drei gegebenen; der Kürze wegen ist:

$$b = r \sin(\alpha' - \alpha'')$$
$$b' = r' \sin(\alpha - \alpha'')$$
$$b'' = r'' \sin(\alpha - \alpha')$$
$$N = (b^2 + b'^2 + b''^2)^{-1}$$

gesetzt. [Folgt nun die Lage der Königsberger Thürme gegen die Sternwarte. BESSEL sagt dann weiter:] Da man unter den Thürmen immer eine schickliche Auswahl treffen kann, so wird man den Fall, wo die im XXVII. Bd. der Monatl. Corresp. S. 222 aufgelösete Aufgabe [Abh. 112] unbestimmt wird, nämlich wenn die drei gegebenen und der gesuchte Punkt in einem Kreise liegen, vermeiden können. Durch die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate wird man die Genauigkeit noch weiter treiben können und man wird dabei vier oder mehrere Thürme zum Grunde legen können, die sich weit von einer Kreisperipherie entfernen. Allein man wird, zumal wenn ihre Anzahl grösser als 4 ist, durch die Behandlung der Aufgabe in Zahlen leichter zum Ziele gelangen, als durch die vollständige Entwickelung der allgemeinen Formel, die dann zu viele Glieder enthält, als dass sie noch bequem sein könnte. Ich gebe aus diesem Grunde diese Formel hier nicht, obgleich sie starke Reductionen zulässt.

*) [Aus 119 d. a. Verz.]

---

160. Reduction von Circummeridianhöhen des Mondes.*)

(Königsb. Beobb. 3. Abth., p. X.)

. . . . In dem Jahre 1816 wurden auch die Zenithdistanzen des Mondes, sowie schon früher die der Sonne, der Planeten u. s. w. vollständig, d. i. vor und nach der Culmination beobachtet. Da meines Wissens nirgends die Methode bekannt gemacht ist, solche Circummeridianbeobachtungen auf den Meridian zu reduciren, so gebe ich hier die von mir dazu benutzte Formel. Wenn δ = der wahren Declination ☾, m und m' = den Veränderungen der AR. und Decl. in 1^m mittlerer Zeit, in Secunden ausgedrückt, z = der beobachteten Zenithdistanz des ☾ Mittelpunkts, φ = der Polhöhe, π = der Horizontalparallaxe des ☾, t = der Sternenzeit der Beobachtung weniger der Sternenzeit der Culmination des ☾ Mittelpunkts, $\Delta\varrho$ = der Veränderung der Strahlenbrechung für einen Grad der Höhe, so hat man:

$$a = \frac{-\cos\varphi\cos\delta}{(\sin\varphi - \delta)} \cdot \frac{225}{2} \sin 1'' \frac{3600 - \Delta\varrho}{3600} (1 - m.0{,}001108)^2$$

$$a' = \frac{a}{1 - \sin\pi\cos z}, \qquad b = m' . 0{,}001108$$

und damit die gesuchte Reduction auf den Meridian:

$$x = a'\left(t - \frac{b}{2a}\right)^2 - a'\left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

---

161. Persönliche Gleichung bei Durchgangsbeobachtungen.**)

(Königsb. Beobb. 8. Abth., p. III.)

Der verewigte Maskelyne erwähnt im Jahrgange für 1795 der Beobachtungen auf der königl. Sternwarte in Greenwich, dass sein Gehülfe, D. Kinnebrook, sich nach und nach angewöhnt hatte, die Durchgänge der Gestirne durch die Fäden des Mittagsfernrohrs 0,5 bis 0,8 später zu beobachten als Maskelyne selbst. Diese auffallende Bemerkung findet sich in der interessanten Geschichte der Greenwicher Sternwarte, welche Herr v. Lindenau in den 2. Bd. der Zeitschrift für Astronomie u. s. w. einrückte; aber später, als das Board of Longitude mich durch die Mittheilung der vollständigen Sammlung der Maskelyne'schen Beobachtungen beehrte, wofür ich bei dieser Gelegenheit öffentlich meinen Dank abstatte, wurde mir dieselbe näher bekannt. Maskelyne sagt, dass Herr Kinnebrook 1794 und Anfangs 1795 die Durchgänge übereinstimmend mit ihm selbst beobachtet, aber im August dieses Jahres angefangen habe, dieselben eine halbe Secunde später anzuschreiben, welcher Unterschied im J. 1796 bis zu 0,8 anwuchs, so dass es nicht wahrscheinlich war, dass der Gehülfe zu einer richtigen Methode zu observiren zurückkehren würde, weshalb Maskelyne gezwungen war, ihn zu entlassen. Er beschreibt darauf die von Bradley eingeführte Methode, nach welcher die Oerter des Sterns bei den nächsten Pendelschlägen der Uhr vor und nach dem Durchgange durch den Faden bemerkt werden und dadurch das Zehntheil der Secunde angeben; er glaubt, dass sein Gehülfe nicht diese wahre Methode streng befolgt, sondern eine eigene unregelmässige angenommen habe.

Wenn man bedenkt, dass sowohl die Sterne als die Fäden in guten Mittagsfernröhren vollkommen deutlich erscheinen, dass die Bewegung in 1^s schon bei einer 60—80maligen Vergrösserung sehr gross ist, dass der Beobachter gewöhnlich bis auf ein, höchstens zwei Zehntheile einer Secunde sicher zu sein glaubt: so erscheint der Unterschied zwischen Maskelyne und seinem Gehülfen beinahe unglaublich; wenn man ferner erwägt, dass Herr Kinnebrook den Wunsch gehabt haben muss, die Durchgänge wieder früher zu beobachten, um sich dem zu nähern, was für ganz richtig gehalten wurde, so kann man nicht mehr zweifeln, dass zwischen zwei Beobachtern ein unwillkürlicher beständiger Unterschied stattfinden kann, welcher die Grenzen der zufälligen Unsicherheit weit überschreitet, welcher nicht nur in Beziehung auf die astronomischen Beobachtungen eine genauere Untersuchung verdient, sondern auch in anthropologischer Hinsicht äusserst merkwürdig zu sein scheint. Die zur näheren Erkenntniss dieser räthselhaften Erscheinung gethanen Schritte glaube ich daher hier mittheilen zu dürfen.

Bei meiner Anwesenheit auf der Seeberger Sternwarte im J. 1819 ersuchte ich meine verehrten Freunde, die Herren v. Lindenau und Encke, durch gemein-

*) [Aus 121 d. a. Verz. — Vgl. auch Abh. 50, Bd. I, p. 325.]

**) [Aus 176, 218 und 301 d. a. Verz. — Br. m. O. II. 185. 188 (O). 195. 249.]

schaftliche Beobachtungen am Mittagsfernrohre den etwanigen Unterschied zu bestimmen; demzufolge beobachtete jeder von uns einige Durchgänge; allein die wenigen Tage meines dortigen Aufenthalts lieferten keine zweite heitere Nacht, in welcher diese Beobachtungen hätten correspondirend gemacht werden können; sie gaben daher kein Resultat und die Greenwicher Erfahrung blieb noch die einzige ihrer Art. Im Winter 1820—21 aber konnte ich den hiesigen Aufenthalt des seligen Dr. WALBECK benutzen, um vergleichende Beobachtungen mit dem Meridiankreise anzustellen. Es wurden dazu 10 Sterne in der Nähe des Aequators ausgewählt, und diese an fünf verschiedenen Tagen so beobachtet, dass 5 derselben heute von WALBECK, morgen von mir, die übrigen 5 aber heute von mir, morgen von WALBECK, mit der stärksten 182maligen Vergrösserung des Fernrohrs observirt wurden; aus diesen Beobachtungen ergaben sich zwei Bestimmungen des Ganges der Uhr, welche um den doppelten Unterschied beider Beobachter verschieden und daher geeignet sein mussten, denselben zu erkennen zu geben. Bezeichnet man die Angabe der Zeit eines Durchgangs nach beiden Beobachtern durch die Anfangsbuchstaben ihrer Namen und den Gang der Uhr zwischen zwei Beobachtungstagen durch x, x', x'' etc., so findet sich aus einem Sterne, welchen WALBECK am vorangehenden, ich am folgenden Tage beobachtete, $B-W+x$, und aus einem in umgekehrter Ordnung beobachteten $W-B+x$. Die einzelnen Sterne gaben folgende Resultate*):

1820 Dec. 16 und 17.

$W-B+x=+1^s,93$, $\quad B-W+x=-0^s,36$.

Dec. 17 und 19.

$B-W+x'=-0^s,97$, $\quad W-B+x'=+1^s,00$.

Dec. 19 und 20.

$W-B+x''=+1^s,10$, $\quad B-W+x''=-0^s,92$.

Dec. 20 und 22.

$B-W+x'''=-0^s,09$, $\quad W-B+x'''=+1^s,96$.

Hieraus folgt, dass WALBECK stets bedeutend später beobachtete als ich, nämlich:

Dec. 16	u. 17	...	$1^s,145$
„ 17	„ 19	...	0,985
„ 19	„ 20	...	1,010
„ 20	„ 22	...	1,025

im Mittel $1^s,041$, welches Resultat kaum einige Hundertheile einer Secunde zweifelhaft sein kann. Dieser grosse Unterschied war schon am zweiten Tage auffallend und veranlasste eine Vermehrung der Aufmerksamkeit auf die wahren Momente der Durchgänge; allein dieses änderte ihn nicht und wir schlossen die Beobachtungen mit der Ueberzeugung, dass es Beiden unmöglich sei, auch nur ein einziges Zehntheil einer Secunde anders zu beobachten.

Da sich hier ein noch grösserer Unterschied zeigt, als zwischen MASKELYNE und KINNEBROOK, so wird es wahrscheinlich, dass ähnliche Unterschiede nicht selten sind; um hierüber mehr Aufklärung zu erhalten, habe ich auch mit Herrn Dr. ARGELANDER, kurz vor seiner Abreise nach Åbo, ähnliche Vergleichungen angestellt, welche aber etwas verschieden angeordnet wurden, weil dadurch noch andere Zwecke, wie aus dem Folgenden hervorgehen wird, erreicht werden sollten. Ich hatte nämlich diejenigen 7 Sterne in den Füssen der Zwillinge, welche von BRADLEY und MASKELYNE zur Erfindung des Collimationsfehlers des Mauerquadranten häufig benutzt wurden, im J. 1821 jeden sechs Mal unter günstigen Umständen beobachtet, woraus Herr Dr. ARGELANDER folgende mittlere Positionen ableitete: [folgen die Positionen der 7 Sterne für 1820]. Diese Sterne beobachtete Herr ARGELANDER am 28. März und 15. April 1823, während ich die Correction der Uhr durch die Fundamentalsterne bestimmte; er brachte die Rectascensionen durchgängig grösser heraus, als ich sie gefunden hatte, und als er sie gefunden haben würde, wenn er die Fundamentalsterne selbst beobachtet hätte; der Unterschied war:

		März 28.	April 15.
H	Geminorum	$+1^s,285$	—
η	„	$+1,321$	$+1^s,319$
μ	„	$+1,159$	$+1,239$
ν	„	$+1,256$	$+1,237$
γ	„	$+1,000$	$+1,189$
ε	„	$+1,286$	$+1,151$
ζ	„	$+1,250$	$+1,210$
	Mittel	$+1^s,222$	$+1^s,224$ ... $B-A=-1^s,223$

also noch merklich grösser, als zwischen mir und WALBECK.

Als Herr Dr. WALBECK und ich die oben angeführten Beobachtungen machten, hatte der Erstere weit weniger häufig mit dem Mittagsfernrohre observirt als ich; auch bei Herrn ARGELANDER war dieses der Fall, obgleich er an eine ähnliche Beobachtungsart, bei Gelegenheit der Bestimmung der Strahlenbrechungen mit dem Cary'schen Kreise, gewöhnt worden war. Ich wünschte daher zu erfahren, ob lange fortgesetzter

*) [Einzelne Sterne: 954 Mayeri, φ Aquarii, γ Piscium, b Piscium, 962 Mayeri, $\varkappa_1$ Piscium, 971 Mayeri, (PIAZZI) XXIII. 136, XXIII. 147, 979 Mayeri hier weggelassen.]

Gebrauch der astronomischen Instrumente vielleicht eine Gleichheit in den absoluten Beobachtungsmomenten erzeugen könnte und ersuchte demzufolge Herrn Professor STRUVE in Dorpat, die Durchreisen der Herren WALBECK und ARGELANDER zu benutzen, um seinen Unterschied mit denselben und dadurch mittelbar $B - S$ zu bestimmen. Die Anwesenheit des Herrn WALBECK in Dorpat fand Anfangs 1821 statt und gab durch viertägige Beobachtungen, deren Einzelheiten man im dritten Bande der Observationum Dorpatensium nachlesen kann:

$$S - W = -0^s,242;$$

woraus folgt:

$$B - S = -0^s,799.$$

Herr Dr. ARGELANDER war dagegen im Julius 1823 in Dorpat, und die gemeinschaftlichen Beobachtungen ergaben:

$$S - A = -0^s,202;$$

also

$$B - S = -1^s,021.$$

Diese beiden Bestimmungen von $B - S$ sind um $0^s,222$ verschieden, welches eine Veränderung, entweder bei mir oder STRUVE, oder bei WALBECK oder ARGELANDER wahrscheinlich macht; denn die Beobachtungen selbst scheinen einer weit geringern Unsicherheit unterworfen zu sein. Wegen der Kürze der Zwischenzeiten, welche zwischen den Vergleichungen der Herren WALBECK und ARGELANDER mit mir und STRUVE verstrichen, kann man die Veränderung mit mehrerem Grunde den beiden letzteren als den beiden ersteren Beobachtern zuschreiben; aber es ist noch überdies eine bestimmte Erfahrung vorhanden, welche dieser Meinung das Uebergewicht gibt. Am 21. October 1814 erfreute ich mich nämlich des Besuches des Herrn Professor STRUVE und an diesem Tage beobachtete er mit dem Mittagsfernrohre von DOLLOND die Culmination von α Lyrae, ich selbst die von α Andromedae und γ Pegasi; diese drei Beobachtungen geben nach meinem Fundamentalcataloge folgende Verbesserungen der Uhrzeit:

α Lyrae	$-1^m\,26^s,476$
α Andromedae . .	$-1\;\;25,298$
γ Pegasi	$-1\;\;25,059.$

Reducirt man das Mittel der beiden letzten, mit dem täglichen Gange der Uhr $= +5^s,92$, auf die erstere, so hätte sie $-1^m\,26^s,520$ sein sollen, so dass

$$B - S = -0^s,044$$

folgt. Dieses Resultat beruht zwar nur auf einer einzelnen Beobachtung, aber ich erinnere mich noch genau, dass Herr STRUVE dieselbe für gelungen hielt, was sich auch durch die Uebereinstimmung der einzelnen Fäden bestätigt; unter diesen Umständen kann wohl ein kleiner Zweifel, aber gewiss keiner von $0^s,8$ bis $1^s,0$ obwalten und wir haben daher ein zweites Beispiel der Veränderlichkeit des Unterschiedes zwischen zwei Beobachtern, nämlich:

1814,8	$B - S = -0^s,044$
1821,1	$\ldots = -0,799$
1823,5	$\ldots = -1,021$

Noch eine directe Vergleichung zwischen STRUVE und mir, welche auf der am 13. November 1820 beobachteten Culmination von α Piscis austrini beruht und $B - S = -0^s,68$ gibt, führe ich als minder sicher an, weil der Stern dem Horizonte zu nahe ist, um ganz genau beobachtet werden zu können; sie ist übrigens von der durch WALBECK erhaltenen im Resultate und in der Zeit wenig verschieden.

Nach dieser Feststellung der Erscheinung selbst habe ich versucht, einige Thatsachen zu sammeln, welche vielleicht die Entdeckung ihrer Ursache erleichtern können. Zuerst habe ich das stetige Fortschreiten des Sterns im Fernrohre mit der plötzlichen Erscheinung oder Verschwindung eines Gegenstandes vertauscht; 78 Vergleichungen dieser Art zwischen Herrn ARGELANDER und mir, welche aber für weit weniger sicher gehalten werden als die Culminationen, gaben

$$B' - A' = -0^s,222,$$

und 21 gemeinschaftlich beobachtete Verschwindungen oder Erscheinungen von Sternen am dunkeln Mondrande ergaben dieselbe Quantität $= -0^s,281$. Zwischen den Herren STRUVE und ARGELANDER fand sich bei dieser Beobachtungsart ein ganz unbedeutender Unterschied, nämlich aus einer Reihe von Beobachtungen $S' - A' = 0$, aus einer andern $= -0^s,031$.

Da diese Unterschiede weit geringer sind als die aus den Culminationen gefundenen, so folgt, dass der grössere Theil der letzteren aus einer fehlerhaften Vergleichung der stetigen Bewegung des Sterns im Fernrohre mit den plötzlichen Secundenschlägen der Uhr hervorgeht; ich nahm daher, statt der gewöhnlichen Uhr der Sternwarte, eine Halbsecundenuhr, zählte an dieser die halben Secunden und reducirte die auf diese Weise beobachteten Durchgangszeiten der 7 Sterne in den Zwillingen auf die Hauptuhr; der Unterschied beider Uhren wurde während der Beobachtungen durch wiederholte Vergleichungen bestimmt, die Verbesserung der Zeit der Hauptuhr aber wie gewöhnlich. Bezeichnet man die Zeit eines auf diese Art von mir beobachteten Durchganges durch B'', so fand sich $B - B''$:

		März 30.	März 31.
H	Geminorum	—	— 0,486
η	„	— 0,345	— 0,482
μ	„	— 0,533	— 0,440
ν	„	— 0,600	— 0,217
γ	„	— 0,624	— 0,751
ε	„	— 0,472	— 0,469
ζ	„	— 0,544	— 0,421
$B-B''$		— 0,520	— 0,467

Ferner fand sich durch Herrn ARGELANDER's Beobachtungen an derselben Uhr $B-A''$:

		April 10.	April 11.
η	Geminorum	— 1,266	— 1,128
μ	„	— 1,196	— 1,080
ν	„	— 1,462	—
γ	„	— 1,064	— 1,149
ε	„	— 1,241	— 1,267
ζ	„	—	— 1,416
$B-A''$		— 1,246	— 1,208

Endlich durch ähnliche Beobachtungen, welche die Herren STRUVE und ARGELANDER in Dorpat anstellten:

$$S''-A'' = -0,227.$$

Es geht also aus diesen Versuchen hervor, dass ich, wenn die Uhr halbe Secunden schlägt, 0,494 später beobachte, als wenn sie ganze angibt, und dass bei STRUVE und ARGELANDER kein Unterschied dieser Art stattfindet.

Diese verschiedenen Erfahrungen zeigen, dass kein Beobachter, selbst wenn er BRADLEY's Beobachtungsmethode auf das Strengste zu befolgen glaubt, sicher sein kann, absolute Zeitmomente richtig anzugeben. Wenn man annimmt, dass Eindrücke auf das Auge und das Ohr nicht in einem Momente mit einander verglichen werden können, und dass zwei Beobachter zur Uebertragung des einen Eindruckes auf den andern verschiedene Zeiten gebrauchen, so entsteht ein Unterschied; ein noch grösserer aber, wenn der Eine vom Sehen zum Hören, der Andere vom Hören zum Sehen übergeht; dass verschiedene Beobachtungsarten diesen Unterschied ändern können, darf nicht befremden, wenn man als wahrscheinlich annimmt, dass ein Eindruck auf einen der beiden Sinne allein entweder ganz oder nahe in demselben Momente empfunden wird, in welchem er stattfindet und dass nur das Hinzukommen eines zweiten Eindruckes eine Störung hervorbringt, welche sich nach der verschiedenen Natur des letzten ändert. Es ist wahrscheinlich, dass MASKELYNE näher mit mir übereingestimmt haben würde, als mit STRUVE, WALBECK oder ARGELANDER, indem im entgegengesetzten Falle zwischen mir und KINNEBROOK ein Unterschied von etwa 2 Secunden stattgefunden haben würde, der doch wohl zu gross ist, um ihn für möglich zu halten; MASKELYNE und ich befolgten daher vermuthlich die Gewohnheit, vom Hören der Secundenschläge zum Sehen überzugehen, während die später beobachtenden Astronomen die entgegengesetzte angenommen zu haben scheinen.

Es wäre zu wünschen, dass man ein Mittel fände, über diese räthselhafte Erscheinung erschöpfende Untersuchungen anzustellen; allein ich halte dieses für fast unmöglich, indem die Operationen, von welchen der Unterschied herrührt, ohne unser Bewusstsein vor sich gehen. Es muss aber das Bestreben der Astronomen sein, Fehler der Resultate, welche aus dieser Quelle hervorgehen können, zu erkennen und so viel als möglich zu vermeiden. Am wichtigsten erscheint die Untersuchung des Einflusses auf die Unterschiede der geraden Aufsteigungen, welcher nur dann verschwinden wird, wenn eine verschiedene Geschwindigkeit der Sterne im Fernrohre den beständigen Fehler nicht verändert. Um dieses auszumitteln, habe ich mit verschiedenen Vergrösserungen häufige Versuche angestellt, aber gefunden, dass es ganz gleichgültig ist, ob ich eine Culmination in der Nähe des Aequators mit 182maliger oder mit 66maliger Vergrösserung beobachte; da nun die Sterne, welche nicht weniger als 20° vom Pole entfernt sind, mit der ersteren gesehen sich eben so schnell oder schneller bewegen als die Aequatorealsterne mit der letzteren gesehen, so ist keine aus dieser Ursache entstehende Unrichtigkeit meiner Rectascensionen, wenigstens der über 20° vom Pole entfernten Sterne, zu fürchten. — Der Einfluss auf die Meridianunterschiede der Oerter liegt dagegen am Tage; wenn z. B. Herr Dr. ARGELANDER für die von ihm beobachteten Sternbedeckungen die Zeit selbst bestimmt hätte, so würde Königsberg nach seinen Beobachtungen eine Zeitsecunde östlicher liegen als nach den meinigen; derselbe Fall kann bei den durch Pulverblitze oder durch Signale mit dem Heliotrop bestimmten Meridianunterschieden eintreten, so dass auch diese Methoden nur dann Sicherheit gewähren können, wenn die Beobachter ihre Stationen verwechseln. Auf die Bestimmung der Meridianunterschiede durch Mondculminationen hat aber die Unsicherheit der absoluten Zeitangaben keinen Einfluss. — Den allernachtheiligsten Einfluss würde sie erhalten, wenn man die Culminationsbeobachtungen zweier Astronomen an einer Sternwarte mit einander vermischen wollte; auf der hiesigen werden alle Beobachtungen dieser Art von mir selbst gemacht.

161 b. Erster Nachtrag.

(Königsb. Beobb. 11. Abth., p. IV.)

. . . . Um die Mitte des Julius [1825] beehrte Herr KNORRE, Director der neuen Sternwarte in Nicolajeff, die hiesige durch einen Besuch; da er kurz zuvor in Dorpat gewesen war, so gab dieses Veranlassung, die in der VIII. Abth. erwähnte, den Beobachtern eigenthümliche Verschiedenheit der Durchgangszeiten der Sterne durch die Fäden des Meridiankreises wiederum zu bestimmen. Aus 7 Beobachtungen vom 14. und 15. Juli findet sich, dass Herr KNORRE $1^s,016$ später beobachtete als ich, und da er $0^s,125$ später beobachtete als Herr Prof. STRUVE, so erhält der in der VIII. Abth. S. VI [s. oben] schon für verschiedene Zeiten bestimmte Unterschied durch diese Vergleichung die Ergänzung

$$1825{,}5 \ldots B - S = -0^s,891.$$

---

161 c. Zweiter Nachtrag.

(Königsb. Beobb. 18. Abth., p. III.)

Die Anwesenheit des Herrn Professors Ritter ARGELANDER in Königsberg gab im März 1832 Veranlassung, den beständigen Unterschied der Durchgangszeiten der Sterne, so wie sie an dem Meridiankreise von ihm, mir und Herrn BUSCH beobachtet wurden, zu bestimmen. Am 6., 7., 12. März beobachteten wir die Durchgangszeiten [von 15 Sternen] an den 5 Fäden des Instruments.*)

Bezeichnet man den Unterschied der Correctionen der Uhr am 7. und 12. März, von ihrer Correction am 6., durch x und x', den Fehler der von einem jeden der drei Beobachter angegebenen Durchgangszeit durch B, A und B', so erhält man aus diesen Beobachtungen:

x		x'		$x'-x$	
$+3^s,10$		$+12^s,58$		$+9^s,48$	
3,05		12,56		9,51	
3,00	$+B-A$	12,64	$+B-B'$	9,64	$+A-B'$
3,04		12,58		9,54	
3,04		12,70		9,66	
1,96		10,70		8,74	
1,94		10,62		8,68	
2,00	$+A-B'$	10,64	$+A-B$	8,64	$+B'-B$
1,90		10,64		8,74	
1,94		10,36		8,42	
1,26		12,00		10,74	
1,26		12,26		10,58	
1,30	$+B'-B$	12,30	$+B'-A$	10,66	$+B-A$
1,02		11,82		10,80	
$+1,14$		$+12,00$		$+10,86$	

Hieraus folgt:

$$B - A = -1^s,061, \qquad B - B' = -0^s,924$$

oder Herr Prof. ARGELANDER beobachtete $1^s,061$ und Herr BUSCH $0^s,924$ später als ich. Der erste Unterschied wurde im J. 1823 = $1^s,223$ gefunden.

---

162. Ueber den Einfluss der Veränderungen des Erdkörpers auf die Polhöhen.**)

(Zeitschrift für Astronomie V, p. 25.)

Wenn man auch ohne weitere Rechnung wohl einsieht, dass die Veränderungen auf der Oberfläche oder im Innern der Erde sehr gross sein müssen, ehe sie einen merklichen Einfluss auf die Polhöhen haben können, so ist eine nähere Entwickelung dieses Einflusses und eine darauf gegründete Berechnung in Zahlen doch nicht ganz ohne Interesse, indem sie deutlicher zeigt, inwiefern die Annahme der Unveränderlichkeit der Polhöhen rechtmässig ist. Die kleine über diesen Gegenstand geführte Untersuchung theile ich hier mit.

Wenn wir uns die Erde als um eine der drei Hauptaxen sich drehend vorstellen und dann annehmen, dass ein Theil der Erdmasse eine Ortsveränderung erleidet, so wird dadurch die Lage der Hauptaxen und der Schwerpunkt der Erde geändert werden. Die Drehung wird dann nicht mehr um eine feste Axe, sondern um eine in der Erde befindliche stattfinden: die Polhöhen und Mittagsunterschiede werden periodischen Veränderungen unterworfen sein. Allein beide werden einen mittleren Werth haben, der derselbe ist, der stattfinden würde, wenn die Drehung um die geänderte Polarhauptaxe vor sich ginge. Diese mittlere geocentrische Länge und Breite werde ich durch λ' und β' bezeichnen; die ursprüngliche durch λ und β; die Länge rechne ich von dem Punkte an, an welchem die ursprüngliche Hauptaxe der x den Aequator durchschneidet.

Sobald die Lage der neuen Hauptaxen gegen die früheren gegeben ist, wird man $\beta'\lambda'$ aus $\lambda\beta$ finden können, nämlich:

*) [Einzelne Sterne hier weggelassen.]

**) [122 d. a. Verz. — Br. m. O. I. 391. 395 (O.). 400 (O.). II. 62 fl. 67 (O.).]

$$\left.\begin{aligned}\cos\beta'\cos(\lambda'+\psi) &= \cos\beta\cos(\lambda+\psi)\\ \cos\beta'\sin(\lambda'+\psi) &= \cos\beta\sin(\lambda+\psi)\cos\vartheta-\sin\beta\sin\vartheta\\ \sin\beta' &= \cos\beta\sin(\lambda+\psi)\sin\vartheta+\sin\beta\cos\vartheta\end{aligned}\right\}(1)$$

wo ψ und ϑ dieselbe Bedeutung haben wie in der Mécanique céleste; wenn man nämlich die Ebene der ursprünglichen Hauptaxen der x und y durch E, die der neuen durch E' bezeichnet, so ist ϑ die Neigung von E und E' gegeneinander, ψ die Länge des Anfangspunktes von λ und λ', vom aufsteigenden Knoten von E auf E' an gerechnet. Zur vollständigen Bestimmung des neuen Hauptaxensystems gehört noch der Winkel φ', nämlich die Länge des Punktes, wo die neue Hauptaxe der x den Aequator durchschneidet, gleichfalls vom aufsteigenden Knoten von E auf E' an gerechnet.

Wir dürfen also, um $\lambda'-\lambda$ und $\beta'-\beta$ zu finden, nur ϑ und ψ kennen, welche sich in der That durch folgende leichte Betrachtungen finden.

Bezeichnet man die den ursprünglichen Hauptaxen parallelen Coordinaten durch x, y, z, so hat man für den ursprünglichen Zustand der Erde, durch die Bedingungen, dass der Schwerpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten ist und dass diese den Hauptaxen parallel sind:

$$\left.\begin{aligned}\int x\,dm &= 0;\quad \int y\,dm = 0;\quad \int z\,dm = 0\\ \int xy\,dm &= 0;\quad \int xz\,dm = 0;\quad \int yz\,dm = 0\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(2)$$

wo dm ein den Coordinaten x, y, z entsprechendes Theilchen der Erde und $\int$ eine über die ganze Masse ausgedehnte Integration bedeutet.

In dem geänderten Zustande, der dadurch entsteht, dass die Masse μ von einem Punkte, dessen Coordinaten ξ, v, ζ sind, nach einem anderen, dessen Coordinaten ξ', v', ζ' sind, übertragen wird, verwandeln sich die Gleichungen (2) offenbar in folgende:

$$\left.\begin{aligned}\int x\,dm &= \mu(\xi'-\xi);\quad \int y\,dm = \mu(v'-v);\quad \int z\,dm = \mu(\zeta'-\zeta)\\ \int xy\,dm &= \mu(\xi'v'-\xi v);\quad \int xz\,dm = \mu(\xi'\zeta'-\xi\zeta);\quad \int yz\,dm = \mu(v'\zeta'-v\zeta)\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

wo die Theile rechts vom Gleichheitszeichen als gegeben angesehen werden. Der Ausdruck derselben sechs Integrale durch die Coordinaten des neuen Schwerpunkts, die ich durch X, Y, Z bezeichnen werde, und durch die Winkel φ, ψ, ϑ, wird daher diese sechs unbekannten Grössen durch die sechs gegebenen bestimmen.

Man hat (Méc. cél. Buch I, Satz 26):

$$\left.\begin{aligned}x &= X+x'(\cos\vartheta\sin\psi\sin\varphi+\cos\psi\cos\varphi)+y'(\cos\vartheta\sin\psi\cos\varphi-\cos\psi\sin\varphi)+z'\sin\vartheta\sin\psi\\ y &= Y+x'(\cos\vartheta\cos\psi\sin\varphi-\sin\psi\cos\varphi)+y'(\cos\vartheta\cos\psi\cos\varphi+\sin\psi\sin\varphi)+z'\sin\vartheta\cos\psi\\ z &= Z-x'\sin\vartheta\sin\varphi-y'\sin\vartheta\cos\varphi+z'\cos\vartheta\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(4)$$

oder, um abzukürzen:

$$\begin{aligned}x &= X+a\,x'+b\,y'+c\,z'\\ y &= Y+a'x'+b'y'+c'z'\\ z &= Z+a''x'+b''y'+c''z'\end{aligned}$$

wo x', y', z' die auf die neuen Hauptaxen bezogenen Coordinaten des Theilchens dm bezeichnen. Setzt man diese Ausdrücke von x, y, z in die Gleichungen (3) und erinnert man sich, dass man hat:

$$\begin{aligned}\int x'\,dm &= 0;\quad \int y'\,dm = 0;\quad \int z'\,dm = 0\\ \int x'y'\,dm &= 0;\quad \int x'z'\,dm = 0;\quad \int y'z'\,dm = 0\end{aligned}$$

so verwandeln sich diese Gleichungen in folgende:

$$\left.\begin{aligned}mX &= \mu(\xi'-\xi);\quad mY = \mu(v'-v);\quad mZ = \mu(\zeta'-\zeta)\\ \mu(\xi'v'-\xi v) &= \int(a\,a'\,x'^2+b\,b'\,y'^2+c\,c'\,z'^2)\,dm+XY.m\\ \mu(\xi'\zeta'-\xi\zeta) &= \int(a\,a''x'^2+b\,b''y'^2+c\,c''z'^2)\,dm+XZ.m\\ \mu(v'\zeta'-v\zeta) &= \int(a'a''x'^2+b'b''y'^2+c'c''z'^2)\,dm+YZ.m\end{aligned}\right\}(5)$$

Setzt man in den Gleichungen (5):

$$\int x'^2\,dm = \frac{B+C-A}{2};\quad \int y'^2\,dm = \frac{A+C-B}{2};$$
$$\int z'^2\,dm = \frac{A+B-C}{2}$$

so enthalten sie ausser A, B, C die sechs unbekannten Grössen X, Y, Z, φ, ψ, ϑ, deren Werthe demnach, wenn A, B, C gegeben sind, gefunden werden können.

Um eine für unseren Zweck bequemere Auflösung zu erhalten, kann man die Quadrate von ϑ und μ und das Product beider vernachlässigen. Dadurch gehen die letzten Glieder der drei letzten Gleichungen (5) aus der Rechnung und man gebraucht daher die drei ersten Gleichungen (5) gar nicht. Das Uebrigbleibende ergibt:

$$\begin{aligned}\mu(\xi'v'-\xi v) &= \frac{A-B}{2}\sin 2(\psi-\varphi)\\ \mu(\xi'\zeta'-\xi\zeta) &= -\frac{A-B}{2}\vartheta\sin(\psi-2\varphi)\\ &\quad+\frac{A+B-2C}{2}\vartheta\sin\psi\\ \mu(v'\zeta'-v\zeta) &= -\frac{A-B}{2}\vartheta\cos(\psi-2\varphi)\\ &\quad+\frac{A+B-2C}{2}\vartheta\cos\psi.\end{aligned}$$

Wenn die beiden Momente der Trägheit A und B ursprünglich gleich waren, oder sehr wenig verschieden sind, wie wir von der Erde annehmen, so gehen die ersten Glieder der beiden letzten Gleichungen,

rechts vom Gleichheitszeichen, aus der Rechnung und wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta \sin\psi &= \frac{2\mu}{A+B-2C}(\xi'\zeta'-\xi\zeta) \\ \vartheta \cos\psi &= \frac{2\mu}{A+B-2C}(v'\zeta'-v\zeta) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (6)$$

welches vermöge der Gleichungen (1) ergibt:

$$\lambda'-\lambda = \frac{-2\mu \operatorname{tg}\beta}{A+B-2C}[(v'\zeta'-v\zeta)\cos\lambda-(\xi'\zeta'-\xi\zeta)\sin\lambda]$$

$$\beta'-\beta = \frac{2\mu}{A+B-2C}[(v'\zeta'-v\zeta)\sin\lambda+(\xi'\zeta'-\xi\zeta)\cos\lambda]$$

Setzt man die Länge und Breite des Ortes, von welchem die Masse μ weggenommen wird, l und b; des Ortes, nach welchem sie übertragen wird, l' und b'; nimmt man ferner die Entfernungen beider vom Mittelpunkte der Erde $= 1$ an, so hat man endlich:

$$\lambda'-\lambda = \frac{-\mu \operatorname{tg}\beta}{A+B-2C}[\sin 2b'\sin(l'-\lambda)-\sin 2b\sin(l-\lambda)]$$

$$\beta'-\beta = \frac{\mu}{A+B-2C}[\sin 2b'\cos(l'-\lambda)-\sin 2b\cos(l-\lambda)]$$

Wenn αh die Abplattung der Erde und $\alpha\varphi$ das Verhältniss der Schwere zur Centrifugalkraft unter dem Aequator bedeutet, so hat man (Méc. cél. Buch V, Satz 2):

$$A+B-2C = -\frac{16}{9}\pi\left(\alpha h-\frac{1}{2}\alpha\varphi\right)\int\varrho.da^5;$$

ferner hat man die Masse der Erde:

$$m = \frac{4}{3}\pi\int\varrho.da^3,$$

wodurch das Integral eliminirt werden kann. Setzt man $\alpha h = \frac{1}{312}$, $\frac{1}{2}\alpha\varphi = \frac{1}{578}$, so folgt:

$$A+B-2C = -\frac{4}{3}\left(\alpha h-\frac{1}{2}\alpha\varphi\right)m = \frac{133}{67626}m,$$

oder:

$$\frac{\mu}{A+B-2C} = -\frac{67626}{133}\cdot\frac{\mu}{m}.$$

Es ist nun noch übrig, dass wir μ und m in einem gleichen Maasse ausdrücken, wozu ich Pariser Pfunde nehmen werde. Nimmt man das Gewicht eines Kubikfusses Wasser $= 69{,}89$ Pfunde und die mittlere Dichte der Erde 4,5 mal grösser als die des Wassers, so ist m oder das Gewicht der Erde in Pfunden ausgedrückt $= 9933 \times 10^{21}$. Soll daher $\frac{\mu}{A+B-2C}$ auch nur eine Secunde betragen, so muss $\mu = 947 \times 10^{14}$ Pfunden sein; dieses ist das Gewicht von 114 geographischen Kubikmeilen einer Masse, deren Dichte gleich der mittleren Dichte der Erde ist.

Man sieht also hieraus, dass Alles was die Kräfte der Menschen, selbst wenn sie Jahrhunderte lang in einem gleichen Sinne wirken, auf der Erde verändern können, in dieser Beziehung unbedeutend ist. Die seit langer Zeit von beiden Indien nach Europa geführten Massen würden also unbedeutend sein, selbst wenn sie in Wasser und Luft unauflöslich wären und durch die Rückladung der Schiffe nicht ersetzt würden.

---

163. Betrachtungen über die Methode der Vervielfältigung der Beobachtungen.*)

(Astron. Nachr. **11**, p. 269.)

So häufige Anwendungen das von BORDA in die astronomische Praxis eingeführte Princip der Vervielfältigung der Beobachtungen auch gefunden hat, so ist doch die nähere Angabe des Vortheils, welchen dasselbe gewährt, unerörtert geblieben; auch ist nicht untersucht worden, weder auf welche Art die nach dieser Methode gemachten Beobachtungen combinirt werden müssen, wenn sie ihr wahrscheinlichstes Resultat geben sollen, noch wie gross das Gewicht dieses Resultates ist.

Ich werde diese Lücken jetzt auszufüllen suchen. Man muss in der That wünschen, auch aus Beobachtungen dieser Art das wahrscheinlichste Resultat ziehen zu können; auch wird der Vortheil, welcher in einem besonderen Falle von der Anwendung des Princips der Vervielfältigungen zu erwarten ist, nur dann richtig gewürdigt werden können, wenn vorher genau erkannt ist, was dadurch geleistet wird. Um unnöthige Weitläufigkeit in Worten zu vermeiden, werde ich nur von der Messung eines Winkels (x) zwischen zwei festen Punkten A und B reden; es hat keine Schwierigkeit, das diesem Falle Angemessene auf jeden anderen zu übertragen.

1.

Bei jeder Beobachtung kommen wenigstens zwei von einander unabhängige Fehlerursachen in Betracht, im Falle einer Winkelmessung sind dieses die Unvoll-

*) [275 d. a. Verz. — Vgl. auch Abh. 135, p. 91. — Br. m. O. II. 376.]

kommenheiten der Einstellungen auf die Objecte, zwischen welchen der Winkel gemessen werden soll, und die Unvollkommenheiten der Theilungen und der Ablesungen derselben. Wenn man alle Beobachtungen mit einem gewissen Instrumente nach einer gleichen Methode macht und jede derselben von den übrigen ganz unabhängig ist, so haben alle (wenn übrigens nicht besondere Fehlerursachen für einige vorhanden sind) offenbar einen gleichen Werth und es hat gar kein Interesse, die beiden Fehlerursachen, aus deren Zusammenwirken der diesen Beobachtungen eigenthümliche Fehler entsteht, von einander zu trennen. Allein wenn die verschiedenen Beobachtungen von einander nicht unabhängig sind, wie dieses bei der Anwendung der Methode der Vervielfältigung der Fall ist, so trennen sich beide Fehlerursachen und erfordern, wenn es darauf ankömmt, die wahren Resultate einer Beobachtungsreihe zu erhalten, eine abgesonderte Berücksichtigung. Die Art, wie diese Absonderung im Folgenden gemacht ist, wird in allen ähnlichen Fällen angewandt werden können.

Ich werde den wahrscheinlichen (oder mittleren) Fehler der Einstellungen durch α, der Theilungen und Ablesungen durch β bezeichnen, grösserer Bequemlichkeit wegen aber nicht α und β selbst, sondern $\frac{1}{\alpha\alpha} = a$ und $\frac{1}{\beta\beta} = b$ in die Rechnung einführen. Diese a und b sind die Gewichte der Operationen des Einstellens und Ablesens: die Einheit derselben ist das Gewicht einer Beobachtung, welche den wahrscheinlichen (oder mittleren) Fehler $= 1$ besitzt.

Die Messung des Winkels zwischen zwei Punkten A und B erfordert vier Operationen, welche ich in der Ordnung, die bei der Anwendung eines Vervielfältigungsinstruments stattfindet, jetzt aufzählen werde:

1) die Alhidade wird festgeklemmt; der Index derselben entspricht einem willkürlichen Punkte (u) der Theilung, welcher durch die Ablesung $= m'$ gefunden wird (Gewicht $= b$);
2) das Instrument wird, ohne u zu ändern, auf den Punkt A eingestellt; die Entfernung dieses Punktes von dem Anfangspunkte der Theilungen (α) wird hierdurch $= u$ (Gewicht $= a$);
3) die Alhidade wird, ohne α zu ändern, gedreht und das Instrument auf den Punkt B eingestellt; hierdurch gelangt der Index auf einen anderen Punkt der Theilung (u'), dessen Entfernung vom Anfangspunkte der Theilungen $= \alpha + x$ ist (Gew. $= a$);
4) die Angabe des Index wird abgelesen und $= m'$ gefunden (Gew. $= b$).

Hierdurch ist eine Beobachtung vollendet, und wenn das Instrument als nicht-vervielfältigendes angewandt werden soll, hat es dabei sein Bewenden; ich werde einen Augenblick dabei verweilen.

Die vier Gleichungen, welche diesen vier Operationen entsprechen, nämlich:

$$\begin{aligned} u &= m, && \text{Gewicht} = b \\ \alpha &= u, && \text{„} \quad a \\ \alpha + x &= u', && \text{„} \quad a \\ u' &= m', && \text{„} \quad b \end{aligned}$$

enthalten eben so viele unbekannte Grössen und geben das bestimmte Resultat $x = m' - m$. Um das Gewicht desselben zu finden, macht man nach den gewöhnlichen Vorschriften der Methode der kleinsten Quadrate aus diesen Gleichungen vier neue:

$$\begin{aligned} A &= 2a\alpha - a\,u - au' + ax = 0 \\ U &= -a\alpha + (a+b)\,u - bm = 0 \\ U' &= -a\alpha + (a+b)\,u' - ax - bm' = 0 \\ X' &= a\alpha - au' + ax = 0 \end{aligned}$$

und eliminirt daraus alle unbekannten Grössen bis auf x; setzt man die übrigbleibende Gleichung unter die Form

$$X = px - q,$$

so ist $x = \frac{q}{p}$ der gesuchte Werth von x und p ist sein Gewicht. Man findet ohne Mühe:

$$X = \frac{ab}{2(a+b)}x - \frac{ab}{2(a+b)}(m' - m)$$

also das Gewicht der Bestimmung von x

$$= \frac{ab}{2(a+b)}.$$

Der diesem Gewicht entsprechende wahrscheinliche (oder mittlere) Fehler ist $= \sqrt{2\alpha\alpha + 2\beta\beta}$, derselbe, den man unmittelbar gefunden haben würde, wenn man von dem Satze hätte ausgehen wollen, dass eine Beobachtung, auf welche mehrere von einander unabhängige Fehlerursachen einwirken, welche resp. die wahrscheinlichen Fehler α, β, γ.... erzeugen würden, den wahrscheinlichen Fehler $\sqrt{\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \ldots}$ besitzt. Dieser Satz ist auf die hier angewandte Art sehr leicht zu beweisen.

2.

Ich habe hier eine einzelne für sich bestehende Beobachtung betrachtet, welche von allen anderen derselben Art ganz unabhängig ist. Das Wesentliche der Vervielfältigungsmethode ist aber die Abhängigkeit jeder folgenden Beobachtung von der vorhergehenden: das u', auf welches der Index durch diese gelangt ist, vertritt bei jener die Stelle des vorigen u. Ob die vierte

Operation, die Ablesung, gemacht oder unterlassen wird, ist in Beziehung auf die Benennung der Methode gleichgültig: eine Reihe Beobachtungen, deren jede folgende von dem der vorigen zugehörigen u' ausgeht, ist eine vervielfältigte, es mag zwischen jeder einzelnen, oder in gleichen oder ungleichen Zwischenräumen, oder nur am Anfange und am Ende abgelesen sein. Um alle diese verschiedenen Fälle unter Eine Uebersicht bringen zu können, werde ich den Ablesungen verschieden bezeichnete Gewichte beilegen; für die fehlenden werden die ihnen zugehörigen Gewichte später $= 0$ gesetzt, für die gemachten werden sie sämmtlich $= b$. Auf diese Art erhält man für jede Reihe von Vervielfältigungsbeobachtungen, der Aufzählung im 1. Art. gemäss, folgende Reihe von Gleichungen:

Gewicht $= a$	$= a$	$u = m$	Gewicht $= b$
$u = \alpha$;	$u' = \alpha + x$;	$u' = m'$	„ b'
$u' = \alpha'$;	$u'' = \alpha' + x$;	$u'' = m''$	„ b''
$u'' = \alpha''$;	$u''' = \alpha'' + x$;	$u''' = m'''$	„ b'''

u. s. w.

$u^{(n-1)} = \alpha^{(n-1)}$; $u^{(n)} = \alpha^{(n-1)} + x$; $u^{(n)} = m^{(n)}$ „ $b^{(n)}$

Mit Ausnahme des Falles, wo nur m und $m^{(n)}$ abgelesen sind, ist die Angabe dieser Gleichungen grösser als die der unbekannten Grössen. Die Gleichungen, aus welchen die wahrscheinlichste Bestimmung dieser Grössen hervorgeht, sind folgende:

$$2a\alpha + ax = a(u + u')$$
$$2a\alpha' + ax = a(u' + u'')$$
$$2a\alpha'' + ax = a(u'' + u''')$$

u. s. w.

$$2a\alpha^{(n-1)} + ax = a(u^{(n-1)} + u^{(n)})$$
$$(a+b)u = a\alpha + bm$$
$$(2a+b)u' = a(\alpha + \alpha' + x) + b'm'$$
$$(2a+b)u'' = a(\alpha' + \alpha'' + x) + b''m''$$

u. s. w.

$$(2a+b)u^{(n-1)} = a(\alpha^{(n-2)} + \alpha^{(n-1)} + x) + b^{(n-1)}m^{(n-1)}$$
$$(a+b)u^{(n)} = a(\alpha^{(n-1)} + x) + b^{(n)}m^{(n)}$$
$$nax + a(\alpha + \alpha' + \ldots\alpha^{(n-1)}) = a(u' + u'' + \ldots + u^{(n)})$$

Wendet man die aus den n ersten Gleichungen hervorgehenden Ausdrücke von α, α', α'',... $\alpha^{(n-1)}$ an, um die übrigen von diesen Grössen zu befreien, und dividirt man diese, mit Ausnahme der letzten, durch $\frac{1}{2}a$, was erlaubt ist, indem man nicht die Gewichte der Bestimmungen der verschiedenen u, sondern nur das Gewicht von x zu wissen verlangt, so erhält man:

$$\left(1 + \frac{2b}{a}\right)u - u' = \frac{2b}{a}m - x$$
$$-u + \left(2 + \frac{2b'}{a}\right)u' - u'' = \frac{2b'}{a}m'$$
$$-u' + \left(2 + \frac{2b''}{a}\right)u'' - u''' = \frac{2b''}{a}m''$$

u. s. w.

$$-u^{(n-2)} + \left(2 + \frac{2b^{(n-1)}}{a}\right)u^{(n-1)} - u^{(n)} = \frac{2b^{(n-1)}}{a}m^{(n-1)}$$
$$-u^{(n-1)} + \left(1 + \frac{2b^{(n)}}{a}\right)u^{(n)} = \frac{2b^{(n)}}{a}m^{(n)} + x$$

und

$$\frac{an}{2}x - \frac{a}{2}(u^{(n)} - u) = 0.$$

Wenn die wirklich gemachten Ablesungen die Ordnungszahlen

$$0,\ h,\ i,\ l,\ldots.,\ m,\ n$$

haben, so werden

$$b,\ b^{(h)},\ b^{(i)},\ b^{(l)},\ldots.,\ b^{(m)},\ b^{(n)}$$

einander gleich, die übrigen verschwinden. Man hat dann die rechts vom Gleichheitszeichen stehende Grösse aller Gleichungen, bei welchen das letztere der Fall ist $= 0$, den Coefficienten des mittleren Gliedes derselben $= 2$. Hieraus folgert man leicht:

$$u' - u = u'' - u' = \ldots = u^{(h)} - u^{(h-1)} = \frac{u^{(h)} - u}{h}$$
$$u^{(h+1)} - u^{(h)} = u^{(h+2)} - u^{(h+1)} = \ldots = u^{(i)} - u^{(i-1)} = \frac{u^{(i)} - u^{(h)}}{i-h}$$

u. s. w.

Indem diese Gleichungen hierdurch erfüllt werden, kommen sie nicht weiter in Betracht; die übrigen verwandeln sich in

$$\left(\frac{2b}{a} + \frac{1}{h}\right)u - \frac{1}{h}u^{(h)} = \frac{2b}{a}m - x$$
$$-\frac{1}{h}u + \left(\frac{2b}{a} + \frac{1}{h} + \frac{1}{i-h}\right)u^{(h)} - \frac{1}{i-h}u^{(i)} = \frac{2b}{a}m^{(h)}$$
$$-\frac{1}{i-h}u^{(h)} + \left(\frac{2b}{a} + \frac{1}{i-h} + \frac{1}{l-i}\right)u^{(i)} - \frac{1}{l-i}u^{(l)} = \frac{2b}{a}m^{(i)}$$

u. s. w.

$$-\frac{1}{n-m}u^{(m)} + \left(\frac{2b}{a} + \frac{1}{n-m}\right)u^{(n)} = \frac{2b}{a}m^{(n)} + x$$

Man findet hieraus durch eine sehr leichte Rechnung die Ausdrücke von $u^{(n)}$ und u durch die gemachten Ablesungen und x. Dividirt man nämlich die erste Gleichung durch $\frac{2bh}{a} + 1$ und addirt man den Quotienten zur zweiten, so ist die Summe frei von u; dividirt man diese Summe durch den Coefficienten von $u^{(h)}$ und durch $i - h$ und addirt man den Quotienten zur dritten Gleichung, so ist die Summe beider auch

frei von $u^{(h)}$. Die Fortsetzung dieses Verfahrens bis zur letzten Gleichung führt auf die Form

$$Lu^{(n)} = M + Nx.$$

Wendet man dasselbe Verfahren in umgekehrter Ordnung an, so dass man bei der letzten Gleichung anfängt und bei der ersten endigt, so erhält man, analog bezeichnet:

$$L'u = M' + N'x.$$

Die Substitution der aus beiden Rechnungen hervorgegangenen Ausdrücke von $u^{(n)}$ und u in die Gleichung

$$\frac{an}{2}x - \frac{a}{2}(u^{(n)} - u) = 0$$

gibt endlich:

$$\frac{a}{2}\left(n - \frac{N}{L} + \frac{N'}{L'}\right)x - \frac{a}{2}\left(\frac{M}{L} - \frac{M'}{L'}\right) = 0,$$

also

$$x = \frac{\frac{M}{L} - \frac{M'}{L'}}{n - \frac{N}{L} + \frac{N'}{L'}}$$

und das Gewicht dieser Bestimmung

$$= \frac{a}{2}\left(n - \frac{N}{L} + \frac{N'}{L'}\right).$$

3.

Wenn die Ordnungszahlen der Beobachtungen, bei welchen abgelesen worden ist, nämlich $0, h, i, l \ldots m, n$, eine arithmetische Progression sind, so kann man den Werth und das Gewicht von x, ohne in Weitläufigkeiten zu gerathen, noch weiter entwickeln. Die Vervielfältigungsbeobachtungen sind meistens in diesem Falle, indem man entweder nach jeder einzelnen Beobachtung, oder nach jeder vierten oder fünften abzulesen pflegt.

Ich werde also

$$h = i - h = l - i = \ldots = m - n$$

annehmen, für die Ordnungszahl der letzten Beobachtung aber nh schreiben, so dass die ganze Reihe der Beobachtungen aus n Abtheilungen, jede von h Vervielfältigungen besteht. Die allgemeineren Gleichungen im vorigen Art. verwandeln sich in diesem Falle in:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{2b}{a} + \frac{1}{h}\right)u - \frac{1}{h}u^{(h)} = \frac{2b}{a}m - x\\
-\frac{1}{h}u &+ \left(\frac{2b}{a} + \frac{1}{h}\right)u^{(h)} - \frac{1}{h}u^{(2h)} = \frac{2b}{a}m^{(h)}\\
-\frac{1}{h}u^{(h)} &+ \left(\frac{2b}{a} + \frac{1}{h}\right)u^{(2h)} - \frac{1}{h}u^{(3h)} = \frac{2b}{a}m^{(2h)}
\end{aligned}$$

u. s. w.

$$-\frac{1}{h}u^{(nh-h)} + \left(\frac{2b}{a} + \frac{1}{h}\right)u^{(nh)} = \frac{2b}{a}m^{(nh)} + x$$

oder wenn man sie mit h multiplicirt und k für $\frac{bh}{a} + 1$ schreibt, in:

$$\begin{aligned}
(2k-1)u &- u^{(h)} = 2(k-1)m - hx\\
-u &+ 2ku^{(h)} - u^{(2h)} = 2(k-1)m^{(h)}\\
-u^{(h)} &+ 2ku^{(2h)} - u^{(3h)} = 2(k-1)m^{(2h)}
\end{aligned}$$

u. s. w.

$$-u^{(nh-h)} + (2k-1)u^{(nh)} = 2(k-1)m^{(nh)} + hx$$

Aus diesen Gleichungen muss der Ausdruck von $u^{(nh)} - u$ abgeleitet und in die Gleichung

$$\frac{anh}{2}x - \frac{a}{2}(u^{(nh)} - u) = 0$$

gesetzt werden, welche dann x bestimmen wird. Zieht man die erste von der letzten, die zweite von der vorletzten u. s. w. ab und bezeichnet man der Abkürzung wegen $u^{(nh)} - u$ durch Δ_n, $u^{(nh-h)} - u^{(h)}$ durch Δ_{n-2} u. s. w., ferner $m^{(nh)} - m$ durch d_n, $m^{(nh-h)} - m^{(h)}$ durch d_{n-2} u. s. w., so erhält man folgende neue Gleichungen:

$$\begin{aligned}
(2k-1)\Delta_n &- \Delta_{n-2} = 2(k-1)d_n + 2hx\\
-\Delta_n &+ 2k\Delta_{n-2} - \Delta_{n-4} = 2(k-1)d_{n-2}\\
-\Delta_{n-2} &+ 2k\Delta_{n-4} - \Delta_{n-6} = 2(k-1)d_{n-4}
\end{aligned}$$

u. s. w.

Wenn n eine gerade Zahl ist, so ist die letzte dieser Gleichungen:

$$-\Delta_4 + 2k\Delta_2 = 2(k-1)d_2;$$

wenn es eine ungerade Zahl ist, aber

$$-\Delta_3 + (2k+1)\Delta_1 = 2(k-1)d_1.$$

Durch diese Verschiedenheit wird eine abgesonderte Entwickelung beider Fälle nöthig. Ich werde mit einem geraden n anfangen. Schreibt man die Gleichungen in umgekehrter Ordnung:

$$\begin{aligned}
2k\Delta_2 - \Delta_4 &= 2(k-1)d_2\\
-\Delta_2 + 2k\Delta_4 - \Delta_6 &= 2(k-1)d_4\\
-\Delta_4 + 2k\Delta_6 - \Delta_8 &= 2(k-1)d_6
\end{aligned}$$

u. s. w.

$$-\Delta_{n-2} + (2k-1)\Delta_n = 2(k-1)d_n + 2hx$$

und schafft man, durch Division der ersten Gleichung durch $2k = k'$, aus der Summe dieses Quotienten und der zweiten Gleichung Δ_2 fort, so dass man erhält

$$k''\Delta_4 - \Delta_6 = 2(k-1)\left(d_4 + \frac{d_2}{k'}\right)$$

wo k'' für $2k - \frac{1}{k'}$ geschrieben ist; ferner aus dieser und der dritten Gleichung Δ_4, so dass man erhält

$$k''\Delta_6 - \Delta_8 = 2(k-1)\left(d_6 + \frac{d_4}{k''} + \frac{d_2}{k''k'}\right)$$

u. s. w., und setzt man dieses bis zur letzten Gleichung fort, so ergibt diese:

$$(k^{(\frac{1}{2}n)}-1)\,\Delta_n = 2(k-1)\left(d_n + \frac{d_{n-2}}{k^{(\frac{1}{2}n-1)}} + \frac{d_{n-4}}{k^{(\frac{1}{2}n-1)}k^{(\frac{1}{2}n-2)}} + \cdots + \frac{d_2}{k^{(\frac{1}{2}n-1)}k^{(\frac{1}{2}n-2)}\ldots k'}\right) + 2hx$$

Man erhält endlich, indem man den hieraus folgenden Ausdruck von Δ_n in die Gleichung

$$\frac{anh}{2}x - \frac{a}{2}\Delta_n = 0$$

setzt,

$$0 = \frac{ah}{2}\left(n - \frac{2}{k^{(\frac{1}{2}n)}-1}\right)x - \frac{a(k-1)}{k^{(\frac{1}{2}n)}-1}\left(d_n + \frac{d_{n-2}}{k^{(\frac{1}{2}n-1)}} + \frac{d_{n-4}}{k^{(\frac{1}{2}n-1)}k^{(\frac{1}{2}n-2)}} + \cdots + \frac{d_2}{k^{(\frac{1}{2}n-1)}k^{(\frac{1}{2}n-2)}\ldots k'}\right).$$

Hieraus ergibt sich der Werth und das Gewicht von x; das letztere ist der Coefficient von x in dieser Gleichung. Die Reihe der eingeführten k', k'',.... ist

$$k' = 2k;\quad k'' = 2k - \frac{1}{k'};\quad k''' = 2k - \frac{1}{k''} \text{ u. s. w.}$$

Für ein ungerades n ist die Reihe der Gleichungen, in umgekehrter Ordnung geschrieben:

$$2(k+1)\Delta_1 - \Delta_3 = 2(k-1)d_1$$
$$-\Delta_1 + 2k\Delta_3 - \Delta_5 = 2(k-1)d_3$$
$$-\Delta_3 + 2k\Delta_5 - \Delta_7 = 2(k-1)d_5$$
u. s. w.
$$-\Delta_{n-2} + (2k-1)\Delta_n = 2(k-1)d_n + 2hx$$

Führt man hier

$$x' = 2k+1;\quad x'' = 2k - \frac{1}{x'};\quad x''' = 2k - \frac{1}{x''} \text{ u. s. w.}$$

in die Rechnung ein, so wird, ganz ähnlich mit dem vorher betrachteten Falle, die Endgleichung:

$$0 = \frac{ah}{2}\left(n - \frac{2}{x^{(\frac{n+1}{2})}-1}\right)x - \frac{a(k-1)}{x^{(\frac{n+1}{2})}-1}\left(d_n + \frac{d_{n-2}}{x^{(\frac{n-1}{2})}} + \frac{d_{n-4}}{x^{(\frac{n-1}{2})}x^{(\frac{n-2}{2})}} + \cdots + \frac{d_1}{x^{(\frac{n-1}{2})}x^{(\frac{n-2}{2})}\ldots x'}\right).$$

4.

Ich werde jetzt die Grössen k', k'', k''', u. s. w. und x', x'', x''' u. s. w. unabhängig von einander ausdrücken. Multiplicirt man die Reihe der Gleichungen

$$k' = 2k$$
$$k'' = 2k - \frac{1}{k'}$$
$$k''' = 2k - \frac{1}{k''}$$
u. s. w.

respective mit 1, k', $k'k''$, $k'k''k'''$, u. s. w. und bezeichnet man k', $k'k''$, $k'k''k'''$,.... durch $\varphi 1$, $\varphi 2$, $\varphi 3$,.... so verwandeln sie sich in

$$0 = \varphi 1 - 2k$$
$$0 = \varphi 2 - 2k\varphi 1 + 1$$
$$0 = \varphi 3 - 2k\varphi 2 + \varphi 1$$
$$0 = \varphi 4 - 2k\varphi 3 + \varphi 2$$
u. s. w.

Hieraus geht hervor, dass $\varphi 1$, $\varphi 2$, $\varphi 3$ u. s. w. die Coefficienten einer rückkehrenden Reihe sind und dass man die identische Gleichung

$$\frac{1}{1-2ky+yy} = 1 + \varphi 1.y + \varphi 2.y^2 + \varphi 3.y^3 \ldots$$

hat. Bezeichnet man $\sqrt{kk-1}$ durch r, $k+r$ durch R, $k-r$ durch R', so hat man:

$$\frac{1}{1-2ky+yy} = \frac{1}{(R-y)(R'-y)} = \frac{1}{2r}\left(\frac{1}{R'-y} - \frac{1}{R-y}\right),$$

und wenn man diesen Ausdruck nach den aufsteigenden Potenzen von y entwickelt:

$$= \frac{1}{2r}\left\{\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right) + \left(\frac{2}{R'^2} - \frac{2}{R^2}\right)y + \left(\frac{1}{R'^3} - \frac{1}{R^3}\right)y^2 + \ldots\right\}$$

Bemerkt man noch, dass $RR' = 1$ ist, so erhält man allgemein:

$$2r\varphi i = R^{i+1} - R'^{i+1}$$

und hieraus

$$k^{(i)} = \frac{\varphi i}{\varphi(i-1)} = \frac{R^{i+1} - R'^{i+1}}{R^i - R'^i}.$$

Die Reihe der x, nämlich

$$x' = 2k+1$$
$$x'' = 2k - \frac{1}{x'}$$
$$x''' = 2k - \frac{1}{x''}$$
u. s. w.

lässt sich ebenfalls durch R und R' ausdrücken. Multiplicirt man diese Gleichungen respective mit 1, x', $x'x''$, $x'x''x'''$,... und bezeichnet man diese Producte durch 1, $\psi 1$, $\psi 2$, $\psi 3$,... so verwandeln die Gleichungen sich in

$$0 = \psi 1 - 2k - 1$$
$$0 = \psi 2 - 2k\psi 1 + 1$$
$$0 = \psi 3 - 2k\psi 2 + \psi 1$$
$$0 = \psi 4 - 2k\psi 3 + \psi 2$$
u. s. w.

Man sieht hieraus, dass man hat:

$$\frac{1+y}{1-2ky+yy} = 1 + \psi 1.y + \psi 2.y^2 + \psi 3.y^3 + \ldots;$$

was links vom Gleichheitszeichen steht, ist

$$= \frac{1}{2r}\left(\frac{1+R'}{R'-y} - \frac{1+R}{R-y}\right)$$

und wenn man $\frac{1}{R}$ für R' schreibt

$$= \frac{1+R}{2r}\left(\frac{1}{1-Ry} - \frac{1}{R-y}\right).$$

Die Entwickelung dieses Ausdrucks nach den aufsteigenden Potenzen von y gibt allgemein:

$$2r\psi i = (1+R)\left(R^i - \frac{1}{R^{i+1}}\right)$$
$$= \frac{(1+R)}{\sqrt{R}}\left(R^{i+\frac{1}{2}} - R'^{i+\frac{1}{2}}\right)$$
$$= (\sqrt{R}+\sqrt{R'})\,(R^{i+\frac{1}{2}} - R'^{i+\frac{1}{2}})$$

man hat also auch

$$x^{(i)} = \frac{\psi i}{\psi(i-1)} = \frac{R^{i+\frac{1}{2}} - R'^{i+\frac{1}{2}}}{R^{i-\frac{1}{2}} - R'^{i-\frac{1}{2}}}.$$

5.

Aus dem vorigen Art. geht hervor, dass die richtige Combination einer Reihe von Vervielfältigungsbeobachtungen, in welcher die Ablesungen gleichmässig vertheilt sind, sowie auch die Berechnung des Gewichtes ihres Resultats, auf die Function

$$R^i - R'^i$$

oder

$$R^i - R^{-i}$$

zurückführt. Diese Function werde ich jetzt durch $[i]$ bezeichnen, ihre Anwendung auch nicht auf ganze Werthe von i beschränken. Nach den Formeln des 3. Art. ist für ein gerades n, wenn man für die Reihe der k ihre Ausdrücke durch die hier eingeführte Function setzt:

$$x = \frac{\frac{2}{h}(k-1)}{n[\frac{1}{2}n+1] - (n+2)[\frac{1}{2}n]}\left\{d_n[\tfrac{1}{2}n] + d_{n-2}[\tfrac{1}{2}n-i] + \ldots + d_4[2] + d_2[1]\right\}$$

und das Gewicht dieser Bestimmung

$$= \frac{ah}{2}\left\{\frac{n[\frac{1}{2}n+1] - (n+2)[\frac{1}{2}n]}{[\frac{1}{2}n+1] - [\frac{1}{2}n]}\right\}$$

Es ist offenbar, dass der gemeinschaftliche Factor des Ausdruckes von x nichts anderes sein kann als

$$\frac{1:h}{n[\frac{1}{2}n] + (n-2)[\frac{1}{2}n-1] + \ldots + 4[2] + 2[1]};$$

dieses folgt aus der Nothwendigkeit, dass für den Fall völlig genauer Beobachtungen, für welchen $d_n = nhx$, $d_{n-2} = (n-2)hx$ u. s. w. sein würde, die Formel sich in $x = x$ verwandele. Man kann aber auch diese Umformung leicht unmittelbar verificiren, indem man $n[\frac{1}{2}n+1] - (n+2)[\frac{1}{2}n]$ durch

$$2(k-1) = R + R' - 2 = (\sqrt{R} - \sqrt{R'})^2 = [\tfrac{1}{2}]^2$$

dividirt. Hieraus geht eine zweite Formel für x hervor, welche nur die Berechnung der Functionen $[i]$ von $i = 1$ bis $i = \frac{1}{2}n$ voraussetzt, nämlich

$$x = \frac{1}{h}\cdot\frac{d_n[\frac{1}{2}n] + d_{n-2}[\frac{1}{2}n-1] + \ldots + d_4[2] + d_2[1]}{n[\frac{1}{2}n] + (n-2)[\frac{1}{2}n-1] + \ldots + 4[2] + 2[1]}.$$

Bezeichnet man den Nenner dieser Formel durch N, so hat man:

$$n[\tfrac{1}{2}n+1] - (n+2)[\tfrac{1}{2}n] = 2(k-1)N$$

und erhält hieraus

$$[\tfrac{1}{2}n+1] - [\tfrac{1}{2}n] = \frac{2}{n}\left\{[\tfrac{1}{2}n] + (k-1)N\right\}.$$

Setzt man dieses in den Ausdruck des Gewichtes von x, so erhält es die Form:

$$\frac{\frac{1}{2}n\,b\,hh\,N}{[\frac{1}{2}n] + (k-1)N}.$$

Für den Fall eines ungeraden n findet man die folgenden, den vorigen ganz gleichen Formeln:

$$x = \frac{\frac{2}{h}(k-1)}{n\left[\frac{n+2}{2}\right] - (n+2)\left[\frac{n}{2}\right]}\left\{d\left[\frac{n}{2}\right] + d_{n-2}\left[\frac{n-2}{2}\right] + \ldots + d_3\left[\frac{3}{2}\right] + d_1\left[\frac{1}{2}\right]\right\}$$

oder auch

$$x = \frac{1}{h}\cdot\frac{d_n\left[\frac{n}{2}\right] + d_{n-2}\left[\frac{n-2}{2}\right] + \ldots + d_3\left[\frac{3}{2}\right] + d_1\left[\frac{1}{2}\right]}{n\left[\frac{n}{2}\right] + (n-2)\left[\frac{n-2}{2}\right] + \ldots + 3\left[\frac{3}{2}\right] + \left[\frac{1}{2}\right]}$$

Das Gewicht dieser Bestimmung

$$= \frac{ah}{2}\left\{\frac{n\left[\frac{n+2}{2}\right] - (n+2)\left[\frac{n}{2}\right]}{\left[\frac{n+2}{2}\right] - \left[\frac{n}{2}\right]}\right\}$$

oder, wenn der Nenner der zweiten Formel für x durch N bezeichnet wird:

$$\frac{\frac{1}{2}n\,b\,hh\,N}{\left[\frac{n}{2}\right] + (k-1)N}.$$

6.

Wollte man die Ablesungen des Instruments als ganz genau voraussetzen und die einzige Fehlerursache in den Einstellungen des Fernrohrs auf die Punkte, zwischen welchen der Winkel gemessen werden soll, suchen, so würde $b = \infty$ und k und R gleichfalls unendlich gross sein; die folgenden Glieder der Formel

für x würden, vergleichungsweise mit dem ersten, verschwinden, und der Ausdruck von x sich auf $\frac{1}{nh} d_n$ reduciren. Wollte man dagegen die Einstellungen als völlig genau ansehen und die Fehler nur in den Ablesungen suchen, so würden $a = \infty$, $k = 1$, $R = 1$ sein, die Functionen $R^i - R^{-i}$ würden verschwinden und Zähler und Nenner der Formeln für x würden gleichfalls verschwinden. Man erhält den dieser Voraussetzung angemessenen Werth von x dadurch, dass man Zähler und Nenner in Beziehung auf R differentiirt und statt ihrer die Differentialquotienten setzt; da

$$\frac{d[i]}{dR} = \frac{i}{R}(R^i + R^{-i}),$$

also in dem hier betrachteten Falle $= 2i$ ist, so ist dieser Werth von x

$$= \frac{n d_n + (n-2) d_{n-2} + (n-4) d_{n-4} + \ldots}{nn + (n-2)^2 + (n-4)^2 + \ldots}.$$

Die erste Praxis, nämlich den ganzen Bogen, welchen der Index des Instruments von der ersten Beobachtung bis zur letzten durchlaufen hat, durch die Anzahl der Beobachtungen dividirt, als wahrscheinlichsten Werth des gesuchten Winkels zu betrachten, ist die gewöhnliche; die durch Vervielfältigungsinstrumente gemachten Beobachtungen der grossen französischen Gradmessung und vieler anderen ähnlichen Unternehmungen sind so berechnet worden. Diese Praxis ist jedoch nicht zu vertheidigen, desto weniger, da der Grund jeder Anwendung der Vervielfältigungsmethode kein anderer sein kann, als Theilungs- und Ablesungsfehler des Instruments unschädlicher zu machen, also in der Wahl der Methode selbst eine Anerkennung derselben Fehler liegt, deren angenommenes Nichtvorhandensein die Grundlage des Rechnungsverfahrens ist. Weniger inconsequent erscheint die zweite, die Summe der Quadrate der Unterschiede, bis auf welche man die Ablesungen darstellen kann, zum Minimum machende Rechnungsart; sie ist desto richtiger, je grösser die Sicherheit der Einstellungen vergleichungsweise mit der der Ablesungen ist: also auch richtiger, wenn die durch Ablesungen entstehenden Abtheilungen der Beobachtungsreihe nur eine oder einige Vervielfältigungen enthalten, als wenn sie deren viele umfassen. Will man jedoch nicht zufrieden sein, ein der Wahrheit nahes Resultat einer Beobachtungsreihe zu erhalten, sondern sucht man das auf richtigen Principien beruhende, allein wahre, so darf weder die eine noch die andere Praxis angewandt werden, sondern man muss der gegenwärtig entwickelten Theorie folgen.

Indessen steht der Anwendung dieser Theorie eine Schwierigkeit im Wege, nämlich die jedem einzelnen Falle angemessene Bestimmung von $k = 1 + \frac{hb}{a^i}$. Das Gewicht einer Ablesung ($= b$) kann zwar für jedes Instrument ein- für allemal festgesetzt werden; allein das Gewicht einer Einstellung ($= a$) hängt von der grösseren oder geringeren Deutlichkeit der Zielpunkte und von der Ruhe oder Unruhe der Luft ab, und es wird schwerlich gelingen, die Abhängigkeit von diesen Umständen für jeden besonderen Fall vollständig, d. h. in Zahlen, zu erkennen. Dieselbe Schwierigkeit tritt übrigens allenthalben hervor, wo es darauf ankömmt, aus langen Reihen von Beobachtungen Resultate zu ziehen; diese Beobachtungen werden, wenigstens wenn veränderliche äussere Umstände Einfluss darauf haben, nicht sämmtlich gleiches Gewicht besitzen, man kann aber, in Ermangelung eines sicheren Maassstabes für den Einfluss dieser Umstände, nichts anderes thun, als die Ungleichheit des Gewichtes, welche daraus hervorgeht, unberücksichtigt zu lassen, und etwa diejenigen Fälle, wo sie höchst auffallend hervortritt, gänzlich auszuschliessen.

Wenn man die in grosser Anzahl aus den ausgezeichneteren deutschen Werkstätten hervorgegangenen Vervielfältigungsinstrumente aufmerksamer betrachtet, so bemerkt man leicht, dass die Kraft der schönen Fernröhre, mit welchen diese Instrumente versehen zu sein pflegen, die Kraft der Eintheilungen und Ablesungen, so sehr auch diese vervollkommnet worden sind, beträchtlich übertrifft; bei den so häufig angewandten früheren, vor GAMBEY verfertigten französischen Instrumenten ähnlicher Art, welche auch in optischer Beziehung viel unvollkommener waren, scheint dennoch das Uebergewicht der Fernröhre über die Theilungen noch grösser gewesen zu sein. In beiden Fällen ist $\frac{b}{a}$ ein sich der Einheit nicht nähernder Bruch; in beiden also ist die wahrscheinlichste Berechnungsart derjenigen Beobachtungsreihen, in welchen mehr als zwei Ablesungen vorkommen, von der einfachen Division des ganzen von dem Index durchlaufenen Bogens durch die Anzahl der Beobachtungen beträchtlich und zwar desto mehr verschieden, je kleiner die Gruppen von Einstellungen sind, welche durch die Ablesungen getrennt werden. Dieses bezieht sich zwar zunächst auf Beobachtungen, bei welchen nicht fremde ungünstige Umstände hinzukommen; allein ich bemerke, dass das Auge gegen jede Unvollkommenheit des Sehens so empfindlich ist, dass ein Beobachter selten zu dem Entschlusse kommen wird, einen Winkel zu messen, wenn diese Unvollkommenheit eine Grenze erreicht, die beträchtlich nach-

theilig zu werden droht. Aus meiner Erfahrung glaube ich im Gegentheil folgern zu dürfen, dass man häufig geneigt ist, einen Mangel an Eleganz der Bilder im Fernrohr, der auf die Sicherheit des Zielens keinen beträchtlichen Einfluss hat, als eine erhebliche Fehlerursache anzusehen. Ich glaube daher, dass das, was ich über den Werth des Bruches $\frac{b}{a}$ gesagt habe, nicht sehr eng beschränkt, sondern auf alle Fälle, in welchen man Winkel zu beobachten pflegt, ausgedehnt werden darf.

7.

Um die Berechnungsart der Beobachtungsreihen, welche mit einem häufig angewandten Vervielfältigungsinstrumente gemacht worden sind, näher kennen zu lernen, habe ich mich bemüht, die mittleren Fehler der Einstellungen und Ablesungen dieses Instruments auszumitteln. Es ist dieses ein 12zolliger Theodolit von PISTOR, der dem Königl. Preuss. Generalstabe gehört und zu einem beträchtlichen Theile seiner Arbeiten benutzt worden ist. Die Werkstatt, in welcher dieser Theodolit verfertigt worden ist, hat auch bei diesem Instrumente ihren unbestrittenen Ruhm, vorzügliche schöne, fleissige Arbeit zu liefern, bewährt. Das Fernrohr hat 16 Zoll Brennweite, 16 Linien Oeffnung und 27 malige Vergrösserung; die Theilstriche sind höchst regelmässig und gleich und werden durch jeden der vier Nonien von 5 zu 5″ abgelesen.

Ich habe zuerst den Werth von $\alpha\alpha + \beta\beta$, dann α abgesondert zu bestimmen gesucht. Das erstere erlangt man ohne Schwierigkeit durch häufig wiederholte Beobachtungen eines einfachen Winkels zwischen zwei deutlichen irdischen Punkten, indem dem 1. Art. zufolge der mittlere Fehler, den Beobachtungen dieser Art verrathen $= \sqrt{2\alpha\alpha + 2\beta\beta}$ ist. Um ihn zu bestimmen hat Herr Lieutenant KULENKAMP, der dasselbe Instrument seit einigen Jahren anwendet, 55 Beobachtungen an drei verschiedenen Winkeln immer auf anderen Punkten der Theilung, theils auf dem Dreieckspunkte Algeberg, theils hier auf der Sternwarte gemacht. Die Summe der Quadrate der Unterschiede von den mittleren Werthen der drei Winkel findet sich aus diesen Beobachtungen $= 397{,}60$, also das Quadrat des mittleren Fehlers $= 7{,}6461$ und

$$\alpha\alpha + \beta\beta = 3{,}8231.$$

Die von β getrennte Bestimmung von α habe ich auf das Princip gegründet, dass man ein stärkeres Fernrohr schärfer auf das Fadennetz eines schwächeren richten kann, als das schwächere auf das Fadennetz des stärkeren. Der Theodolit wurde im Meridian des Meridiankreises aufgestellt und sein Fernrohr auf die Kreuzfäden in diesem Instrumente gerichtet; dann wurde die Lage des Meridianfernrohrs durch mehrmals wiederholte Anwendung der Schraube eines der Mikroskope, welche behufs der Zonenbeobachtungen an den Pfeilern befestigt sind, bestimmt; endlich wurde das Fernrohr des Meridiankreises auf das Fadennetz des Theodoliten gerichtet und der Unterschied seiner nunmehrigen Lage von der früheren genau so wie vorher gemessen. Dieser Unterschied entsteht aus der Zusammenwirkung dreier Ursachen, nämlich der Unvollkommenheiten der Einstellungen sowohl des schwächeren als des stärkeren Fernrohrs, und der Unvollkommenheit der Messung des Unterschiedes durch das Mikroskop. Die letzte Ursache kann man aber absondern, indem man die Unsicherheit jeder Einstellung des Mikroskops durch häufig wiederholte Einstellungen untersucht; die beiden ersteren kann man gleichfalls von einander trennen, indem man die Sicherheit der Einstellung jedes der beiden Fernröhre seiner Vergrösserung proportional annimmt.

Der Unterschied der Einstellungen des kleineren Fernrohrs auf das grössere und des grösseren auf das kleinere ist 23 Mal gemessen worden:

+ 0″,34	+ 0″,58	+ 0″,21
− 0,10	− 0,10	+ 0,58
+ 0,21	− 0,14	− 0,82
− 1,40	+ 1,17	− 1,68
+ 0,07	+ 0,17	+ 0,03
− 0,10	+ 0,65	+ 0,10
+ 0,34	− 0,17	− 0,51
− 0,10	+ 0,82	

Die Summe der Quadrate dieser Unterschiede ist 9,3041, das Quadrat des mittleren Werthes derselben $= 0{,}4045$. Auf Rechnung der Messungen mit dem Mikroskope kömmt hiervon 0,0842, und für die Einstellungen beider Fernröhre bleibt 0,3203 übrig. Das grössere Fernrohr vergrössert 280, das kleinere 27 Mal. Das Quadrat des mittleren Einstellungsfehlers des Fernrohrs des Theodoliten ist daher:

$$\alpha\alpha = \frac{(280)^2}{(280)^2 + (27)^2} \cdot 0{,}3203 = 0{,}3173.$$

Zieht man diesen Werth von $\alpha\alpha$ von der früher erhaltenen Gleichung ab, so bleibt

$$\beta\beta = 3{,}5058$$

übrig. Die mittleren Fehler der Einstellungen und Ablesungen des Pistor'schen Theodoliten sind daher:

$$\alpha = 0″{,}563; \quad \beta = 1″{,}872.$$

Es ist wirklich auffallend, dass ein so kleines Fernrohr, wie das des Theodoliten ist, eine so grosse Sicher-

heit der Einstellung gewährt; die angeführten Beobachtungen lassen aber über die nahe Richtigkeit dieser Bestimmung keinen Zweifel. Indessen sind diese Beobachtungen an den sich völlig scharf und ruhig zeigenden Fäden des Meridiankreises gemacht, während die Anwendungen des Instruments zu geodätischen Zwecken oft unter weniger günstigen Umständen gemacht werden müssen, welchen ein grösserer Werth von α zukömmt. Wie gross dieser anzunehmen sei, damit er einem mittleren Zustande der äusseren Umstände entspreche, ist, wie man leicht bemerkt, eine Frage, zu deren Beantwortung die Data fehlen. Allein wenn die Regel befolgt wird, unter auffallend unvortheilhaften Umständen nicht zu beobachten, so wird, der im 6. Art. gemachten Bemerkung gemäss, der Werth von α meiner Meinung nach wenigstens nicht stark vergrössert werden dürfen; um meine Ansicht hiervon bestimmter anzugeben, füge ich hinzu, dass ich glaube, dass einer wirklich gemachten Beobachtungsreihe nicht leicht ein mehr als um die Hälfte vergrösserter Werth von α zukommen wird. Die willkürliche Wahl eines bestimmten Werthes, welche der Berechnung der Beobachtungen vorangehen muss, werde ich aus diesem Grunde so treffen, dass ich für $\frac{b}{a} = \frac{\alpha\alpha}{\beta\beta}$, welches den angeführten Bestimmungen zufolge $= 0{,}0905$ ist, die runde Zahl 0,2 annehme, wodurch der mittlere Einstellungsfehler auf 0″837 gebracht wird.

Dieser Annahme zufolge wird

$$k = 1 + \frac{h}{5}$$

und es hat nun kein Hinderniss mehr, die mit dem untersuchten Instrumente gemachten Beobachtungen den im 5. Art. gegebenen Formeln gemäss zu berechnen. Um dieses anschaulich zu machen, will ich den Fall einer 20fachen Vervielfältigung eines Winkels in Zahlen entwickeln; ich werde dabei zuerst annehmen, dass zwischen jeder einzelnen Beobachtung abgelesen ist; dann von 2 zu 2, 4 zu 4, 5 zu 5, 10 zu 10, und endlich nur am Anfange und am Ende; ich werde also nach und nach

$h = 1, 2, 4, 5, 10, 20$ und $n = 20, 10, 5, 4, 2, 1$ setzen.

I. $h = 1$; $n = 20$; $k = 1{,}2$.

$$\begin{aligned} Nx = {} & 504{,}53\, d_{20} + 270{,}76\, d_{18} + 145{,}31\, d_{16} + 77{,}97\, d_{14} \\ & + 41{,}83\, d_{12} + 22{,}42\, d_{10} + 11{,}97\, d_8 + 6{,}32\, d_6 \\ & + 3{,}18\, d_4 + 1{,}33\, d_2 \end{aligned}$$

$N = 19256{,}04$

Gewicht $= 12{,}61$; mittlerer Fehler $= 0''282$.

II. $h = 2$; $n = 10$; $k = 1{,}4$.

$$\begin{aligned} 2Nx = {} & 76{,}317\, d_{10} + 32{,}044\, d_8 + 13{,}404\, d_6 + 5{,}486\, d_4 \\ & + 1{,}960\, d_2 \end{aligned}$$

$N = 1125{,}81$

Gewicht $= 12{,}20$; mittlerer Fehler $= 0''286$.

III. $h = 4$; $n = 5$; $k = 1{,}8$.

$$4Nx = 19{,}6825\, d_5 + 5{,}8187\, d_3 + 1{,}2650\, d_1$$

$N = 117{,}1336$

Gewicht $= 11{,}79$; mittlerer Fehler $= 0''291$.

IV. $h = 5$; $n = 4$; $k = 2{,}0$.

$$5Nx = 13{,}8562\, d_4 + 3{,}4641\, d_2$$

$N = 62{,}3529$

Gewicht $= 11{,}67$; mittlerer Fehler $= 0''293$.

V. $h = 10$; $n = 2$; $k = 3{,}0$.

$$20x = d_2$$

Gewicht $= 11{,}41$; mittlerer Fehler $= 0''296$.

Der VI. Fall: $h = 20$; $n = 1$; $k = 5{,}0$, ist von dem V. weder im Ausdrucke von x noch im Gewichte verschieden. Man kann hierbei noch bemerken, dass für einen rationalen Werth von k sowohl die Formeln für x, als auch die Ausdrücke des Gewichtes in rationalen Zahlen angegeben werden können, z. B. für den IV. Fall:

$$90x = 4d_4 + d_2 \qquad \text{Gewicht} = \tfrac{450}{11} b.$$

8.

Nach den Formeln des 5. Art. können, sobald β oder b bekannt geworden ist und man für den Werth von α eine bestimmte Wahl getroffen hat, das Gewicht und der mittlere Fehler des Resultats einer Reihe von Vervielfältigungsbeobachtungen berechnet werden. Man kann aber durch eine Annäherung an diese Formeln eine leichtere Uebersicht erhalten. Das Gewicht ist nämlich:

$$\frac{ah}{2}\left\{\frac{n\left[\frac{n+2}{2}\right] - (n+2)\left[\frac{n}{2}\right]}{\left[\frac{n+2}{2}\right] - \left[\frac{n}{2}\right]}\right\}$$

oder auch

$$\frac{ah}{2}\left\{n + 1 - \frac{\left[\frac{n+2}{2}\right] + \left[\frac{n}{2}\right]}{\left[\frac{n+2}{2}\right] - \left[\frac{n}{2}\right]}\right\}$$

und wenn man für $\left[\frac{n+2}{2}\right]$ und $\left[\frac{n}{2}\right]$ ihre Ausdrücke setzt,

$$\frac{ah}{2}\left\{n + 1 - \frac{R+1}{R-1}\left(\frac{R^{n+1}-1}{R^{n+1}+1}\right)\right\}$$

Da R^{n+1} für eine einigermaassen zahlreiche Reihe von

Beobachtungen eine grosse Zahl wird, so kann man den davon abhängigen Factor des letzten Gliedes ohne beträchtlichen Fehler = 1 setzen, also den Ausdruck des Gewichtes

$$= \frac{ah}{2}\left\{n+1-\frac{R+1}{R-1}\right\}$$

oder auch, da

$$\frac{R+1}{R-1} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$$

ist,

$$= \frac{ah}{2}\left\{n+1-\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\right\}$$

annehmen. Dieser Ausdruck wird für jede Anzahl der Vervielfältigungen ($= hn$) desto grösser, je kleiner h ist, am grössten für $h = 1$; es ergibt also das grösste Gewicht, welches eine Reihe von Vervielfältigungsbeobachtungen dadurch erlangt, dass man zwischen den einzelnen abliest, näherungsweise

$$= \frac{a}{2}\left\{n+1-\sqrt{\frac{2a}{b}+1}\right\}$$

und den ihm entsprechenden mittleren Fehler von x

$$= \frac{\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{n+1-\sqrt{\frac{2\beta\beta}{\alpha\alpha}+1}}}.$$

Das kleinste Gewicht, welches eine Ablesung am Anfange und eine am Ende ergibt, ist nach der Formel im 5. Art.

$$= \frac{abnn}{2(nb+a)}$$

und der mittlere Fehler von x

$$= \sqrt{\frac{2\alpha\alpha+\frac{2}{n}\beta\beta}{n}}.$$

Aus der Vergleichung dieser Ausdrücke der mittleren Fehler mit dem durch eine eben so grosse Anzahl nichtvervielfältigender Beobachtungen übrig gelassenen, welcher aus der Formel des 1. Art.

$$= \sqrt{\frac{2\alpha\alpha+2\beta\beta}{n}}$$

gefunden wird, geht hervor, in welchem Maasse die Vervielfältigungsbeobachtungen in jedem besonderen Falle im Vortheile sind. Für das oben angeführte Beispiel von 20 Beobachtungen mit dem 12zolligen Pistorschen Theodoliten ist der kleinste mittlere Fehler des durch Vervielfältigung zu erlangenden Resultats = 0,″282, der grösste = 0,″296 gefunden worden; beide sind beträchtlich kleiner als der mittlere Fehler des Mittels aus 20 von einander unabhängigen Beobachtungen des einfachen Winkels, welchen die zuletzt gegebene Formel = 0,″648 bestimmt. Die Vervielfältigungsmethode ist also hier bei ihrer ungünstigsten Anwendung um 0,″352 und bei ihrer günstigsten um 0,″366 im Vortheile. Für den ersten Fall hat dieser Vortheil einen einfachen Ausdruck, den ich, weil er eine Uebersicht gewährt, hierher setzen will. Er ist nämlich

$$= \sqrt{\frac{2}{n}}\left(\sqrt{\alpha\alpha+\beta\beta}-\sqrt{\alpha\alpha+\frac{\beta\beta}{n}}\right)$$

oder auch

$$= \frac{\beta\beta\cdot\frac{n-1}{n}\sqrt{\frac{2}{n}}}{\sqrt{\alpha\alpha+\beta\beta}+\sqrt{\alpha\alpha+\frac{\beta\beta}{n}}}.$$

Man übersieht hierdurch sogleich, in welchem Maasse die Vervielfältigung der Beobachtung vor der wiederholten Anstellung einzelner einen Vortheil voraus hat. Dieser Vortheil ist desto beträchtlicher, je weniger genau man auf dem Instrumente abliest; mit wachsender Genauigkeit der Theilungen und Ablesungen verkleinert er sich aber so sehr, dass dann der Vorzug der Vervielfältigungsmethode wenig beträchtlich wird. Hätte man statt des im 7. Art. untersuchten Instruments ein anderes angewandt, welches bei demselben Werthe von α einen nur halb so grossen von β besässe, so würde der Vortheil auf der Seite der Vervielfältigungen bei 20 Beobachtungen im mittleren Fehler nur 0,″111 betragen.

9.

Ich habe bis hierher angenommen, dass das Resultat einer Winkelbeobachtung aus keinem anderen Grunde als aus den beiden in Rechnung gebrachten von der Wahrheit abweichen könne. Unter dieser Annahme liegt der Vorzug der Vervielfältigungen vor der Wiederholung einzelner Beobachtungen am Tage, allein wenn ein unbedingtes Urtheil über den Vorzug der einen oder der anderen Methode in einem gegebenen Falle gefällt werden soll, muss die Rechtmässigkeit der Annahme vorher untersucht werden.

In Beziehung auf die einfache Beobachtung eines horizontalen Winkels kenne ich keine Fehlerursachen, ausser den Unvollkommenheiten der Einstellungen und Ablesungen, diese letzteren einschliesslich der Theilungsfehler des Instruments genommen. In der That ist die ganze Operation völlig symmetrisch für beide Punkte, zwischen welchen der Winkel gemessen werden soll: man klemmt zuerst den Kreis fest und bewegt die gelöste Alhidade stets in einer Richtung nach und nach auf beide Punkte, so dass das Verfahren für den einen genau dasselbe wird wie für den anderen, und dadurch jeder Grund wegfällt, welcher befürchten lassen

könnte, dass der Winkel fortwährend etwas zu gross oder etwas zu klein gemessen werde; will man sich auch gegen den Einfluss einer langsamen Drehung des Standpunktes des Instruments sichern, so muss man, nachdem in der Ordnung AB auf beide Punkte eingestellt und abgelesen ist, zum zweiten Male in der umgekehrten BA einstellen und ablesen.

Anders verhält es sich aber mit den Vervielfältigungsbeobachtungen: hier erlangt man die grössere, im Vorhergehenden näher bestimmte Freiheit des Resultats von dem Ablesungsfehler nur durch die Annahme, dass während der beiden Bewegungen des Instruments das, was ich im 1. Art. durch u und α bezeichnet habe, wirklich unverändert bleibe. Die Vervielfältigungsinstrumente sollen so gebaut werden, dass Grund vorhanden ist, auf diese Unveränderlichkeit zu rechnen; die mechanischen Künstler scheinen auch vorzüglich hierauf ihre Aufmerksamkeit gerichtet zu haben. Indessen lässt sich einerseits die Möglichkeit einer kleinen Veränderung nicht leugnen, und andererseits muss man zugeben, dass ein directes Prüfungsmittel der Unveränderlichkeit nicht vorhanden ist. Denn durch eine Wiederholung der Ablesung nach der Drehung des mit der Alhidade zusammengeklemmten Kreises kann man die unveränderte relative Lage beider innerhalb einer Grenze, welche die Kraft der Ablesungen überschreitet und welche man nur durch die Methode der Vervielfältigungen zu überschreiten hofft, nicht erkennen; für die Unveränderlichkeit der Lage des Kreises während der alleinigen Drehung der Alhidade ist noch weniger ein Prüfungsmittel vorhanden, ohne dass man behaupten kann, dass es hier so unnöthig wäre, als bei der ganz symmetrisch gemachten Beobachtung eines einfachen Winkels. Ich habe keinen Grund zu glauben, dass dergleichen Veränderungen bei den besseren Vervielfältigungsinstrumenten, z. B. den nach REICHENBACH's Muster gebauten Azimuthaltheodoliten, wirklich vorhanden sind; glaube aber, dass, wenn völlig sichere und selbst über die geringsten Kleinigkeiten entscheidende Prüfungsmittel vorhanden wären, man nicht unterlassen würde, dadurch direct zu entscheiden, ob die Federung des Metalls, oder der Spielraum der Drehungsaxe in ihrer Hülse, durchaus ohne nachtheilige Wirkung sind. In Ermangelung eines solchen Mittels würde man sich durch den Erfolg davon überzeugen, wenn man eine Anzahl einfach gemessener Winkel auch durch Vervielfältigungen misst und die Resultate beider Methoden nicht auf eine Art verschieden findet, die zur Annahme einer neuen, immer in einem Sinne wirkenden Fehlerursache nöthigt; auch die Summe der drei Winkel eines Dreiecks wird das Nichtvorhandensein einer solchen Ursache zeigen können. Immer aber muss eine sehr grosse Anzahl von Beobachtungen gemacht werden, wenn sie auch über Brüche von Secunden, die hier allein zweifelhaft sein können, entscheiden soll.

Ehe diese Prüfung mit einem Instrumente vorgenommen ist, wird man, wenn man anders geneigt ist, einem Zweifel über die Unveränderlichkeit desselben während der Drehungen einiges Gewicht beizulegen, von zwei Resultaten, welche gleiche mittlere Fehler besitzen, deren einer aber auf einfachen, der andere auf vervielfältigten Beobachtungen beruht, dem ersteren das meiste Vertrauen schenken müssen. Allein dieser Fall kömmt in der geodätischen Praxis nicht leicht vor, vielmehr wird man in der Zeit, die man auf die Beobachtung eines Winkels wenden kann, durch die Vervielfältigungsmethode einen kleineren mittleren Fehler erlangen, als durch einfache Messungen. Wenn also zwischen beiden Methoden gewählt werden soll, so ist zu entscheiden, ob der Gewinn, den man durch die Anwendung der Vervielfältigungen in der Verkleinerung der zufälligen Fehler immer hat, gross genug ist, um die Furcht vor beständigen, aus dem Instrumente selbst hervorgehenden Fehlern zum Schweigen zu bringen. Man sieht aus dem Vorhergehenden, in welchem Maasse ein grösseres, schärfere Ablesungen gewährendes Instrument den Vortheil auf der Seite der Vervielfältigungen verkleinert; für ein solches Instrument kann, selbst bei einer mässigen Anzahl der Beobachtungen, dieser Vortheil so klein werden (z. B. Art. 8 am Ende), dass man nicht leicht geneigt sein wird, für ihn irgend etwas von der Ueberzeugung der völligen Freiheit von beständigen Fehlern aufzuopfern. Es kömmt auch noch die Frage in Betracht, ob einzelne und vervielfältigte Beobachtungen mit gleicher Aufmerksamkeit gemacht werden; allein ihre Beantwortung ist individuell für jeden Beobachter; für mich würde sie dem Vervielfältigen vielleicht nicht günstig sein.

Indessen entziehen sich Zweifel über die Rechtmässigkeit der Voraussetzung der Unveränderlichkeit des Instruments während der Drehungen desselben, sowie auch die eben berührte individuelle Berücksichtigung des Beobachters, derjenigen Rechnung gänzlich, welche den Einfluss der zufälligen Beobachtungsfehler auf das Resultat an den Tag zu legen beabsichtigt. Man kann von der Sicherheit des Resultats in der letzteren Beziehung der Natur der Sache nach nicht auf die in der ersteren stattfindende, also auch nicht auf die Sicherheit des Resultats, ohne Beziehung, schliessen. Man muss beide ganz verschiedene Seiten der Vervielfältigungsmethode

fältigungsmethode der Beobachtungen im Auge behalten, wenn man, immer nur in dem besonderen Falle eines bestimmten Instruments und vielleicht auch eines bestimmten Beobachters, zwischen ihr und der Methode der einfachen Messungen eine Wahl treffen will. Das was ich in diesem Aufsatze entwickelt habe, führt die Frage dadurch auf ihre einfachste Gestalt zurück, dass es den Gewinn, den das Princip des Vervielfältigens als solches ergibt, an den Tag legt.

---

164. Ueber die Bestimmung der Libration des Mondes durch Beobachtungen.*)

(Astron. Nachr. **16**, p. 257.)

Die Beobachtungen, welche die Herren BOUVARD, ARAGO und NICOLLET über den Mondfleck Manilius angestellt haben, sollten bekanntlich nicht allein eine neue Bestimmung der Neigung der Drehungsaxe des Mondes gegen die Ebene der Erdbahn ergeben, sondern auch über das Vorhandensein, in merklicher Grösse, einer wirklichen Libration entscheiden. Sie sind so zahlreich, dass ihre Resultate einen beträchtlichen Grad von Sicherheit erlangt haben; sie lassen auch nicht zweifelhaft, dass die wirkliche oder physische Libration nur einen geringen, allein für sehr genaue Beobachtungen bemerkbaren Umfang besitzen kann. Dass aber die aus ihnen hervorgegangenen Werthe verschiedener Theile dieser Libration so viel Gewicht besässen, dass sie als unzweifelhafte Beobachtungsresultate angesehen und weiteren Folgerungen zum Grunde gelegt werden könnten, scheint weder Herrn NICOLLET'S eigenes Urtheil, noch mit den beträchtlichen Unvollkommenheiten der einzelnen Beobachtungen, die man aus den Vergleichungen (Conn. des Tems 1822, p. 265 — 269) kennen lernt, vereinbar zu sein. Nichtsdestoweniger ist die vollständige Kenntniss der Libration des Mondes von beträchtlichem, nicht allein selenographischem, sondern auch allgemeinem Interesse, indem sie sowohl zu einer Kenntniss der Figur des Mondes führen, als auch einen der seltenen Fälle darbieten kann, in welchem etwas sich auf den ursprünglichen Zustand des Weltsystems Beziehendes zugänglich wird.

Ich habe daher längst den Wunsch gehegt, eine Beobachtungsmethode der Mondflecken angewandt zu sehen, welche mir beträchtlich grösseren Erfolg zu versprechen scheint, als die bisher angewandte. Da unsere verdienstvollen Selenographen BEER und MÄDLER nicht abgeneigt waren, die neue Untersuchung dieses Gegenstandes zu unternehmen, so habe ich ihnen die eben erwähnte Beobachtungsmethode vorgeschlagen. Jetzt erfahre ich mit Vergnügen, dass sie beschäftigt sind, die Vorbereitungen dazu zu treffen, und zögere daher nicht länger, das Verfahren selbst und die Berechnungsart der dadurch zu erlangenden Beobachtungen bekannt zu machen.

1.

Vor allen anderen Instrumenten erscheint mir das Heliometer geeignet, eine Beobachtungsreihe zu ergeben, durch welche sowohl die Neigung der Drehungsaxe des Mondes, als auch die verschiedenen willkürlichen Constanten, von welchen die Kenntniss seiner physischen Libration abhängt, bestimmt werden können. Meine Absicht ist, dass damit die Entfernungen eines in allen Erleuchtungen des Mondes deutlichen, in der Nähe des Mittelpunktes seiner Scheibe liegenden Punktes (den ich im Folgenden, um abzukürzen, den Punkt *O* nennen werde), von dem erleuchteten Rande, in verschiedenen, durch den Positionskreis des Instruments bekannt werdenden Richtungen gemessen werde. Wie der Ort von *O* auf der Mondscheibe durch solche Beobachtungen bestimmt wird, werde ich zeigen; lange fortgesetzte Bestimmungen dieser Art sollen die Grundlage der Untersuchung der Drehungselemente des Mondes werden.

Mit Ausnahme des seltenen Zusammentreffens des Vollmondes mit einer kleinen Breite, ist immer nur die Hälfte des Mondrandes erleuchtet. Im Allgemeinen können daher nur Entfernungen zwischen *O* und Punkten dieser Hälfte gemessen werden; allein es ist die Absicht, die letzteren, in etwa gleichen Entfernungen von einander, über den ganzen Umfang der erleuchteten Hälfte zu vertheilen, so dass der erste dieser Punkte in der Nähe des nördlichsten Horns, der letzte in der Nähe des südlichsten genommen wird, und mehrere zwischen beiden liegen. Wenn, wie vorausgesetzt worden ist, *O* nahe am Mittelpunkte der Mondscheibe liegt,

*) [327 d. a. Verz. — Ausführlichere Untersuchungen über die Theorie der Libration, sowie Beobachtungen am Königsberger Heliometer von WICHMANN s. Astr. Nachr. **26**, **27**, (**29**).]

so ist der Winkel an O, zwischen dem ersten und letzten Punkte, näherungsweise $= 180^0$, oder, wenn der Positionswinkel des ersten durch p, des letzten durch p' bezeichnet wird, so nähert sich $p'-p$ mehr oder weniger dieser Grenze. Ich werde beispielsweise voraussetzen, dass man immer 7 Punkte des Randes beobachten will, von denen die beiden äusseren in der Nähe der Hörner liegen, die übrigen aber in Richtungen von O aus, welche $\frac{1}{6}(p'-p)$ von einander entfernt sind. Da es gar nicht nothwendig ist, dass der erste und der letzte dieser Punkte an den Hörnern des Mondes selbst genommen werden, sondern nur wünschenswerth, dass sie sich nicht weit von ihnen entfernen, so kann man, der leichteren Einstellung des Positionskreises wegen, für $p'-p$ eine durch 6 theilbare Zahl von Graden annehmen. Man stellt also nach und nach den Positionskreis des Objectivs auf

$$p,\ p+\tfrac{1}{6}(p'-p),\ \ p+\tfrac{2}{6}(p'-p),\ldots\ldots p'$$

und misst in jeder dieser Richtungen die Entfernung des Punktes O von dem Rande des Mondes.

Indessen fordert jede zuverlässige Messung mit einem Heliometer, dass sie in den beiden Stellungen der Objectivhälften, welche die zu messende Entfernung der Bilder hervorbringen, wiederholt werde. Ich setze also diese doppelte Beobachtung auch hier voraus und fordere ferner, dass ihre Anordnung so getroffen werde, dass der beobachtete Positionswinkel sich immer auf den Punkt O beziehe. Dieses erlangt man dadurch, dass man bei der ersten Beobachtung das Bild von O, welches eine der Objectivhälften (I) ergibt, in der Mitte des Sehefeldes hält, während sowohl diese Hälfte, als das Ocular, sich in der Axe des Instruments befinden; bei der anderen aber das von der anderen Hälfte (II) gemachte Bild desselben Punktes, nachdem das Ocular eben so weit als die Hälfte II, und in gleicher Richtung, von der Axe des Instruments entfernt worden ist.

Ich halte die folgende Anordnung der 14 erforderlichen Beobachtungen für die zweckmässigste: zuerst wird das Ocular in die Axe des Instruments gestellt, in welcher sich auch der optische Mittelpunkt der Hälfte I befindet; dann wird der Positionskreis nach und nach auf $p,\ p+\frac{1}{6}(p'-p)\ldots\ldots p+\frac{5}{6}(p'-p),\ p'$ eingestellt und in jeder dieser Stellungen die Entfernung zwischen O und dem Mondrande gemessen; darauf wird die Hälfte II auf die der früheren entgegengesetzten Seite der Axe des Instruments geschoben, das Ocular gleichweit von dieser Axe entfernt, beide Positionskreise auf p' gestellt und nun die letzte Messung wiederholt; dann, nach vorgenommener Einstellung beider Positionskreise auf $p+\frac{5}{6}(p'-p)$ und gehöriger Entfernung des Oculars von der Axe, die vorletzte Messung, und so fort, bis man zur Wiederholung der ersten gelangt.

Wenn man Uebung im Gebrauche des Instruments besitzt, kann man leicht dahin gelangen, die ersten 7 Beobachtungen sowohl als die letzten, in gleichen Zwischenzeiten zwischen je zwei aufeinanderfolgenden zu machen. Hierdurch wird die spätere Berechnung der Beobachtungen wesentlich erleichtert, indem die Mittel der beiden Beobachtungszeiten jedes zusammengehörigen Paares von Messungen dann einander gleich werden und alle 7 Entfernungen als gleichzeitig beobachtet angesehen werden können. Man wird eine Zwischenzeit von 2 Minuten zum Einstellen, Ablesen und Anschreiben hinreichend finden; rechnet man das Doppelte derselben zwischen der 7. und 8. Beobachtung, so fordert die ganze Reihe 28 Minuten Zeit; und diese Zeit ist im Allgemeinen nicht zu lang, um nicht sämmtliche kleine Aenderungen der gemessenen Entfernungen als der Zwischenzeit proportional vor sich gehend, also als aus dem mittleren Resultate jedes zusammengehörigen Paares verschwindend, ansehen zu können. In der That würde diese Annahme vielleicht nicht erlaubt sein, wenn der Mond sich in der Nähe des Horizonts befände und schnell stiege oder fiele, indem dann die durch die Strahlenbrechung entstehende Abplattung der Mondscheibe sich während der angegebenen Zeit schon merklich ungleichmässig verändern würde; allein dieser Fall muss wegen der immer damit verbundenen Undeutlichkeit des Mondrandes ohnedies ausgeschlossen werden. Nach meinen Erfahrungen hierüber würde ich keine Beobachtung, welche (wie die Beobachtungen, von welchen hier die Rede ist) grosse Genauigkeit erlangen soll, in weniger als 15^0 Höhe machen zu dürfen glauben; gelangt aber der Mond, bei beträchtlicher südlicher Abweichung, gar nicht auf diese Höhe und sind Gründe vorhanden, seine Beobachtung dennoch nicht zu unterlassen, so darf sie nur in der Nähe seiner Culmination gemacht werden, wo die Annahme der gleichmässigen Aenderungen immer erlaubt ist. Uebrigens darf man in der genauen Einhaltung einer bestimmten Zwischenzeit der Beobachtungen nicht zu ängstlich sein, indem die Aenderungen der zu messenden Entfernungen so langsam vor sich gehen, dass sie während einiger Secunden ganz unmerklich sind.

Ausser den Vortheilen, welche das Heliometer im Allgemeinen in der Messung von Entfernungen von der hier vorkommenden Grösse vor anderen Instrumenten voraus hat, besitzt die beschriebene Beobachtungsmethode noch andere, welche sie in dem gegenwärtigen

Falle besonders empfehlen. Indem sie mehrere Punkte des Mondrandes in das Resultat zieht, wird dieses wenig abhängig von der durch an demselben sichtbare Berge erzeugten Unrichtigkeit der Voraussetzung der regelmässigen Begrenzung der Mondscheibe; der Einfluss der Unvollkommenheit einer Messung selbst wird durch die Zahl der Messungen vermindert, indem nur zwei derselben zur Bestimmung der Lage von O erforderlich sind; für den grössten Vortheil, welchen diese Methode gewährt, halte ich aber die Befreiung des Resultats von einer Annahme der Grösse des Halbmessers des Mondes, indem dieser, offenbar vortheilhaft, aus demselben eliminirt werden kann. Auf diesen letzten Vortheil lege ich besonderes Gewicht, theils weil die Begrenzung des Mondes, in verschiedenen Zuständen der Atmosphäre, verschieden geschätzt werden kann; theils weil die Unsicherheit der periodischen Glieder der Horizontalparallaxen des Mondes, welche selbst in den neueren Mondstafeln noch vorhanden ist, eine Unsicherheit des jedesmaligen Werthes des Halbmessers zur Folge hat; endlich weil das Verhältniss des Halbmessers zur Parallaxe nicht als genau bekannt angenommen werden kann, auch ohne Zweifel für verschiedene Fernröhre verschieden ist.

2.

Ich nehme den ausgesprochenen Forderungen gemäss 7 gleichzeitige Messungen der Entfernungen zwischen O und verschiedenen Punkten des Mondrandes als gegeben an und werde nun ihre Anwendung erläutern.

Zuerst ist nothwendig, dass die Messungen von dem Einflusse der Strahlenbrechung befreiet werden. Die dazu erforderlichen Formeln habe ich in der XV. Abth. meiner Beobachtungen [vgl. auch Abh. 167] auf ihre bequemste Gestalt gebracht und führe sie hier nur an, ohne mich mit ihrer Ableitung aufzuhalten. Wenn die Mitte zwischen zwei Punkten, zwischen welchen die Entfernung s und der Positionswinkel p beobachtet sind, den Stundenwinkel t und die Abweichung d besitzt, so erhält man ihre Zenithdistanz z und ihren parallaktischen Winkel q durch die Formeln:

$$\operatorname{tg} z \cos q = \operatorname{cotg}\ (\zeta + d)$$
$$\operatorname{tg} z \sin q = \alpha \operatorname{cosec} (\zeta + d)$$

wo ζ und $\log \alpha$ aus einer Tafel genommen werden, welche man ein für allemal für die Polhöhe φ des Beobachtungsortes nach den Formeln

$$\operatorname{tg} \zeta = \operatorname{cotg} \varphi \cos t; \quad \alpha = \sin \zeta \operatorname{tg} t$$

berechnet hat. Eine solche Tafel, für Königsberg berechnet, habe ich a. a. O. mitgetheilt, auch ihr eine Tafel für den Logarithmen einer Grösse k und seine Veränderungen durch die Stände der meteorologischen Instrumente hinzugefügt, welche Grösse zwar von der Zenithdistanz z abhängig ist, jedoch von $z = 0$ bis $z = 70^0$ fast als beständig angesehen werden kann. Durch die Hülfe dieser Vorbereitungen erhält man sehr leicht die Verbesserung der beobachteten

$$\text{Entfernung} = sk\{aa + 1\}$$
$$\text{Positionswinkel} = -kab - k \operatorname{tg} d \operatorname{tg} z \sin q$$

wo $a = \operatorname{tg} z \cos(p - q)$, $b = \operatorname{tg} z \sin(p - q)$ sind. Die Ausführung dieser Vorschriften wird in dem gegenwärtigen Falle noch weniger mühsam, als sie es im Allgemeinen ist; denn für alle 7 Messungen sind $\operatorname{tg} z$, q, $\log k$ und der letzte Theil des Ausdruckes des Einflusses auf den Positionswinkel, nur einmal aufzusuchen. Für t und d können unbedenklich die scheinbaren Stundenwinkel und Declination des Mondsmittelpunkts gesetzt werden, welche man nach bekannten Formeln berechnet. Die Berichtigung des Positionswinkels durch die Strahlenbrechung erhält immer nur unbedeutenden Einfluss auf das Resultat der Beobachtungen; desto kleineren, je näher an dem Mittelpunkte des Mondes O ist; wenn die Mühe, sie zu berechnen, nicht unerheblich wäre, könnte man hierdurch veranlasst werden, sie ganz zu ersparen.

3.

Ich werde nun die vorhandenen 7 Beobachtungen von der Strahlenbrechung befreiet annehmen, die zusammengehörigen Werthe der Entfernung und des Positionswinkels für eine von ihnen durch s und p bezeichnen und die Verbindung aufsuchen, in welcher sie mit dem Orte von O sind.

Bezeichnet man die Entfernung des Punktes O von dem Mittelpunkte des Mondes durch σ, den Positionswinkel des letzteren an dem ersteren durch π', den scheinbaren Halbmesser des Mondes durch h, so hat man:

$$\cos h = \cos\sigma \cos s + \sin\sigma \sin s \cos(\pi' - p).$$

Man verwandelt diese Gleichung leicht in:

$$\sin \tfrac{1}{2}h^2 \{1 + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\sigma^2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}s^2\} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\sigma^2 + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}s^2 - \frac{2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\sigma \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}s}{\cos \tfrac{1}{2}h^2} \cos(\pi' - p)$$

und durch eine unerhebliche Vernachlässigung in:

$$hh = (s\cos p - \sigma \cos\pi')^2 + (s \sin p - \sigma \sin \pi')^2$$

und wenn man den Positionswinkel π des Punktes O an dem Mittelpunkte der Mondscheibe einführt und $\pi = \pi' + 180^0$ annimmt, was wegen der Kleinheit von σ erlaubt ist, in:

$$hh = (s\cos p + \sigma\cos\pi)^2 + (s\sin p + \sigma\sin\pi)^2.$$

Es wird gefordert σ, π, h so zu bestimmen, dass sie den vorhandenen 7 Gleichungen dieser Art so nahe als möglich Genüge leisten. Näherungsweise richtige Werthe von $\sigma\cos\pi$ und $\sigma\sin\pi$, welche man kennen muss, um die Methode der kleinsten Quadrate anwenden zu können, erhält man aus der Combination zweier dieser Gleichungen, welche man am vortheilhaftesten so wählt, dass der Unterschied der beiden Positionswinkel, welche ich durch p und p' bezeichnen werde, nicht viel von 90^0 verschieden ist. Ich setze die zu ihrer Berechnung nöthigen Formeln hieher. Setzt man

$$(s'-s)\cos\tfrac{1}{2}(p'-p) = a\cos A$$
$$(s'+s)\sin\tfrac{1}{2}(p'-p) = a\sin A$$
$$\frac{a}{2h} = \cos B$$

so erhält man:

$$\sigma\cos\left(\pi - \frac{p'+p}{2}\right) = -\frac{s'+s}{2\cos B}\cos\left(\frac{p'-p}{2} \pm B\right)$$
$$\sigma\sin\left(\pi - \frac{p'+p}{2}\right) = -\frac{s'-s}{2\cos B}\sin\left(\frac{p'-p}{2} \pm B\right)$$

Von den beiden Bestimmungen des Punktes O, welche aus der Zweideutigkeit dieser Formeln hervorgehen, liegt die eine innerhalb, die andere ausserhalb der Mondscheibe; die letztere gehört also nicht hieher.

Wenn man Näherungswerthe von $\sigma\cos\pi$, $\sigma\sin\pi$, h, durch α, β, h, die ihnen hinzuzufügenden Verbesserungen durch $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, Δh bezeichnet und

$$s\cos p + \alpha = h'\cos P$$
$$s\sin p + \beta = h'\sin P$$

setzt, verwandelt sich die gegebene Gleichung zwischen σ, π, h und s, p in

$$h - h' = \Delta\alpha.\cos P + \Delta\beta.\sin P - \Delta h$$

Die gesuchten Werthe von $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, Δh sind die, die aus der Auflösung der vorhandenen 7 Gleichungen dieser Art nach der Methode der kleinsten Quadrate hervorgehen. Ich bemerke dabei, dass zwar diese Auflösung Fehler im Sinne der Entfernung und in dem darauf senkrechten als gleich wahrscheinlich voraussetzt, dass aber das Resultat auch durch eine andere Voraussetzung ihrer relativen Wahrscheinlichkeit kaum geändert wird, wenn O nahe an dem Mittelpunkte der Mondscheibe liegt.

Wenn man h immer aus denselben Mondtafeln bestimmt, so wird das Mittel aus allen Bestimmungen, welche die lange fortgesetzte Beobachtungsreihe für $1 + \frac{\Delta h}{h}$ ergibt, der Factor, womit man den Halbmesser dieser Tafeln multipliciren muss, um den Werth desselben zu erhalten, der dem angewandten Fernrohre angemessen ist. Seine Richtigkeit hängt von der Genauigkeit der Kenntniss des Werthes der Drehungen der Heliometerschraube ab. Auf die Werthe von $\sigma\cos\pi$ und $\sigma\sin\pi$ wirkt aber eine Unvollkommenheit dieser Kenntniss in demselben Verhältnisse, in welchem sie den Halbmesser entstellt; sie wird also ganz unschädlich, wenn diese Grössen, bei ihrer weiteren Anwendung, mit dem aus den Beobachtungen selbst hervorgehenden Werthe des Mondhalbmessers verglichen werden.

4.

Nachdem man zur Kenntniss von σ und π gelangt ist, muss man die Geradeaufsteigung a und die Abweichung d des Punktes O, so wie sie aus dem Mittelpunkte des Mondes erscheinen, aufsuchen. Bezeichnet man die Entfernung dieses Mittelpunktes von dem Beobachter durch r', seine Geradeaufsteigung und Abweichung durch α' und δ', ferner die Entfernung, Geradeaufsteigung und Abweichung von O durch R, A, D, das Verhältniss der Entfernung dieses Punktes von dem Mittelpunkte des Mondes zu dem Aequatorealhalbmesser der Erde durch $k:1$ und die Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe des Mondes durch (π)*), so hat man:

$$R\cos D\cos A = r'\cos\delta'\cos\alpha' + k\sin(\pi)\cos d\cos a$$
$$R\cos D\sin A = r'\cos\delta'\sin\alpha' + k\sin(\pi)\cos d\sin a$$
$$R\sin D = r'\sin\delta' + k\sin(\pi)\sin d$$

und ferner:

$$\cos\sigma = \sin D\sin\delta' + \cos D\cos\delta'\cos(A-\alpha')$$
$$\sin\sigma\cos\pi = \sin D\cos\delta' - \cos D\sin\delta'\cos(A-\alpha')$$
$$\sin\sigma\sin\pi = \cos D\sin(A-\alpha')$$

Durch die Verbindung der ersteren Gleichungen mit den letzteren erhält man:

$$R\cos\sigma - r' = k\sin(\pi)\{\sin d\sin\delta' + \cos d\cos\delta'\cos(a-\alpha')\}$$
$$R\sin\sigma\cos\pi = k\sin(\pi)\{\sin d\cos\delta' - \cos d\sin\delta'\cos(a-\alpha')\}$$
$$R\sin\sigma\sin\pi = k\sin(\pi)\cos d\sin(a-\alpha')$$

und durch die Summe der Quadrate dieser Gleichungen:

$$RR - 2Rr'\cos\sigma + r'r' = kk\sin(\pi)^2.$$

Löset man diese Gleichung auf, so ergibt sie:

$$R = r'\cos\sigma - \sqrt{kk\sin(\pi)^2 - r'r'\sin\sigma^2},$$

und wenn man

$$\frac{r'\sin\sigma}{k\sin(\pi)} = \sin S$$

setzt:

---

*) Ich schliesse diese Bezeichnung durch ( ) ein, um sie von der vorkommenden anderen Bedeutung desselben Buchstabs zu unterscheiden.

$$R = r' \cdot \frac{\sin(S-\sigma)}{\sin S}.$$

Hierdurch verwandeln sich die drei letzteren Gleichungen in:

$$\cos(S-\sigma) = -\sin d \sin\delta' - \cos d \cos\delta' \cos(a-\alpha')$$
$$\sin(S-\sigma)\cos\pi = \sin d \cos\delta' - \cos d \sin\delta' \cos(a-\alpha')$$
$$\sin(S-\sigma)\sin\pi = \cos d \sin(a-\alpha')$$

und ergeben als

$$\sin d = -\cos(S-\sigma)\sin\delta' + \sin(S-\sigma)\cos\delta'\cos\pi$$
$$\cos d\cos(a-\alpha') = -\cos(S-\sigma)\cos\delta' - \sin(S-\sigma)\sin\delta'\cos\pi$$
$$\cos d\sin(a-\alpha') = \sin(S-\sigma)\sin\pi$$

woraus die gesuchten Werthe von a und d gefunden werden. Die hier angewandten Werthe von r', α', δ' sind schon im 2. § benutzt worden; der jetzigen Anwendung wegen ist es zweckmässig, sie etwas genauer zu berechnen, als die frühere erfordert.

Ich muss noch etwas über die Wahl des anzuwendenden Werthes von k sagen. Nach BURCKHARDT'S Bestimmung ist er $= 0{,}2725$; nach der Bestimmung von Δh, welche die Beobachtung selbst ergeben hat (§ 3), ist

$$\frac{k\sin(\pi)}{r'} = \sin(h+\Delta h)$$

also

$$\sin S = \frac{\sin\sigma}{\sin(h+\Delta h)}.$$

Man mag aber das eine oder das andere wählen, so bleibt immer der Zweifel in dem Resultate, dass k, welches sich auf den Punkt O bezieht, von einem Werthe, welcher aus Beobachtungen des Randes abgeleitet worden ist, etwas verschieden sein möge, oder dass die Entfernung jenes Punktes vom Mittelpunkte des Mondes nicht genau sein mittlerer Randhalbmesser sei. Dieser Zweifel kann nicht anders beseitigt werden, als durch die Einführung einer unbestimmten Verbesserung eines angenommenen Werthes von k in die Ausdrücke von a und d, und durch die Verfolgung ihres Einflusses auf die ferneren Resultate der Untersuchung. Auf eine Bestimmung des Werthes dieser Verbesserung, durch die Beobachtungen selbst, ist kaum zu hoffen, da ihr Einfluss durch die Nähe des Punktes O bei dem Mittelpunkte des Mondes stark verkleinert wird; aus diesem Grunde ist aber auch eine etwas fehlerhafte Annahme von k wenig nachtheilig; und ihr Einfluss auf die endlichen Resultate der Untersuchung wird noch weniger nachtheilig, da die Maxima der Entfernungen des Punktes O von dem Mittelpunkte der Mondscheibe keineswegs mit den Maximis der Einflüsse der verschiedenen Theile der Libration zusammentreffen und daher, bei der langen Fortsetzung der Beobachtungsreihe, die Bestimmung dieser letzteren kaum beeinträchtigen können. Es tritt auch die Frage hervor, ob die Anwendung des jedesmal gefundenen Werthes von Δh, in dem Ausdrucke von $\sin S$, oder die Anwendung des Mittels aus allen Bestimmungen, welche die lange fortgesetzte Beobachtungsreihe liefert, zweckmässiger ist. Ihre Beantwortung hängt von einer Schätzung des Verhältnisses der mittleren, aus zwei von einander ganz unabhängigen Ursachen entstehenden Fehler in den Werthen von Δh ab; nämlich des Fehlers der Beobachtungen selbst, und des Fehlers der angenommenen Werthe von h, welcher aus Unvollkommenheiten der periodischen Glieder der Parallaxe des Mondes entsteht. Wenn die Unregelmässigkeiten der verschiedenen Bestimmungen von Δh grösser sind, als dass man sie den Beobachtungen allein zuschreiben könnte, so verdient die jedesmalige Bestimmung von Δh den Vorzug vor dem Mittel. Wenn aber die Mondstafeln, in Beziehung auf die Parallaxe, vervollkommnet sein werden, wird der Vorzug des Mittels nicht mehr zweifelhaft sein. HANSEN'S neue Arbeiten über die Bewegung des Mondes, von welchen wir schon den theoretischen Theil besitzen, eröffnen eine nahe Aussicht auch auf diese Vervollkommnung der Tafeln.

5.

Ich muss noch den Zusammenhang entwickeln, in welchem der durch das Vorhergehende bestimmte selenocentrische Ort eines Punktes auf der Oberfläche des Mondes mit den Constanten ist, deren Bestimmung durch Beobachtungen von einer vollständigen Kenntniss der Libration gefordert wird; ich werde mit den nöthigen Erläuterungen der Theorie der Erscheinung anfangen. Bekanntlich ist die Entwickelung dieser Theorie eine der denkwürdigsten Leistungen LAGRANGE'S; LAPLACE hat gezeigt, dass die merkwürdigen, dadurch bekannt gewordenen Eigenschaften der Drehungen des Mondes auch durch die Säcularbewegungen des Mondes nicht beeinträchtigt werden; POISSON hat die Theorie noch weiter als seine Vorgänger vervollständigt.

Aus diesen Untersuchungen weiss man erstlich, dass die aus den Beobachtungen hervorgegangene Gleichheit der mittleren Drehungszeit und der mittleren Umlaufszeit des Mondes einen theoretischen Grund hat und in aller Schärfe stattfinden muss; dass das gleichfalls beobachtete Zusammenfallen des mittleren Ortes des aufsteigenden Knotens des Aequators des Mondes auf der Ekliptik mit dem mittleren Orte des niedersteigenden Knotens der Mondsbahn, nothwendig ist; dass die mittlere Neigung des Aequators des Mondes

gegen die Ekliptik beständig ist. Man weiss zweitens daraus, dass die Drehungsgeschwindigkeit und die Lage des Aequators des Mondes periodische Aenderungen erfahren, welche von der Anziehung der Erde auf den sphäroidischen Körper des Mondes herrühren. Man weiss drittens daraus, dass ursprüngliche Verschiedenheiten der Drehung des Mondes von dem mittleren Zustande, welcher jetzt, mit Berücksichtigung der Ungleichheiten, aus den Beobachtungen abgeleitet wird, sich noch zeigen und periodische Schwankungen um diesen Zustand hervorbringen können; dass sie sich zeigen müssen, wenn nicht Reibungen oder Widerstände sie nach und nach unkenntlich gemacht haben. Ich werde diese verschiedenen Resultate jetzt näher angeben, so wie ihre fernere Anwendung erfordert.

Die Perioden der von der Anziehung der Erde erzeugten Bewegungen der Axen des Mondes sind aus den mittleren Bewegungen der Erde, des Mondes, seiner Apsidenlinie und seiner Knotenlinie zusammengesetzt, also bekannt; ihre Ausdehnungen hängen von den Hauptmomenten der Trägheit des Mondes A, B, C ab, nämlich von den Grössen:

$$\frac{B-A}{C}, \quad \frac{A-C}{B}, \quad \frac{C-B}{A},$$

welche ich durch

$$\gamma, \quad -\beta, \quad \alpha$$

bezeichnen werde, und zwischen welchen die Gleichung

$$0 = \alpha - \beta + \gamma - \alpha\beta\gamma$$

stattfindet; so dass die Bewegungen, von welchen hier die Rede ist, durch die Kenntniss der Werthe zweier willkürlichen Grössen vollständig bekannt werden. Von den drei Hauptmomenten der Trägheit beziehen sich A und B auf die beiden, in der Ebene des Mondäquators liegenden Hauptaxen, und zwar A auf die näherungsweise nach der Erde gerichtete, B auf die darauf senkrechte; C folglich auf die diesen Aequator senkrecht durchschneidende. A ist das kleinste, C das grösste dieser Momente; B ist grösser als A und kleiner als C. α, β, γ sind also sämmtlich positiv.

Ich werde zuerst die Formeln anführen, welche Poisson für die von der Anziehung der Erde herrührenden Schwankungen des Mondes gefunden hat*). Die von ihm angewandten Bezeichnungen muss ich abzuändern mir erlauben, da die hier vorangegangene und noch folgende Benutzung gleicher Buchstaben, Missverständnisse erzeugen könnte.

Ich bezeichne die mittlere Länge des Mondes durch m, seiner Erdnähe durch π, seines aufsteigenden Knotens durch n; die Neigung und Excentricität seiner Bahn durch i und e; die mittlere Länge der Sonne durch M, ihrer Erdnähe durch Π; die Länge des aufsteigenden Knotens des Aequators des Mondes auf der Ekliptik durch N, seine Neigung durch I, den mittleren Werth derselben durch I', der mittlere Werth von N ist $= n + 180^0$. Ferner die Entfernung der der Erde zugewandten Hauptaxe des Mondes von dem aufsteigenden Knoten seiner Bahn durch $180^0 + m - n + u$*), wo u eine kleine periodische Grösse bedeutet. Ich setze ferner $m = m't + m''$, $\pi = \pi't + \pi''$, $n = n't + n''$, u. s. w.

Statt N und I werden zwei neue veränderliche Grössen s und s' eingeführt, welche damit durch die Formeln:

$$I = -s\sin(m-n) - s'\cos(m-n)$$
$$\sin I\,(N-n+180^0) = s\cos(m-n) - s'\sin(m-n)$$**)

verbunden sind. Diese Bezeichnungen und die statt der Momente der Trägheit eingeführten angenommen, hat man, nach der bekannten Theorie***):

$$u = \frac{3Hm'm'\gamma}{M'M' - 3m'm'\gamma}(\sin M - \Pi) + \frac{3hm'm'\gamma}{(m'-\pi')^2 - 3m'm'\gamma}\sin(m-\pi)$$

wo H den Coefficienten des grössten Gliedes der jährlichen Ungleichheit des Mondes und h den Coefficienten des grössten Gliedes seiner Mittelpunktsgleichung bedeutet. Ferner erhält Herr Poisson für s und s' die Ausdrücke:

$$s = -ip\sin(m-n) + \frac{3\alpha m'(1+p)ei}{\pi'-n'}\sin(\pi-n)$$

$$s' = -ip\cos(m-n) + \frac{3\beta m'(1{,}0391+p)ei}{\pi'-n'}\cos(\pi-n)$$

und endlich sind zwischen p, α, β, γ die Gleichungen:

$$ip = I'$$
$$\beta = \frac{-2n'I'}{3m'(i+I')}$$
$$0 = \alpha - \beta + \gamma - \alpha\beta\gamma$$

vorhanden, vermittelst welcher p und zwei der Grössen α, β, γ eliminirt werden können. Ich setze nun

$$\alpha = \beta f$$

wo, dem Vorhergehenden zufolge, f positiv und kleiner als 1 ist. Durch die Einführung dieser Grösse wird

*) Conn. des Tems 1821 p. 219 und 1822 p. 280.

*) Genau genommen ist diese Entfernung aus zwei Theilen, $180^0 + m - N$ und $N - n + u$, welche im Winkel $180^0 - I$ gegeneinander geneigt sind, zusammengesetzt.

**) [Nur richtig für $u = 0$; s. Wichmann, Astr. Nachr. 26, p. 331.]

***) Méc. Cel. Liv. V. § 16.

$$\gamma = \frac{\beta(1-f)}{1-f\beta\beta}$$

und wenn man den Cubus der sehr kleinen Grösse β vernachlässigt, was unbedenklich geschehen kann,

$$\gamma = \beta(1-f).$$

Hierdurch werden I' und f die beiden unbekannten Grössen der Theorie, und man darf für die erstere, bei der Berechnung des zweiten Gliedes, sowohl von s, als von s', den aus den Beobachtungen der Herren Bouvard, Arago und Nicollet hervorgegangenen Werth $I' = 1^0\,28'\,45''$ annehmen. Setzt man nun die bekannten Werthe der übrigen in den Formeln vorkommenden Grössen, nämlich:

$M' =$	$0^0\,59'\,8''{,}193$	wo der mittlere Tag als Zeiteinheit genommen ist.
$m' =$	$13\;10\;34{,}890$	
$\pi' =$	$0\;\;6\;40{,}919$	
$n' = -$	$0\;\;3\;10{,}774$	
$i =$	$5\;\;8\;44{,}0$	Nach Burckhardt's Mondstafeln.
$H = -$	$0\;10\;59{,}3$	
$h =$	$6\;18\;12{,}4$	
$e =$	$0{,}05486$	

so erhält man folgende Ausdrücke, deren Form mir die zu der ferneren Anwendung geeignetste zu sein scheint:

$$u = \underset{-}{(+)}\frac{311''{,}6(1-f)}{1+f.0{,}4727}\sin(M-\Pi) \underset{+}{(-)}\frac{41''{,}5(1-f)}{1+f.0{,}0018}\sin(m-\pi)^*)$$

$$s = -I'\sin(m-n) + 188''{,}4f\sin(\pi-n)$$

$$s' = -I'\cos(m-n) + 97{,}9\;\cos(\pi-n)$$

Dem letzten Gliede des Ausdruckes von u gibt Herr Poisson das entgegengesetzte Zeichen, was ohne Zweifel ein Irrthum ist; die Verschiedenheiten seiner Coefficienten von den eben angeführten werden wohl durch Verschiedenheiten der zu ihrer Berechnung angewandten Elemente erklärt werden können.

Die von dem ursprünglichen Zustande der Drehung des Mondes herrührenden Schwankungen werden durch die Integrationen der Differentialgleichungen**)

$$0 = \frac{d^2u}{dt^2} + 3m'm'\gamma u$$

$$0 = \frac{d^2s}{dt^2} - m'(1-\beta)\frac{ds'}{dt} + 4m'm'\beta s$$

$$0 = \frac{d^2s'}{dt^2} + m'(1-\alpha)\frac{ds}{dt} + m'm'\alpha s$$

gegeben. Der ersten derselben genügt man durch die Annahme $u = \cos\nu t$ oder $= \sin\nu t$, wenn $\nu\nu = 3m'm'\gamma$ genommen wird; ihr vollständiges Integral ist daher:

$$u = a\cos\nu t + a'\sin\nu t,$$

wo a und a' willkürliche Constanten sind und $\nu = m'\sqrt{3\gamma}$ ist. Den beiden anderen genügt man durch die Annahme:

$$s = g\cos\mu t + g'\sin\mu t$$

$$s' = h\sin\mu t + h'\cos\mu t$$

wenn μ der Gleichung

$$0 = (\mu\mu - m'm'\alpha)(\mu\mu - 4m'm'\beta) - m'm'(1-\alpha)(1-\beta)\mu\mu$$

und g, g', h, h' den Gleichungen

$$gh' = -g'h$$

$$hh'.\frac{\mu\mu - m'm'\alpha}{1-\alpha} = -gg'.\frac{\mu\mu - 4m'm'\beta}{1-\beta}$$

entsprechend angenommen werden. Indem hierdurch zwei Gleichungen zwischen den Constanten g, g', h, h' gegeben werden, bleiben nur zwei davon willkürlich, und die angenommenen Ausdrücke von s und s' sind unvollständige Integrale der Differentialgleichungen. Die den Bedingungsgleichungen zwischen den vier eingeführten Constanten entsprechenden Ausdrücke von h und h', durch g und g' sind:

$$h = g\sqrt{\frac{(1-\alpha)(\mu\mu - 4m'm'\beta)}{(1-\beta)(\mu\mu - m'm'\alpha)}}$$

$$h' = -g'\sqrt{\frac{(1-\alpha)(\mu\mu - 4m'm'\beta)}{(1-\beta)(\mu\mu - m'm'\alpha)}}$$

oder da, der Gleichung für μ zufolge:

$$\frac{\mu\mu - 4m'm'\beta}{1-\beta} = \frac{1-\alpha}{\mu\mu - m'm'\alpha}m'm'\mu\mu$$

ist,

$$h = \underset{+}{(-)}\,g.\frac{\mu\mu - 4m'm'\beta}{(1-\beta)m'\mu}^*)$$

$$h' = \underset{-}{(+)}g'.\frac{\mu\mu - 4m'm'\beta}{(1-\beta)m'\mu}$$

Indem dieser Gleichung durch zwei positive Werthe von $\mu\mu$ Genüge geleistet werden kann, welche ich durch $\mu\mu$ und $\mu'\mu'$ bezeichnen werde, erhält man, durch die Annahme jedes dieser Werthe, ähnliche Glieder der Ausdrücke von s und s', also die vollständigen Integrale der Differentialgleichungen:

$$s = g\cos\mu t + g'\sin\mu t + f\cos\mu' t + f'\sin\mu' t$$

$$s' = \underset{+}{(-)}\{g\sin\mu t - g'\cos\mu t\}\frac{\mu\mu - 4m'm'\beta}{(1-\beta)m'\mu}$$

$$\underset{+}{(-)}\{f\sin\mu' t - f'\cos\mu' t\}\frac{\mu'\mu' - 4m'm'\beta}{(1-\beta)m'\mu'}$$

Die Auflösung der Gleichung für μ ergibt:

$$\mu\mu = \frac{m'm'}{2}\{1 + 3\beta + \alpha\beta + \sqrt{(1+3\beta+\alpha\beta)^2 - 16\alpha\beta}\}$$

$$\mu'\mu' = \frac{m'm'}{2}\{1 + 3\beta + \alpha\beta - \sqrt{(1+3\beta+\alpha\beta)^2 - 16\alpha\beta}\}$$

*) [S. hierüber Wichmann a. a. O. p. 302; die oberen Zeichen sind die richtigen.]

**) Méc. Cél. Liv. V. § 16 und 17.

*) [Zeichen in ( ) richtig; s. Wichmann a. a. O. p. 321.]

Entwickelt man diese Wurzeln nach den Potenzen von α und β, so erhält man:

$$\mu = m'\{1 + \tfrac{3}{2}\beta - \tfrac{3}{8}\beta(4\alpha + 3\beta) + \dots.\}$$
$$\mu' = m' 2\sqrt{\alpha\beta}\{1 - \tfrac{3}{4}\beta + \dots.\}$$

und

$$\frac{\mu\mu - 4m'm'\beta}{(1-\beta)m'\mu} = 1 - \tfrac{3}{2}\beta + \dots$$
$$\frac{\mu'\mu' - 4m'm'\beta}{(1-\beta)m'\mu'} = -2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\left\{1 + \tfrac{5}{2}\beta - \alpha + \dots\right\}$$

Man kann also, mit hinreichender Annäherung, setzen:

$$\mu = m'\{1 + \tfrac{3}{2}\beta\}, \quad \mu' = 2m'\sqrt{\alpha\beta}$$

und die obigen Ausdrücke in:

$$s = b\sin(\mu t + B) + c\sin(\mu' t + C)$$
$$s' = \overset{(+)}{-} b\cos(\mu t + B) \overset{(-)}{+} 2c\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\cos(\mu' t + C)^*)$$

zusammenziehen, in welchen b, B, c, C die willkürlichen Constanten sind.

Die Anwendung der oben schon angewandten Ausdrücke

$$\beta = -\frac{2n'I'}{3m'(i+I')}, \quad \alpha = f\beta, \quad \gamma = (1-f)\beta$$

führt auch die Perioden der Grössen u, s, s' auf die unbekannte Grösse f zurück. Man hat nämlich, indem man diese Grösse einführt:

$$u = a\sin\left\{t\sqrt{\frac{-2n'm'I'(1-f)}{i+I'}} + A\right\}$$
$$s = b\sin\left\{t\left(m' - \frac{n'I'}{i+I'}\right) + B\right\} + c\sin\left\{t\left(\frac{-4n'I'}{3(i+I')}\sqrt{f}\right) + C\right\}$$
$$s' = \overset{(+)}{-} b\cos\left\{t\left(m' - \frac{n'I'}{i+I'}\right) + B\right\} \overset{(-)}{+} \frac{2c}{\sqrt{f}}\cos\left\{t\left(\frac{-4n'I'}{3(i+I')}\sqrt{f}\right) + C\right\}^*)$$

Aus den nun vollständig gefundenen Ausdrücken von s und s' kann man die Ausdrücke von I und N nach den schon angeführten Formeln:

$$I = -s\sin(m-n) - s'\cos(m-n)$$
$$N = n + 180^0 + s\,\mathrm{cosec}\,I\cos(m-n) - s'\,\mathrm{cosec}\,I\sin(m-n)$$

ableiten; man erhält dadurch:

$$I = I' - 188''{,}4f\sin(m-n)\sin(\pi-n) - 97''{,}9\cos(m-n)\cos(\pi-n) \overset{(-)}{+} b\cos(m - n \overset{(-)}{+} \mu t \overset{(-)}{+} B)$$
$$- c\sin(m-n)\sin(\mu' t + C) \overset{(+)}{-} \frac{2c}{\sqrt{f}}\cos(m-n)\cos(\mu' t + C)^{**})$$
$$(N - n - 180^0)\sin I' = + 188''{,}4f\cos(m-n)\sin(\pi-n) - 97''{,}9\sin(m-n)\cos(\pi-n) \overset{(-)}{+} b\sin(m - n \overset{(-)}{+} \mu t \overset{(-)}{+} B)$$
$$+ c\cos(m-n)\sin(\mu' t + C) \overset{(+)}{-} \frac{2c}{\sqrt{f}}\sin(m-n)\cos(\mu' t + C)^{**})$$

wo μ und μ' die Ausdrücke

$$m' - \frac{n'I'}{i+I'} \quad \text{und} \quad \frac{-4n'I'}{3(i+I')}\sqrt{f}$$

haben.

6.

Es muss jetzt gezeigt werden, welche Verbindung zwischen u, I, N und dem selenocentrischen Orte des Punktes O stattfindet. Da die Entfernung der der Erde näherungsweise zugewandten, den ersten Meridian des Mondes bestimmenden Hauptaxe, von dem aufsteigenden Knoten der Mondbahn auf der Ekliptik

$$= 180^0 + m - n + u$$

gesetzt worden und die Entfernung des aufsteigenden Knotens des Mondäquators von demselben Punkte $= 180^0 + N - n$ ist, so ist die Entfernung jener Hauptaxe von diesem Knoten $= m - N + u$, und daher die Entfernung des durch O gelegten Meridians, dessen selenographische Länge durch λ bezeichnet werden soll, von demselben Knoten $= \lambda + m - N + u$. Bezeichnet man die selenographische Breite des Punktes O durch β, seine selenocentrische Länge und Breite durch l und b, so erhält man, durch das sphärische Dreieck zwischen diesem Punkte und den Polen der Ekliptik und des Mondäquators, die Gleichungen:

$$\sin b = \sin\beta\cos I \overset{(-)}{+} \cos\beta\sin I\sin(\lambda + m - N + u)^{***})$$
$$\cos b\sin(l-N) = -\sin\beta\sin I \overset{(-)}{+} \cos\beta\cos I\sin(\lambda + m - N + u)$$
$$\cos b\cos(l-N) = \cos\beta\cos(\lambda + m - N + u)$$

welche zur Erfindung von l und b aus bekannten Werthen von λ, β, I, N, u dienen. Man kann die unmittelbare Bestimmung der selenocentrischen Geradenaufsteigung und Abweichung durch ganz ähnliche Gleichungen erlangen, in welchen, statt der auf die Ekliptik bezogenen Lage des Mondäquators, die auf den Erdäquator

*) [Zeichen in ( ) richtig; a. a. O. p. 321.]

) [a. a. O. p. 331.] — *) [a. a. O. p. 294.]

bezogene vorkommt; allein für den gegenwärtigen Zweck, nämlich für die Vergleichung der Theorie mit den Beobachtungen und die Erfindung der unbekannten Grössen der ersteren, ziehe ich die Anwendung der auf die Ekliptik bezogenen Oerter von O vor und setze daher voraus, dass sie aus den im 4. § aus den Beobachtungen abgeleiteten a und d berechnet worden sind.

Setzt man $I = I' + v$, $N = 180^0 + n + w$, so sind n, v, w kleine Grössen, deren Quadrate und Producte nicht in Betracht gezogen zu werden brauchen. Man kann dann, durch Differentiirung der drei Gleichungen, die Einflüsse kennen lernen, welche sowohl u, v, w, als auch kleine Veränderungen angenommener Werthe von λ, β, I' auf l und b äussern. Man erhält dadurch:

$$\Delta b = \alpha\left(\frac{\Delta\beta}{\cos\beta}\right) - \beta\Delta\lambda - \gamma\Delta I' - \beta u - \gamma v + \delta w \sin I'$$

$$\cos b\Delta l = \beta\left(\frac{\Delta\beta}{\cos\beta}\right) + \alpha\Delta\lambda + \delta'\Delta I' + \alpha u + \delta' v + \gamma' w \sin I'$$

wo die Coefficienten folgende Bedeutungen haben:

$$\alpha = \cos I' \cos b - \sin I' \sin b \sin(l-n)$$
$$\beta = \sin I' \cos(l-n)$$
$$\gamma = \sin(l-n)$$
$$\delta = \cos(l-n)$$
$$\gamma' = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2} I' \cos b + \sin b \sin(l-n)$$
$$\delta' = \sin b \cos(l-n)$$

Will man das in $\operatorname{tg}\frac{1}{2} I'$ multiplicirte Glied von γ', welches höchstens $= 0{,}013$ ist, vernachlässigen, so hat man $\gamma' = \gamma \sin b$, $\delta' = \delta \sin b$, und kann dadurch die Formeln in

$$\Delta b = \alpha\left(\frac{\Delta\beta}{\cos\beta}\right) - \beta\Delta\lambda - \gamma \quad \Delta I - \beta u + \{w \sin I' \cos(l-n) - v \sin(l-n)\}$$

$$\cos b\Delta l = \beta\left(\frac{\Delta\beta}{\cos\beta}\right) + \alpha\Delta\lambda - \delta \sin b \Delta I + \alpha u + \{w \sin I' \sin(l-n) + v \cos(l-n)\} \sin b$$

zusammenziehen.

Wenn man b und l aus angenommenen Werthen von β, λ, I' und unter der Voraussetzung $N = 180^0 + n$, sowie ohne Rücksicht auf u, v, w berechnet und unter Δb und Δl die Unterschiede der so erhaltenen Werthe von b und l von den aus der Beobachtung hervorgegangenen versteht, so ergibt jede Beobachtung die beiden eben entwickelten Gleichungen, und aus allen zusammen müssen die unbekannten Grössen der Aufgabe bestimmt werden.

Indessen müssen für u und die beiden von v und w abhängigen Grössen, welche in den letzten Formeln vorkommen, ihre Ausdrücke gesetzt werden, damit man die Bedeutung der einzelnen Theile der Gleichungen besser übersehe. Dem 5. § zufolge ist:

$$u = -\frac{311''{,}6\,(1-f)}{1+f.0{,}4727}\sin(M-\Pi) + 41''{,}5\,(1-f)\sin(m-\pi) + a\sin(\nu t + A)$$

$$w \sin I' \cos(l-n) - v \sin(l-n) = +188''{,}4\, f \cos(m-l)\sin(\pi-n) - 97''{,}9 \sin(m-l)\cos(\pi-n)$$
$$+ b \sin\left\{\begin{matrix}(-)\\(+)\end{matrix} m \begin{matrix}(+)\\(-)\end{matrix} l + \mu t + B\right\}$$
$$+ c\cos(m-l)\sin(\mu' t + C) \begin{matrix}(+)\\(-)\end{matrix} \frac{2c}{\sqrt{f}} \sin(m-l)\cos(\mu' t + C)^*)$$

$$w \sin I' \sin(l-n) + v\cos(l-n) = -188''{,}4\, f \sin(m-l)\sin(\pi-n) - 97''{,}9 \cos(m-l)\cos(\pi-n)$$
$$+ b\cos\left\{\begin{matrix}(-)\\(+)\end{matrix} m \begin{matrix}(+)\\(-)\end{matrix} l + \mu t + B\right\}$$
$$- c\sin(m-l)\sin(\mu' t + C) \begin{matrix}(+)\\(-)\end{matrix} \frac{2c}{\sqrt{f}} \cos(m-l)\cos(\mu' t + C)^*)$$

Die Untersuchung hat, wie hierdurch vor Augen liegt, zehn unbekannte Grössen, nämlich $\Delta\beta$, $\Delta\lambda$, ΔI, f, a, A, b, B, c, C. Indessen kann man c und C davon ausschliessen, weil die Glieder, in welchen sie enthalten sind, eine so lange Periode besitzen, dass sie sich in dem Laufe einer, einige Jahre lang fortgesetzten Beobachtungsreihe nicht erheblich ändern, also ihren Einfluss fast genau auf λ und β übertragen, für welche Grössen daher durch zwei solche, aber durch eine lange Zeit von einander getrennte Beobachtungsreihen, verschiedene Werthe gefunden werden können. Indem nämlich

$$\nu = \sqrt{\frac{-2n'm'I'}{i+I'}}\sqrt{1-f}$$

$$\mu = m' - \frac{n'I'}{i+I'}$$

$$\mu' = \frac{-4n'I'}{3(i+I')}\sqrt{f}$$

sind, so erhält man ihre Zahlenwerthe durch die Anwendung der im 4. § angeführten Werthe von m', n', i, I':

*) [a. a. O. p. 331.]

$$\nu = 2010''{,}241\sqrt{1-f}$$
$$\mu = 47477{,}486$$
$$\mu' = 56{,}7946\sqrt{f}$$

also die Perioden der in a, b, c multiplicirten Glieder:

$$= \frac{644{,}7}{\sqrt{1-f}};\quad 27{,}297;\quad \frac{22819{,}1}{\sqrt{f}}\text{ Tage.}$$

Will man, um eine ohngefähre Schätzung der ersten und letzten dieser Perioden zu erhalten, den aus der Untersuchung des Herrn NICOLLET hervorgegangenen Werth von f, etwa $= \frac{1}{15}$, anwenden, obgleich er nur mit Misstrauen gegen seine Richtigkeit gegeben wird, so findet man die erste Periode kürzer als 2 Jahre und die letzte $= 242$ Jahren; die zweite ist sehr wenig kürzer als ein Sideralmonat. Da die Dauer der letzten Periode jedenfalls 63 Jahre überschreitet, so geht hervor, dass die Ausschliessung der beiden sich darauf beziehenden unbekannten Grössen erlaubt ist; zugleich wird wahrscheinlich, dass schon eine 2 bis 3 Jahre lang fortgesetzte Beobachtungsreihe eine ganze Periode der Grösse a umfassen wird. Gelingt es, einen merklichen Werth von a durch die Beobachtungen an den Tag zu legen, so wird die Bestimmung der Dauer seiner Periode, welche man durch fortgesetzte, oder nach langer Zeit wiederholte Beobachtungen erhalten kann, das sicherste Mittel zur genauen Bestimmung von f werden. Die Entfernung $m - l$ der selenocentrischen Länge eines Punktes auf dem Monde, von dem mittleren Orte der Erde, ist sehr nahe beständig und sehr nahe der selenographischen Länge des Punktes gleich; die Perioden, welche ich eben aufgesucht habe, werden also durch das Hinzukommen dieser Grösse nicht verändert.

Man würde die Anzahl der unbekannten Grössen der Untersuchung von 8 auf 4 bringen, wenn man a und b als verschwindend voraussetzen wollte. Dieses hat Herr NICOLLET wirklich gethan; auch scheinen die Beobachtungen, welche ihm zu Gebote standen, nicht den Grad von Schärfe zu besitzen, welchen sie besitzen müssten, wenn sie die Grundlage einer weiter gehenden Untersuchung hätten werden sollen. Indessen scheint die Annahme, dass die, den ursprünglichen Zustand der Drehung des Mondes andeutenden Grössen, Anfangs oder später verschwunden seien, keinen haltbaren Grund zu haben, wenn auch die Unmerklichkeit der ähnlichen, sich auf die Erde beziehenden Grössen, durch die Beobachtungen bekannt geworden ist. Eine neue, auf kräftigere Beobachtungen gegründete Untersuchung der Libration des Mondes würde daher, wenn sie diese Grössen unberücksichtigt liesse, nicht allein von dem ihr erreichbaren Ziele entfernt bleiben, sondern auch keine Sicherheit ihrer übrigen Resultate gewähren und die Gelegenheit unbenutzt lassen, eine an sich sehr interessante Frage über die Beschaffenheit des Weltgebäudes zu beantworten.

7.

Obgleich der Vorzug nicht zweifelhaft sein kann, welchen die in dem Vorhergehenden verfolgte Beobachtungsmethode vor der bisher zur Erreichung desselben Zweckes angewandten besitzt, so wird doch eine wirkliche Ausführung derselben näher zeigen, was man davon zu erwarten hat. Ich habe sie daher am 31. März 1839, zur Bestimmung des Ortes des Kraters, welchen die Beer- und Mädler'sche Mondkarte unter $-5^0\,15'$ und $-3^0\,14'$ der selenographischen Länge und Breite angibt, angewandt. Diesen Krater habe ich vor anderen, der Mitte des Mondes nahe liegenden, gewählt, weil er selbst im Vollmonde sehr hell und in scharf begrenzter kreisförmiger Gestalt erscheint, auch durch seine Umgebungen leicht von anderen ähnlichen Kratern unterschieden werden kann und daher den Beobachter nicht der Gefahr des Verwechselns aussetzt.

Die Beobachtungen sind auf die im 2. § auseinandergesetzte Art gemacht. Statt der dort vorgeschlagenen Zwischenzeit von 2 Minuten zwischen je zwei aufeinanderfolgenden, habe ich in einer Beobachtungsreihe $2^m\,15^s$, in einer anderen $2^m\,30^s$ genommen; das nothwendige, wiederholte Aufsteigen auf die Treppen an dem grossen Königsberger Heliometer erforderte so viel von der Zeit von 2 Minuten, dass ich damit nur mit einiger Uebereilung hätte ausreichen können, während diese Zwischenzeit sicher hinreichend ist, wenn ein Gehülfe das Anschreiben der Beobachtungen, oder einen anderen Theil der Arbeit übernimmt. Ueber die Beobachtungen, welche ich, (so wie sie aufgeschrieben wurden,) folgen lasse, ist nichts weiter zu bemerken, als dass ich statt der unmittelbar eingestellten Positionswinkel ihre, durch die von dem Instrumente selbst und seiner Aufstellung herrührenden kleinen Verbesserungen schon berichtigten Werthe anführe.

Positionswinkel.		Entfernung $12^h\,13^m\,30^s$ *).	
27^0	$0'{,}8$	$18''{,}807$	$995''{,}48$
55	0,5	17,7855	941,41
82	59,3	16,529	874,91
110	58,6	15,3375	811,84
138	59,1	14,506	767,82
167	0,1	14,1365	748,27
195	0,7	14,2845	756,10

*) [Messungen selbst, nebst Uhrzeiten, weggelassen.]

Gleich nach dieser vollständigen Beobachtungsreihe machte ich eine zweite ähnliche, in der Absicht, durch die Vergleichung der Resultate beider zu einem Urtheile über ihre Uebereinstimmung zu gelangen. Diese zweite Reihe hat folgende Zahlen geliefert:

Positionswinkel.	$12^h\ 50^m\ 0^s$*)	
27° 0′,8	18″,8325	996″,83
55 0,5	17,836	944,09
82 59,3	16,573	877,23
110 58,6	15,3845	814,32
138 59,1	14,5375	769,49
167 0,1	14,160	749,51
195 0,7	14,2855	756,15

Das Barometer stand 336″,9 — 3° R.; das äussere Thermometer 18° F. Die Reduction der Uhrzeit auf Sternenzeit ist $= -2^m\ 2^s$. Die Luft war unruhig, so dass die angewandte Vergrösserung von 150mal schon unangenehme Unbestimmtheiten zeigte; übrigens war die Bissection des Kraters durch den Mondrand eine Erscheinung, welche, an sich selbst, einer genauen Beobachtung günstig ist.

Ich werde nun die einzelnen Momente der Rechnung, insofern ihre Anführung ein Interesse haben kann, mittheilen. Die Zeiten, für welche die in der letzten Columne der Beobachtungsverzeichnisse angegebenen Zahlen gelten, sind $12^h\ 11^m\ 28^s$ und $12^h\ 47^m\ 58^s$ Stz., oder $11^h\ 37^m\ 4^s,9$ und $12^h\ 13^m\ 29^s,0$ M. Z. Für diese Zeiten ergeben die Encke'schen Ephemeriden die Oerter und die Parallaxe des Mondes:

$\alpha =$	207° 8′ 6″,9	207°24′ 55″,1
$\delta =$	— 14 28 0,1	— 14 35 35,6
$\pi =$	53 56,7	53 56,77

und man findet daraus, verbunden mit der Annahme des Verhältnisses des Erdhalbmessers zum Mondhalbmesser $= 1 : 0{,}2725$, die scheinbaren, bei der Berechnung der Beobachtungen in Betracht kommenden Bestimmungen:

$\alpha' =$	207°21′ 29″,1	207°33′ 34″,8
$\delta' =$	— 15 17 47,5	— 15 25 51,6
$h' =$	886,15	886,55

Der Einfluss der Strahlenbrechung ist nach den Formeln § 3:

Erste Reihe.		Zweite Reihe.	
Positionswinkel.	Entfernung.	Positionswinkel.	Entfernung.
— 5′,5	+ 2″,01	— 4′,3	+ 1″,94
— 3,7	+ 0,63	— 3,6	+ 0,73
+ 1,2	+ 0,30	+ 0,2	+ 0,26
+ 4,8	+ 1,08	+ 3,7	+ 0,77
+ 4,0	+ 2,13	+ 3,8	+ 1,65
— 0,5	+ 2,53	+ 0,4	+ 2,13
— 4,8	+ 1,99	— 3,5	+ 1,82

*) [Messungen selbst, nebst Uhrzeiten, weggelassen.]

und also sind die von der Strahlenbrechung befreieten Positionswinkel und Entfernungen:

26°55′,3	997″,49	26°56′,5	998″,77
54 56,8	942,04	54 56,9	944,82
83 0,5	875,21	82 59,5	877,49
111 3,4	812,92	111 2,3	815,09
139 3,1	769,95	139 2,9	771,14
166 59,6	750,80	167 0,5	751,64
194 55,9	758,09	194 57,2	757,97

Nimmt man:

$$\sigma \cos\pi = -136'' + \Delta\alpha \quad \text{und} \quad = -136'' + \Delta\alpha$$
$$\sigma \sin\pi = +\ 17'' + \Delta\beta \quad \text{und} \quad = -\ 15'' + \Delta\beta$$

und wendet man die oben berechneten Werthe von h an, so erhält man aus der ersten Reihe die Bedingungsgleichungen:

$$-1'',10 = +0{,}849\,\Delta\alpha + 0{,}528\,\Delta\beta - \Delta h$$
$$-0{,}01 = +0{,}457\,\Delta\alpha + 0{,}889\,\Delta\beta - \Delta h$$
$$-0{,}04 = -0{,}033\,\Delta\alpha + 0{,}999\,\Delta\beta - \Delta h$$
$$+0{,}23 = -0{,}483\,\Delta\alpha + 0{,}876\,\Delta\beta - \Delta h$$
$$-0{,}95 = -0{,}809\,\Delta\alpha + 0{,}588\,\Delta\beta - \Delta h$$
$$-1{,}10 = -0{,}978\,\Delta\alpha + 0{,}210\,\Delta\beta - \Delta h$$
$$-0{,}46 = -0{,}980\,\Delta\alpha - 0{,}201\,\Delta\beta - \Delta h$$

und aus der zweiten Reihe:

$$-0'',95 = +0{,}850\,\Delta\alpha + 0{,}527\,\Delta\beta - \Delta h$$
$$-0{,}59 = +0{,}458\,\Delta\alpha + 0{,}889\,\Delta\beta - \Delta h$$
$$+0{,}14 = -0{,}033\,\Delta\alpha + 0{,}999\,\Delta\beta - \Delta h$$
$$+0{,}26 = -0{,}484\,\Delta\alpha + 0{,}875\,\Delta\beta - \Delta h$$
$$-0{,}55 = -0{,}810\,\Delta\alpha + 0{,}587\,\Delta\beta - \Delta h$$
$$-1{,}13 = -0{,}978\,\Delta\alpha + 0{,}202\,\Delta\beta - \Delta h$$
$$-0{,}33 = -0{,}979\,\Delta\alpha - 0{,}204\,\Delta\beta - \Delta h$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate ergibt:

$\Delta\alpha$.....	— 0″,142	— 0″,287
$\Delta\beta$.....	+ 0,708	+ 0,682
Δh.....	+ 0,923	+ 0,910

und durch die Substitution dieser Werthe wird den Gleichungen Genüge geleistet bis auf:

— 0″,44	— 0″,15
+ 0,35	— 0,15
+ 0,17	+ 0,36
+ 0,46	+ 0,43
— 0,56	— 0,27
— 0,46	— 0,64
+ 0,47	+ 0,44

Man hat also:

$\sigma \cos\pi$...	— 136″,142	— 136″,287
$\sigma \sin\pi$...	+ 17,708	+ 15,682

und ferner, indem man die angenommenen Werthe des

Mondhalbmessers um das Mittel beider gefundenen Werthe von Δh ($= + 0''{,}917$) verbessert:

π.....	172°35′ 21″	173°26′ 10″
S.....	8 54 11,9	8 53 33,1
$S - \sigma$....	8 51 54,6	8 51 15,9

Aus der Verbindung dieser Bestimmungen mit den oben angegebenen scheinbaren Oertern des Mondes erhält man endlich die selenocentrische Bestimmung des beobachteten Kraters:

Geradeaufsteigung $a =$	26°12′ 42″,2	26°32′ 40″,9
Abweichung..... $d =$	+ 6 30 16,7	+ 6 37 57,7
Länge ..... $l =$	26 39 56,3	27 1 18,6
Breite ..... $b =$	— 4 3 43,8	— 4 3 33,4

Dieses sind also die Resultate der beiden Beobachtungsreihen. So lange sie nur abgesondert von späteren vorhanden sind, hat es kein Interesse, die Bedingungsgleichungen aufzusuchen, welche die gefundenen Werthe von l und b mit den Constanten in Verbindung setzen, von welchen die Kenntniss der Libration des Mondes abhängt. Will man aber, unter Vernachlässigung aller periodischen Glieder der Ausdrücke der Drehungselemente des Mondes, und unter der Annahme der Neigung seines Aequators $= 1°\,28'\,45''$, die selenographische Bestimmung des beobachteten Kraters daraus ableiten, so wird man sie

Länge....	— 5° 4′ 31″,4	— 5° 3′ 9″,6
Breite....	— 3 16 2,1	— 3 15 23,8

finden. Hierbei sind die mittlere Länge des Mondes und seines aufsteigenden Knotens, beide mit Inbegriff der Säculargleichungen und von dem scheinbaren Nachtgleichenpunkte an gezählt,

Länge....	211°49′ 15″,3	212° 9′ 14″,1
Knoten...	354 12 1,2	354 11 56,4

angenommen.

Insofern man ein Urtheil über den Erfolg, welchen diese Beobachtungsmethode verspricht, auf nur zwei Beobachtungsreihen gründen will, kann es nur sehr günstig ausfallen. Die beiden Bestimmungen des selenographischen Ortes des Kraters stimmen bis auf 1′ 22″,8 in Länge und 38″,3 in Breite überein, welcher Unterschied, von der Erde aus, noch nicht 0″,4 gross erscheint. Die beiden Bestimmungen des Halbmessers des Mondes stimmen so gut wie völlig überein. Endlich ist die Schärfe, womit man die Bissection des Kraters durch den Mondrand beurtheilen kann, wenn übrigens die Umstände nicht ungünstig sind und der Krater sich nicht an einem sehr rauhen Theile des Randes befindet, so gross, dass der Erfolg, so wie er sich durch die Vergleichung der 7 Momente jeder Beobachtungsreihe oben gezeigt hat, keinesweges als die Wirkung eines günstigen Zufalles erscheint. Ich zweifle auch nicht, dass diese Methode eine der erfolgreichsten sein würde, wenn es auf die mikrometrische Messung des Mondes abgesehen wäre.

Die angeführten Beobachtungen sind zwar mit einem Heliometer gemacht, welches grösser ist, als anderen Beobachtern bis jetzt zu Gebote stehende ähnliche Instrumente; allein ich glaube, dass sein Vorzug vor den, seit langer Zeit so häufig vorhandenen, kleineren Fraunhofer'schen Instrumenten derselben Art, in Beziehung auf diese Beobachtungen, nicht sehr gross ist; und ferner, dass die ungünstige Beschaffenheit der Luft, welche bei den angeführten Beobachtungen stattfand, den Vortheil auf Seiten des grösseren Instruments so sehr vermindert hat, dass kleinere, unter günstigen Umständen, nicht weniger leisten werden. Ich bin also der Meinung, dass die gewünschte Kenntniss der Libration des Mondes auch durch kleinere Fraunhofer'sche Heliometer verhältnissmässig leicht zu erlangen sein wird.

165. Ueber Sternschnuppen.*)

(Astron. Nachr. **16**, p. 321.)

Seit dem Ende des vorigen Jahrhunderts haben die Sternschnuppen das wissenschaftliche Interesse von zwei verschiedenen Seiten erregt: im Jahre 1798 geriethen Brandes und Benzenberg auf die glückliche Idee, sie von zwei Standpunkten aus zu beobachten und dadurch ihre Höhen über der Erde zu bestimmen, und am 11. Nov. 1799 bemerkte Alexander von Humboldt, der sich damals in Cumana befand, eine sehr ungewöhnliche Menge dieser Erscheinungen, welche sich in beinahe gleichen Richtungen bewegte, und deren Sichtbarkeit nicht allein an seinem Beobachtungsorte, sondern auf einem grossen Theile der Erde, er durch die Aufsuchung fremder, gleichzeitiger Nachrichten, in das hellste

) [328 d. a. Verz. — S. auch 325, 328, 329, 330, 332 d. a. Verz. — Br. m. O. II. 434 (O.), 435 fl. 439. 440.]

Licht setzte. Dasselbe Ereigniss ist später, wiederholt und in nahe jährlicher Periode, beobachtet worden und hat, mit Recht, die grösste Aufmerksamkeit auf sich gezogen. So wie unsere Ansichten von den Sternschnuppen durch BRANDES und BENZENBERG geworden sind, muss man geneigt sein, eine periodische Erscheinung derselben in ungewöhnlich grosser Zahl als zum Weltsysteme selbst gehörig zu betrachten. Die Aussicht auf eine Entdeckung dieser Art, welche die Sternschnuppen zu eröffnen scheinen, macht sie zu Gegenständen der Aufmerksamkeit des Astronomen und fordert diesen auf, auch ihre nähere Untersuchung als nicht ausser seinem Kreise liegend zu betrachten. Daher haben sie auch das Interesse, nicht nur von HUMBOLDT, BRANDES und BENZENBERG, sondern auch von OLBERS und ARAGO erregt, wie man aus der anhaltenden Sammlung des letztern, von Nachrichten über ihr Erscheinen, und aus den Aufsätzen ersieht, wodurch der erstere neuerlich die Leser des Schumacher'schen Jahrbuches erfreuet und belehrt hat.

BRANDES, von mehreren seiner wissenschaftlichen Freunde unterstützt, hat die schon erwähnten, früheren Beobachtungen der Sternschnuppen von verschiedenen Standpunkten aus, im J. 1823, nach einem ausgedehnteren Plane fortgesetzt, und ist dadurch nicht allein zu einer Bestätigung des früheren Resultats gelangt, dass sie oft in Höhen über der Erde gesehen werden, bis zu welchen man die Atmosphäre sich nicht erstreckend anzunehmen pflegt; sondern er hat auch aus den Beobachtungen gefolgert, dass ihre Bewegung sie nicht immer der Erde nähert, dass vielmehr die Fälle, in welchen sie sich von derselben entfernen, nicht selten sind. Beide Resultate erscheinen auffallend: das erste, weil man nicht erwarten konnte, einen sich im Schatten der Erde also im dunkeln Raume und zugleich ausserhalb der Atmosphäre befindlichen Körper hellleuchtend werden zu sehen; das andere, weil das Aufsteigen von Sternschnuppen Vorstellungen von der Natur dieser Erscheinungen, welche man aus anderen Gründen zu verfolgen geneigt sein muss, zu widersprechen scheint. Wenn sie nämlich als körperlich, und daher der Anziehung der Erde unterworfen betrachtet werden, so folgt daraus, dass die krummen Linien, welche sie beschreiben, ihre Höhlungen der Erde zuwenden, woraus klar wird, dass ein beobachteter Theil derselben, dessen Richtung durch den Erdkörper führend erkannt wird, zu einer Bahn gehört, welche nicht bei ihm vorbeigeführt haben, oder vorbeiführen kann. Dann erscheint also das Aufsteigen der Sternschnuppen als die Folge einer, sie von der Erde entfernenden Wurfgeschwindigkeit, deren Ursache man nicht anzugeben weiss. Zwar hat CHLADNI diese in einer Reflexion sehr grosser Geschwindigkeiten, von ursprünglich entgegengesetzter Richtung, von der Atmosphäre der Erde, gesucht; aber die Möglichkeit einer solchen Wirkung der Atmosphäre ist ebensowenig durch einen Versuch veranschaulicht, als durch eine Theorie gerechtfertigt worden, weshalb ich keinen Grund sehe, sie für wahrscheinlich zu halten. Dieses Urtheil über CHLADNI's Meinung haben schon BRANDES und OLBERS ausgesprochen; der letztere bemerkt, dass das Aufsteigen die Folge einer Zersprengung der Sternschnuppen sein kann, wovon einige Feuerkugeln wirklich unzweideutige Beispiele darbieten.

Indessen darf auch dem unerwartetsten, aus Beobachtungen gefolgerten Resultate die Annahme nicht verweigert werden, wenn seine Sicherheit nicht bestritten werden kann. Kann man zu der Ueberzeugung gelangen, dass die angeführten Resultate unzweifelhafte Folgen der Beobachtungen sind, so werden sie Grundlagen der ferneren Versuche, die Natur der Sternschnuppen näher kennen zu lernen. Man bemerkt sehr leicht, dass diese Versuche von wesentlich verschiedenen Anfängen ausgehen müssen, je nachdem die Wahrheit der von BRANDES erkannten Eigenschaften der Bewegungen der Sternschnuppen anerkannt oder geläugnet wird. Indem ich die Untersuchung von BRANDES aufmerksam verfolgt habe, habe ich die Ueberzeugung von der Richtigkeit ihrer beiden Resultate nicht erlangen können; denn ich habe die Erörterung zweier ihrer Grundlagen vermisst, welche, meines Erachtens, nicht als unzweifelhaft sicher hätten betrachtet werden sollen.

Die eine dieser Grundlagen der Untersuchung ist die Voraussetzung, dass eine Sternschnuppe, von zwei Beobachtern an verschiedenen Standpunkten, gleichzeitig erscheinend und gleichzeitig verschwindend gesehen wird. Zu ihrer Begründung finde ich nur angeführt, dass diese Erscheinungen ihr Licht gewöhnlich plötzlich, ohne vorangegangene allmählige Abnahme, verlieren; von der Art, wie sie ihr Licht erlangen, finde ich nichts gesagt. Man kann jedoch bezweifeln, dass der Eindruck, welchen das Verschwinden einer Sternschnuppe auf das Auge macht, eine hinreichend sichere Stütze einer Annahme ist, deren sehr beträchtlichen Einfluss auf die Resultate der Untersuchung die geringste Aufmerksamkeit entdecken lässt. Ich habe versucht, ihn durch die erste Figur, in dem Falle, in welchem er am gefährlichsten ist, anschaulich zu machen: sie stellt einen Fall dar, in welchem die Bewegungslinie einer Sternschnuppe MM' und die beiden Standpunkte O, O' der Beobachter in einer Ebene

liegen; das Erscheinen und das Verschwinden sollen am ersten Standpunkte gesehen werden, wenn sie sich wirklich in a und a' befindet, am zweiten wenn sie in b und b' ist. Die Voraussetzung der Gleichzeitigkeit des Erscheinens sowohl als des Verschwindens versetzt den Punkt, wo das erstere erfolgt ist, in den Durchschnittspunkt der Gesichtslinien Oa und $O'b$, also nach c; der Punkt, wo das andere erfolgt ist, nach c'; sie verwandelt also die Bewegungslinie MM' der Sternschnuppe in die gänzlich verschiedene NN'. Selbst wenn man zugeben wollte, dass der Eindruck, welchen die Art des Verschwindens einer Sternschnuppe auf das Auge macht, eine hinreichende Bürgschaft für die Gleichzeitigkeit gewähre, so würde die Unsicherheit, welche in dieser Beziehung bei dem Erscheinen stattfindet, das Zutrauen zu den Resultaten vernichten müssen, welche man nur unter der Voraussetzung der Gleichzeitigkeit beider Momente erhalten hat. Allein ich muss gestehen, dass ich auch gegen die allgemeine Richtigkeit der angeführten, das Verschwinden betreffenden Angabe einiges Misstrauen hege; denn ich erinnere mich Sternschnuppen gesehen zu haben, welche ihr Licht allmälig verloren, so dass ich über den wahren Endpunkt ihrer sichtbaren Bahn ungewiss blieb; Herr Professor FELDT in Braunsberg, der einer der eifrigsten Theilnehmer an den von BRANDES angeordneten Beobachtungen gewesen ist, hat mir einen, in der gegenwärtigen Beziehung bemerkenswerthen Fall angeführt, in welchem eine fast oder ganz verschwundene Sternschnuppe aufs Neue leuchtend wurde und ihren sichtbaren Weg am Himmel noch beträchtlich weit fortsetzte, bis sie allmälig wieder verschwand. Wenn aber das plötzliche Verlöschen des vollen Lichtes der Sternschnuppen nicht als entschieden angenommen werden kann, so kann auch nicht behauptet werden, dass Verschiedenheiten ihrer Entfernungen von zwei Standpunkten, der Durchsichtigkeit der Luft daselbst und der Gesichtsschärfe der Beobachter, nicht die Folge haben können, dass beide Beobachter sie nicht gleichzeitig erscheinen und verschwinden sehen.

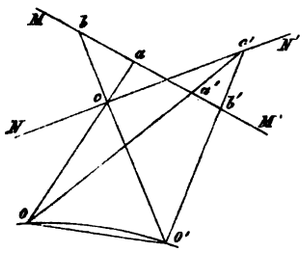


Fig. 1.

Die zweite der Grundlagen der Untersuchung von BRANDES, welche vorher hätte erörtert werden sollen, ist die Annahme, dass die Beobachtungen genau genug seien, um durch ihre eigenen Fehler keinen Zweifel auf die beiden Hauptresultate zu werfen. Es hätte untersucht werden sollen, welchen Grad von Sicherheit die von den Beobachtern gemachten Ortsangaben, sowohl der Erscheinungspunkte, als auch der Verschwindungspunkte der Sternschnuppen besitzen. Das sicherste, sowie auch in anderen Beziehungen wünschenswertheste Verfahren wäre ohne Zweifel gewesen, dass die verschiedenen Beobachter, ehe sie sich an ihre Standpunkte begaben, nebeneinander eine Anzahl Sternschnuppen beobachtet hätten. Obgleich man durch die Unterlassung dieser Vorbereitung die nähere Kenntniss des Grades der Unsicherheit der einzelnen Angaben entbehrt, so muss man doch glauben, dass sie in mehreren Fällen, beziehungsweise zu der Absicht der Beobachtungen, nicht unerheblich ist. Die Beobachtungen können nur rohe Annäherungen an die Wahrheit sein, denn sie bestehen in der auf benachbarte, dem blossen Auge sichtbare Sterne gegründeten Schätzung der Oerter, wo eine Sternschnuppe zuerst und zuletzt bemerkt worden ist; in Schätzungen, deren an sich grosse Unvollkommenheit durch die Uebereilung, welche der schnelle Verlauf der Erscheinung mit sich bringt, noch beträchtlich vermehrt werden muss, und welche in der Armuth vieler Stellen des Himmels an hellen Sternen, sowie auch in dem Mangel zweckmässig eingerichteter, allgemeiner Sternkarten neue Vermehrungen findet. Um zu irgend einer Meinung über die Sicherheit dieser Beobachtungen zu gelangen, habe ich, in Ermangelung eigener Erfahrungen darin, Herrn Professor FELDT zu Rathe gezogen, und er hat mir gesagt, dass man, in den günstigsten Gegenden des Himmels, sowie unter den günstigsten sonstigen Verhältnissen, den Endpunkt der sichtbaren Bahn einer Sternschnuppe oft bis auf einen halben Grad sicher anzugeben glaube. Nimmt man zu dieser Angabe, welche das Aeusserste, was ein sehr geübter Beobachter zu erreichen hofft, bezeichnet, das häufige Fehlen der günstigsten Umstände hinzu, so wird man wohl nicht geneigt sein, den mittleren Fehler jedes der beiden Momente einer Beobachtung unter einem Grade zu schätzen; man wird vielmehr erwarten, den Punkt, wo eine Sternschnuppe zuerst bemerkt wird, noch weniger sicher bestimmt zu sehen. Häufig zeigen zwar die Sternschnuppen so grosse Parallaxen, dass Beobachtungsfehler von einer ähnlichen Grösse wenig in Betracht kommen, wenn es sich nicht um genaue specielle Bestimmungen, sondern um die Erkenntniss der Art der Bewegung im Allgemeinen handelt; allein unter den von BRANDES berechneten Fällen sind auch mehrere, in welchen eine gründliche Untersuchung erforderlich gewesen wäre, um beurtheilen zu können, in wiefern das durch sie abgelegte Zeugniss, trotz der Grösse der

Beobachtungsfehler, als unverdächtig angesehen werden darf.

Für oder wider die Gleichzeitigkeit der Erscheinung und der Verschwindung einer Sternschnuppe an zwei Beobachtungsorten, welche, meiner oben ausgesprochenen Ansicht nach, nicht ohne Prüfung angenommen werden darf, können die Beobachtungen selbst ein Urtheil begründen. Man bemerkt zwar leicht, dass in Fällen, in welchen die Bewegungslinie der Sternschnuppe und die Standpunkte der Beobachter in Einer Ebene liegen, die Beobachtungen nichts für oder wider ihre Gleichzeitigkeit lehren können; aber in allen anderen Fällen muss eine Ungleichzeitigkeit sich dadurch in den Beobachtungen verrathen, dass sie den Durchschnitt der nach den Erscheinungs- oder Verschwindungspunkten gelegten Gesichtslinien unmöglich macht. Sucht man, wenn dieses eintritt, die kleinsten Aenderungen auf, durch deren Anbringung an die, an zwei Standpunkten beobachteten Oerter des Erscheinens oder Verschwindens, die Gesichtslinien zum Durchschneiden gelangen, und findet man diese Aenderungen grösser, als dass man sie aus den Beobachtungsfehlern entstehend ansehen könnte, so wird dadurch der Annahme der Gleichzeitigkeit entscheidend widersprochen; findet man sie immer in dem Umfange der Beobachtungsfehler, so erhält hierdurch diese Annahme die Wahrscheinlichkeit, auf welche allein sich ihre weitere Verfolgung stützen darf. Ich werde im Folgenden die zu dieser Untersuchung über die Gleichzeitigkeit erforderlichen Rechnungsvorschriften mittheilen. Ich verdanke dem Eifer des Herrn Professors Feldt für alles, was diesen Gegenstand betrifft, ihre Anwendung auf die Beobachtungen, welche Brandes zusammengebracht hat*); aus den mitzutheilenden Resultaten seiner Rechnung wird man sehen, dass unter 48 Paaren correspondirender Beobachtungen der Verschwindungspunkte von Sternschnuppen sich 23 befinden, welche mit der Voraussetzung der Gleichzeitigkeit nur durch Aenderungen, an jede ihrer Angaben angebracht, vereinbar werden, welche über zwei Grade und bis zu $7^0\,18'$ steigen. Wenn man die Kenntniss der mittleren Unvollkommenheit der Beobachtungen nicht entbehrte, so würde dieses Resultat der Rechnung wahrscheinlich für oder wider die Voraussetzung entscheiden; da man sie aber entbehrt, so kann es nur mit einer individuellen Ansicht von der Sicherheit der Beobachtungen verglichen werden. Obgleich die meinige ist, dass Fehler von solcher Grösse wenigstens nicht zu den unvermeidlichen gehören, so glaube ich doch, dass nur neue, gut angeordnete und genügend untersuchte Beobachtungen zu einem unbedingten Urtheile über die Rechtmässigkeit der Voraussetzung berechtigen werden. Indessen hat sie in dieser Untersuchung, wenn keinen entscheidenden Widerspruch, doch auch keine Rechtfertigung gefunden; und noch weniger darf man sie in Beziehung auf die Punkte des ersten Erscheinens der Sternschnuppen als gerechtfertigt betrachten, indem weder die Plötzlichkeit dieses Erscheinens behauptet worden, noch wahrscheinlich ist, dass es von verschiedenen Beobachtern in einem und demselben Momente wahrgenommen wird. Obgleich die Abweichungen der Beobachtungen von der Voraussetzung der Gleichzeitigkeit des Verschwindens als sehr gross erkannt worden sind, so ist dennoch ein Grund vorhanden, welcher gerade die grössten der Bemerkung entzogen haben kann, und wenn noch grössere als die aus der Untersuchung hervorgegangenen vorgekommen sind, sie ihr wirklich entzogen haben muss; indem Brandes nämlich kein anderes Kennzeichen der Identität einer correspondirend beobachteten Sternschnuppe anwenden konnte, als das näherungsweise eintretende Durchschneiden der Gesichtslinien, muss er alle die Sternschnuppen als nicht-identisch aus seinem Verzeichnisse ausgeschlossen haben, bei welchen die Wirkung einer Ungleichzeitigkeit sehr bemerkbar hervortrat. Um eine vollständige Einsicht in diese Materie zu erlangen, muss man also neue Beobachtungen machen, über deren Anordnung ich später unten meine Meinung sagen werde.

Nach dem dargestellten Ausfalle der Untersuchung über die Gleichzeitigkeit des Verschwindens der Sternschnuppen darf ihre weitere Untersuchung nicht auf diese Voraussetzung gegründet werden. Es ist klar, dass zwei Gesichtslinien den Ort der Sternschnuppe nicht bestimmen können, wenn sie nicht zum Durchschneiden gelangen; diese Schwierigkeit hat sich auch Brandes nicht verborgen, und er hat sie nur dadurch beseitigen können, dass er die Erscheinung an den Punkt des Raumes versetzt hat, welcher der beiden Gesichtslinien am nächsten kommende ist. Hätte er auch die Aenderungen aufgesucht, welche den beobachteten Oertern hinzugesetzt werden müssen, damit dieser Punkt der der Sternschnuppe wird, so würde man sehen, wie weit man sich in jedem einzelnen Falle von den Beobachtungen entfernen muss, um die Sternschnuppe wirklich daselbst anzunehmen; dieses hat er aber unterlassen, und damit seinen Resultaten die Stütze des ihnen zu schenkenden Zutrauens entzogen. Ich habe dagegen versucht, aus den vorhandenen Beobachtungen Resultate

*) Beobachtungen über Sternschnuppen, Leipzig 1825.

zu ziehen, welche nicht auf der Voraussetzung ihrer Gleichzeitigkeit beruhen. Indem die zu verschiedenen Zeiten nach einer Sternschnuppe gelegten Gesichtslinien nur durch eine Annahme über die Natur der Linie, welche sie beschreibt, in Verbindung mit einander gebracht werden können, so muss eine solche Annahme, statt der zu verlassenden Voraussetzung der Gleichzeitigkeit, in die Betrachtung gezogen werden. Da der Verlauf der Erscheinung einer Sternschnuppe immer von sehr kurzer Dauer ist, so kann im Allgemeinen nicht bezweifelt werden, dass die von ihr während dieser kurzen Zeit beschriebene Linie nicht erheblich gekrümmt ist; dasselbe gilt von den Bewegungen jedes der Punkte, von welchen man sie sieht, sowohl von der gemeinschaftlich mit der Erde selbst fortschreitenden, als von der drehenden um die Erdaxe. Die Folge hiervon ist, dass die Sternschnuppen grösste Kreise an der Himmelskugel beschreiben, womit in der That die Beobachter im Allgemeinen übereinstimmen, wenn sie auch in einzelnen Fällen Abweichungen vom grössten Kreise, oft mit plötzlichen Lichtveränderungen, vielleicht Explosionen, verbunden, bemerkt haben. Ich habe daher die scheinbaren Bahnen der Sternschnuppen als grösste Kreise angenommen und auf diese Annahme die ferneren Resultate gegründet. Die einzelnen Fälle, welche ich eben erwähnt habe, müssen von der, sich auf diese Annahme gründenden Behandlungsart der Beobachtungen ausgeschlossen werden.

Indem, dieser Annahme gemäss, durch den Standpunkt jedes Beobachters und durch die Bewegungslinie der Sternschnuppe eine Ebene gelegt werden kann, bestimmt die Durchschnittslinie zweier, sich auf zwei Standpunkte beziehenden Ebenen im Allgemeinen (d. h. mit Ausnahme des Falles, in welchem sie parallel sind, in welchem also keine Durchschnittslinie vorhanden ist) die Linie, in welcher die Sternschnuppe sich bewegt hat. Die Gesichtslinien, bis zu dieser geraden Linie fortgesetzt, bestimmen ihre Oerter im Raume, also auch ihre Entfernungen von der Erde, und damit ihr Fallen oder Steigen. Die Aenderungen dieser Resultate, welche aus Aenderungen der beobachteten Oerter am Himmel, von angenommener Grösse, entstehen, können gleichfalls bestimmt werden. Dieser Idee folgend, habe ich Vorschriften für die Berechnung der beobachteten Sternschnuppen entworfen, deren nicht ohne erhebliche Arbeit auszuführende Anwendung auf alle vorhandenen Beobachtungen derselben ich Herrn Professor FELDT gleichfalls verdanke. Es ist daraus hervorgegangen, dass zwar das eine der von BRANDES geltend gemachten Resultate, nämlich die sehr oft stattfindende Grösse ihrer Höhen über der Erdoberfläche, nicht bezweifelt werden kann; dass aber das andere, nämlich ihr Aufsteigen von der Erde, aus den vorhandenen Beobachtungen nicht erwiesen werden kann.

Nachdem ich nun den Gang des Folgenden im Allgemeinen dargestellt habe, wende ich mich zu dem Einzelnen der Untersuchung.

1.

Ich bezeichne die Geradeaufsteigung und Abweichung eines Punktes der scheinbaren Bahn der Sternschnuppe am Standpunkte O durch a und d, am Standpunkte O' durch α und δ, und werde aufsuchen, inwiefern diese Punkte mit der Voraussetzung ihrer Gleichzeitigkeit vereinbar sind, so wie auch die kleinsten Aenderungen, durch deren Anbringung sie damit vereinbar werden.

Indem im Falle der Gleichzeitigkeit die beiden Gesichtslinien von O und von O' aus sich in einem Punkte durchschneiden, da wo die Sternschnuppe sich befindet, so liegen die diese Gesichtslinien bestimmenden Punkte der Himmelskugel, und der Punkt, welcher der Richtung von O nach O' entspricht, in einem grössten Kreise. Wenn daher die Geradeaufsteigung und Abweichung des letzteren Punktes durch A und D bezeichnet werden, so erlangt man die, die Bedingung der Gleichzeitigkeit ausdrückende Gleichung:

$$0 = \operatorname{tg} d \sin(\alpha - A) - \operatorname{tg}\delta \sin(a - A) + \operatorname{tg} D \sin(a - \alpha) \ldots (1)$$

welche Gleichung also durch die beobachteten $a, d; \alpha, \delta$ erfüllt werden muss, wenn die Beobachtungen gleichzeitig und fehlerfrei sind. Allein selbst im Falle der Gleichzeitigkeit wird sie nicht wirklich erfüllt werden, da die Fehler der Beobachtungen ihre Erfüllung verhindern; ihre Anwendung hat also kein Interesse, sondern dieses muss in der Bestimmung der Aenderungen gesucht werden, welche an die beobachteten Oerter der Sternschnuppe angebracht werden müssen, damit sie der Bedingung der Gleichzeitigkeit entsprechen.

Wenn in der 2. Figur a den am Standpunkte O, b den am Standpunkte O' beobachteten Ort der Sternschnuppe bedeuten, c den vom ersten Standpunkte gesehenen Ort des zweiten, so fordert die Annahme der Gleichzeitigkeit, dass cab in einem grössten Kreise liegen. Ist dieses nicht der Fall, und legt man durch die Mitte m des a und b verbindenden grössten Kreises den grössten Kreis cd, so sind die, offenbar einander gleichen Entfernungen der Punkte a und b von ihm, die kleinsten Aenderungen, wodurch diese

Fig. 2.

Punkte mit der Annahme der Gleichzeitigkeit vereinbar werden. Unter verschiedenen, sich leicht darbietenden Arten, diese kleinsten Aenderungen durch Rechnung zu finden, kann man die folgende wählen.

Zuerst berechnet man die Entfernungen ca und cb, welche ich durch s und σ bezeichnen werde, und die Positionswinkel von a und b am Punkte c, für welche ich die Zeichen p und π annehme, was durch die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \cos s &= \sin D \sin d + \cos D \cos d \cos(a-A) \\ \sin s \cos p &= \cos D \sin d - \sin D \cos d \cos(a-A) \\ \sin s \sin p &= \cos d \sin(a-A) \end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\sigma &= \sin D \sin\delta + \cos D \cos\delta \cos(\alpha-A) \\ \sin\sigma \cos\pi &= \cos D \sin\delta - \sin D \cos\delta \cos(\alpha-A) \\ \sin\sigma \sin\pi &= \cos\delta \sin(\alpha-A) \end{aligned}\right\} \ldots (3)$$

oder vielmehr durch eine zweckmässige Einführung von Hülfswinkeln in dieselben (bei welcher ich mich weder hier noch in der Folge aufhalten werde) geschieht. Bezeichnet man den Positionswinkel von m im Punkte c durch M, und die beiden gleichen Entfernungen der Punkte a und b von cm durch f, so hat man:

$$\sin f = \sin s \sin(p-M) = \sin\sigma \sin(M-\pi) \ldots (4)$$

woraus

$$\operatorname{tg}\{M - \tfrac{1}{2}(\pi-p)\} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\sigma-s)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\sigma+s)} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\pi-p) \ldots (5)$$

folgt. Nachdem s, p, σ, π durch die Formeln (2) und (3) gefunden sind, berechnet man M aus (5) und endlich das gesuchte f aus (4); wendet man beide Ausdrücke des letzteren an, so controllirt man dadurch die Richtigkeit der Berechnung von M.

Es ist noch nöthig, dass ich die Formeln anführe, durch welche A und D gefunden werden. Bezeichnet man die sogenannte verbesserte Breite des Punktes O durch φ, seine Sternenzeit, in Kreistheile verwandelt, durch μ, seine Entfernung vom Mittelpunkte der Erde durch h; die ähnlichen Grössen für den Punkt O' durch φ', μ', h'; die Entfernung der beiden Punkte voneinander durch R, so hat man:

$$\begin{aligned} R\cos D\cos A &= h'\cos\varphi'\cos\mu' - h\cos\varphi\cos\mu \\ R\cos D\sin A &= h'\cos\varphi'\sin\mu' - h\cos\varphi\sin\mu \\ R\sin D &= h'\sin\varphi' - h\sin\varphi \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} R\cos D\cos\left\{A - \frac{\mu'+\mu}{2}\right\} &= (h'\cos\varphi' - h\cos\varphi)\cos\frac{\mu'-\mu}{2} \\ R\cos D\sin\left\{A - \frac{\mu'+\mu}{2}\right\} &= (h'\cos\varphi' + h\cos\varphi)\sin\frac{\mu'-\mu}{2} \\ R\sin D &= h'\sin\varphi' - h\sin\varphi \end{aligned}$$

und, da $\mu' - \mu$ der östlich positiv genommene Mittagsunterschied ($= m$) des Punktes O', von O gezählt, ist:

$$\left.\begin{aligned} R\cos D\cos\{A - \tfrac{1}{2}m - \mu\} &= (h'\cos\varphi' - h\cos\varphi)\cos\tfrac{1}{2}m \\ R\cos D\sin\{A - \tfrac{1}{2}m - \mu\} &= (h'\cos\varphi' + h\cos\varphi)\sin\tfrac{1}{2}m \\ R\sin D &= h'\sin\varphi' - h\sin\varphi \end{aligned}\right\} (6)$$

Diese Formeln dürfen, für jedes Paar der Beobachtungsörter, nur einmal berechnet werden. Bezeichnet man den dadurch gefundenen Werth von $A - \frac{1}{2}m - \mu$ durch B, so erhält man, für jeden besonderen Fall, $A = B + \frac{1}{2}m + \mu$. Selten wird man die Beobachtungen für so genau halten, dass die Berücksichtigung der Abplattung der Erde wesentlich erschiene: will man sie vernachlässigen, so werden h und $h' = 1$, und φ und φ' den Polhöhen gleich gesetzt, wodurch eine kleine Abkürzung der Rechnung erlangt werden kann; sie ist aber desto unbedeutender, da sie eine nur einmal zu machende Rechnung betrifft.

2.

Unter den Beobachtungen, welche BRANDES in der schon angeführten Schrift mittheilt, hat Herr Professor FELDT 48 correspondirende Paare für die Verschwindungspunkte von Sternschnuppen gefunden; einige Beobachtungen hat er ausgeschlossen, weil sie entweder unvollständig oder als unsicher angegeben sind. Die Beobachtungsörter waren Breslau, Gleiwitz, Leipe, Trebnitz, Mirkau, Neisse und Dresden. [Mittheilung der 48 Werthe $\mu, a, d, \alpha, \delta, f$ für die correspondirenden Sternschnuppen No. 6, 10—14, 17, 18, 20—23, 25—30, 32—36, 38—51, 53—55, 57, 58, 61—63 nach BRANDES. (Aug. 4 — Oct. 9 1823.)]

Aus der Tafel ergibt sich, dass der Werth von f, oder die jedem beobachteten Orte eines Verschwindungspunktes anzubringende Veränderung, welche die kleinste ist, wodurch die Beobachtungen mit der Voraussetzung ihrer Gleichzeitigkeit vereinbar werden,

bei 14	Paaren	von	Beobb.	zwischen	0^0	und	1^0
11	„	„	„	„	1	„	2
5	„	„	„	„	2	„	3
7	„	„	„	„	3	„	4
5	„	„	„	„	4	„	5
3	„	„	„	„	5	„	6
2	„	„	„	„	6	„	7
1	„	„	„	„	7	„	8

beträgt. Diese Rechnung erscheint der Voraussetzung nicht günstig; vielmehr glaube ich, dass Beobachtungsfehler von der Grösse der gefundenen Werthe von f nur durch eine Sorglosigkeit der Beobachter erklärt werden könnten, zu deren Annahme man in der Schrift von BRANDES keinen Grund findet.

3.

Ich werde nun die Vorschriften entwickeln, welchen man folgen muss, wenn man, unabhängig von der Voraussetzung der Gleichzeitigkeit der Beobachtungen, zu Resultaten über die Sternschnuppen gelangen will. In der 3. Figur bedeuten a und a' die Punkte an der Himmelskugel, wo, vom Standpunkte O aus, das Erscheinen und Verschwinden einer Sternschnuppe beobachtet worden ist, welche Punkte durch die Geradenaufsteigungen und Abweichungen a, d; a', d' gegeben sein sollen; b und b' bedeuten dasselbe in Beziehung auf den Standpunkt O', und diese Punkte werden durch die Geradenaufsteigungen und Abweichungen α, δ; α', δ' gegeben; c ist, wie in der 2. Figur, der Punkt der Himmelskugel, welcher der Richtung $O\,O'$ entspricht, seine Geradeaufsteigung und Abweichung werden durch A, D bezeichnet, und durch die auf die Formeln (6) gegründete Vorschrift ohne Mühe gefunden. Zieht man die grössten Kreisbögen ca, ca', cb, cb' und bezeichnet man sie durch s, s', σ, σ', sowie auch ihre Positionswinkel am Punkte c durch p, p', π, π', so kann man diese (nach den Formeln (2) oder (3) berechnet), statt der Geradenaufsteigungen und Abweichungen der Punkte a, a', b, b', als die durch die Beobachtungen gegebenen Grössen ansehen. In dieser Form dargestellt, zeigen die Beobachtungen unmittelbar, inwiefern sie der Voraussetzung der Gleichzeitigkeit entsprechen; sie entsprechen ihr, wenn $p = \pi$ und $p' = \pi'$ sind. Allein im Allgemeinen wird man dieses nicht finden, und dann die Beobachtungen so ändern müssen, dass sie den zu ihrer weiteren Berechnung wesentlichen Bedingungen $\pi = p$ und $\pi' = p'$ Genüge leisten. Dieses geschieht, indem man statt der unmittelbar am Punkte O' beobachteten Oerter b, b' der Sternschnuppen, andere β, β' anwendet, welche in ihrer scheinbaren Bahn am Punkte O' und zugleich in den grössten Kreisen ca und ca' liegen. Um diese Oerter aus den beobachteten abzuleiten, wird die Kenntniss der scheinbaren Bahn am Punkte O' erfordert, und ihre Voraussetzung als grösster Kreis ist die einzige, welche gemacht werden muss; auch diese Voraussetzung würde man zu machen nicht gezwungen sein, wenn man die scheinbare Bahn der Sternschnuppen am Punkte O' vollständiger kennte, als durch die Beobachtungen ihres Anfangs- und Endpunktes. Bezeichnet man $c\beta$ durch $\sigma_{,}$, $c\beta'$ durch $\sigma'_{,}$, und betrachtet man das Dreieck $O'O\,a$ Fig. 4, in welchem O, O' die beiden Standpunkte und

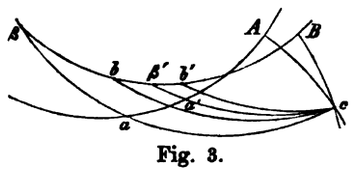


Fig. 3.

a der Ort der Sternschnuppe zur Zeit ihrer ersten Beobachtung am Standpunkte O sind, so ist offenbar der Winkel $cOa = s$ und der Winkel $cO'a = \sigma_{,}$, und ebenso ist es für die Zeit der letzten Beobachtung an demselben Standpunkte. Durch die Berechnung der beiden hierdurch gegebenen Dreiecke erhält man die Entfernungen der Sternschnuppe, zu den Zeiten ihrer Beobachtungen am Standpunkte O, sowohl von diesem Punkte, als auch von O', woraus alles, was man sonst noch zu wissen verlangt, berechnet werden kann.

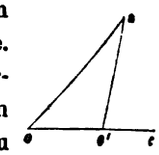


Fig. 4.

Fällt man von c aus ein Perpendikel cA auf den grössten Kreis aa', und bezeichnet man es durch S, sowie auch den Positionswinkel am Punkte c, welcher seine Lage bestimmt, durch P, so hat man:

$$\operatorname{tg} S \operatorname{cotg} s = \cos(p - P)$$
$$\operatorname{tg} S \operatorname{cotg} s' = \cos(p' - P)$$

woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cotg} S \cos\left(\frac{p'+p}{2} - P\right) &= \frac{\sin(s'+s)}{2 \sin s \sin s' \cos\frac{p'-p}{2}} \\ \operatorname{cotg} S \sin\left(\frac{p'+p}{2} - P\right) &= \frac{\sin(s'-s)}{2 \sin s \sin s' \sin\frac{p'-p}{2}} \end{aligned}\right\} \ldots (7)$$

Durch ähnliche Formeln, in welchen σ, σ', π, π' statt s, s', p, p' geschrieben werden, findet man auch das Perpendikel $cB = \Sigma$, von c auf den grössten Kreis bb' gefällt und seinen Positionswinkel Π am Punkte c. Durch diese Grössen erhält man $\sigma_{,}$ und $\sigma'_{,}$ nach den Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cotg} \sigma_{,} &= \operatorname{cotg} \Sigma \cos(p - \Pi) \\ \operatorname{cotg} \sigma'_{,} &= \operatorname{cotg} \Sigma \cos(p' - \Pi) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (8)$$

Wenn man die Entfernungen der Sternschnuppe, zu den Zeiten ihrer beiden Beobachtungen am Punkte O, von diesem Punkte durch r, r', und von O' durch ϱ, ϱ' bezeichnet, so hat man aus dem Dreiecke Fig. 4:

$$\left.\begin{aligned} r &= R\frac{\sin\sigma_{,}}{\sin(\sigma_{,} - s)}, \quad \varrho = R\frac{\sin s}{\sin(\sigma_{,} - s)} \\ r' &= R\frac{\sin\sigma'_{,}}{\sin(\sigma'_{,} - s')}, \quad \varrho' = R\frac{\sin s'}{\sin(\sigma'_{,} - s')} \end{aligned}\right\} \ldots (9)$$

Da das Perpendikel S und sein Positionswinkel P hier keine Anwendung finden, so ist ihre Berechnung, falls man nur die gegenwärtigen Resultate sucht, unnöthig; dagegen wird die Berechnung von Σ und Π unnöthig und nur die von S und P gefordert, wenn man die Bestimmung der Oerter der Sternschnuppe für ihre beiden Beobachtungszeiten am Standpunkte O'

verlangt*); allein bei der Untersuchung der Fehler der Resultate, welche aus angenommenen Beobachtungsfehlern entstehen, finden sowohl Σ als S ihre Anwendung. Die Formeln (7) lassen übrigens eine Zweideutigkeit übrig: sie ergeben ebensowohl S und P, als auch $180^0 - S$ und $180^0 + P$; man bemerkt aber leicht, dass diese Zweideutigkeit nur die beiden Perpendikel andeutet, welche man von jedem Punkte der Kugel auf einen ihrer grössten Kreise fällen kann, und dass die Wahl zwischen beiden willkürlich bleibt. Man kann daher S und Σ immer in den ersten Quadranten verlegen, wodurch die Zweideutigkeit in der Bestimmung von P und Π gehoben wird. Da der äussere Winkel eines Dreiecks immer grösser ist, als jeder der anderen innern, so dürfen $\sigma - s$ und $\sigma' - s'$ nie negativ werden: werden sie es dennoch, so kann dieses nur von Fehlern der Angaben der Oerter der Sternschnuppe, oder von der irrig angenommenen Identität der an beiden Standpunkten beobachteten herrühren; jedenfalls können die Beobachtungen, indem sie dann einen inneren Widerspruch enthalten, kein Resultat geben.

Will man auch die Entfernungen $h+H$ und $h+H'$ der Sternschnuppe von dem Mittelpunkte der Erde, sowie auch die Punkte der Erdoberfläche erfahren, über welchen sie zu den Zeiten, auf welche die vorige Rechnung sich bezieht, senkrecht gewesen ist, so muss man der letzteren noch einiges hinzusetzen. Bezeichnet man den Winkel der von dem Mittelpunkte der Erde nach ihr gelegten Linie mit dem Erdradius h durch g, das sich auf den letzteren beziehende Azimuth der ersteren durch e, die Zenithdistanz, in welcher sie am Punkte O erscheint, durch z, so findet man leicht:

$$h + H = h \frac{\sin z}{\sin(z-g)}$$

$$h \sin g = r \sin(z-g)$$

woraus

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} g &= \frac{r \sin z}{h + r \cos z} \\ H &= r \cdot \frac{\cos(z - \frac{1}{2}g)}{\cos \frac{1}{2} g} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

hervorgehen. Man hat dann die Sinusse der Entfernungen des ihre Lage bestimmenden Radius von dem Meridiane von O und dem darauf errichteten Perpendikel $= \sin g \sin e$ und $= \sin g \cos e$. Aller Schärfe nach beziehen sich z und e auf das sogenannte verbesserte Zenith von O; allein es wird wohl kein Interesse haben, dieses von dem wahren Scheitelpunkte zu unterscheiden.

Die erforderlichen Werthe von z und e kann man aus den beobachteten a, d, a', d', der Sternenzeit μ und der (verbesserten) Polhöhe φ auf gewöhnliche Art berechnen; allein es ist, zumal wenn man auf die völlige Schärfe des Resultats Verzicht leisten will, bequemer, sie aus den schon berechneten s, p, s', p' abzuleiten. Bezeichnet man die Zenithdistanz und das Azimuth des Punktes c (§ 1), nämlich der Richtungslinie OO', durch Z und E, den Positionswinkel des Scheitelpunkts von O am Punkte c durch N, und behält man die übrigen Bezeichnungen des 1. §'s bei, so hat man, den Gaussischen trigonometrischen Formeln zufolge:

$$\left.\begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}Z \sin\tfrac{1}{2}\{E+N\} &= -\cos(\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{4}m)\sin\tfrac{1}{2}\{\varphi - D\} \\ \sin\tfrac{1}{2}Z \cos\tfrac{1}{2}\{E+N\} &= -\sin(\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{4}m)\cos\tfrac{1}{2}\{\varphi + D\} \\ \cos\tfrac{1}{2}Z \sin\tfrac{1}{2}\{E-N\} &= -\cos(\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{4}m)\cos\tfrac{1}{2}\{\varphi - D\} \\ \cos\tfrac{1}{2}Z \cos\tfrac{1}{2}\{E-N\} &= -\sin(\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{4}m)\sin\tfrac{1}{2}\{\varphi + D\} \end{aligned}\right\} (11)$$

welche Formeln, da sie nichts Veränderliches enthalten, für jedes Paar der Standpunkte der Beobachter nur einmal zu berechnen sind. Die daraus hervorgehenden Z, E, N ergeben, verbunden mit p und s:

$$\left.\begin{aligned} \cos z &= \cos Z \cos s + \sin Z \sin s \cos(p-N) \\ \sin z \cos(e-E) &= \sin Z \cos s - \cos Z \sin s \cos(p-N) \\ \sin z \sin(e-E) &= \sin s \sin(p-N) \end{aligned}\right\} (12)$$

wodurch das Gesuchte richtig ausgedrückt ist. Will man sich aber mit einer Annäherung begnügen, so kann man, wenigstens für mässig von einander entfernte Standpunkte der Beobachter, $Z = 90^0$ setzen und erhält dann:

$$\left.\begin{aligned} \cos z &= \sin s \cos(p-N) \\ \sin z \cos(e-E) &= \cos s \\ \sin z \sin(e-E) &= \sin s \sin(p-N) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (12^*)$$

Wenn man sich hier mit einer Annäherung begnügt, kann man auch die Höhe der Sternschnuppe über der Erdoberfläche durch die Näherungsformel:

$$H = r \cos z,$$

und die Entfernungen des Punktes, dem sie im Scheitel erscheint, von dem Meridiane von O und dem darauf errichteten Perpendikel, durch die Formeln

$$r \sin z \sin e \quad \text{und} \quad r \sin z \cos e$$

berechnen.

4.

Die Resultate, zu deren Aufsuchung der vorige § die Anleitung gibt, können kaum ein Interesse haben,

*) Es ist der Beobachtungsfehler wegen am vortheilhaftesten, die Oerter der Sternschnuppe für ihre Beobachtungszeiten am Standpunkte O zu bestimmen, wenn $\pi' - \pi > p' - p$; im entgegengesetzten Falle aber für ihre Beobachtungszeiten am Standpunkte O'.

wenn der Grad des Zutrauens, welches sie in jedem besonderen Falle verdienen, ohne Erörterung bleibt. Was hierzu erforderlich ist, werde ich gegenwärtig mittheilen.

Da ich die Gleichzeitigkeit der Beobachtungen nicht vorausgesetzt habe, so können die Winkel p, p', π, π', trotz der Beobachtungsfehler, als richtig angesehen werden, und man darf nur s, s', σ, σ' als davon entstellt betrachten. Wenn der grösste Kreis aa' Fig. 3 von ca, ca' in den Winkeln l und l' geschnitten wird, und eben so der grösste Kreis bb', von cb, cb', in den Winkeln λ und λ', so ist der grösste Einfluss, welchen ein Beobachtungsfehler von der Grösse ε auf s, s', σ, σ' haben kann, resp.

$$\pm\frac{\varepsilon}{\sin l};\quad \pm\frac{\varepsilon}{\sin l'};\quad \pm\frac{\varepsilon}{\sin\lambda};\quad \pm\frac{\varepsilon}{\sin\lambda'}$$

oder, da man

$$\sin S = \sin s \sin l = \sin s' \sin l'$$
$$\sin\Sigma = \sin\sigma\sin\lambda = \sin\sigma'\sin\lambda'$$

hat, resp.

$$\pm\varepsilon\frac{\sin s}{\sin S};\quad \pm\varepsilon\frac{\sin s'}{\sin S};\quad \pm\varepsilon\frac{\sin\sigma}{\sin\Sigma};\quad \pm\varepsilon\frac{\sin\sigma'}{\sin\Sigma}.$$

Aus den Einflüssen des angenommenen Beobachtungsfehlers ε auf σ und σ' muss nun sein Einfluss auf σ, und σ', abgeleitet werden. Man findet ihn durch die Differentiirung der Gleichungen:

$$0 = \operatorname{cotg}\sigma\sin(\pi'-p) - \operatorname{cotg}\sigma'\sin(\pi-p) - \operatorname{cotg}\sigma,\sin(\pi'-\pi)$$
$$0 = \operatorname{cotg}\sigma\sin(\pi'-p') - \operatorname{cotg}\sigma'\sin(\pi-p') - \operatorname{cotg}\sigma',\sin(\pi'-\pi)$$

welche die Bedingung aussprechen, dass b, b', β, β' in einem grössten Kreise liegen, nämlich:

$$d\sigma, = \frac{\varepsilon\sin\sigma,^2}{\sin\Sigma\sin(\pi'-\pi)}\left\{\pm\frac{\sin(\pi'-p)}{\sin\sigma}\pm\frac{\sin(\pi-p)}{\sin\sigma'}\right\}$$
$$d\sigma' = \frac{\varepsilon\sin\sigma'^2}{\sin\Sigma\sin(\pi'-\pi)}\left\{\pm\frac{\sin(\pi'-p')}{\sin\sigma}\pm\frac{\sin(\pi-p')}{\sin\sigma'}\right\}$$

Die Einflüsse von ε auf r findet man, indem man die erste der Formeln (9) in Beziehung auf s und σ, differentiirt und für ds und $d\sigma$, ihre Ausdrücke durch ε setzt. Man erhält dadurch:

$$\frac{dr}{r} = \varepsilon\frac{\sin s}{\sin(\sigma,-s)}\left\{\pm\frac{\cos(\sigma,-s)}{\sin S}+\right.$$
$$\left.+\frac{\sin\sigma,}{\sin\Sigma\sin(\pi'-\pi)}\left(\pm\frac{\sin(\pi'-p)}{\sin\sigma}\pm\frac{\sin(\pi-p)}{\sin\sigma'}\right)\right\}$$

und da

$$\frac{\sin s}{\sin(\sigma,-s)} = \frac{\varrho}{R}$$

ist:

$$dr = \varepsilon\frac{r\varrho}{R}\left\{\pm\frac{\cos(\sigma,-s)}{\sin S}+\right.$$
$$\left.+\frac{\sin\sigma,}{\sin\Sigma\sin(\pi'-\pi)}\left(\pm\frac{\sin(\pi'-p)}{\sin\sigma}\pm\frac{\sin(\pi-p)}{\sin\sigma'}\right)\right\} \quad ..(13a)$$

Diese Formel gibt den grössten Einfluss, welchen die Annahme eines Fehlers jedes der beobachteten Oerter der Sternschnuppe auf r erlangen kann, wenn man die willkürlichen Zeichen derselben so annimmt, dass alle ihre Glieder zu einer Summe vereinigt werden. Unter derselben Bedingung hat man den grösstmöglichen Einfluss des angenommenen Beobachtungsfehlers auf r':

$$dr' = \varepsilon\frac{r'\varrho'}{R}\left\{\pm\frac{\cos(\sigma',-s')}{\sin S}+\right.$$
$$\left.+\frac{\sin\sigma',}{\sin\Sigma\sin(\pi'-\pi)}\left(\pm\frac{\sin(\pi'-p')}{\sin\sigma}\pm\frac{\sin(\pi-p')}{\sin\sigma'}\right)\right\} ..(13b)$$

Will man den Einfluss von ε auf die Oerter der Sternschnuppe vollständig kennen lernen, so muss man ihn auch in s und e berücksichtigen, was zwar durch die Formeln (12) leicht geschehen kann, jedoch kaum der Mühe werth sein wird. Man kann sich begnügen:

$$dH = \frac{H}{r}dr, \qquad dH' = \frac{H'}{r'}dr'$$

anzunehmen. Der grösstmögliche Einfluss eines Beobachtungsfehlers von gegebener Grösse ε auf $H-H'$, oder auf das Fallen oder Steigen der Sternschnuppe, wird durch die Formel

$$\pm\frac{\varepsilon\varrho H}{R}\frac{\cos(\sigma,-s)}{\sin S}\pm\frac{\varepsilon\varrho' H'}{R}\frac{\cos(\sigma',-s')}{\sin S}\pm\frac{\varepsilon}{R\sin\Sigma\sin\sigma\sin(\pi'-\pi)}\left\{\varrho H\sin\sigma,\sin(\pi'-p)-\varrho' H'\sin\sigma',\sin(\pi'-p')\right\}$$
$$\left.\pm\frac{\varepsilon}{R\sin\Sigma\sin\sigma'\sin(\pi'-\pi)}\left\{\varrho H\sin\sigma,\sin(\pi-p)-\varrho' H'\sin\sigma',\sin(\pi-p')\right\}\right\} ..(14)$$

ausgedrückt, über deren Zeichen so zu verfügen ist, dass sie eine Summe ihrer vier Theile wird. Man findet sie leicht aus dem Vorhergehenden.

Ich verlasse diese Aufsuchung des Einflusses der Beobachtungsfehler auf die Resultate der Beobachtungen der Sternschnuppen nicht ohne die Bemerkung, dass sich vorzüglich darin der Unterschied zwischen der Annahme und der Ausschliessung der Voraussetzung der Gleichzeitigkeit der Beobachtungen äussert. Folgt man dieser Voraussetzung, so kann die Richtung, welche die Bewegung der Sternschnuppe beziehungsweise auf die Standpunkte der Beobachter hat, nie als ein wesentliches Hinderniss der Bestimmung dieser Bewegung erscheinen; verlässt man sie, so verlieren die Resultate, welche man aus Sternschnuppen zieht, die sich in einer durch beide Standpunkte gehenden Ebene bewegen, ihr Gewicht gänzlich, und in Fällen, welche diesem Falle nahe kommen, wird es sehr klein. Könnte man daher,

durch eine Untersuchung von der Art der § 1 und 2 geführten, allein auf Beobachtungen gegründet, denen die Mittel zur Erkennung des Grades ihrer Sicherheit nicht fehlen, zeigen, dass die Fehler, welche bei der Annahme der Voraussetzung übrig bleiben, allein den Beobachtungen zugeschrieben werden dürfen, so würde man dadurch den wesentlichen Vortheil erlangen, viele Sternschnuppen, aus deren Beobachtungen man ohne die Voraussetzung kein Resultat ziehen kann, auch benutzen zu können. Dieses hauptsächlich ist der Grund, der mir eine gänzlich genügende Prüfung der Voraussetzung wünschenswerth erscheinen lässt. Auf die Resultate selbst hat ihre Annahme oder ihre Ausschliessung den Einfluss, dass beide über die Abweichungen zweier correspondirenden Beobachtungen von Einem, durch c gelegten grössten Kreise, auf verschiedene Art verfügen. Diese Verschiedenheit tritt im Allgemeinen desto stärker hervor, je mehr die Bewegung sich einer durch beide Standpunkte gehenden Ebene nähert.

5.

Ich habe nun die Resultate mitzutheilen, welche Herr Professor Feldt durch die Anwendung der in den beiden letzten §§ entwickelten Vorschriften auf die Sternschnuppenbeobachtungen, welche in der schon angeführten Schrift von Brandes vorkommen, erlangt hat. Einige Beobachtungen hat er ausschliessen müssen, weil das eine oder das andere Moment derselben als unsicher angegeben war. Zu den im 2. § mitgetheilten Werthen von $\log R$ ist 2,93421 addirt worden, um die geographische Meile (deren der Grad des Aequators 15 hat) zur Einheit des Maasses zu machen. Zur Einheit von ε ist $1^0 = 0{,}017453$ gewählt worden.

[Mittheilung der 37 Beobachtungen, Anfangs- und Endpunkte nebst den Werthen A und D.]

Die Resultate, welche Herr Professor Feldt aus diesen Beobachtungen gezogen hat, sind die folgenden:*)

Nr.	H	H'
6	$11{,}79 \pm 1{,}23\,\varepsilon$	$7{,}69 \pm 0{,}27\,\varepsilon$
10	$29{,}73 \pm 2{,}80\,\varepsilon$	$33{,}73 \pm 3{,}78\,\varepsilon$
11	s. die Anmerkung.	
12	$16{,}86 \pm 1{,}12\,\varepsilon$	$8{,}12 \pm 0{,}33\,\varepsilon$
13	$13{,}12 \pm 1{,}40\,\varepsilon$	$10{,}01 \pm 0{,}92\,\varepsilon$
14	$10{,}20 \pm 0{,}68\,\varepsilon$	$6{,}75 \pm 0{,}41\,\varepsilon$
17	$27{,}00 \pm 9{,}20\,\varepsilon$	$14{,}21 \pm 1{,}75\,\varepsilon$
18	$9{,}53 \pm 0{,}37\,\varepsilon$	$8{,}58 \pm 0{,}30\,\varepsilon$
20	$10{,}71 \pm \infty$	$13{,}63 \pm \infty$
21	$27{,}11 \pm 3{,}09\,\varepsilon$	$18{,}33 \pm 1{,}08\,\varepsilon$
22	$12{,}29 \pm 3{,}37\,\varepsilon$	$12{,}73 \pm 3{,}32\,\varepsilon$
23	$14{,}32 \pm 1{,}07\,\varepsilon$	$13{,}12 \pm 0{,}86\,\varepsilon$
26	$18{,}33 \pm 11{,}22\,\varepsilon$	$17{,}49 \pm 16{,}45\,\varepsilon$
27	s. die Anmerkung.	
30	$30{,}41 \pm 2{,}10\,\varepsilon$	$19{,}61 \pm 0{,}80\,\varepsilon$
32	s. die Anmerkung.	
33	$20{,}65 \pm 1{,}99\,\varepsilon$	$11{,}33 \pm 0{,}80\,\varepsilon$
34	$15{,}67 \pm 2{,}00\,\varepsilon$	$16{,}26 \pm 2{,}76\,\varepsilon$
35	$14{,}58 \pm 1{,}24\,\varepsilon$	$11{,}01 \pm 0{,}95\,\varepsilon$
36	$26{,}05 \pm 36{,}25\,\varepsilon$	$32{,}01 \pm 59{,}58\,\varepsilon$
38	$13{,}65 \pm 0{,}35\,\varepsilon$	$11{,}35 \pm 0{,}45\,\varepsilon$
40	$13{,}93 \pm 0{,}52\,\varepsilon$	$11{,}73 \pm 0{,}50\,\varepsilon$
43a	s. die Anmerkung.	
43b	$19{,}87 \pm 6{,}00\,\varepsilon$	$14{,}24 \pm 0{,}62\,\varepsilon$
44	$12{,}07 \pm 0{,}98\,\varepsilon$	$8{,}16 \pm 2{,}04\,\varepsilon$
45	$8{,}70 \pm 1{,}39\,\varepsilon$	$6{,}13 \pm 1{,}10\,\varepsilon$
46	$5{,}81 \pm 0{,}98\,\varepsilon$	$7{,}03 \pm 0{,}59\,\varepsilon$
48	$14{,}77 \pm 1{,}55\,\varepsilon$	$15{,}58 \pm 2{,}17\,\varepsilon$
50a	$20{,}06 \pm 2{,}37\,\varepsilon$	$13{,}26 \pm 0{,}94\,\varepsilon$
50b	s. die Anmerkung.	
50c	$16{,}00 \pm 8{,}55\,\varepsilon$	$9{,}77 \pm 0{,}79\,\varepsilon$
54	$10{,}96 \pm 1{,}46\,\varepsilon$	$13{,}55 \pm 0{,}94\,\varepsilon$
55	s. die Anmerkung.	
57	$1{,}99 \pm 0{,}63\,\varepsilon$	$2{,}56 \pm 0{,}71\,\varepsilon$
58	$13{,}19 \pm 0{,}63\,\varepsilon$	$13{,}45 \pm 0{,}84\,\varepsilon$
61	$13{,}09 \pm 0{,}64\,\varepsilon$	$9{,}53 \pm 1{,}03\,\varepsilon$
62	$16{,}41 \pm 2{,}73\,\varepsilon$	$11{,}11 \pm 1{,}04\,\varepsilon$

Einige dieser Rechnungen haben nicht bis zum letzten Resultate fortgesetzt werden können, indem sie bewiesen haben, entweder dass zwei verschiedene Sternschnuppen als eine und dieselbe angesehen worden, oder dass die Beobachtungen durch grosse Fehler entstellt sind. Nr. 11 zeigt an dem einen Beobachtungsorte eine Zunahme, an dem anderen eine Abnahme des Positionswinkels, einen Widerspruch, der nur durch die Annahme von Beobachtungsfehlern von mehreren Graden beseitigt werden kann, deren Wahrscheinlichkeit bei dieser Sternschnuppe auch Brandes angibt. In noch grösserem Maasse ist dieses bei Nr. 32 der Fall, bei welcher die entgegengesetzte Richtung der Bewegung an beiden Orten die annehmbare Grenze der Fehler ohne Zweifel überschreitet, so dass entweder ein Versehen in der Aufzeichnung der Beobachtungen vorgefallen sein muss, oder diese zwei verschiedenen Erscheinungen angehören. Nr. 43 ist an drei Orten beobachtet und an der Identität der Erscheinung ist, wegen ihrer ausgezeichneten Helligkeit nicht zu zweifeln; die Fehler der Beobachtung ihres Endpunktes in Neisse, welche Brandes schon bemerkte, zeigen sich in der ersten der beiden berechneten Combinationen, welche übrigens einen von den Fällen darbietet, in welchen die Bewegung fast unbestimmt bleibt. Nr. 50, gleichfalls an drei Orten beobachtet, ist in allen Beziehungen der vorigen sehr ähnlich; allein von ihr wird besonders

*) [Werthe der Grössen s, s', p, p', r, r', σ, σ', $\varkappa$, $\varkappa'$, ϱ, ϱ' weggelassen.]

bemerkt, dass ihre scheinbaren Bahnen merklich von dem grössten Kreise abgewichen sind. Wäre dieses nicht der Fall, so würde aus beiden Bestimmungen der Höhe, zur Zeit des Verschwindens in Mirkau (50a und 50c), hervorgehen, dass die Beobachtungsfehler grösser seien als 1 Grad. Nr. 27 und 55 zeigen so geringe Einwirkungen der Parallaxe, dass sie sich mit den Beobachtungsfehlern vermischen; man kann daraus nur auf grosse Entfernungen schliessen, ohne sie näher bestimmen zu können.

6.

Wenn man die herausgebrachten Höhen der berechneten Sternschnuppen und die Einflüsse des Beobachtungsfehlers betrachtet, so kann man nicht zweifelhaft bleiben, dass das eine der Resultate, deren Kenntniss wir BRANDES und BENZENBERG verdanken, nämlich die Grösse der Höhen, in welchen Sternschnuppen sich zeigen können, vollkommen begründet ist. Dagegen erscheint das andere derselben sehr zweifelhaft; unter den 30 Bahnen, welche haben berechnet werden können, zeigen sich zwar 10 aufsteigende, allein bei 8 von ihnen reicht die Annahme von Beobachtungsfehlern, welche weit unter einem Grade bleiben, schon hin, das Aufsteigen in ein Fallen zu verwandeln, nämlich bei Nr. 10, 20, 22, 34, 36, 48, 57, 58; bei Nr. 46 wird etwa ein Grad und bei Nr. 54 etwas mehr als ein Grad dazu erfordert. Es ist also unter diesen Beobachtungen keine vorgekommen, welche der Annahme des Aufsteigens eine Wahrscheinlichkeit gäbe, welche sie als ein Resultat der Beobachtungen anzusehen erlaubte. Indessen findet sich unter den Sternschnuppen, welche BENZENBERG und BRANDES im J. 1798 in Clausberg und Sesebühl (bei Göttingen) beobachteten, eine (Nr. 12, am 9. Oct.), welche ich als Beweis des Aufsteigens derselben angeführt finde. Ich habe sie aus diesem Grunde nach der im vorigen § auf die späteren Beobachtungen angewandten Methode berechnet. Die beobachteten Oerter sind:

	Clausberg.			Sesebühl.	
a, a'	309° 0′	324° 0′	α, α'	318° 0′	333° 0′
d, d'	45 0	50 0	δ, δ'	62 0	57 0

Sie finden sich Astr. Jahrb. 1806 S. 214. Die Polhöhe von Clausberg ist $= 51^0\,35'$, die in Kreistheilen ausgedrückte Sternzeit $\mu = 342^0\,0'$. Ferner finde ich (Die Sternschnuppen von BENZENBERG. Hamburg 1839 S. 6) die Entfernung beider Standpunkte $= 46200$ Pariser Fuss und das Azimuth des zweiten am ersten $= 244^0$ angegeben, woraus $\log R = 7{,}37169$, oder, die geographische Meile als Einheit angenommen, $= 0{,}30590$ und $A = 272^0\,52'{,}7$, $D = -15^0\,51'{,}6$ folgen. Hiermit erhält man ferner:

s, s'	69° 8′,0	79°42′,2	σ, σ'	85°33′,8	88°10′,7
p, p'	26 29,6	30 34,2	π, π'	19 29,5	28 11,8
r, r'	6,36	12,65	ϱ, ϱ'	5,95	12,45
H	5,87		H'	12,40	

Die Sternschnuppe scheint also, und zwar fast senkrecht, in die Höhe gestiegen zu sein; berechnet man aber die Formel (14), so findet man, dass Beobachtungsfehler, deren Grösse $= \varepsilon$ Grade ist, den Unterschied $H' - H$ von [um] $\pm 6{,}58 . \varepsilon$ Meilen ändern können. Wenn die Sternschnuppe nicht gestiegen ist, so müssen die vier beobachteten Oerter also wenigstens einen Grad fehlerhaft sein, und diese Fehler müssen in dem Sinne angenommen werden, welcher ihr Zusammenwirken am meisten befördert. Da man keinen Grund hat, das Nichtstattfinden solcher Fehler als entschieden anzusehen, so gibt also auch diese Beobachtung keinen Beweis für das Vorkommen einer aufsteigenden Sternschnuppe. Sollten fernere Beobachtungen das Aufsteigen dennoch rechtfertigen, so ist dieses nur in seltenen Fällen zu erwarten, in welchen die von OLBERS angedeutete, schon angeführte Ursache zur Erklärung ausreichen wird, ohne die allgemeine Regel, dass die Sternschnuppen aus grossen Höhen zur Erde herabkommen, verdächtig zu machen.

Obgleich ich nicht glaube, dass die vorhandenen Beobachtungen nach ihrer mitgetheilten neuen Berechnung, in Beziehung auf diese allgemeinen Resultate, eine beträchtliche Unsicherheit übrig lassen, so unterlasse ich doch nicht, einer unerwarteten Erscheinung zu erwähnen, welche sich durch diese Berechnung gezeigt hat. Die Ordnung, in welcher die vier, aus jedem Paare correspondirender Beobachtungen hervorgehenden Werthe des Positionswinkels (oder p, p', π, π') aufeinanderfolgen, ist die Ordnung der Zeitfolge der Beobachtungen selbst: ich erwartete sie im Allgemeinen so zu finden, dass an dem Beobachtungsorte, welchem die Erscheinung am nächsten war, ihr Anfang am frühesten und ihr Ende am spätesten gesehen wäre; dieses hat sich aber sehr oft gerade entgegengesetzt verhalten. Um ein Paar Beispiele hiervon anzuführen, mache ich auf Nr. 13 und 18 aufmerksam, deren Anfang und Ende am ersten Beobachtungsorte, zwischen Anfang und Ende am zweiten fielen und beträchtlich näher an einander lagen als diese, obgleich diese Sternschnuppen dem ersten Orte viel näher waren, als dem zweiten. Nr. 46 und 57 hatte man sogar am ersten Orte schon aufgehört zu sehen, als sie am zweiten zuerst bemerkt

wurden. Ich zweifle nicht, dass die Möglichkeit vorhanden ist, Aehnliches durch die speciellen Umstände jedes besonderen Falles zu erklären; allein ich wünschte, dass diese Umstände angegeben sein möchten, damit man die Erklärung nicht gänzlich verlöre.

Indessen hat meine Beschäftigung mit diesem Gegenstande zu der Ueberzeugung geführt, dass eine neue Beobachtungsreihe über die Sternschnuppen in mehreren Beziehungen sehr wünschenswerth sein würde. Im Falle ich drei dafür hinreichend eifrige und in der Wahl ihrer Standpunkte nicht beschränkte Beobachter finde, beabsichtige ich, solche Beobachtungen zu veranlassen. Meine Absicht werde ich hier näher angeben, damit auch Andere, auf den Fall ihre hiesige Ausführung auf Schwierigkeiten träfe, oder diese an einem anderen Orte früher beseitigt werden könnten, davon benutzen können, was ihnen zweckmässig erscheint.

Vor allen Dingen muss dafür gesorgt werden, dass die Beobachtungen selbst die grösste Genauigkeit erhalten, welche, bei dem schnellen Verlaufe der Erscheinungen, erreichbar ist. Diese Schnelligkeit des Verlaufes schliesst die Anwendung jedes Instruments aus und reducirt die Beobachtungen auf die Einzeichnung der scheinbaren Bahnen in die Himmelskarten. Ich bin stets der Meinung gewesen, dass die sämmtlichen mir bekannten nicht speciellen Karten dieser Art den Forderungen, welche an sie gemacht werden dürfen, nicht angemessen eingerichtet sind: sie stellen auf ihren einzelnen Blättern viel zu kleine Theile des Himmels dar, oft nach einem unnöthig grossen und die Uebersicht erschwerenden Maassstabe gezeichnet; sie enthalten das, was nur dem Gedächtnisse zu Hülfe kommen soll, nämlich die Figuren der Sternbilder, auf eine Art, welche gleichfalls der Uebersicht über das Wesentliche — die Configurationen der Sterne selbst — hinderlich ist; sie vermischen in einigen Fällen die dem blossen Auge sichtbaren Sterne mit kleineren, und geben in anderen Fällen die ersteren nicht vollständig; ihre Netze haben endlich nicht die Einrichtung, dass man dadurch in den Stand gesetzt würde, den Ort eines Punktes am Himmel, durch seine Configuration mit benachbarten Sternen, bis auf Theile eines Grades sicher zu schätzen. Aus diesen Gründen habe ich längst die Entwerfung neuer allgemeiner Himmelskarten für etwas sehr wünschenswerthes gehalten und nun, durch die Sternschnuppen veranlasst, einen eifrigen, den Lesern der Astr. Nachr. (Nr. 313—315 [s. Bd. I. p. 37]) schon bekannten Freund und Kenner der Astronomie, zu dessen, der Wissenschaft schon nützlich gewordenen Eigenschaften, auch alle zum Kartenzeichnen nothwendigen Fertigkeiten und die grösste Genauigkeitsliebe gehören, dazu aufgefordert. Dieses ist Herr Ingenieur-Hauptmann Ritter Schwinck in Pillau. [Die hier folgende Beschreibung der Karten findet sich ausführlicher im folgenden Aufsatz 166.]

Wenn diese Karten fertig sein werden, so wünsche ich, dass drei Beobachter sich hier auf der Sternwarte in der Einzeichnung von 40 bis 50 Sternschnuppenbahnen nicht nur üben, sondern auch die ihnen darin erreichbare Sicherheit näher erörtern. Nachdem dieses vorangegangen ist, verfügen sie sich auf ihre Standpunkte, welche in einem gleichseitigen Dreiecke, 10 bis 15 Meilen von einander entfernt, liegen sollen. Hierdurch wird erreicht werden, dass unter den, an allen drei Standpunkten beobachteten Sternschnuppen nie eine sein kann, deren Bewegung nicht vortheilhaft durch die Beobachtungen bestimmt würde. Jeder Beobachter soll mit einem Chronometer versehen sein, damit die Beobachtung der Zeitmomente der Sternschnuppen über ihre Identität entscheide.

Die Beobachtungen dieser Erscheinungen sind mir immer sehr lästig vorgekommen; vorzüglich wohl, weil man nicht überzeugt ist, dass sich Correspondenzen finden werden und man den sicheren Gewinn, den ein heiterer Abend durch andere Beobachtungen verheisst, nicht gern dieser unsicheren Aussicht aufopfert. Ich halte für wesentlich, dass man die Aussicht auf Correspondenzen möglichst vermehre, und werde daher, falls die angegebene Absicht zur Ausführung gelangt, versuchen, ob es ausführbar ist, die Aufmerksamkeit auf zu beobachtende Sternschnuppen stets von vorher bestimmten Zeiten eines gewissen Meridians anfangen zu lassen; zeigten sich z. B. zwei Minuten hinreichend zur Einzeichnung der Bahn einer Sternschnuppe (was die vorläufigen Versuche lehren werden), so würde ich wünschen, dass die Beobachter mit jeder vollen vierten Minute anfingen aufmerksam zu sein, um die erste darauf folgende Sternschnuppe anzumerken, die später, vor der neuen vierten Minute etwa folgenden aber nicht berücksichtigten. Hierdurch würde man zwar viele Sternschnuppen verlieren, aber dennoch wahrscheinlich eine grössere Zahl correspondirender erhalten. Ferner glaube ich, dass nicht länger als zwei Stunden in jeder Nacht beobachtet werden sollte; auch dass es sich nicht erfolgreich erweisen würde, wenn die Beobachter sich auf sehr lange Zeit gegenseitig verpflichteten. Wenn man die heiterste Zeit des Jahres (hier den August oder September, in welchen Monaten die Sternschnuppen auch häufig zu sein pflegen) wählt, so muss der Himmel ungewöhnlich ungünstig sein, wenn er nicht

in 10 bis 12 Nächten eine hinreichende Menge correspondirender Beobachtungen anzustellen erlaubt.

7.

Besonders ist meiner Meinung nach zu wünschen, dass man diese Art der Beobachtungen auch auf die Sternschnuppen anwende, welche sich in jährlichen Perioden, im November und im August, schon oft gezeigt haben. OLBERS, BENZENBERG und BRANDES haben darauf aufmerksam gemacht, dass sehr verschiedenartige Dinge, in oder über der Atmosphäre, leuchten mögen. Es sind zwar Gründe vorhanden, welche den kosmischen Ursprung der November-Sternschnuppen, selbst vorzugsweise vor den gewöhnlichen, wahrscheinlich machen; allein man kann nicht leugnen, dass ihr oft ungewöhnlich grosser Glanz und die Erscheinungen, welche sie, den Orenburger und Newhavener Beobachtern im J. 1832 und 1833*) zufolge, begleiteten, auch Verschiedenheiten von der gewöhnlichen Art der Sternschnuppen anzudeuten scheinen. Wenn aber dieses auch nicht wäre, so müsste man dennoch wünschen, die Anwendbarkeit dessen, was man von den gewöhnlichen Sternschnuppen erkannt hat, oder erkennen wird, auch für die in der Novemberperiode erscheinenden nachgewiesen zu sehen. Bei ihrer grossen Zahl würde die Vorschrift, immer nur die erste nach einem vorher bestimmten Zeitabschnitte zu beobachten, wesentlich sein. Allein unsere Gegenden sind zu Versuchen über diese Sternschnuppen nicht geeignet, indem heiteres Wetter in der Mitte des November zu den seltenen Ausnahmen gehört, so dass die Versuche vielleicht eher zehnmal misslingen, als einmal gelingen würden.

Da ich mich nicht erinnere, eine Zusammenstellung der Sonnenlängen mit den Sternschnuppenerscheinungen im November gesehen zu haben, hierauf aber das Urtheil über die Genauigkeit ihres Einhaltens der jährlichen Periode beruhen muss, so setze ich sie hierher. Sie beruhet auf folgenden Grundlagen:

1. der Nachricht von ALEXANDER v. HUMBOLDT (Voyage IV. p. 34), welcher die Mitte der Erscheinung 1799 Nov. 11. 16^h in Cumana sah;
2. der Beobachtungen in Orenburg (Astr. Nachr. Nr. 303. S. 241), welchen zufolge die Erscheinung auf 1832 Nov. 12. $17^h\ 30^m$ gesetzt werden kann;
3. den Beobachtungen in Newhaven (Connecticut) und sehr vielen anderen über Nordamerika verbreiteten Punkten, welche die grösste Intensität der Erscheinung auf 1833 Nov. 12. 16^h setzen (POGGENDORFF Annalen XXXIII. S. 197);
4. den Beobachtungen, gleichfalls wie die vorigen in Newhaven und von Prof. OLMSTED, im J. 1834 Nov. 13. $13^h\ 30^m$ (POGGENDORFF Annalen XXXIV. S. 130);
5. denen von BOGUSLAWSKI in Breslau, der die Mitte der Erscheinung 1836 Nov. 13. $16^h\ 30^m$ wahrnahm;
6. denen von Dr. BUSCH und BUSOLT in Königsberg (Astr. Nachr. Nr. 371), womit sich die von KLÜVER bei Bremen (ebendas. Nr. 372) vereinigen, und, obgleich an beiden Orten der Anfang der Erscheinung vom bedeckten Himmel unsichtbar gemacht wurde, doch vermuthen lassen, dass ihre Mitte auf 1838 Nov. 13. $16^h\ 15^m$ Königsberger Zeit gesetzt werden darf.

Reducirt man die unmittelbar angegebenen Beobachtungszeiten auf den ersten (d. h. Pariser) Meridian, und schreibt man ihnen die wahren Sonnenlängen und die von dem festen Nachtgleichenpunkte von 1800 an gezählten bei, so erhält man folgende Uebersicht darüber:

	Zeit des ersten Merid.	Sonnenlänge, gezählt vom wahren Nachtgleichenpunkte.	vom festen Nachtgleichenpunkte.
1799 Nov. 11	$20^h\ 36^m$	230° 0′	230° 0′
1832 „ 12	13 0	230 42	230 15
1833 „ 12	21 0	230 48	230 20
1834 „ 13	21 30	231 34	231 5
1836 „ 13	15 30	231 51	231 21
1838 „ 13	15 0	231 20	230 48

Dass kein Grund vorhanden ist, von den Zahlen der letzten Columne entweder die Gleichheit, oder das der Zeit genau proportionale Fortschreiten zu fordern, hat OLBERS in seinem schon angeführten Aufsatze*) auseinandergesetzt.

Ich zweifle nicht, dass die Kenntniss der Sternschnuppen, insofern von den geometrischen Verhältnissen, die man daran wahrnehmen kann, die Rede ist, so vollständig gemacht werden kann, als man zu wünschen berechtigt ist. Von ihren physischen Verhältnissen habe ich nichts zu sagen, nachdem diese schon von Anderen dazu tüchtigeren erörtert worden sind. Ich benutze indessen die Gelegenheit, den Wunsch auszusprechen, dass es gelingen möchte, eine einzige der Hunderttausende von November-Sternschnuppen bei ihrem Herabfallen auf die Erdoberfläche auf eine unzweifelhafte Art zu finden. Dass dieses bisher nicht

*) Astr. Nachr. Nr. 303. S 241, und POGGENDORFF Annalen XXXIII. S. 194, 196 u. 197.

*) SCHUMACHER's Astron. Jahrb. 1837.

gelungen ist, könnte, verbunden mit dem Verlöschen der Sternschnuppen schon in grossen Entfernungen von der Erde (§ 5), mit der Heftigkeit der Lichterscheinungen, welche sie 1799, 1832, 1833 und 1834 entwickelt haben, und mit den dann sehr lebhaften Schweifen, welche sie zurücklassen, der Frage einiges Gewicht geben: „ob es wohl annehmbar ist, dass sie schon in den höheren Luftschichten gänzlich verbrennen?“

166. Ueber die neuen Himmelskarten des Hauptmann Schwinck.*)

(Astron. Nachr. 21, p. 29.)

Die Himmelskarten, (von welchen ich Nr. 381. S. 347 [s. p. 339] der Astr. Nachr. den Plan mitgetheilt habe), hat Herr Hauptmann Schwinck jetzt erscheinen lassen. Seit ein paar Tagen liegen diese fünf schönen Blätter vor mir, und ich eile, den Lesern der A. N. das davon mitzutheilen, was mir vorzüglich bemerkenswerth erscheint.

Die Karten haben die stereographische Projection. Die Mittelpunkte von 4 Blättern liegen auf dem Parallel von $+10^0$ Decl., in den Rectascensionen 45^0, 135^0, 225^0, 315^0; der Mittelpunkt des fünften Blattes ist der Nordpol. Vollständig stellen die ersteren die zwischen -30^0, und $+50^0$ Decl. liegende Zone dar, jedes 102^0 der Rectascension, also bis zu den Grenzen $\pm 51^0$ von seiner Mitte an gerechnet; das 5. Blatt ist vollständig vom 44. Grade der Decl. bis zum Pole. Alle 5 Blätter enthalten, zwischen den krummlinichten Grenzen dieser Räume und ihren geradlinichten Rändern, noch so viel vom Himmel, dass der Ueberblick über die Gruppirung der Sterne auch an den Grenzen der Blätter nichts zu wünschen übrig lässt.

Diese Grösse des auf jedem Blatte dargestellten Theils des Himmels ist eine der die Schwinck'schen Karten auszeichnenden Eigenschaften. Man wird dadurch der Mühe überhoben, lange unter den vielen Blättern eines Atlasses zu suchen, ehe man das Blatt findet, welches man gebrauchen will. Dennoch haben die Schwinck'schen Blätter keine unbequeme Grösse; ihre Höhe ist 16 Zoll Preuss., ihre Breite 18 Zoll. Sie sind also viel kleiner als die 20 Blätter des Bode'schen Atlasses, deren Abmessungen $20\frac{1}{2}$ und $28\frac{1}{2}$ Zoll sind. Sie gewähren einen unvergleichlich viel vollkommneren Ueberblick über die Gruppirungen der Sterne, als diese Blätter.

Aber nicht blos durch den Umfang des auf jedem Blatte dargestellten Raumes hat Herr Hauptm. Schwinck den Ueberblick über die Sterne zu begünstigen gesucht; er hat auch alles Uebrige, was ihn erleichtern kann, sorgfältig beachtet. Die Grössen der Sterne, so wie Piazzi's Catalog sie angibt, sind sehr augenfällig durch grössere und kleinere Kreise, deren Inneres theilweise oder ganz schwarz gefüllt, oder auch leer gelassen ist, unterschieden; so dass jeder desto augenfälliger erscheint, je grösser der Catalog ihn angibt. Die gebräuchliche Bezeichnung der Sterne durch Strahlen hat Herr Hauptmann Schwinck mit Recht verworfen. — Ferner hat er die Figuren der Bilder durch gut gezeichnete hellbraune Umrisse dargestellt, deren Augenfälligkeit, verglichen mit den schwarzen Sternen, fast verschwindet; so dass der Nutzen der Bilder auf Himmelskarten mit dem Nutzen ihres Weglassens glücklich vereinigt worden ist. In derselben hellbraunen Farbe erscheinen auch die Benennungen der Sternbilder, die griechischen Buchstaben und die Flamsteed'schen Nummern der Sterne, so dass auch diese unentbehrlichen Zusätze zu den Sternen selbst den Ueberblick nicht beeinträchtigen.

Das Kartennetz ist mit unübertrefflicher Sorgfalt und Schönheit gezeichnet; es hat bei jedem zweiten Grade eine Linie, bei jedem 10. eine stärkere. Mit entsprechender Sorgfalt sind die Sterne selbst, da wo sie 1850 stehen werden, in dieses Netz eingetragen. Diese Genauigkeit, verbunden mit der Eigenschaft der angewandten Projectionsart, hat zur Folge, dass die Karten allenthalben, am Rande nicht minder als in der Mitte, die Aehnlichkeit der Gruppirungen am Himmel wiedergeben.

Herr Hauptmann Schwinck fand, nachdem er alle Piazzi'schen Sterne bis zur 7. Grösse incl. verzeichnet hatte, noch Raum genug, auch alle Sterne bis zu dieser Grösse, welche die Harding'schen Karten enthalten, einzutragen. Diese sind durch Kreuze bezeichnet, welche weniger augenfällig sind, als die Bezeichnungen der übrigen. Weit entfernt, dass diese zahlreichen Sterne die Uebersicht über die helleren stören sollten, erscheinen sie als eine unerlässliche Ausfüllung zu grosser leerer Räume. Durch ihre Aufnahme auf der Karte muss die Leichtigkeit

*) [366 d. a. Verz. — Brief an Schumacher vom 17. Juni 1843.]

der Orientirung an jeder Stelle des Himmels bei der Anwendung eines Kometensuchers eben so leicht werden, als sie für das blosse Auge durch die ihm sichtbaren Sterne gemacht worden ist. — In der Begrenzung des zu jedem Sternbilde zu rechnenden Raumes folgen die neuen Karten den Harding'schen.

Die Karten stellen, wie aus dem Gesagten hervorgeht, den in unseren Gegenden sichtbaren Theil des Himmels dar. Sie leisten dieses nicht nur weit vollständiger, sondern auch in jeder anderen Beziehung weit vollkommener, als das umfangreiche Werk von Bode. Sie befriedigen ein Bedürfniss, dessen Befriedigung alle mir bekannt gewordenen ähnlichen Hülfsmittel nicht gewährten. Ich zweifle nicht, dass Jeder, der mit den Sternen am Himmel zu thun hat, sich in gleicher Lage befunden haben wird, und eile daher, die Erscheinung der eben so schön ausgeführten, als zweckmässig eingerichteten Schwinck'schen Karten zur allgemeinen Kenntniss der Astronomen zu bringen.

---

167. Einfluss der Strahlenbrechung auf Mikrometerbeobachtungen.*)

(Astronomische Untersuchungen I, p. 153.)

Die Beobachtungsarten, für welche den Einfluss der Strahlenbrechung zu entwickeln gegenwärtig meine Absicht ist, haben den Zweck, die Vergleichung der Oerter zweier am Himmel sichtbaren Punkte S, S' zu ergeben, ohne die Bestimmung der beiden Oerter selbst zu fordern. Sie haben mit einander gemein, dass diese Vergleichung durch Messung kleiner Winkel gemacht werden kann, allein sie unterscheiden sich wesentlich durch die Mittel, wodurch sie gemacht wird. Diese Beobachtungsarten beruhen zum Theil auf wirklichen Messungen, zum Theil auf dem Ersatze derselben durch die tägliche Bewegung; einige von ihnen setzen ein als Aequatoreal aufgestelltes Instrument voraus, andere ersetzen die Kenntniss der Richtung des Declinationskreises, welche dieses Hülfsmittel gewährt, durch jedesmalige Verfolgung der von den beobachteten Punkten beschriebenen Wege. Die Verschiedenheit der Einrichtungen der Apparate, welche man zu diesen Beobachtungsarten angewandt hat, oder anwenden kann, ist so gross, dass es ermüdend sein würde, jeden davon einzeln zu verfolgen; ich werde aber versuchen, sie in gewisse Abtheilungen zu ordnen, so dass die Entwickelung des Einflusses der Strahlenbrechung auf alle in einer Abtheilung enthaltenen auf gleichen Betrachtungen beruhet.

1.

Die Auflösung der Aufgabe:

Eine Beobachtung der Entfernung zweier Sterne und des Winkels des durch sie gelegten grössten Kreises mit dem Verticalkreise von dem Einflusse der Strahlenbrechung zu befreien,

werde ich zuerst verfolgen. Diese Beobachtungsart ist zwar keine gebräuchliche, und würde nur ausgeführt werden, wenn ein Heliometer oder Fadenmikrometer in derselben Beziehung zu dem Scheitelpunkte aufgestellt wäre, welche ihm seine parallactische Aufstellung zu dem Pole gibt; aber der Einfluss der Strahlenbrechung auf sie ist einfacher als auf andere Beobachtungsarten, und seine Entwickelung kann zur Grundlage der für diese gehörigen Entwickelungen gemacht werden. Auch wird sie Gelegenheit geben, Mehreres, was bei allen hierher gehörigen Beobachtungsarten Anwendung findet, ein für allemal zu verfolgen.

Die Bezeichnungen, welche ich anwenden werde, sind folgende:

ζ, ζ' und z, z' ... wahre und scheinbare Zenithdistanzen der beiden Sterne S, S',
a ..... ihr Azimuthalunterschied,
ϱ, ϱ' ..... ihre Strahlenbrechungen,
λ, λ' und l, l' ... wahre und scheinbare Winkel der beide Sterne mit einander verbindenden grössten Kreises mit ihren Verticalkreisen, für beide nach einer Richtung gezählt,
σ und s ..... wahre und scheinbare Entfernungen der beiden Sterne von einander.

Diesen Bezeichnungen gemäss hat man für das Dreieck zwischen den scheinbaren Oertern der Sterne und dem Scheitelpunkte:

$$\sin\tfrac{1}{2}s\,\sin\tfrac{1}{2}(l+l') = \sin\tfrac{1}{2}a\,\sin\tfrac{1}{2}(z+z')$$
$$\sin\tfrac{1}{2}s\,\cos\tfrac{1}{2}(l+l') = \cos\tfrac{1}{2}a\,\sin\tfrac{1}{2}(z-z')$$

*) [Auszug aus Abh. III von 350 d. a. Verz. — Vgl. Abh. 31, und Königsb. Beobb. 15. Abth. p. XXII.]

und für das Dreieck zwischen den wahren Oertern der Sterne und dem Scheitelpunkte:

$$\sin\tfrac{1}{2}\sigma \sin\tfrac{1}{2}(\lambda+\lambda') = \sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}(\zeta+\zeta')$$
$$\sin\tfrac{1}{2}\sigma \cos\tfrac{1}{2}(\lambda+\lambda') = \cos\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}(\zeta-\zeta')$$

Durch die Beobachtung gegeben sind s und $\frac{1}{2}(l+l') = l_0$; gesucht werden σ und $\frac{1}{2}(\lambda+\lambda') = \lambda_0$. Wenn die wahren Oerter der beiden Sterne, die Polhöhe und die Sternenzeit bekannt sind, so kann man daraus die Zenithdistanzen ζ und ζ' berechnen; ihre halbe Summe $= \frac{1}{2}(\zeta+\zeta') = \zeta_0$ werde ich als gegeben ansehen. Man findet sie mit hinreichender Genauigkeit durch eine Rechnung, wenn man diese für den in der Mitte zwischen beiden Sternen liegenden Punkt macht.

Setzt man $\zeta - \varrho$ und $\zeta' - \varrho'$ für z und z', so erhält man aus der Verbindung beider Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}\sigma \sin\lambda_0 &= \sin\tfrac{1}{2}s \sin l_0 \cdot \frac{\sin\zeta_0}{\sin\{\zeta_0 - \frac{1}{2}(\varrho+\varrho')\}}\\ \sin\tfrac{1}{2}\sigma \cos\lambda_0 &= \sin\tfrac{1}{2}s \cos l_0 \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}(\zeta-\zeta')}{\sin\frac{1}{2}\{\zeta-\zeta'-\varrho+\varrho'\}}\end{aligned}\right\} \ldots (1)$$

Da $\frac{1}{2}(\varrho+\varrho')$ erst in Grössen von der Ordnung der Strahlenbrechung in das Quadrat von $\zeta - \zeta'$, von der zu ζ_0 gehörigen Strahlenbrechung ϱ_0 verschieden ist, und da, mit noch eine Ordnung weiter gehender Annäherung,

$$\varrho - \varrho' = \frac{d\varrho_0}{d\zeta_0}(\zeta-\zeta')$$

ist, so kann man statt der Gleichungen (1) die folgenden:

$$\sin\tfrac{1}{2}\sigma \sin\lambda_0 = \sin\tfrac{1}{2}s \sin l_0 \cdot \frac{\sin\zeta_0}{\sin(\zeta_0-\varrho_0)}$$
$$\sin\tfrac{1}{2}\sigma \cos\lambda_0 = \sin\tfrac{1}{2}s \cos l_0 \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}(\zeta-\zeta')}{\sin\frac{1}{2}\left\{(\zeta-\zeta')\left(1-\frac{d\varrho_0}{d\zeta_0}\right)\right\}}$$

oder auch

$$\left.\begin{aligned}\sigma \sin\lambda_0 &= s \sin l_0 \cdot \frac{\sin\zeta_0}{\sin(\zeta_0-\varrho_0)}\\ \sigma \cos\lambda_0 &= s \cos l_0 \cdot \frac{d\zeta_0}{d\zeta_0 - d\varrho_0}\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (2)$$

anwenden. Obgleich diese Gleichungen nur Näherungen sind, so sind ihre Fehler, wegen der zur Bedingung gemachten Kleinheit der Entfernung der Sterne, doch so gering, dass sie nie merklich werden.

2.

Die Entwickelung der Gleichungen (2) ergibt das was man den beobachteten s und l_0 hinzufügen muss, um σ und λ_0 zu erhalten:

$$\left.\begin{aligned}\sigma - s &= s\left\{a - 1 + (b-a)\cos l_0^2 + \right.\\ &\qquad \left. + \frac{(b-a)^2}{2a}\cos l_0^2 \sin l_0^2 + \ldots\right\}\\ \lambda_0 - l_0 &= -\frac{b-a}{a}\cos l_0 \sin l_0 + \frac{(b-a)^2}{aa}\cos l_0^3 \sin l_0 - \ldots\end{aligned}\right\} (3)$$

wo a und b, um abzukürzen, für

$$\frac{\sin\zeta_0}{\sin(\zeta_0-\varrho_0)} \quad \text{und} \quad \frac{d\zeta_0}{d\zeta_0 - d\varrho_0}$$

geschrieben sind. Man muss also die beiden Grössen a und $b-a$ kennen, um eine gemachte Beobachtung von dem Einflusse der Strahlenbrechung befreien zu können. Ich werde den Zusammenhang dieser Grössen mit den Strahlenbrechungstafeln aufsuchen.

Die in den Tabulis Regiomontanis enthaltenen Tafeln dieser Art ergeben die Strahlenbrechung unter der Form:

$$\varrho = \alpha \,.\, \beta^A \,.\, \gamma^\lambda \,.\, \operatorname{tg} z = k \operatorname{tg} z,$$

wo α, A, λ, für alle Werthe von z von 0 bis 85^0, in den Tafeln gegeben sind und β, γ von dem Barometer- und dem Thermometerstande abhängige Factoren bedeuten, welche für den Zustand der Atmosphäre, für welchen die Werthe von α gelten, $= 1$ sind. Jene drei Grössen haben die Eigenschaft, für kleinere Zenithdistanzen fast beständig zu sein und sich auch für grössere langsam zu ändern; A und λ entfernen sich erst in diesen grösseren Zenithdistanzen so weit von 1, dass ihre Unterschiede davon merklichen Einfluss auf ϱ erhalten.

Man hat nun für eine unbestimmte Zenithdistanz:

$$a = \frac{\sin\zeta}{\sin(\zeta-\varrho)} = \frac{\sin(z+\varrho)}{\sin z} = \cos\varrho + \frac{\sin\varrho}{\operatorname{tg} z}$$
$$b = \frac{d\zeta}{d\zeta - d\varrho} = 1 + \frac{d\varrho}{dz} = 1 + k + k\operatorname{tg} z^2 + \frac{dk}{dz}\operatorname{tg} z$$

und wenn man $\cos\varrho = 1$ und $\sin\varrho = \varrho = k \operatorname{tg} z$ setzt, was keinen merklichen Fehler erzeugt:

$$a = 1 + k$$
$$b - a = k \operatorname{tg} z^2 + \frac{dk}{dz}\operatorname{tg} z.$$

Wenn man die halbe Summe der scheinbaren Zenithdistanzen der beiden Sterne als gegeben voraussetzen wollte, so würde man es bei diesen Ausdrücken bewenden lassen können; allein die trigonometrische Rechnung ergibt die halbe Summe der wahren Zenithdistanzen, von welcher unmittelbar a und $b-a$ abhängig gemacht werden können. Um diesen Vortheil nicht ungenutzt zu lassen, muss man die Ausdrücke von a und $b-a$ umformen.

Setzt man

$$b - a = \varkappa \operatorname{tg} \zeta^2$$

so wird

$$\varkappa = k\frac{\operatorname{tg} z^2}{\operatorname{tg}\zeta^2} + \frac{dk}{dz}\frac{\operatorname{tg} z}{\operatorname{tg}\zeta^2},$$

und, indem man für $\operatorname{tg}\zeta$ seinen Ausdruck durch z und k

$$\operatorname{tg}\zeta = \frac{\operatorname{tg} z + \operatorname{tg}\varrho}{1 - \operatorname{tg} z \,.\, \operatorname{tg}\varrho} = \frac{\operatorname{tg} z(1+k)}{1 - k\operatorname{tg} z^2}$$

schreibt:

$$\varkappa = \left(k + \frac{dk}{dz}\operatorname{cotg} z\right)\left(\frac{1-k\operatorname{tg} z}{1+k}\right)^2.$$

In jedem einzelnen Falle, für welchen ζ, β, γ gegeben sind, kann man z durch Auflösung der Gleichung

$$\zeta = z + k\operatorname{tg} z,$$

in welcher k von z, β, γ abhängig ist, finden und den Werth von $\varkappa$ aus diesem Werthe von z und den ihm zugehörigen Werthen von k und seines Differentialquotienten, welchen letzteren man aus den Strahlenbrechungstafeln ableiten kann, berechnen; allein es ist viel bequemer, den Logarithmen von $\varkappa$ aus Tafeln zu nehmen, welche so eingerichtet sind, dass sie ihn für alle vorkommenden Werthe von ζ, β, γ ergeben können.

3.

Die Auflösung der Gleichung

$$\zeta = z + k\operatorname{tg} z,$$

in welcher

$$k = \alpha \,.\, \beta^A \,.\, \gamma^\lambda$$

ist, hat auch abgesehen von dem hier verfolgten Zwecke, ein Interesse, indem sie die Mittel gibt, die Strahlenbrechung durch die wahre Zenithdistanz ζ auszudrücken.

Gibt man diesem Ausdrucke derselben die der obigen analoge Form:

$$\varrho = \alpha' \,.\, \beta^{A'} \,.\, \gamma^{\lambda'} \operatorname{tg}\zeta,$$

so hat man die beiden Gleichungen:

$$\alpha \,.\, \beta^A \,.\, \gamma^\lambda \,.\, \operatorname{tg} z = \alpha' \,.\, \beta^{A'} \,.\, \gamma^{\lambda'} \,.\, \operatorname{tg}\zeta = \zeta - z,$$

welchen für unbestimmte Werthe von β und γ genügt werden muss. Die natürlichen Logarithmen der beiden Glieder der ersten dieser Gleichungen sind:

$$l(\alpha\operatorname{tg} z) + Al\beta + \lambda l\gamma = l(\alpha'\operatorname{tg}\zeta) + A'l\beta + \lambda' l\gamma$$

und der Werth von z, welchen der vor dem Gleichheitszeichen stehende Ausdruck voraussetzt, ist:

$$z = \zeta - \alpha' \,.\, \beta^{A'} \,.\, \gamma^{\lambda'} \,.\, \operatorname{tg}\zeta.$$

Bezeichnet man den unter der Annahme $\beta = 1$, $\gamma = 1$ zu ζ gehörigen Werth von z durch (z) und die ihm entsprechenden α, A, λ und ϱ durch (α), (A), (λ) und (ϱ), so erhält man aus der Entwickelung der letzten Formel:

$$z = (z) - \alpha'\operatorname{tg}\zeta\{A'l\beta + \lambda' l\gamma\} + \ldots$$

und wenn man dieses in der ihr vorhergehenden Gleichung anwendet:

$$l\{(\alpha)\operatorname{tg}(z)\} - \frac{d\{(\alpha)\operatorname{tg}(z)\}}{(\alpha)\operatorname{tg}(z)\,.\,d(z)}\alpha'\operatorname{tg}\zeta\{A'l\beta + \lambda' l\gamma\} + (A)l\beta + (\lambda)l\gamma = l(\alpha'\operatorname{tg}\zeta) + A'l\beta + \lambda' l\gamma$$

Da ihr für unbestimmte Werthe von β und γ Genüge geleistet werden muss, so erhält man durch die Vergleichung ihrer ähnlichen Glieder:

$$\alpha' = (\alpha)\frac{\operatorname{tg}(z)}{\operatorname{tg}\zeta}$$

$$A' = \frac{(A)}{1 + \frac{d(\varrho)}{d(z)}}$$

$$\lambda' = \frac{(\lambda)}{1 + \frac{d(\varrho)}{d(z)}}$$

Diese Bestimmung von A' und λ', welche durch die Vergleichung der in die erste Potenz von $l\beta$ und $l\gamma$ multiplicirten Glieder erlangt worden ist und daher beide Ausdrücke der Strahlenbrechung desto übereinstimmender macht, je weniger von 1 verschieden β und γ sind, kann sie offenbar nur in so weit übereinstimmend erhalten, als die für ϱ gewählte Form dieses möglich macht. Indessen ist das Opfer, welches man in dem Falle beträchtlicher von 1 verschiedener Werthe von β und γ der möglichst vortheilhaften Form bringt, nicht so erheblich, dass es zu grösserer Complication dieser Form veranlassen dürfte.

Die vorausgesetzte Auflösung der Gleichung:

$$\zeta = z + \alpha\operatorname{tg} z$$

kann man am bequemsten auf folgende Art machen. Bezeichnet man einen Näherungswerth von z durch $z_,$ den dazu gehörigen Werth von $\log\alpha$ durch $\log\alpha_,$, die Aenderungen von $l\operatorname{tg} z$, und $l\alpha$, für eine Secunde der Aenderung von z, durch ν und $-\nu'$, die Aenderung von $l(\alpha, \operatorname{tg} z_,)$ für eine Secunde durch μ, den wahren Werth von (z) durch $z_, + x$, so hat man:

$$l((\alpha)\operatorname{tg}(z)) = l(\alpha, \operatorname{tg} z_,) + (\nu - \nu')x$$

$$\zeta = z_, + \alpha, \operatorname{tg} z_, + \left(1 + \frac{\nu - \nu'}{\mu}\right)x$$

woraus

$$x = \frac{\mu(\zeta - z_, - \alpha, \operatorname{tg} z_,)}{\mu + \nu - \nu'}$$

und ferner $l\alpha' = l\frac{\alpha, \operatorname{tg} z_,}{\operatorname{tg}\zeta} + \frac{\mu(\nu - \nu')}{\mu + \nu - \nu'}(\zeta - z_, - \alpha, \operatorname{tg} z_,$

folgt. — Will man z. B. die Werthe von $l\alpha'$, A', λ' für $\zeta = 85^0$ bestimmen, so kann man von $z_, = 84^0\,50'\,30''$ ausgehen, wofür die Tabulae Regiomontanae

$l\alpha_, = 1{,}71266$, $\nu' = \frac{252}{600} = 0{,}42$, $A = 1{,}01213$, $\lambda = 1{,}11805$

enthalten. Man hat also die folgende Rechnung auszuführen:

$$\left.\begin{array}{l} l\alpha_, = 1{,}71266 \ldots\ldots \nu' = 0{,}42 \\ l\operatorname{tg} z_, = \underline{1{,}04444} \ldots\ldots \nu = 2{,}35 \end{array}\right\} \nu - \nu' = 1{,}93$$

$l\alpha, \operatorname{tg} z_, = 2{,}75710$; $\alpha, \operatorname{tg} z_, = 9'31'',6$, $\mu = 76$

$l\operatorname{tg}\zeta = \underline{1{,}05805}$

$l\frac{\alpha, \operatorname{tg} z_,}{\operatorname{tg}\zeta} = 1{,}69905$; $l\alpha' = 1{,}69905 - \frac{76 \,.\, 1{,}93}{77{,}93} 1{,}6 = 1{,}69902$

$$A' = 1{,}01213 \cdot \frac{76}{77{,}93} = 0{,}9870$$

$$\lambda' = 1{,}11805 \cdot \frac{76}{77{,}93} = 1{,}0904.$$

4.

Der Grösse von $\varkappa$ werde ich gleichfalls die Form:

$$\varkappa = \alpha''.\beta^{A''}.\gamma^{\lambda''}$$

geben, also die von ζ abhängigen Grössen α'', A'', λ'' so bestimmen, dass sie der Gleichung:

$$\alpha''.\beta^{A''}.\gamma^{\lambda''} = \left(k + \frac{dk}{dz}\operatorname{cotg} z\right)\left(\frac{1-k\operatorname{tg} z^2}{1+k}\right)^2$$
$$= \left(k + \frac{dk}{dz}\operatorname{cotg} z\right)\frac{\operatorname{tg} z^2}{\operatorname{tg}\zeta^2}$$

oder

$$l\alpha'' + A''l\beta + \lambda''l\gamma = l\left\{k + \frac{dk}{dz}\operatorname{cotg} z\right\} + 2l\operatorname{tg} z - 2l\operatorname{tg}\zeta$$

für unbestimmte β und γ Genüge leisten.

Setzt man für k und $\frac{dk}{dz}$ ihre Ausdrücke, nämlich:

$$k = \alpha.\beta^{A}.\gamma^{\lambda}$$
$$\frac{dk}{dz} = \alpha.\beta^{A}.\gamma^{\lambda}\left\{\frac{d\alpha}{\alpha dz} + l\beta\cdot\frac{dA}{dz} + l\gamma\cdot\frac{d\lambda}{dz}\right\}$$

so wird:

$$k + \frac{dk}{dz}\operatorname{cotg} z = \alpha.\beta^{A}.\gamma^{\lambda}\left\{1 + \left(\frac{d\alpha}{\alpha dz} + l\beta\cdot\frac{dA}{dz} + l\gamma\cdot\frac{d\lambda}{dz}\right)\operatorname{cotg} z\right\}$$

und der Logarithme davon

$$= l\alpha + Al\beta + \lambda l\gamma + l\left\{1 + \left(\frac{d\alpha}{\alpha dz} + l\beta\cdot\frac{dA}{dz} + l\gamma\cdot\frac{d\lambda}{dz}\right)\operatorname{cotg} z\right\}$$

also

$$l\alpha'' + A''l\beta + \lambda''l\gamma = l\alpha + Al\beta + \lambda l\gamma + l\left\{1 + \left(\frac{d\alpha}{\alpha dz} + l\beta\cdot\frac{dA}{dz} + l\gamma\cdot\frac{d\lambda}{dz}\right)\operatorname{cotg} z\right\} + 2l\operatorname{tg} z - 2l\operatorname{tg}\zeta.$$

Führt man den zu $\beta = 1$, $\gamma = 1$ gehörigen Werth von z, welcher im vorigen § durch (z) bezeichnet worden ist, sowie auch die davon abhängigen (α), (A), (λ), wieder ein, setzt man also:

$$z = (z) - \alpha'\operatorname{tg}\zeta(A'l\beta + \lambda'l\gamma) - \text{etc.}$$
$$\frac{\operatorname{tg} z}{\operatorname{tg}\zeta} = \frac{\operatorname{tg}(z)}{\operatorname{tg}\zeta} - \frac{\alpha}{\cos(z)^2}(A'l\beta + \lambda'l\gamma)$$
$$= \frac{\alpha'}{(\alpha)} - \frac{\alpha'}{\cos(z)^2}(A'l\beta + \lambda'l\gamma)$$

so wird diese Gleichung:

$$l\alpha'' + A''l\beta + \lambda''l\gamma = 2l\alpha' - l(\alpha) + l\left(1 + \frac{d(\alpha)}{(\varrho)d(z)}\right)$$
$$+ l\beta\left\{(A) - \frac{2(\alpha)}{\cos(z)^2}A' - \frac{d(\alpha)}{d(z)}\operatorname{tg}(z)A' + \frac{\frac{(\alpha)d(\alpha)}{(\varrho)d(z)}\sec(z)^2A'}{1 + \frac{d(\alpha)}{(\varrho)d(z)}} + \frac{\frac{d(A)}{d(z)}\operatorname{cotg}(z)}{1 + \frac{d(\alpha)}{(\varrho)d(z)}}\right\}$$
$$+ l\gamma\left\{(\lambda) - \frac{2(\alpha).}{\cos(z)^2}\lambda' - \frac{d(\alpha)}{d(z)}\operatorname{tg}(z)\lambda' + \frac{\frac{(\alpha)d(\alpha)}{(\varrho)d(z)}\sec(z)^2\lambda'}{1 + \frac{d(\alpha)}{(\varrho)d(z)}} + \frac{\frac{d(\lambda)}{d(z)}\operatorname{cotg}(z)}{1 + \frac{d(\alpha)}{(\varrho)d(z)}}\right\}$$

Setzt man darin für (A) und (λ) ihre Ausdrücke durch A' und λ', nämlich:

$$(A) = A'\left(1 + \frac{d(\varrho)}{d(z)}\right) = A'\left\{1 + (\alpha) + (\alpha)\operatorname{tg}(z)^2 + \frac{d(\alpha)}{d(z)}\operatorname{tg}(z)\right\}$$
$$(\lambda) = \lambda'\left(1 + \frac{d(\varrho)}{d(z)}\right) = \lambda'\left\{1 + (\alpha) + (\alpha)\operatorname{tg}(z)^2 + \frac{d(\alpha)}{d(z)}\operatorname{tg}(z)\right\}$$

so erhält man, durch Vergleichung ihrer ähnlichen Glieder:

$$l\alpha'' = 2l\alpha' - l(\alpha) + l\left(1 + \frac{d(\alpha)}{(\varrho)d(z)}\right)$$
$$\left(1 + \frac{d(\alpha)}{(\varrho)d(z)}\right)(A'' - A') = -\frac{A'(\alpha)}{\cos(z)^2} + \frac{d(A)}{d(z)}\operatorname{cotg}(z)$$
$$\left(1 + \frac{d(\alpha)}{(\varrho)d(z)}\right)(\lambda'' - \lambda') = -\frac{\lambda'(\alpha)}{\cos(z)^2} + \frac{d(\lambda)}{d(z)}\operatorname{cotg}(z)$$

Eine Tafel, welche log α'', A'', λ'' enthält, kann eine Strahlenbrechungstafel für Mikrometerbeobachtungen genannt werden. [Erläuterung zu den, hier weggelassenen, 3 Tafeln; erste Tafel s. auch Tabb. Regiomont.]

5.

Es ist oben gezeigt worden, dass die Erfindung des Einflusses der Strahlenbrechung auf die Art von Beobachtungen, auf welche das Vorhergehende sich bezieht, von zwei Grössen, nämlich a und $b - a$ abhängt; ich habe mich bisher aber nur mit den Mitteln beschäftigt, die zweite $b - a = \varkappa \operatorname{tg}\zeta^2$ leicht zu finden. Zwar erhält man die erste, oder vielmehr $a - 1 = k$, aus der ersten Strahlenbrechungstafel, indem man k für die der wahren Zenithdistanz ζ entsprechende scheinbare z sucht; aber da es eine nicht unerhebliche Vereinfachung der Rechnung sein würde, wenn statt dieses k das vorige $\varkappa$ genommen werden könnte, so ist es der Mühe werth, zu untersuchen, wie grosse Fehler aus dieser Verwechselung entstehen. — Die wahren Ausdrücke der Grössen a und b sind:

$$a = 1 + k \qquad = 1 + \varkappa + (k - \varkappa)$$
$$b = 1 + k + \varkappa \operatorname{tg}\zeta^2 = 1 + \varkappa + \varkappa \operatorname{tg}\zeta^2 + (k - \varkappa)$$

und die Verbesserungen, welche man den ohne Rücksicht auf das letzte Glied $(k - \varkappa)$ berechneten Werthen von σ und λ_0 hinzusetzen muss, sind näherungsweise

für $\sigma \ldots s(k - \varkappa)$

für $\lambda \ldots - \varkappa \operatorname{tg}\zeta^2 \cos l_0 \sin l_0 (k - \varkappa)$.

Für eine Entfernung $s = n.1000''$ und für die Annahme $\beta = 1$, $\gamma = 1$, sind die Werthe dieser Verbesserung von σ, in verschiedenen Zenithdistanzen der Sterne, deren Entfernung gemessen wird:

$50^0 + 0,''0020.n$
$60 + 0,0033.n$
$70 + 0,0068.n$
$75 + 0,0114.n$
$80 + 0,0229.n$
$85 + 0,0576.n$

Die aus derselben Ursache hervorgehende Verbesserung von λ_0 bleibt in allen diesen Zenithdistanzen unmerklich. Aber ich glaube, dass auch die Verbesserung von σ der Einfachheit der Rechnung, ohne wesentlichen Nachtheil, zum Opfer gebracht werden darf, indem in den Entfernungen vom Scheitelpunkte, in welchen sie für grössere Werthe von σ einige Hundertel einer Secunde betragen kann, die Undeutlichkeit der Sterne auch schon so gross ist, dass die Messung ihrer Entfernung nicht mehr bis auf solche Kleinigkeiten sicher gemacht werden kann. Uebrigens könnte sie, da sie von λ_0 unabhängig ist, für alle Zenithdistanzen ein für allemal berechnet und in eine der eben mitgetheilten ähnliche, nur weiter ausgedehnte Tafel gebracht werden.

Indessen darf man in dem Ausdrucke von λ_0 nicht allein $a = 1 + \varkappa$ setzen, sondern man darf es auch geradezu $= 1$ annehmen; der Einfluss des Fehlers dieser Annahme auf λ_0 ist nämlich $= k\varkappa \operatorname{tg}\zeta^2 \cos l_0 \sin l_0$ und er beträgt in seinem Maximo für $\zeta = 75^0$ nur $0,''1$, für $\zeta = 80^0$ nur $0,''2$, für $\zeta = 85^0$ nur $0,''6$, bleibt also immer so klein, dass er die Grenze bei weitem nicht erreicht, bis zu welcher man die Genauigkeit der Beobachtung von l_0 zu treiben hoffen darf.

Das in $(b-a)^2$ multiplicirte Glied der ersten der Formeln (3) ist selbst in seinem Maximo noch für $\zeta = 75^0$ ganz unbedeutend, nämlich $= 0,''0017\,n$; für $\zeta = 80^0$ ist es $= 0,''0086\,n$; für $\zeta = 85^0 = 0,''0791\,n$. Es kann also mit etwa demselben Rechte vernachlässigt werden, mit welchem $k = \varkappa$ gesetzt worden ist. Der Einfluss des ähnlichen Gliedes der zweiten der Formeln (3) auf λ_0 ist in seinem Maximo für $\zeta = 75^0 = 0,''9$; für $\zeta = 80^0 = 4,''5$; für $\zeta = 85^0 = 42,''4$; — ich glaube, dass eine in der grössten dieser Entfernungen vom Scheitelpunkte gemachte Beobachtung nicht leicht so viel Vertrauen auf ihre Genauigkeit einflössen wird, dass man dadurch bewogen werden könnte, die Erlaubniss, das zweite Glied zu vernachlässigen, auf Entfernungen vom Scheitelpunkte zu beschränken, welche einige Grade kleiner bleiben als 85^0.

Die diesen Bemerkungen gemäss vereinfachten Formeln (3), nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= s + s\varkappa\{\operatorname{tg}\zeta^2 \cos l_0^2 + 1\} \\ \lambda_0 &= l_0 - \varkappa \operatorname{tg}\zeta^2 \cos l_0 \sin l_0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (4)$$

werde ich also, insofern die Zenithdistanz ζ nicht 85^0 überschreitet, als die Auflösung der am Anfange des 1. § ausgesprochenen Aufgabe betrachten. Noch grössere Zenithdistanzen, für welche man diese Form der Auflösung würde verlassen müssen, schliesse ich hier und in dem Folgenden aus. — Ich werde jetzt aus der Auflösung dieser Aufgabe die Mittel ableiten, die verschiedenen gebräuchlichen Beobachtungsarten von dem Einflusse der Strahlenbrechung zu befreien.

6.

Ich fange mit den

Beobachtungsarten, welche scheinbare Entfernungen und Positionswinkel (s und p) unmittelbar ergeben,

an. Sie setzen ein auf einem Aequatorealinstrumente befindliches Heliometer oder Fadenmikrometer voraus; sie sind, seitdem solche Instrumente gehörige Grösse und Vollendung erlangt haben, in häufigere Anwendung gekommen, und werden der Vorzüge wegen, welche sie vor anderen Arten der Mikrometerbeobachtungen besitzen, wahrscheinlich noch viel allgemeiner werden.

Der beobachtete Positionswinkel p ist die Summe zweier Winkel am scheinbaren Orte des in der Mitte zwischen beiden Sternen liegenden Punktes M, nämlich des Winkels q' des Verticalkreises mit dem Declinationskreise und des Winkels l_0 des durch die scheinbaren Oerter beider Sterne gelegten grössten Kreises mit dem ersteren; oder es ist $p = l_0 + q'$. Der gesuchte Positionswinkel π ist dagegen die Summe zweier ähnlichen Winkel am wahren Orte vom M, oder $\pi = \lambda_0 + q$. Der Winkel q wird, zugleich mit der Zenithdistanz ζ, aus der Polhöhe φ des Beobachtungsorts und der Declination und dem Stundenwinkel (δ_0 und τ_0) des Punktes M, durch die Formeln

$$\sin\zeta \sin q = \cos\varphi \sin\tau_0$$
$$\sin\zeta \cos q = \sin\varphi \cos\delta_0 - \cos\varphi \sin\delta_0 \cos\tau_0$$
$$\cos\zeta \qquad = \sin\varphi \sin\delta_0 + \cos\varphi \cos\delta_0 \cos\tau_0$$

gefunden, und die Differentialformeln der sphärischen Trigonometrie ergeben mit hinreichender Genauigkeit:

$$q' = q + \varrho \operatorname{tg}\delta_0 \sin q = q + k' \operatorname{tg}\zeta \sin q \operatorname{tg}\delta_0$$

woraus

$$l_0 = p - q - k' \operatorname{tg}\zeta \sin q \operatorname{tg}\delta_0$$

folgt. Dieser Ausdruck von l_0 ist also in den Formeln (4) zu substituiren; allein da die Annahme $l_0 = p - q$ in den schon in $\varkappa$ multiplicirten Gliedern dieser Formeln keinen erheblichen Fehler erzeugt und da $\lambda_0 = \pi - q$ ist, so erhält man dadurch:

$$\sigma = s + s\varkappa\{\operatorname{tg}\zeta^2 \cos(p-q)^2 + 1\}$$
$$\pi = p - \varkappa \operatorname{tg}\zeta^2 \cos(p-q)\sin(p-q) - k' \operatorname{tg}\zeta \sin q \operatorname{tg}\delta_0.$$

Indessen darf man auch in dem letzten Gliede des Ausdrucks von π, $\varkappa$ statt k' setzen, ohne dass dadurch, selbst in den grösseren Zenithdistanzen, in welchen der Unterschied $k' - \varkappa$ erst anfängt erheblich zu werden, ein Fehler entsteht, welcher zu der Zurückweisung dieser Vereinfachung der Rechnung nöthigte. Ich finde das Maximum von $\operatorname{tg}\zeta \sin q \operatorname{tg}\delta_0$ für $\zeta = 75^0, 80^0, 85^0$ und für die Polhöhe von Königsberg $= 54^0\,42'\,50''{,}5$, resp. $= 1{,}499,\ 1{,}830,\ 2{,}945$ und den aus der Verwechselung von k' und $\varkappa$ entstehenden Fehler im Maximo $= 3''{,}2,\ 7''{,}5,\ 30''{,}2$. Ich bin daher der Meinung, dass auch die Anwendung der Formeln:

$$\left.\begin{aligned}\sigma &= s + s\varkappa\{\operatorname{tg}\zeta^2 \cos(p-q)^2 + 1\}\\ \pi &= p - \varkappa\{\operatorname{tg}\zeta^2 \cos(p-q)\sin(p-q) + \\ &\qquad + \operatorname{tg}\zeta \sin q \operatorname{tg}\delta_0\}\end{aligned}\right\} \quad \ldots (5)$$

bis zu der Zenithdistanz 85^0 erlaubt ist.

Das Resultat der Beobachtungen der hier betrachteten Art kann noch in anderer Form angegeben werden, auf welche der Einfluss der Strahlenbrechung gleichfalls aufzusuchen ist. Werden die Unterschiede der geraden Aufsteigungen und Abweichungen beider Sterne angegeben, so wie sie, ohne Rücksicht auf die Strahlenbrechung, aus s und p berechnet worden sind, so sind diese Angaben, welche ich durch $a' - a$ und $d' - d$ bezeichnen werde, aus den Formeln:

$$\sin\tfrac{1}{2}(a'-a)\cos\delta_0 = \sin\tfrac{1}{2}s\sin p$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(a'-a)\sin\tfrac{1}{2}(d'-d) = \sin\tfrac{1}{2}s\cos p$$

hervorgegangen. Die wahren Unterschiede der geraden Aufsteigungen und Abweichungen $\alpha' - \alpha$ und $\delta' - \delta$ haben dagegen die von σ und π abhängigen Ausdrücke:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha)\cos\delta_0 = \sin\tfrac{1}{2}\sigma\sin\pi$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\delta'-\delta) = \sin\tfrac{1}{2}\sigma\cos\pi$$

Aus der Vergleichung beider Formelnpaare folgt, mit hinreichender Näherung:

$$\alpha' - \alpha = a' - a + (\sigma\sin\pi - s\sin p)\sec\delta_0$$
$$\delta' - \delta = d' - d + \sigma\cos\pi - s\cos p$$

oder

$$\alpha' - \alpha = a' - a + \{(\sigma - s)\sin p + s(\pi - p)\cos p\}\sec\delta_0$$
$$\delta' - \delta = d' - d + (\sigma - s)\cos p - s(\pi - p)\sin p$$

und nach der Substitution von (5):

$$\left.\begin{aligned}\alpha' - \alpha &= a' - a + s\varkappa\{\operatorname{tg}\zeta^2\cos(p-q)\sin q - \\ &\qquad - \operatorname{tg}\zeta\sin q\operatorname{tg}\delta_0\cos p + \sin p\}\sec\delta_0\\ \delta' - \delta &= d' - d + s\varkappa\{\operatorname{tg}\zeta^2\cos(p-q)\cos q + \\ &\qquad + \operatorname{tg}\zeta\sin q\operatorname{tg}\delta_0\sin p + \cos p\}\end{aligned}\right\} \quad \ldots (6)$$

Diese Formeln verlieren eins ihrer Glieder durch die Einführung eines, durch

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg}\zeta \sin q \operatorname{tg}\delta_0$$

zu bestimmenden Hülfswinkels, wodurch sie sich in

$$\left.\begin{aligned}\alpha' - \alpha &= a' - a + s\varkappa\{\operatorname{tg}\zeta^2\cos(p-q)\sin q + \\ &\qquad + \sec u\sin(p-u)\}\sec\delta_0\\ \delta' - \delta &= d' - d + s\varkappa\{\operatorname{tg}\zeta^2\cos(p-q)\cos q + \\ &\qquad + \sec u\cos(p-u)\}\end{aligned}\right\} \quad \ldots (7)$$

verwandeln.

Ist endlich das Resultat der Beobachtung in der Form:

$$x = 2\sin\tfrac{1}{2}s\sin p$$
$$y = 2\sin\tfrac{1}{2}s\cos p$$

angegeben, und wird es in ähnlicher Form nach seiner Befreiung von der Strahlenbrechung verlangt, nämlich in der Form:

$$\xi = 2\sin\tfrac{1}{2}\sigma\sin\pi$$
$$\eta = 2\sin\tfrac{1}{2}\sigma\cos\pi$$

so erhält man:

$$\xi = x + (\sigma - s)\sin p + s(\pi - p)\cos p$$
$$\eta = y + (\sigma - s)\cos p - s(\pi - p)\sin p$$

und hieraus, wie oben:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= x + s\varkappa\{\operatorname{tg}\zeta^2\cos(p-q)\sin q + \sec u\sin(p-u)\}\\ \eta &= y + s\varkappa\{\operatorname{tg}\zeta^2\cos(p-q)\cos q + \sec u\cos(p-u)\}\end{aligned}\right\} \quad \ldots (8)$$

Die Formeln (5), (7), (8) lassen in Beziehung auf ihre Genauigkeit kaum etwas zu wünschen übrig, denn, wie ich schon bemerkt habe, fangen ihre Fehler erst in sehr grossen, sich 85^0 nähernden Zenithdistanzen an merklich zu werden, in welchen Zenithdistanzen die Beobachtungen selbst nur rohere Näherungen sein können; sie gewähren ihre Resultate auch durch so wenig Rechnung als man erwarten kann, können aber, in dieser Beziehung, noch wesentlich durch eine Hülfstafel unterstützt werden, welche für die Polhöhe jedes Beobachtungsorts zu berechnen ist. Setzt man nämlich:

$$\begin{aligned} \cos n &= \cos\varphi \sin\tau_0 \\ \sin n \cos N &= \cos\varphi \cos\tau_0 \\ \sin n \sin N &= \sin\varphi \end{aligned}$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} \sin\zeta \sin q &= \cos n \\ \sin\zeta \cos q &= \sin n \cos(N+\delta_0) \\ \cos\zeta &= \sin n \sin(N+\delta_0) \end{aligned}$$

und:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\zeta \sin q &= \operatorname{cotg} n \operatorname{cosec}(N+\delta_0) \\ \operatorname{tg}\zeta \cos q &= \operatorname{cotg}(N+\delta_0) \end{aligned}\right\} \quad \ldots . \quad (9)$$

woraus ζ und q mit sehr geringer Mühe gefunden werden, wenn eine Hülfstafel $\log \operatorname{cotg} n$ und N für jede Zeitminute von τ_0 angibt. Die kleine Mühe, eine solche Tafel für eine Sternwarte zu berechnen, auf welcher häufige Mikrometerbeobachtungen gemacht werden, findet in der Erleichterung, welche ihre Anwendung gewährt, reichlichen Ersatz. (Die für die Polhöhe der Königsberger Sternwarte $= 54^0\ 42'\ 50''{,}5$ berechnete, findet man Ende dieser Abhandlung. — Das Folgende wird zeigen, dass dieselbe Hülfstafel die Berechnung des Einflusses der Strahlenbrechung auf die Resultate aller Arten von Mikrometerbeobachtungen wesentlich erleichtert.)

[Die noch folgenden §§ 7—16 stellen den Einfluss der Refraction auf verschiedene Mikrometer, Faden-, Netz-, Kreismikrometer, in ausführlicherer Weise dar; kürzer und einfacher sind diese Aufgaben in Abh. 31, Bd. I, p. 238 fl. behandelt.]

---

168. Bestimmung der Masse des Jupiter.*)

(Astron. Untersuchungen II, p. 1.)

Die von NEWTON herbeigeführte Nothwendigkeit, die Massen der Planeten kennen zu lernen, hat, seit seiner Zeit, eine Reihe von Bemühungen erzeugt, von welchen ich die auf die Erfindung der Masse des Jupiter gerichteten hier erwähnen werde, ehe ich meine eigenen, desselben Zweckes wegen unternommenen, darstelle. Die Masse, welche Einfluss auf die Bewegungen im Planetensysteme ausübt, ist, schärfer genommen, nicht die Masse des Jupiter allein, sondern die Summe dieser Masse und der Massen seiner vier Satelliten; um kürzer von ihr reden zu können, werde ich sie, in Theilen der Masse der Sonne ausgedrückt, durch $\frac{1}{\mu}$ bezeichnen.

Es ist bekannt, dass NEWTON die mittlere Entfernung des Satelliten IV, in den früheren Ausgaben seines unsterblichen Werkes**), nach einer von HALLEY auf Austritte des Jupiter und seiner Satelliten aus dem dunkeln Rande des Mondes gegründeten Bestimmung, $= 501''{,}5$ annahm und daraus $\mu = 1033$ berechnete; ferner, dass er in der späteren Ausgabe***), den Beobachtungen zufolge, welche POUND mit einem an einem Fernrohre von 15 Fuss Länge angebrachten Mikrometer gemacht hatte, die mittlere Entfernung des Satelliten IV $= 496''$ setzte und daraus $\mu = 1067$ ableitete. Er führt zugleich an, dass POUND, durch ein an einem Fernrohre von 123 Fuss Länge angebrachtes Mikrometer, die mittlere Entfernung des Satelliten III $= 282''$ bestimmte. Ich habe beide Bestimmungen berechnet, indem ich die Abplattung des Jupiter und die Massen seiner Satelliten so angenommen habe, wie Herr DAMOISEAU sie gefunden hat*), und es hat sich dadurch

$$\begin{aligned} \text{Sat. III} \ldots \mu &= 1066{,}15 \\ \text{- IV} \ldots \mu &= 1066{,}02 \end{aligned}$$

ergeben. Die Uebereinstimmung beider Resultate lässt nichts zu wünschen übrig; vielmehr ist sie so gross, dass POUND's rühmlich bekannte Sorgfalt sich darin von dem Zufalle begünstigt zeigt. Indessen kann Sorgfalt in der Beobachtung der Satelliten nur dann die Richtigkeit der Bestimmung von μ zur Folge haben, wenn ein anderer, eben so wesentlicher Theil ihrer Untersuchung, nämlich die Bestimmung des Verhältnisses der unmittelbaren Angaben des Mikrometers zu Theilen des grössten Kreises, mit nicht geringerer ausgeführt worden ist. Wenn der angenommene Werth dieses Verhältnisses in $1+k$ multiplicirt werden muss, um der wahre zu werden, so werden dadurch alle gemessenen Entfernungen im Verhältnisse $1 : 1+k$ und μ im Verhältnisse $(1+k)^3 : 1$ geändert, ohne dass die Uebereinstimmung der aus den Messungen der Entfernungen verschiedener Satelliten hervorgehenden Werthe dieser Grösse dadurch

*) [Abh. IX aus 356 d. a. Verz., mit Ausschluss des Beobachtungsdetails und der Satelliten-Tafeln. — Br. m. O. II. 374 (O.), 376, 378 (O.), 386 (O.)]

**) Editio II. Cantabrigiae MDCCXIII.

***) Londini. MDCCXXVI.

*) Tables écliptiques des Satellites de Jupiter. Paris 1836.

beeinträchtigt wird. Es scheint nichts bis auf uns gekommen zu sein, was zu einem Urtheile über den Grad des Genügens dieses zweiten, wesentlichen Theils der Pound'schen Bemühungen führen könnte; will man aber ein Urtheil auf die Vergleichung der angeführten Werthe von μ mit dem Resultate meiner Beobachtungen gründen, so findet man, dass POUND den Werth der Angaben seines Mikrometers im Verhältnisse 174:175 zu klein angenommen hat.

In den Jahren 1794 und 1795 benutzte TRIESNECKER ein Dollond'sches Objectivmikrometer, um eine Reihe von Messungen der Entfernungen aller vier Jupiterssatelliten zu machen. Die Nachricht davon findet sich in den Wiener Ephemeriden für 1797. Sie bewährt den Fleiss, welcher die Arbeiten dieses tüchtigen Astronomen nicht selten vor anderen, gleichzeitigen hervortreten lässt. Die grössten Digressionen jedes der vier Satelliten wurden an 9 bis 12 Tagen, jedesmal häufig wiederholt gemessen, und die Uebereinstimmung dieser Wiederholungen untereinander erregt ein günstiges Vorurtheil für die Güte des Instruments und für die Sorgfalt des Beobachters. Die daraus abgeleiteten Werthe der mittleren Entfernungen waren:

Sat. I . . .	110″,8.	9	Beobachtungstage
- II . . .	176,6.	10	„
- III . . .	283,8.	12	„
- IV . . .	498,2.	11	„

die ihnen entsprechenden Werthe von μ finde ich:

1075,36, 1069,61, 1045,99, 1051,96,

und den Werth, welcher der Summe der vier gemessenen Entfernungen entspricht:

$$\mu = 1055{,}68,$$

womit die einzelnen bis auf

$$-0''{,}69;\ -0''{,}77;\ +0''{,}87;\ +0''{,}59$$

übereinstimmen. Es ist wahrscheinlich, dass eine neue Berechnung der Triesnecker'schen Beobachtungen diese Unterschiede grossen Theils verschwinden lassen würde, indem die Elemente der Bewegungen der Satelliten jetzt weit vollständiger bekannt sind, als zur Zeit der früheren Berechnung. Allein das Resultat derselben würde erst einen Werth erlangen, wenn man sich von dem Genügen der Bestimmung des Verhältnisses der unmittelbaren Angaben des Mikrometers zu Theilen des grössten Kreises überzeugen könnte. Wie TRIESNECKER dieses Verhältniss gefunden hat, ist mir nicht bekannt geworden; die Hülfsmittel und Methoden der damaligen Zeit müssen aber die Erlangung einer, ein Tausendtel des Ganzen nicht zweifelhaft lassenden Bestimmung, sehr schwierig gemacht haben.

Als LAPLACE die Formeln, welche die Bewegung des Saturn ausdrücken, entworfen hatte, legte BOUVARD sie bekanntlich einer neuen Untersuchung der Elemente dieses Planeten zum Grunde, und nahm auch die Masse des Jupiter, als eine durch die Beobachtungen der Oppositionen und Quadraturen des Saturn zu bestimmende unbekannte Grösse, in diese Untersuchung auf. Er fand den Werth von $\mu = 1070{,}5$. LAPLACE theilte dieses Resultat dem Institute am 18. Sept. 1815 mit und zeigte, dass man, den Bedingungsgleichungen des Herrn BOUVARD zufolge, 999308 gegen 1 wetten könne, dass der wahre Werth von μ nicht ausserhalb der Grenzen

$$\frac{1070{,}5}{1+\frac{1070{,}5}{106709}} \quad \text{und} \quad \frac{1070{,}5}{1-\frac{1070{,}5}{106709}}$$

$$= 1059{,}87 \quad \text{und} \quad 1081{,}35$$

liege. Aus dem, was LAPLACE bei dieser Gelegenheit von den Bedingungsgleichungen anführt, geht auch das Gewicht der Bestimmung = 57676597 und der mittlere Fehler einer Beobachtung

$$= \pm\sqrt{\frac{31096}{123}} = \pm 15{,}90,$$

also der mittlere Fehler von μ

$$= \frac{\pm 1070{,}5 \times 15{,}90}{\sqrt{57676597}} = \pm 2{,}24$$

hervor. — Diese beträchtliche, der Bouvard'schen Bestimmung der Jupitersmasse zugeschriebene Sicherheit und ihre nahe Uebereinstimmung mit dem Resultate der Pound'schen Messungen der Entfernungen der Satelliten III und IV, rechtfertigten die Annahme, dass sie eins der am besten bekannten Elemente des Planetensystems sei. Auch blieb der Zweifel dagegen, welchen die vorher angeführten Beobachtungen TRIESNECKER'S hätten erregen können, unbeachtet; vielleicht weil seine Abhandlung in den Wiener Ephemeriden nicht bekannt genug geworden war, oder weil er unterlassen hatte, die Masse des Planeten aus seinen Messungen der Entfernungen der Satelliten abzuleiten, oder weil man eine genügende Nachweisung der Richtigkeit seiner Annahme des Werthes der Mikrometertheile — welche mir wenigstens nicht bekannt geworden ist — vermisste.

In dem Berliner Astr. Jahrbuche für 1826 theilte Herr NICOLAI Untersuchungen über die Bahn der Juno mit, aus welchen er erkannte, dass 15 von 1804 bis 1823 beobachtete Gegenscheine durch die Annahme der aus der Bouvard'schen Masse des Jupiter folgenden Störungen der Bewegung des untersuchten Planeten nicht miteinander vereinigt werden konnten; dass sie aber durch

eine beträchtliche Vergrösserung dieser Masse, nämlich

$$\mu = 1053{,}924$$

insoweit in Uebereinstimmung gebracht wurden, dass man die noch übrig bleibenden Unterschiede wohl den in der Rechnung noch vernachlässigten Einwirkungen des Mars und Saturn zuschreiben konnte. Er sagt bei dieser Gelegenheit, dass diese grössere Masse des Jupiter sich derjenigen sehr nähere, welche GAUSS früher schon aus der Pallastheorie hergeleitet hatte, welche aber nicht näher bekannt geworden ist.

Eine Untersuchung von ENCKE über 14 zwischen 1807 und 1825 beobachtete Gegenscheine der Vesta, welche in den Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften für 1826 bekannt geworden ist, bringt diese Beobachtungen durch die Annahme

$$\mu = 1050{,}36$$

in eine nichts zu wünschen übrig lassende Uebereinstimmung; in eine weit grössere, als die in dem vorher erwähnten Falle der Juno erlangte ist. Indessen war der Einfluss der Masse des Jupiter auf die Uebereinstimmung der 14 Gegenscheine der Vesta zwar gross genug, um nicht zweifelhaft zu lassen, dass der von Herrn BOUVARD gefundene Werth dieser Masse beträchtlich vergrössert werden muss, wenn er die Bewegung der Vesta erklären soll; allein er war nicht so gross, dass dadurch über einige Einheiten des Werthes von μ entschieden werden konnte. Von ähnlicher Bedeutung für die Masse des Jupiter werden auch die Resultate der vorher erwähnten Untersuchungen der Bewegungen der Juno und Pallas ausgefallen sein: längere Zeit muss die Einflüsse des Jupiter auf alle diese Bewegungen deutlicher entwickeln, ehe die darauf gegründete Bestimmung seiner Masse in weit engere Grenzen der Unsicherheit eingeschlossen werden kann.

Als Herr BOUVARD die vorhandenen Beobachtungen des Uranus untersuchte, um daraus die Elemente abzuleiten, welche seinen im Jahre 1821 erschienenen Tafeln zum Grunde gelegt werden sollten, bemerkte er eine Erscheinung, welche bis dahin nicht, oder wenigstens nicht so augenfällig, in den Bewegungen des Planetensystems hervorgetreten war: die Beobachtungen konnten nicht durch die Formeln für die Bewegung des Uranus erklärt werden, welche LAPLACE durch die, alle bekannten Körper des Sonnensystems berücksichtigende Verfolgung des Newton'schen Gesetzes der Schwere erlangt hatte. Herr BOUVARD scheint sich, in der Einleitung seiner Tafeln *), zu der Meinung zu neigen, dass diese Abweichung zwischen der Theorie und den Beobachtungen durch Unvollkommenheiten derjenigen der letzteren, welche vor der Zeit der Herschel'schen Entdeckung des Planeten zufällig gemacht worden sind, erklärt werden könne. Allein wenn man diese Beobachtungen aufmerksam untersucht, so erlangt man die Ueberzeugung, dass sie, wenn auch um einige Secunden, doch bei weitem nicht so viel fehlerhaft sein können, als angenommen werden müsste, wenn die übrigbleibende Abweichung zwischen ihnen und der Theorie ihnen allein zugeschrieben werden sollte. Ich hielt daher die Bemerkung dieser Abweichung für eine der wichtigsten Bemerkungen, welche die practische Astronomie neuerlich herbeigeführt hat, und wurde dadurch zu einer Untersuchung veranlasst, von welcher ich in einem folgenden Bande dieses Buches Einiges bekannt machen zu können hoffe. Eine der von mir versuchten Erklärungen war die Annahme einer der Masse nicht proportionalen Anziehung, welche zwar schon von JOHANN TOB. MAYER ausgesprochen war *), deren Vereinbarkeit mit den Erfahrungssätzen, auf welche NEWTON die Voraussetzung der Proportionalität der Anziehung zu der Masse gründete, er aber nicht richtig nachgewiesen hatte, so dass die Statthaftigkeit derselben auch noch zweifelhaft geblieben war. Da ich diesen Zweifel beseitigen konnte **), da also klar wurde, dass ein Planet eine verschiedene anziehende Kraft zeigen kann, je nachdem er sie auf verschiedene Körper äussert, so wurde nothwendig, Erscheinungen zu verfolgen, welche eine Abweichung von der einfachsten Voraussetzung — der Newton'schen — falls sie vorhanden ist, an den Tag legen konnten — Ich habe in dieser Beziehung nicht nur die Bewegung des Uranus verfolgt, sondern auch die Versuche genauer wiederholt, aus welchen NEWTON geschlossen hatte, dass alle irdischen Körper und der Mond mit gleicher Kraft von der Erde angezogen werden ***). Endlich habe ich, da die grosse Sicherheit, welche LAPLACE der Bouvard'schen Bestimmung der Jupitersmasse zuschreibt und ihre dennoch stattfindende beträchtliche Verschiedenheit von den auf die Bewegungen der Vesta, Juno und Pallas gegründeten Bestimmungen, auf einen physischen Grund des Unterschiedes zu deuten scheinen, für wünschenswerth gehalten, dass die Kräfte möglichst sicher ausgemittelt werden, mit welchen Jupiter und

*) Tables astr. publiées par le Bureau des Longitudes de France. Paris 1821. p. XIV.

*) Comment. Societ. Reg. Scient. Gottingensis ad Annum MDCCCIV—VIII.

**) Abhandl. der Berliner Akad. der Wissensch. für 1824. Mathematischer Theil. S. 2—6. [Abh. 16.]

***) Abhandl. der Berlin. Akad. der Wissensch. für 1830 [= Abh. 139].

Saturn ihre Satelliten anziehen. — Auf die Bewegung des Uranus hoffe ich, wie gesagt, zurückzukommen; die Wiederholung der Newton'schen Versuche hat nicht die leiseste Andeutung einer relativen Verschiedenheit der anziehenden Kraft der Erde ergeben; dass auch die einzelnen Satelliten des Jupiter auf eine gleiche Masse und zwar nahe auf dieselbe führen, welche aus den Bewegungen der drei neuen Planeten abgeleitet worden ist, wird man in der folgenden Abhandlung sehen.

Eine Beobachtungsreihe, welche die Bestimmung der sich in der Bewegung des Satelliten IV zeigenden Masse des Jupiter zum Zwecke hat, hat der jetzige Königliche Astronom, Herr AIRY, im J. 1832 in Cambridge angefangen und bis 1836, zuletzt in Greenwich, fortgesetzt. Diese Beobachtungen und die nach und nach aus ihnen gezogenen Resultate hat Herr AIRY der Königlichen Astronomischen Gesellschaft in London in vier Aufsätzen mitgetheilt, welche in der Sammlung der Schriften dieser Gesellschaft*) erschienen sind. Die Beobachtungen wurden in der Nähe der grössten Digressionen des Satelliten mit den Aequatorealinstrumenten der beiden Sternwarten gemacht. Sie beabsichtigten die Erfindung der Unterschiede der geraden Aufsteigung des Satelliten und beider Ränder des Planeten; sie wurden an 35 Tagen, an jedem durch 24 bis 36 einzelne Durchgänge durch einen Faden, wiederholt. Dass nichts versäumt wurde, was ihr Resultat von dem Einflusse des einen oder anderen zweifelhaften Elements befreien konnte, darf ich hier nicht weiter ausführen, da sie von einem sorgfältigen und einsichtsvollen Astronomen gemacht worden sind; die einzelnen aus ihnen gezogenen Resultate werde ich aber hierhersetzen. Von 12 Beobachtungen des ersten Jahres (1832) hat Herr AIRY 2 ausgeschlossen; die übrigen haben ergeben:

10	Beobb.	von	1832	$\mu = 1048{,}70$
6	„	„	1833	1047,68
5	„	„	1834	1048,84
12	„	„	1835 und 36	1045,29

In der Berechnung der Beobachtungen von 1832 ist der Einfluss der Strahlenbrechung vernachlässigt worden, und Herr AIRY bemerkt, dass ihre Berücksichtigung den Werth von μ vergrössern würde. Die Ursache der im Ganzen stattfindenden Verminderung der nach und nach erhaltenen Werthe von μ sucht er in einem kleinen Fehler der aus der Laplace'schen Theorie des Satelliten entlehnten Neigung der Ebene seiner Bahn beziehungsweise auf die Ebene des Erdäquators. Um das Resultat aller Beobachtungen zu erhalten, setzt er das Gewicht der aus den Beobachtungen der einzelnen Jahre gezogenen Resultate, einer auf die Berücksichtigung verschiedenartiger Umstände gegründeten Schätzung gemäss, resp. = 2, 2, 3, 8 und findet dadurch endlich:

$$\mu = 1046{,}77.$$

Obgleich eine neue Berechnung dieser Beobachtungen und die vollständige Entwickelung des Einflusses der Lage der Ebene der Satellitenbahn auf ihr Resultat, wünschenswerth erscheinen, so kann man seine sehr nahe Richtigkeit doch nicht bezweifeln. Wenn nach der Bekanntmachung des Resultats des Herrn AIRY, noch andere Beobachtungen der Jupiterssatelliten, in Beziehung auf die Erfindung von μ, ein Interesse haben sollen, so kann es nicht mehr in einer beträchtlichen Verbesserung des aus den ersteren abgeleiteten Werthes, sondern nur in ihrer Ausdehnung auf alle vier Satelliten, und in der Anwendung von Beobachtungsmitteln, welche noch grössere Sicherheit verheissen als die Aequatorealinstrumente, gesucht werden.

Auch Herr SANTINI in Padua hat, an 16 Tagen des Jahres 1835, eine Reihe von Messungen der Entfernung des Satelliten IV von beiden Rändern des Jupiter gemacht, und das daraus gezogene Resultat, nämlich

$$\mu = 1051{,}9$$

in dem XXI. Theile der Schriften der Gesellschaft der Wissenschaften in Modena, mit allen Einzelnheiten der Untersuchung, bekannt gemacht. Zu den Beobachtungen wurde ein Mikrometer von AMICI angewandt, welches aus einer durchschnittenen, zwischen dem Objective und dem Oculare des Fernrohrs angebrachten Linse besteht, also, wie das Heliometer, auf dem Principe der Verdoppelung der Bilder beruhet. Die Anwendung eines solchen Mikrometers ist auf weit kleinere Winkel beschränkt als die des Heliometers, weshalb die Bestimmung des Verhältnisses seiner unmittelbaren Angaben zu Theilen des grössten Kreises auch nur mit geringerer Sicherheit erlangt werden kann. Dieses ist von geringem Nachtheile für die Messung sehr kleiner Entfernungen; allein es führt grosse Schwierigkeiten herbei, wenn Entfernungen, welche sich der Grenze der mit dem Instrumente messbaren nähern, mit grösserer Sicherheit gemessen werden sollen, als andere Apparate gewähren, deren Angabe ähnlich grosser Winkel die Grundlage der Bestimmung des Verhältnisses ist. Herr SANTINI theilt die Messungen mit, wodurch er den von dem Verfertiger des Instruments näherungsweise angenommenen Werth dieses Verhältnisses geprüft hat; allein die Kleinheit der gemessenen Winkel, deren grösster = 516″,5 ist, berechtigt nicht zu der Erwartung,

*) Bd. VI, VIII, IX, X.

dass dadurch eine bis auf ein Tausendtel des Ganzen gehende Unsicherheit entfernt worden wäre. Ein Mikrometer von der Art des von Herrn SANTINI angewandten, scheint erst in Folge sehr schwieriger Untersuchungen über den in Secunden des grössten Kreises ausgedrückten Werth seiner Angaben, der Bestimmung der mittleren Entfernung des Satelliten IV des Jupiter eine Sicherheit gewähren zu können, welche der gleich ist, die man durch die von Herrn AIRY angewandte, die Zeit zum Maasse machende Methode erlangen kann.

Meine eigenen, der folgenden Untersuchung zum Grunde liegenden Beobachtungen der Jupiterssatelliten sind von der Ansicht veranlasst worden, dass es wesentlich ist, zur Messung kleiner Entfernungen an der Himmelskugel ein Instrument anzuwenden, dessen Beschränkung auf solche Anwendungen den Vortheil seiner grösseren Genauigkeit hervorbringt. Der Wunsch, den Theil der Astronomie, welcher von der relativen Beobachtung einander naher Punkte an der Himmelskugel ausgehen muss, wieder in die Stellung zu anderen ihrer Theile zu versetzen, welche er nie hätte verlieren sollen, war der Anlass zur Erwerbung des grossen Heliometers, welches die Königsberger Sternwarte ziert; und unter den Gegenständen, zu deren Beobachtung es angewandt werden sollte, nehmen die Satelliten des Saturns und des Jupiters einen vorzüglichen Platz ein. Ich fing daher die Beobachtungen der ersteren gleich nach der Aufstellung des Instruments im Jahre 1830 an; die der letzteren im Jahre 1832. Nach dem gemachten Versuche dieser Anwendungen bezweifle ich eben so wenig als vor demselben, dass die grösste Vollständigkeit und Sicherheit aller ähnlichen Beobachtungen, wenigstens bis jetzt, nur durch die Anwendung eines solchen Instruments erlangt werden kann.

Um indessen den Vortheil, welchen die Genauigkeit der einzelnen Beobachtungen gewährte, auch dem Endresultate der Untersuchung aneignen zu können, wurde nothwendig, der Bestimmung der Reductionselemente der Messungen eine jener Genauigkeit angemessene Sicherheit zu geben. Hierdurch wurden die Vorarbeiten erforderlich, welche der erste Band dieses Werks enthält [s. Abhh. 70, 71, 167, 46, 51, 103]. Ich glaube den Einfluss der Unsicherheit, welche nach diesen Vorarbeiten in den Reductionen der Beobachtungen noch übrig bleiben mag, nicht grösser als einige Zehntel einer Einheit des Werthes von μ schätzen zu dürfen.

1.

Meine Beobachtungen der Jupiterssatelliten wurden durch die Aussicht veranlasst, durch das Heliometer der Königsberger Sternwarte eine Sicherheit erlangen zu können, welche in Beziehung auf die Bestimmung der Masse des ganzen Jupiterssystems nichts Wesentliches zu wünschen übrig lassen würde. An ihrem Anfange, im J. 1832, beabsichtigte ich, die Entfernungen der Satelliten von dem Planeten nur in der Nähe ihrer Maxima zu messen. Allein wenn auch auf diese Zeiten beschränkte Beobachtungen den Vortheil gewähren, am wenigsten abhängig von der Kenntniss der Elemente der Bewegungen der Satelliten, zur Erfindung der gesuchten mittleren Entfernungen zu führen, so wurde doch bald klar, dass es vortheilhafter sein würde, jede Beschränkung aufzugeben und Messungen zu machen, immer wenn die Heiterkeit des Himmels es erlauben würde. Der unsichere Zustand des Königsberger Himmels würde nämlich viele Jahre nothwendig gemacht haben, um die gewünschte beträchtliche Zahl der Beobachtungen der grössten Elongationen jedes der Satelliten zusammenzubringen; wogegen man ungleich schneller ein genügendes Gewicht der Bestimmung der mittleren Entfernungen erwarten durfte, wenn man die Satelliten ohne Rücksicht auf ihre Stellung gegen den Planeten beobachtete, und dadurch nicht sowohl die unmittelbare Vermeidung der Einflüsse mangelhaft bekannter Elemente ihrer Bewegungen, als die Elimination derselben aus dem letzten Resultate suchte. Dieser Ansicht gemäss wurde der Beobachtungsplan im Jahre 1833 erweitert; allein 1834 erweiterte ich ihn noch mehr, indem ich ihn auch auf die Positionswinkel ausdehnte, welche zwar keinen Beitrag zu der Bestimmung der Masse des Jupitersystems liefern, aber die Sicherheit der Elimination des Einflusses der Elemente der Bewegungen der Satelliten auf ihre verlangten mittleren Entfernungen vom Jupiter vermehren können. In der letzteren Beziehung wird das was ich in dieser Abhandlung mittheilen werde, wahrscheinlich die Ueberzeugung hervorbringen, dass ähnliche Beobachtungen eine sicherere Bestimmung der Lage der Ebenen der Satellitenbahnen gewähren können, als die Beobachtungen der Finsternisse.

Jede meiner Messungen der Entfernung beruhet auf 8 Einstellungen der Entfernung. Während die Objectivhälfte I und das Ocular fortwährend so gestellt waren, dass ihre Axen mit der Heliometeraxe zusammenfielen, wurde die Hälfte II nach einer oder der anderen Seite so weit entfernt und das ganze Objectiv so gedrehet, dass das von der einen Objectivhälfte gemachte Bild des zu beobachtenden Satelliten in die Mitte des von der anderen gemachten Bildes der Scheibe des Planeten gebracht wurde, so weit man nämlich diese Mitte durch blosse Schätzung beurtheilen konnte. Dann wurde die

Mikrometerschraube der Objectivhälfte II angewandt, um das Bild des Satelliten erst an den einen, dann an den anderen Rand des Planeten zu bringen und gleich darauf diese Beobachtungen, in umgekehrter Ordnung, zu wiederholen. Dieses ist die erste Hälfte der Messung; die zweite ist ihr durchaus gleich, mit dem Unterschiede jedoch, dass zwischen beiden die Axe der Hälfte II durch die Heliometeraxe hindurch bewegt, auch die Bilder aufs Neue central gestellt wurden. Dass jede Einstellung der Mikrometerschraube abgelesen und die Zeit jeder Beobachtung bemerkt wurde, versteht sich von selbst. Von dieser Anordnung war eine Folge, dass die arithmetischen Mittel der vier Beobachtungszeiten des einen und des anderen Randes, wenn nicht etwa Wolken oder zufällige Unterbrechungen eine Störung verursachten, stets bis auf einen, meistens kleinen, Bruch einer Minute zusammentrafen.

Wenn auch der Positionswinkel beobachtet wurde, wurde meistens nach der Beendigung der ersten Hälfte der Messung der Entfernung und vor dem Anfange der zweiten, das Bild des Satelliten, durch Drehung des ganzen Objectivs, aus seiner centralen Stellung an den nördlichen, dann an den südlichen Rand der Scheibe gebracht, welches in jeder der beiden Stellungen der Objectivhälfte II nur einmal geschah; so dass auch jede Beobachtung des Positionswinkels nur auf 4, nicht wie die Messung der Entfernung auf 8, Einstellungen und Ablesungen des Instruments beruhet.

Die Art der Reduction der gemachten Beobachtachtungen und die Elemente worauf sie beruhet, habe ich in der zweiten Abhandlung des ersten Bandes dieses Werks so vollständig mitgetheilt, dass hier nichts weiter davon gesagt zu werden braucht [s. Abh. 71]. Der Einfluss der Strahlenbrechung ist nach den Formeln des 6. §'s der dritten Abh. [s. p. 346] und den ihr angehängten Tafeln berechnet; der Einfluss der unvollständigen Erleuchtung der Planetenscheibe nach den in der sechsten Abhandlung §. 13 gegebenen Vorschriften [s. Abh. 51].

[Es folgen nun in §§ 2—4 die Messungen und Reduction der Entfernungen der Satelliten I—III, in §§ 5—7 diejenigen der Positions-Winkel der Satelliten III und IV und der Entfernungen des Satelliten IV.]

8.

Um die (jetzt angeführten) Beobachtungen der vier Satelliten des Jupiter mit den unbekannten Grössen, welche dadurch bestimmt werden sollen, in Verbindung zu bringen, muss man Tafeln besitzen, welche die Oerter und Entfernungen der Satelliten, bezogen auf den Mittelpunkt des Planeten, angeben. Das Bedürfniss solcher Tafeln ist bisher nur nicht hervorgetreten, weil man kaum etwas Anderes an den Satelliten beobachtet hat, als ihre Finsternisse; jetzt aber habe ich sie entworfen und werde sie an dem Ende dieser Abhandlung bekannt machen.

Ueber die Wahl der Elemente dieser Tafeln habe ich mich, trotz der schönen Laplace'schen Untersuchung, welche der 4. Band der Mécanique Céleste enthält, in einiger Unsicherheit befunden, welche theils von vorhandenen Rechnungs- oder Druckfehlern herrührt, theils von der Unzulänglichkeit der Angaben erzeugt wird, welche Herr DAMOISEAU von den Veränderungen der Elemente ertheilt, auf deren neuer Bestimmung seine — 1836 erschienenen — Tafeln beruhen. Ich fürchte, dass man, um die Formeln für die Bewegungen der Jupiterssatelliten wieder theoretisch ganz zusammenhängend zu machen, gezwungen sein wird, die unvollständig dargestellten Resultate des Herrn DAMOISEAU zu verlassen und bis zu einer neuen Untersuchung der Elemente zurückzugehen. Indessen werden die jetzt übrigbleibenden Unsicherheiten nicht von so grossem Belange sein, dass sie die Anwendung der Tafeln zur Reduction der gemachten Beobachtungen wesentlich beeinträchtigen könnten.

Ich werde zuerst die Ausdrücke der wahren Längen v, v', v'', v''' der Satelliten in ihren Bahnen mittheilen, welche die Mécanique Céleste (Liv. VIII. Chap. XI—XIV) enthält. Die Bezeichnungen sind folgende:

$\vartheta, \vartheta', \vartheta'', \vartheta'''$ ... mittlere Längen der Satelliten,
$\omega, \omega', \omega'', \omega'''$ ... Längen ihrer Jupitersnähen,
$\Lambda, \Lambda', \Lambda'', \Lambda'''$ ... Längen ihrer aufsteigenden Knoten auf der Ebene der Jupiterbahn,
V und Π ..... mittlere Anomalie und Länge des Jupiter,
Ψ ..... Länge des aufsteigenden Knotens des Aequators des Jupiter auf seiner Bahn.

Die Eintheilung des Quadranten ist die hunderttheilige.

$$
\begin{aligned}
v = \vartheta &+ 40''{,}69 \sin(\vartheta - \omega'') \\
&+ 19{,}11 \sin(\vartheta - \omega''') \\
&- 178{,}41 \sin(\vartheta - 2\vartheta' + \omega'') \\
&- 76{,}36 \sin(\vartheta - 2\vartheta' + \omega''') \\
&- 43{,}56 \sin(\vartheta - \vartheta') + 5050''{,}59 \sin 2(\vartheta - \vartheta') \\
&\qquad + 16{,}46 \sin 3(\vartheta - \vartheta') \\
&\qquad + 3{,}76 \sin 4(\vartheta - \vartheta') \\
&\qquad + 1{,}26 \sin 5(\vartheta - \vartheta') \\
&- 19{,}41 \sin(\vartheta - \vartheta'') + 16''{,}39 \sin 2(\vartheta - \vartheta'') \\
&\qquad + 1{,}68 \sin 3(\vartheta - \vartheta'')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v' = \vartheta' &+ 367''{,}95 \sin(\vartheta' - \omega'') \\
&+ 160{,}62 \sin(\vartheta' - \omega''') \\
&+ 566{,}22 \sin(\vartheta - 2\vartheta' + \omega'') \\
&+ 254{,}97 \sin(\vartheta - 2\vartheta' + \omega''') \\
&- 111{,}34 \sin V \\
&- 163{,}29 \sin(\vartheta' - \vartheta'') + 11920''{,}67 \sin 2(\vartheta' - \vartheta'') \\
&\qquad + 60{,}96 \sin 3(\vartheta' - \vartheta'') \\
&\qquad + 74{,}61 \sin 4(\vartheta' - \vartheta'') \\
&\qquad + 4{,}66 \sin 5(\vartheta' - \vartheta'') \\
&\qquad + 3{,}66 \sin 6(\vartheta' - \vartheta'') \\
&- 5{,}28 \sin(\vartheta' - \vartheta''') + 4''{,}62 \sin 2(\vartheta' - \vartheta''')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v'' = \vartheta'' &+ 1709''{,}05 \sin(\vartheta'' - \omega'') \\
&+ 756{,}61 \sin(\vartheta'' - \omega''') \\
&- 95{,}18 \sin(\vartheta - 2\vartheta' + \omega'') \\
&- 43{,}58 \sin(\vartheta - 2\vartheta' + \omega''') \\
&- 147{,}42 \sin V \\
&+ 5{,}29 \sin(\vartheta'' - 2\Pi + \omega'') \\
&+ 2{,}34 \sin(\vartheta'' - 2\Pi + \omega''') \\
&+ 2{,}39 \sin 2(\vartheta'' - \Pi) \\
&- 808{,}20 \sin(\vartheta' - \vartheta'') - 11''{,}84 \sin 2(\vartheta' - \vartheta'') \\
&\qquad - 6{,}58 \sin 3(\vartheta' - \vartheta'') \\
&- 45{,}29 \sin(\vartheta'' - \vartheta''') + 154{,}47 \sin 2(\vartheta'' - \vartheta''') \\
&\qquad + 10{,}86 \sin 3(\vartheta'' - \vartheta''') \\
&\qquad + 2{,}53 \sin 4(\vartheta'' - \vartheta''')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v''' = \vartheta''' &- 220''{,}73 \sin(\vartheta''' - \omega'') \\
&+ 9265{,}56 \sin(\vartheta''' - \omega''') + 42''{,}14 \sin 2(\vartheta''' - \omega''') \\
&\qquad + 0{,}27 \sin 3(\vartheta''' - \omega''') \\
&- 349{,}79 \sin V \\
&+ 12{,}99 \sin 2(\vartheta''' - \Pi) \\
&+ 66{,}94 \sin(\vartheta''' - 2\Pi + \omega''') \\
&+ 49{,}51 \sin(\Lambda''' - \Psi) \\
&- 31{,}36 \sin(\vartheta'' - \vartheta''') - 14''{,}12 \sin 2(\vartheta'' - \vartheta''') \\
&\qquad - 2{,}95 \sin 3(\vartheta'' - \vartheta''') \\
&\qquad - 0{,}90 \sin 4(\vartheta'' - \vartheta''') \\
&\qquad - 0{,}33 \sin 5(\vartheta'' - \vartheta''')
\end{aligned}
$$

Die Formel für v weicht von der in der Méc. Cél. befindlichen dadurch ab, dass LAPLACE auch die Glieder der letzten Zeile von dem Argumente $\vartheta - \vartheta'$ der vorletzten abhängig gemacht hat, indem er

$$\vartheta - \vartheta'' = \tfrac{3}{2}(\vartheta - \vartheta') + 100^0$$

annimmt. Wirklich ist, der bekannten Relation zwischen den mittleren Bewegungen der drei ersten Jupiterssatelliten zufolge:

$$2(\vartheta - \vartheta'') = 3(\vartheta - \vartheta') + 200^0,$$

allein man kann daraus nur

$$\vartheta - \vartheta'' = \tfrac{3}{2}(\vartheta - \vartheta') \pm 100^0,$$

nicht aber den unzweideutigen, in der Méc. Cél. angewandten Ausdruck folgern. Man könnte alle Glieder der beiden letzten Zeilen unzweideutig durch $\vartheta' - \vartheta''$ ausdrücken; allein ich halte dieses nicht für bequem, indem dadurch das grosse, in $\sin 2(\vartheta - \vartheta')$ multiplicirte Glied von $\sin 4(\vartheta' - \vartheta'')$ abhängig werden und daher der Tafel grössere Differenzen geben würde, als für ihre Anwendung angenehm ist. Ich habe daher vorgezogen, die von beiden Argumenten $\vartheta - \vartheta'$ und $\vartheta - \vartheta''$ abhängigen Glieder unvereinigt in Tafeln zu bringen. Das in $\sin 5(\vartheta - \vartheta')$ multiplicirte Glied hat in der Méc. Cél. den Coefficienten $1''{,}58$, stimmt aber dann nicht mit der Angabe p. 89 überein, aus welcher es, durch einen Schreibfehler in der ersten Decimale der Logarithmen, irrig abgeleitet zu sein scheint. In der Formel für v' hat das vierte Glied das Argument $\vartheta' - 2\vartheta'' + \omega'''$, sollte also, auf das von mir angewandte, um zwei Quadranten davon verschiedene Argument bezogen, das entgegengesetzte Zeichen erhalten; ich halte dieses für einen Druckfehler, den sowohl Herr DELAMBRE als auch Herr DAMOISEAU in ihren Tafeln schon verbessert haben. Die Verschiedenheit des Zeichens des dritten und vierten Gliedes der Formel für v'' erklärt sich aus der Abänderung des Arguments. Uebrigens sind die hier angeführten Formeln der Méc. Cél. entsprechend.

Indessen hat Herr DAMOISEAU, aus seiner neuen Untersuchung der Beobachtungen der Finsternisse der Satelliten, neue Bestimmungen sowohl der Massen dieser Satelliten, als auch der übrigen Elemente ihrer Theorie gezogen und dadurch Aenderungen der angeführten Formeln erlangt. Es ist zu bedauern, dass er diese geänderten Formeln in der Einleitung seiner Tafeln nicht in derselben Gestalt mittheilt, in welcher die Méc. Cél. die ursprünglichen enthält. Ich werde dieses, insoweit es ohne gänzliche Wiederholung der Untersuchung angeht, zu ergänzen suchen. Die Massen der Satelliten findet Herr DAMOISEAU:

m	$= 0{,}0000168770$	Méc. Cél.	$0{,}0000173281$
m'	$= 0{,}0000232270$	„ „	$0{,}0000232355$
m''	$= 0{,}0000884370$	„ „	$0{,}0000884972$
m'''	$= 0{,}0000424751$	„ „	$0{,}0000426591$

Seine Angaben der Einflüsse, welche die verschiedenen Glieder der Formeln für v, v', v'', v''' auf die Zeiten der Finsternisse äussern, zeigen, dass er jene folgendermassen geändert hat:

v ... Arg.	$= \vartheta - \vartheta' + \omega''$	Coeff.	$= -\ 168''{,}48$
	$\vartheta - 2\vartheta' + \omega'''$	„	$-\ 73{,}79$
v' ... „	$2(\vartheta' - \vartheta'')$	„	$+ 11806{,}10$
	$\vartheta - 2\vartheta' + \omega''$	„	$+\ 554{,}15$
	$\vartheta - 2\vartheta' + \omega'''$	„	$+\ 248{,}42$

v'' ... Arg. $=$	$\vartheta''-\omega''$	Coeff. $=+$	1675,″25
	$\vartheta''-\omega'''$	„ $+$	422,46
	$\vartheta-2\vartheta'+\omega''$	„ $-$	85,01
	$\vartheta-2\vartheta'+\omega'''$	„ $-$	38,32
v''' ... „	$\vartheta'''-\omega'''$	„ $+$	9222,50
	$2(\vartheta'''-\omega''')$	„ $+$	24,31
	$\vartheta''-\vartheta'''$	„ $-$	28,31

Andere Aenderungen sind von kleinerem Belange. Die bedeutendste von allen ist die des Coefficienten von $\sin(\vartheta''-\omega''')$ im Ausdrucke von v''. Nimmt man diese Veränderungen an, setzt man in den Ausdrücken p. 89 bis 94 der Méc. Cél. die Damoiseau'schen Werthe der Massen voraus und drückt man die Formeln der Sexagesimaleintheilung des Kreises gemäss aus, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
v = \vartheta &+ 13,''18\sin(\vartheta-\omega'')\\
&+ 6,19\sin(\vartheta-\omega''')\\
&- 54,59\sin(\vartheta-2\vartheta'+\omega'')\\
&- 23,91\sin(\vartheta-2\vartheta'+\omega''')\\
&- 14,11\sin(\vartheta-\vartheta') + 1635,''80\sin 2(\vartheta-\vartheta')\\
&\qquad + 5,33\sin 3(\vartheta-\vartheta')\\
&\qquad + 1,22\sin 4(\vartheta-\vartheta')\\
&\qquad + 0,41\sin 5(\vartheta-\vartheta')\\
&- 6,55\sin(\vartheta-\vartheta'') + 5,53\sin 2(\vartheta-\vartheta'')\\
&\qquad + 0,57\sin 3(\vartheta-\vartheta'')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v' = \vartheta' &+ 119,''22\sin(\vartheta'-\omega'')\\
&+ 52,04\sin(\vartheta'-\omega''')\\
&+ 179,54\sin(\vartheta-2\vartheta'+\omega'')\\
&+ 80,49\sin(\vartheta-2\vartheta'+\omega''')\\
&- 36,07\sin V\\
&- 52,87\sin(\vartheta'-\vartheta'') + 3825,''18\sin 2(\vartheta'-\vartheta'')\\
&\qquad + 19,73\sin 3(\vartheta'-\vartheta'')\\
&\qquad + 24,25\sin 4(\vartheta'-\vartheta'')\\
&\qquad + 1,51\sin 5(\vartheta'-\vartheta'')\\
&\qquad + 1,18\sin 6(\vartheta'-\vartheta'')\\
&- 1,70\sin(\vartheta'-\vartheta''') + 1,''49\sin 2(\vartheta'-\vartheta''')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v'' = \vartheta'' &+ 542,''78\sin(\vartheta''-\omega'')\\
&+ 136,88\sin(\vartheta''-\omega''')\\
&- 27,54\sin(\vartheta-2\vartheta'+\omega'')\\
&- 12,42\sin(\vartheta-2\vartheta'+\omega''')\\
&- 47,76\sin V\\
&+ 1,71\sin(\vartheta''-2\Pi+\omega'')\\
&+ 0,76\sin(\vartheta''-2\Pi+\omega''')\\
&+ 0,77\sin 2(\vartheta''-\Pi)\\
&- 261,64\sin(\vartheta'-\vartheta'') - 3,''83\sin 2(\vartheta'-\vartheta'')\\
&\qquad - 2,10\sin 3(\vartheta'-\vartheta'')\\
&- 14,61\sin(\vartheta''-\vartheta''') + 49,83\sin 2(\vartheta''-\vartheta''')\\
&\qquad + 3,50\sin 3(\vartheta''-\vartheta''')\\
&\qquad + 0,82\sin 4(\vartheta''-\vartheta''')\\
&\qquad + 0,26\sin 5(\vartheta''-\vartheta''')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v''' = \vartheta''' &- 71,''52\sin(\vartheta'''-\omega'')\\
&+ 2988,09\sin(\vartheta'''-\omega''') + 13,''53\sin 2(\vartheta'''-\omega''')\\
&- 113,33\sin V\\
&+ 4,21\sin 2(\vartheta'''-\Pi)\\
&+ 21,69\sin(\vartheta'''-2\Pi+\omega''')\\
&+ 16,04\sin(\Lambda'''-\Psi)\\
&- 10,15\sin(\vartheta''-\vartheta''') - 4,''57\sin 2(\vartheta''-\vartheta''')\\
&\qquad - 0,95\sin 3(\vartheta''-\vartheta''')\\
&\qquad - 0,29\sin 4(\vartheta''-\vartheta''')\\
&\qquad - 0,11\sin 5(\vartheta''-\vartheta''')
\end{aligned}
$$

Dieses sind die Formeln für die Längen der Satelliten, nach welchen ich die Tafeln berechnet habe. Jedoch habe ich den von $\vartheta'-\vartheta'''$ abhängigen Theil des Ausdrucks von v' und die von $\vartheta''-2\Pi+\omega''$, $\vartheta''-2\Pi+\omega'''$, $\vartheta''-\Pi$ abhängigen Theile des Ausdrucks von v'', ihres unerheblichen Einflusses wegen, weggelassen.

9.

In den Formeln für die Radienvectoren (Méc. Cél. IV. p. 90—94) sind Irrthümer oder Verwechselungen vorgefallen, indem ihre nichtperiodischen Theile sämmtlich unrichtig sind. Herr AIRY hat dieses schon bemerkt. Ich habe neu gerechnet und dadurch gefunden, dass die Zahlen der Méc. Cél. folgendermassen verbessert werden müssen:

		Méc. Cél.
r	$-0,00004127\,m'$	$+0,00008486\,m'$
	$-0,00000702\,m''$	$+0,00000703\,m''$
	$-0,00000113\,m'''$	$+0,00000113\,m'''$
	$-0,00000016$	$+0,00000095$
r'	$+0,00044579\,m$	$-0,00044608\,m$
	$-0,00006493\,m''$	$+0,00006497\,m''$
	$-0,00000797\,m'''$	$+0,00000798\,m'''$
	$-0,00000102$	$+0,00000609$
r''	$+0,00054783\,m$	$-0,00054798\,m$
	$+0,00070921\,m'$	$-0,00070942\,m'$
	$-0,00006848\,m'''$	$+0,00006850\,m'''$
	$-0,00000657$	$+0,00003944$
r'''	$+0,00088135\,m$	$-0,00088152\,m$
	$+0,00093965\,m'$	$-0,00093981\,m'$
	$+0,00114432\,m''$	$-0,00114443\,m''$
	$-0,00006293$	$+0,00037741$

In diesen Ausdrücken der nichtperiodischen Glieder der Radienvectoren bedeuten m, m', m'', m''' die mit 10000 multiplicirten Massen der Satelliten. Setzt man für diese die von Herrn DAMOISEAU gefundenen Werthe, wendet man dieselben Werthe zur Berechnung der Coefficienten der periodischen Glieder (Méc. Cél. IV. p. 90—94) an, fügt man die unmittelbaren Einflüsse der Excentricitäten der Bahnen hinzu und reducirt man endlich Alles, durch Division mit den in der Méc. Cél. angenommenen Werthen der mittleren Entfernungen, nämlich:

5,698491
9,066548
14,461893
25,43590

auf die mittleren Entfernungen = 1, so erhält man folgende Formeln:

$$\frac{r}{a} = 1 - 0{,}0000029$$
$$- 0{,}0000320 \cos(\vartheta - \omega'')$$
$$- 0{,}0000150 \cos(\vartheta - \omega''')$$
$$+ 0{,}0000190 \cos(\vartheta - \vartheta')$$
$$- 0{,}0039799 \cos 2(\vartheta - \vartheta')$$
$$- 0{,}0000167 \cos 3(\vartheta - \vartheta')$$
$$- 0{,}0000044 \cos 4(\vartheta - \vartheta')$$
$$- 0{,}0000016 \cos 5(\vartheta - \vartheta')$$
$$+ 0{,}0000121 \cos(\vartheta - \vartheta'')$$
$$- 0{,}0000165 \cos 2(\vartheta - \vartheta'')$$
$$- 0{,}0000020 \cos 3(\vartheta - \vartheta'')$$

$$\frac{r'}{a'} = 1 + 0{,}0000015$$
$$- 0{,}0002890 \cos(\vartheta' - \omega'')$$
$$- 0{,}0001262 \cos(\vartheta' - \omega''')$$
$$+ 0{,}0000715 \cos(\vartheta' - \vartheta'')$$
$$- 0{,}0094014 \cos 2(\vartheta' - \vartheta'')$$
$$- 0{,}0000618 \cos 3(\vartheta' - \vartheta'')$$
$$- 0{,}0000053 \cos 4(\vartheta' - \vartheta'')$$
$$- 0{,}0000059 \cos 5(\vartheta' - \vartheta'')$$
$$+ 0{,}0000033 \cos(\vartheta' - \vartheta''')$$
$$- 0{,}0000047 \cos 2(\vartheta' - \vartheta''')$$
$$- 0{,}0000005 \cos 3(\vartheta' - \vartheta''')$$

$$\frac{r''}{a''} = 1 + 0{,}0000153$$
$$- 0{,}0013157 \cos(\vartheta'' - \omega'')$$
$$- 0{,}0003318 \cos(\vartheta'' - \omega''')$$
$$+ 0{,}0006646 \cos(\vartheta' - \vartheta'')$$
$$+ 0{,}0000147 \cos 2(\vartheta' - \vartheta'')$$
$$- 0{,}0000034 \cos 3(\vartheta' - \vartheta'')$$
$$+ 0{,}0000012 \cos 4(\vartheta' - \vartheta'')$$
$$+ 0{,}0000221 \cos(\vartheta'' - \vartheta''')$$
$$- 0{,}0001321 \cos 2(\vartheta'' - \vartheta''')$$
$$- 0{,}0000117 \cos 3(\vartheta'' - \vartheta''')$$
$$- 0{,}0000031 \cos 4(\vartheta'' - \vartheta''')$$
$$- 0{,}0000010 \cos 5(\vartheta'' - \vartheta''')$$

$$\frac{r'''}{a'''} = 1 + 0{,}0000517$$
$$+ 0{,}0001734 \cos(\vartheta''' - \omega'')$$
$$- 0{,}0072433 \cos(\vartheta''' - \omega''')$$
$$- 0{,}0000262 \cos 2(\vartheta''' - \omega''')$$
$$- 0{,}0000148 \cos 2(\vartheta''' - \Pi)$$
$$+ 0{,}0001134 \cos(\vartheta'' - \vartheta''')$$
$$+ 0{,}0000201 \cos 2(\vartheta'' - \vartheta''')$$
$$+ 0{,}0000047 \cos 3(\vartheta'' - \vartheta''')$$

In den Tafeln ist der von $\vartheta' - \vartheta'''$ abhängige Theil des Ausdrucks von $\frac{r'}{a'}$ weggelassen.

10.

Für die Breiten über der Ebene der Jupitersbahn s, s', s'', s''' sind in der Méc. Cél. folgende Formeln gegeben, in welchen U die heliocentrische Länge des Jupiters bezeichnet:

$$s = 3{,}^{\circ}43320 \sin(v - \Psi)$$
$$- 0{,}010504 \sin(v - \Lambda')$$
$$- 0{,}002549 \sin(v - \Lambda'')$$
$$+ 0{,}000526 \sin(v - 2U + \Psi)$$

$$s' = 3{,}^{\circ}41507 \sin(v' - \Psi)$$
$$- 0{,}515220 \sin(v' - \Lambda')$$
$$- 0{,}037468 \sin(v' - \Lambda'')$$
$$- 0{,}006488 \sin(v' - \Lambda''')$$
$$+ 0{,}001049 \sin(v' - 2U + \Psi)$$
$$- 0{,}000158 \sin(v' - 2U + \Lambda')$$

$$s'' = 3{,}^{\circ}34213 \sin(v'' - \Psi)$$
$$+ 0{,}017648 \sin(v'' - \Lambda')$$
$$- 0{,}208390 \sin(v'' - \Lambda'')$$
$$- 0{,}034607 \sin(v'' - \Lambda''')$$
$$+ 0{,}002070 \sin(v'' - 2U + \Psi)$$
$$- 0{,}000142 \sin(v'' - 2U + \Lambda'')$$

$$s''' = 2{,}^{\circ}98051 \sin(v''' - \Psi)$$
$$+ 0{,}000480 \sin(v''' - \Lambda')$$
$$+ 0{,}044893 \sin(v''' - \Lambda'')$$
$$- 0{,}277160 \sin(v''' - \Lambda''')$$
$$+ 0{,}004315 \sin(v''' - 2U + \Psi)$$
$$- 0{,}000401 \sin(v''' - 2U + \Lambda''')$$

Die Lage des Jupitersäquators gegen die Jupitersbahn, von welcher die Hauptglieder dieser Formeln grösstentheils abhängen, wird in der Méc. Cél., nach DELAMBRE'S Untersuchung folgendermassen angenommen:

Länge des aufst. Knotens $\Psi = 348{,}^{\circ}62129 + t.\,153{,}''8$
Neigung . . . . . $3{,}43219 + t.\ 0{,}''07035$

in welchen Formeln die Zeit t in Julianischen Jahren, von 1750 an, gezählt wird.

Herr DAMOISEAU hat aber auch für die Elemente, von welchen die Breiten abhängig sind, neue Bestimmungen gesucht, und, in Centesimalgraden ausgedrückt, die Länge des aufsteigenden Knotens und die Neigung des Jupitersäquators gegen die Jupitersbahn

$$= 348{,}^{g}18380 \quad \text{und} \quad = 3{,}^{g}40895$$

sowie auch die Coefficienten von

$\sin(v'-\Lambda')$ im Ausdrucke von $s' = -0,^{p}521667$
$\sin(v''-\Lambda'')$ „ „ „ $s'' = -0,186821$
$\sin(v'''-\Lambda''')$ „ „ „ $s''' = -0,261698$

gefunden. Verbindet man diese Bestimmungen mit den Zahlenangaben der Méc. Cél., obgleich diese von den Massen der Satelliten abhängig sind und daher, der neuen Bestimmung derselben gemäss, etwas abgeändert werden sollten, so kann man dadurch neue Formeln für die Breiten der Satelliten erhalten. Man hat nämlich:

1. die von $v-\Psi$, $v'-\Psi$ u. s. w. abhängigen Glieder resp.

$$3,^{p}40895(1-\lambda) = 3,^{p}40698$$
$$3,40895\ (1-\lambda') = 3,38898$$
$$3,40895\ (1-\lambda'') = 3,31661$$
$$3,40895\ (1-\lambda''') = 2,95775$$

wo (Méc. Cél. IV. p. 131)

$$\lambda = 0,00057879$$
$$\lambda' = 0,00585888$$
$$\lambda'' = 0,02708801$$
$$\lambda''' = 0,13235804$$

angenommen sind.

2. Die von $v-\Lambda'$, $v'-\Lambda'$ u. s. w. abhängigen Glieder:

$$-0,^{p}521667\,\frac{l}{l'} = -0,01085$$
$$-0,521667 = -0,52167$$
$$-0,521667\,\frac{l''}{l'} = +0,01787$$
$$-0,521667\,\frac{l'''}{l'} = +0,00049$$

wo

$\frac{l}{l'} = +0,020794$ M. C. IV. p. 167
$\frac{l''}{l'} = -0,034253$ „ „ p. 155
$\frac{l'''}{l'} = -0,000931164$ „ „ p. 145

angenommen sind.

3. Die von $v-\Lambda''$, $v''-\Lambda''$ u. s. w. abhängigen Glieder:

$$-0,^{p}186821\,\frac{l}{l''} = -0,00209$$
$$-0,186821\,\frac{l'}{l''} = -0,03065$$
$$-0,186821 = -0,18682$$
$$-0,186821\,\frac{l'''}{l''} = +0,03672$$

wo

$\frac{l}{l''} = +0,011163$ M. C. IV. p. 167
$\frac{l'}{l''} = +0,164053$ „ „ p. 162
$\frac{l'''}{l''} = -0,196565$ „ „ p. 144

angenommen sind.

4. Die von $v-\Lambda'''$, $v'-\Lambda'''$ u. s. w. abhängigen Glieder:

$$-0,^{p}261698\,\frac{l}{l'''} = 0$$
$$-0,261698\,\frac{l'}{l'''} = -0,00613$$
$$-0,261698\,\frac{l''}{l'''} = -0,03268$$
$$-0,261698 = -0,26170$$

wo

$\frac{l}{l'''} = 0$ . . . . . M. C. IV. p. 167
$\frac{l'}{l'''} = +0,023411$ „ „ p. 162
$\frac{l''}{l'''} = +0,124862$ „ „ p. 155

angenommen sind.

Die hierdurch geänderten Formeln für die Breiten der Satelliten, in Sexagesimalsecunden ausgedrückt, sind:

$$\begin{aligned}
s &= 11038,''6\sin(v-\Psi) - 35,''1\sin(v-\Lambda') \\
&\quad - 6,8\sin(v-\Lambda'') \\
&\quad + 1,7\sin(v-2U+\Psi) \\
s' &= 10980,''3\sin(v'-\Psi) - 1690,''2\sin(v'-\Lambda') \\
&\quad - 99,3\sin(v'-\Lambda'') \\
&\quad - 19,9\sin(v'-\Lambda''') \\
&\quad + 3,4\sin(v'-2U+\Psi) \\
&\quad - 0,5\sin(v'-2U+\Lambda') \\
s'' &= 10745,''8\sin(v''-\Psi) + 57,''9\sin(v''-\Lambda') \\
&\quad - 605,3\sin(v''-\Lambda'') \\
&\quad - 105,9\sin(v''-\Lambda''') \\
&\quad + 6,7\sin(v''-2U+\Psi) \\
&\quad - 0,5\sin(v''-2U+\Lambda'') \\
s''' &= 9583,''1\sin(v'''-\Psi) + 1,''6\sin(v'''-\Lambda') \\
&\quad + 119,0\sin(v'''-\Lambda'') \\
&\quad - 847,9\sin(v'''-\Lambda''') \\
&\quad + 14,0\sin(v'''-2U+\Psi) \\
&\quad - 1,3\sin(v'''-2U+\Lambda''')
\end{aligned}$$

In den Tafeln ist das letzte Glied der drei letzten Formeln weggelassen und im vorletzten, statt der wahren Länge U des Jupiters, die mittlere Π angenommen.

11.

Die mittleren Bewegungen, sowohl der Satelliten selbst, als auch der Argumente ihrer Ungleichheiten, werden von Herrn Damoiseau mit der wünschenswerthen Vollständigkeit angegeben. Jedoch habe ich die kleine Aenderung daran angebracht, welche nöthig war, um die mittleren Bewegungen der drei ersten Satelliten der durch die Theorie gegebenen Forderung:

$$\vartheta' - \vartheta = 2(\vartheta'' - \vartheta') + 200^{0}$$

ganz entsprechend zu machen.

Der leichteren Vergleichung mit der Méc. Cél. wegen werde ich die in den Tafeln angewandten Bestimmungen zuerst in hunderttheiligen Graden ausgedrückt mittheilen. Die Zeit t bedeutet die von der Mitternacht zwischen dem 31. Dec. 1749 und dem 1. Jan. 1750 an gezählten Tage.

		Beweg. in einem Julian. Jahre.
ϑ	$= 16^g,68044 + t.226^g,0988815275$	$182^g,61647792$
ϑ'	$= 346,49950 + t.112,6386245255$	$341,25760794$
ϑ''	$= 11,40903 + t.55,9084960245$	$20,57817295$
ϑ'''	$= 366,88637 + t.23,967899367$	$354,27524380$
ω''	$= 349,94182 + t.0,007966809$	$2,90987699$
ω'''	$= 200,48841 + t.0,002164648$	$0,79063768$
Π	$= 4,18149 + t.0,0923659744$	$33,73667215$
$\Pi - V$	$= 11,48840 + t.0,0000482166$	$0,01761111$
Ψ	$= 348,18380 + t.0,0000420996$	$0,01537688$
A'	$= 113,32888 - t.0,036701556$	$-13,40524333$
A''	$= 192,76920 - t.0,007727299$	$-2,82239596$
A'''	$= 309,22284 - t.0,002061698$	$-0,75303519$

Hieraus folgen die in gewöhnlichen Graden und ihren Theilen ausgedrückten Werthe von ϑ, ϑ', ϑ'', ϑ''' für die von 1800 (dem Mittage des 31. Dec. 1799) in Tagen gezählte Zeit t:

		365,25 Tage.
ϑ	$= 109^\circ 15' 53'',658 + t.203^\circ 29' 20'',37615$	$164^\circ 21' 17'',3887$
ϑ'	$= 87\ 4\ 1,715 + t.101\ 22\ 29,14346$	$307\ 7\ 54,6492$
ϑ''	$= 165\ 58\ 5,743 + t.50\ 19\ 3,52712$	$18\ 31\ 13,2795$
ϑ'''	$= 51\ 0\ 45,338 + t.21\ 34\ 15,99395$	$318\ 50\ 51,7899$

Ferner folgen daraus die Argumente der Ungleichheiten der Längen und Radienvectoren, in Hunderteln der ganzen Peripherie ausgedrückt:

		365,25 Tage.
$a = \vartheta - \omega''$	$6,4944 + t.56,5227287$	$44,926650$
$a' = \vartheta' - \omega''$	$0,3284 + t.28,1576644$	$84,586933$
$a'' = \vartheta'' - \omega''$	$22,2454 + t.13,9751323$	$4,417074$
$a''' = \vartheta''' - \omega''$	$90,3132 + t.5,9899831$	$87,841342$
$b = \vartheta - \omega'''$	$70,3468 + t.56,5241792$	$45,456460$
$b' = \vartheta' - \omega'''$	$64,1808 + t.28,1591150$	$85,116743$
$b'' = \vartheta'' - \omega'''$	$86,0978 + t.13,9765828$	$4,946884$
$b''' = \vartheta''' - \omega'''$	$54,1656 + t.5,9914337$	$88,371152$
$c = \vartheta - 2\vartheta' + \omega''$	$5,8377 + t.0,2073998$	$75,752785$
$d = \vartheta - 2\vartheta' + \omega'''$	$41,9853 + t.0,2059493$	$75,222975$
$e = \vartheta - \vartheta'$	$6,1661 + t.28,3650643$	$60,339718$
$e' = \vartheta - \vartheta''$	$84,2491 + t.42,5475964$	$40,509577$
$e'' = \vartheta' - \vartheta''$	$78,0830 + t.14,1825321$	$80,169859$
$e''' = \vartheta'' - \vartheta'''$	$31,9321 + t.7,9851492$	$16,575732$
$f = V$	$19,6385 + t.0,0230794$	$8,429765$
$g = 2(\vartheta''' - \Pi)$	$82,8790 + t.11,9377667$	$60,269286$
$h = \vartheta''' - 2\Pi + \omega'''$	$28,7133 + t.5,9463330$	$71,898134$
$i = \Psi - A'''$	$19,3449 + t.0,0005259$	$0,192103$

Endlich hat man die in gewöhnlichen Graden und ihren Theilen ausgedrückten Werthe der verschiedenen Knotenlängen, wovon die Argumente der Breiten abhängen, gleichfalls für $1800 + t$:

Ψ	$314^\circ\ 3',44 + t.0',002273$	$0^\circ\ 0',8304$
$A = -A'$	$141\ 12,42 + t.1,981884$	$12\ 3,8831$
$B = -A''$	$313\ 30,51 + t.0,417274$	$2\ 32,4094$
$C = -A'''$	$115\ 35,05 + t.0,111332$	$0\ 40,6639$
$D = 2\Pi - \Psi$	$209\ 36,22 + t.9,973252$	$60\ 42,7302$

Ich habe jetzt sämmtliche Elemente der (am Ende dieser Abhandlung befindlichen) Tafeln der Jupitersatelliten mitgetheilt. Ueber diese Tafeln habe ich nur zu bemerken, dass sie sich in den Anfangsmomenten der Jahre, für welche die Epochen der mittleren Bewegungen gelten, von der gebräuchlichen Einrichtung etwas entfernen. Ich habe zwischen gemeinen Jahren und Schaltjahren keinen Unterschied gemacht, sondern statt dessen gefordert, dass an die Zeit, für welche die Tafeln angewandt werden sollen, eine von der Jahreszahl abhängige Veränderung angebracht werde, deren nähere Angabe man auf dem ersten Blatte der Tafeln findet. Ich ziehe diese Einrichtung der gebräuchlichen vor, weil sie das gleichmässige Fortschreiten der Epochen verschiedener Jahre zur Folge hat, ohne diesen Vortheil durch eine Vermehrung der Mühe bei dem Gebrauche der Tafeln zu erkaufen.

[Beispiel der Anwendung der Tafeln.]

12.

Ich werde jetzt mittheilen, wie die aus den Tafeln hervorgehenden Oerter der Satelliten mit den beobachteten Entfernungen und Positionswinkeln verglichen worden sind.

Die scheinbare Entfernung σ eines Satelliten von dem Mittelpunkte des Planeten und sein Positionswinkel p an diesem Punkte sind mit der geraden Aufsteigung und Abweichung α, δ des Planeten und α', δ' des Satelliten durch die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} \cos\sigma &= \sin\delta\sin\delta' + \cos\delta\cos\delta'\cos(\alpha'-\alpha) \\ \sin\sigma\cos p &= \cos\delta\sin\delta' - \sin\delta\cos\delta'\cos(\alpha'-\alpha) \\ \sin\sigma\sin p &= \cos\delta'\sin(\alpha'-\alpha) \end{aligned}\right\} \ldots (1)$$

verbunden. Drückt man aber α', δ' durch r und die aus dem Mittelpunkte des Planeten gesehene gerade Aufsteigung und Abweichung a, d aus, oder schafft man die ersteren durch Substitution der Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \varrho'\cos\delta'\cos\alpha' &= \varrho\cos\delta\cos\alpha + r\cos d\cos a \\ \varrho'\cos\delta'\sin\alpha' &= \varrho\cos\delta\sin\alpha + r\cos d\sin a \\ \varrho'\sin\delta' &= \varrho\sin\delta + r\sin d \end{aligned}$$

in welchen ϱ, ϱ' die Entfernungen des Planeten und des Satelliten von der Erde bedeuten, fort, so verwandeln sich die Formeln (1) in:

$$\left.\begin{aligned}\varrho' \cos\sigma &= \varrho + r[\sin d \sin\delta + \cos d \cos\delta \cos(a-\alpha)]\\ \varrho' \sin\sigma \cos p &= r[\sin d \cos\delta - \cos d \sin\delta \cos(a-\alpha)]\\ \varrho' \sin\sigma \sin p &= r \cos d \sin(a-\alpha)\end{aligned}\right\} (2)$$

Führt man m und M ein, so dass

$$\begin{aligned}\sin m \sin M &= \sin d\\ \sin m \cos M &= \cos d \cos(a-\alpha)\\ \cos m &= \cos d \sin(a-\alpha)\end{aligned}$$

ist, so ziehen sie sich in

$$\begin{aligned}\varrho' \cos\sigma &= \varrho + r \sin m \cos(M-\delta)\\ \varrho' \sin\sigma \cos p &= r \sin m \sin(M-\delta)\\ \varrho' \sin\sigma \sin p &= r \cos m\end{aligned}$$

zusammen und man erhält:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\sigma \cos p &= \frac{r}{R\varrho} \sin m \sin(M-\delta)\\ \operatorname{tg}\sigma \sin p &= \frac{r}{R\varrho} \cos m\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (3)$$

wo R die sehr wenig von 1 verschiedene Grösse

$$1 + \frac{r}{\varrho} \sin m \cos(M-\delta)$$

bedeutet.

Wenn die Länge des aufsteigenden Knotens der Satellitenbahn auf der Jupitersbahn durch N, die Neigung durch I bezeichnet werden; der Ort ihres aufsteigenden Knotens auf dem Aequator durch $N_{,}$, ihre Neigung gegen diesen durch $I_{,}$, die Entfernung des Knotens auf der Jupitersbahn von dem Knoten auf dem Aequator durch D, also die Entfernung des Satelliten von dem letzteren durch $v - N + D$, so gehen die in den Formeln (2) als bekannt vorausgesetzten a, d aus:

$$\left.\begin{aligned}\cos d \cos(a-N_{,}) &= \cos(v-N+D)\\ \cos d \sin(a-N_{,}) &= \sin(v-N+D) \cos I_{,}\\ \sin d &= \sin(v-N+D) \sin I_{,}\end{aligned}\right\} \ldots (4)$$

hervor. Um die Formeln (3) anwenden zu können, muss man also, ausser den aus den Tafeln oder einer Ephemeride des Jupiter zu nehmenden ϱ, α, δ und den aus den Satellitentafeln hervorgehenden r, v, die zur Berechnung von (4) erforderlichen $N_{,}$, $I_{,}$, $D-N$ aus den Lagen der Ebenen der Bahnen des Jupiter und der Satelliten ableiten. Die Breite des Satelliten über der ersteren Bahn braucht man dann nicht aufzusuchen.

Die Länge des aufsteigenden Knotens der Jupitersbahn auf der Ekliptik $= n$, und ihre Neigung $= i$, werden in Herrn BOUVARD's Tafeln, in gewöhnlichen Graden und ihren Theilen ausgedrückt:

für 1750...	$n = 97^\circ 57' 9,''3$;	$i = 1^\circ 19' 2,''81$
„ 1800...	98 25 44,9;	1 18 51,52
„ 1850...	98 54 20,5;	1 18 40,23

angegeben. Verbunden mit der Schiefe der Ekliptik:

für 1755...	$\omega = 23^\circ 28' 17,''65$
„ 1800...	23 27 54,80
„ 1850...	23 27 31,95

ergeben diese Bestimmungen den Ort des aufsteigenden Knotens der Jupitersbahn auf dem Aequator $= n_{,}$, ihre Neigung gegen diesen grössten Kreis $= i$, und die Entfernung ihres aufsteigenden Knotens auf der Ekliptik von dem aufsteigenden Knoten auf dem Aequator $= C$, für

1750	$n_{,} = 3^\circ 17' 49,''32$;	$i_{,} = 23^\circ 19' 25,''50$;	$C = 94^\circ 55' 35,''52$
1800	3 17 14,99;	18 24,49;	95 24 41,63
1850	3 16 39,83;	17 23,66;	95 53 48,59

woraus die Ausdrücke von $n_{,}$, $i_{,}$, $C-n$ für $1800+t$:

$$\begin{aligned}n_{,} &= 3^\circ 17' 14,''99 - t.0,''6949 - tt.0,''000166\\ i_{,} &= 23\ 18\ 24,49 - t.1,2184 + tt.0,000036\\ C-n &= 356\ 58\ 56,73 + t.0,6187 + tt.0,000170\end{aligned}$$

folgen. Diese Bestimmung der Lage der Jupitersbahn gegen den Aequator ist die in meinen Rechnungen angewandte.

Da der Ausdruck der Breite des Satelliten über der Ebene der Jupitersbahn

$$\sin s = \sin I \sin(v-N)$$

ist, und man die Sinus von s und I mit den Bögen verwechseln kann, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}I \sin N &= \text{Angabe der Tafeln für } v = 180^\circ\\ I \cos N &= \text{„ „ „ „ } v = 90^\circ\end{aligned}\right\} \ldots (5)$$

wodurch I und N bekannt werden. $I_{,}$, $N_{,}$, D gehen dann aus folgenden Formeln hervor:

$$\left.\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}I, \sin\tfrac{1}{2}(D-N_{,}+n_{,}) &= \sin\tfrac{1}{2}(i_{,}-I) \sin\tfrac{1}{2}(C+N-n)\\ \sin\tfrac{1}{2}I, \cos\tfrac{1}{2}(D-N_{,}+n_{,}) &= \sin\tfrac{1}{2}(i_{,}+I) \cos\tfrac{1}{2}(C+N-n)\\ \cos\tfrac{1}{2}I, \sin\tfrac{1}{2}(D+N_{,}-n_{,}) &= \cos\tfrac{1}{2}(i_{,}-I) \sin\tfrac{1}{2}(C+N-n)\\ \cos\tfrac{1}{2}I, \cos\tfrac{1}{2}(D+N_{,}-n_{,}) &= \cos\tfrac{1}{2}(i_{,}+I) \cos\tfrac{1}{2}(C+N-n)\end{aligned}\right\} (6)$$

Diese Grössen erfahren sehr langsame periodische Aenderungen, so dass es hinreicht, ihre Werthe von 100 zu 100 Tagen zu berechnen.

Um auch die Nutation nicht zu vernachlässigen, muss man die der Länge $= \Delta\psi$ zu v und n, die der Schiefe der Ekliptik $= \Delta\omega$ zu ω hinzusetzen. Hat man $I_{,}$, $N_{,}$ und D ohne Rücksicht auf die Nutation berechnet, so muss man ihren so gefundenen Werthen hinzusetzen:

$$\left.\begin{aligned}\Delta I_{,} &= \Delta\omega \cos N_{,} - \Delta\psi \sin\omega \sin N_{,}\\ \Delta N_{,} &= -[\Delta\omega \sin N_{,} + \Delta\psi \sin\omega \cos N_{,}] \operatorname{cotg} I_{,}\\ &\qquad + \Delta\psi \cos\omega\\ \Delta D &= [\Delta\omega \sin N_{,} + \Delta\psi \sin\omega \cos N_{,}] \operatorname{cosec} I_{,}\end{aligned}\right\} \ldots (7)$$

13.

Bei der Anwendung dieser Vorschriften zur Vergleichung der aus den Tafeln berechneten Oerter der Satelliten mit den beobachteten Werthen von σ und p, habe ich $\log \varrho$, α, δ aus der in dem Astronomischen Jahrbuche von ENCKE enthaltenen Ephemeride des Jupiter genommen, und zwar für die Zeit wenn das Licht, welches zur Beobachtungszeit auf der Erde anlangte, den Jupiter verliess. Diese Ephemeriden sind für einen Meridian berechnet, dessen Unterschied von dem ersten Meridiane $44^m\,14^s$ östlich ist; wenn die Königsberger mittlere Zeit einer Beobachtung durch t bezeichnet wird, die ihr entsprechende Zeit des ersten Meridians durch $t - 1^h\,12^m\,39^s$, so müssen also $\log \varrho$, α, δ aus den Encke'schen Ephemeriden für die Zeit

$$t - 28^m\,25^s - \varrho.493{,}15$$

genommen werden. In die Satellitentafeln muss man aber mit der Zeit

$$t - 1^h\,12^m\,39^s - \varrho.493{,}15$$

eingehen.

Die Satellitentafeln ergeben nicht unmittelbar r, sondern $\frac{r}{a}$. Ich habe die $\frac{r}{a} = 1$ entsprechenden grössten Elongationen der Satelliten, für die mittlere Entfernung (ϱ) des Planeten, hypothetisch angenommen, nämlich

für I.... $\Delta = 111''{,}7256$
„ II.... $\Delta' = 177{,}7602$
„ III.... $\Delta'' = 283{,}5421$
„ IV.... $\Delta''' = 498{,}7006$

Setzt man die mittlere Entfernung des Planeten, den Bouvard'schen Tafeln zufolge:

$$(\varrho) = 5{,}20273,\ \log(\varrho) = 0{,}7162313,$$

und versteht man, um kein neues Zeichen einführen zu dürfen, unter r den aus den Satellitentafeln genommenen Werth von $\frac{r}{a}$, so folgen die in den Formeln (3) anzuwendenden Werthe von r für:

I.. $r = (\varrho)\sin\Delta\ .r$; $\log\omega(\varrho)\sin\Delta = 2{,}7643840$
II.. $r' = (\varrho)\sin\Delta'\ .r'$; $\log\omega(\varrho)\sin\Delta' = 2{,}9660658$
III.. $r'' = (\varrho)\sin\Delta''.r''$; $\log\omega(\varrho)\sin\Delta'' = 3{,}1688488$
IV.. $r''' = (\varrho)\sin\Delta'''.r'''$; $\log\omega(\varrho)\sin\Delta''' = 3{,}4140707$

[Es folgen die Werthe $D - N$, $\log\cos I_{,}$, $\log\sin I_{,}$, $N_{,}$, für jeden 100ten Tag während der Zeit, in welche die Beobachtungen der Satelliten fallen.]

14.

Indem die Beobachtungen der Satelliten gemacht worden sind, um dadurch Beiträge zur Bestimmung entweder des Elementes Δ, Δ', Δ'', Δ''' allein, oder auch anderer Elemente ihrer Bewegungen zu erhalten, wird die Aufsuchung der Aenderungen nothwendig, welche die berechneten Werthe von σ und p durch Aenderungen dieser Elemente erfahren. Ich werde daher σ und p in Beziehung auf Δ, die mittlere Länge ϑ, $e\sin\omega = \lambda$, $e\cos\omega = \lambda'$, N und I differentiiren.

Substituirt man die Formeln (4) in den Formeln (2) und setzt man σ für $\omega\,\mathrm{tg}\,\sigma$, und Δ für $\omega\sin\Delta$, so erhält man statt der letzteren:

$$\sigma\sin p = \frac{(\varrho)\Delta}{\varrho R}\cdot r\,[\cos I,\cos(\alpha - N_{,})\sin(v - N + D) - \sin(\alpha - N_{,})\cos(v - N + D)]$$

$$\sigma\cos p = \frac{(\varrho)\Delta}{\varrho R}\cdot r\,[(\cos\delta\sin I, - \sin\delta\cos I,\sin(\alpha - N_{,}))\sin(v - N + D) - \sin\delta\cos(\alpha - N_{,})\cos(v - N + D)]$$

und wenn man f, F, g, G durch

$$\left.\begin{aligned}
\sin f\cos F &= \cos(\alpha - N_{,})\cos I,\\
\sin f\sin F &= -\sin(\alpha - N_{,})\\
\cos f &= -\cos(\alpha - N_{,})\sin I,\\
\sin g\cos G &= \cos\delta\sin I, - \sin\delta\cos I,\sin(\alpha - N_{,})\\
\sin g\sin G &= -\sin\delta\cos(\alpha - N_{,})\\
\cos g &= \cos\delta\cos I, + \sin\delta\sin I,\sin(\alpha - N_{,})
\end{aligned}\right\} (8)$$

bestimmt:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma\sin p &= \frac{(\varrho)\Delta}{\varrho R}\sin f\,.r\sin(v - N + D + F)\\
\sigma\cos p &= \frac{(\varrho)\Delta}{\varrho R}\sin g\,.r\sin(v - N + D + G)
\end{aligned}\right\} \ldots (9)$$

wofür ich, um abzukürzen, schreiben werde:

$$\sigma\sin p = f'.r\sin(F' + v)$$

$$\sigma\cos p = g'.r\sin(G' + v)$$

Diese Formeln werde ich in Beziehung auf Δ, ϑ, λ, λ', N, I differentiiren, dabei aber den unerheblichen Einfluss der Aenderungen dieser Elemente auf R vernachlässigen. Ich werde nur die zweite Formel verfolgen, indem g, G in f, F übergehen, wenn $\delta = 90^0$ angenommen und $\alpha - 90^0$ für α gesetzt wird, so dass also die erste Formel als ein besonderer Fall der zweiten angesehen werden kann. — In Beziehung auf Δ ist der Differentialquotient offenbar:

$$\frac{d(\sigma\cos p)}{d\Delta} = \frac{\sigma\cos p}{\Delta} \ldots\ldots\ldots (10)$$

In Beziehung auf die drei, den Ort des Satelliten in der Ebene seiner Bahn bestimmenden Elemente ϑ, λ, λ', können die Differentialquotienten zugleich aufge-

sucht werden. Schreibt man die zu differentiirende Grösse:

$$\sigma\cos p = g'[\sin(G'+\omega).r\cos(v-\omega) + \cos(G'+\omega).r\sin(v-\omega)]$$

so wird ihr Differential:

$$\begin{aligned} d(\sigma\cos p) = {} & g'\sin(G'+\omega)\,d[r\cos(v-\omega)] \\ & + g'\cos(G'+\omega)\,d[r\sin(v-\omega)] \\ & + rg'\cos(G'+v)\,d\omega. \end{aligned}$$

Durch die excentrische Anomalie ε ausgedrückt hat man:

$$\begin{aligned} r\cos(v-\omega) &= \cos\varepsilon - e \\ r\sin(v-\omega) &= \sin\varepsilon\sqrt{1-ee} \\ \vartheta-\omega &= \varepsilon - e\sin\varepsilon \end{aligned}$$

und durch Differentiirung dieser Ausdrücke:

$$\begin{aligned} d[r\cos(v-\omega)] &= -d\varepsilon.\sin\varepsilon - de \\ d[r\sin(v-\omega)] &= d\varepsilon.\cos\varepsilon\sqrt{1-ee} - de\cdot\frac{e\sin\varepsilon}{\sqrt{1-ee}} \\ d\vartheta - d\omega &= d\varepsilon(1-e\cos\varepsilon) - de\cdot\sin\varepsilon \end{aligned}$$

oder, wenn man $d\varepsilon$ aus den beiden ersten Differentialen eliminirt:

$$\begin{aligned} d[r\cos(v-\omega)] &= -d(\vartheta-\omega)\frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon} \\ &\quad - de\left(1+\frac{\sin\varepsilon^2}{1-e\cos\varepsilon}\right) \\ d[r\sin(v-\omega)] &= d(\vartheta-\omega)\frac{\cos\varepsilon\sqrt{1-ee}}{1-e\cos\varepsilon} \\ &\quad + de\left(\frac{\cos\varepsilon\sqrt{1-ee}}{1-e\cos\varepsilon} - \frac{e}{\sqrt{1-ee}}\right)\sin\varepsilon \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} d[r\cos(v-\omega)] &= -d(\vartheta-\omega)\frac{\sin(v-\omega)}{\sqrt{1-ee}} \\ &\quad - de\left(1+\frac{\sin\varepsilon\sin(v-\omega)}{\sqrt{1-ee}}\right) \\ d[r\sin(v-\omega)] &= d(\vartheta-\omega)\frac{\cos(v-\omega)+e}{\sqrt{1-ee}} \\ &\quad + de\,\frac{\sin\varepsilon\cos(v-\omega)}{\sqrt{1-ee}} \end{aligned}$$

Die Substitution dieser Ausdrücke gibt:

$$\begin{aligned} d(\sigma\cos p) = {} & \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-ee}}g'\left[\cos(G'+v)+e\cos(G'+\omega)\right] + de\cdot g'\left[\cos(G'+v)\frac{\sin\varepsilon}{\sqrt{1-ee}} - \sin(G'+\omega)\right] \\ & + d\omega\cdot g'\left[\cos(G'+v)\left(r-\frac{1}{\sqrt{1-ee}}\right) - \frac{e\cos(G'+\omega)}{\sqrt{1-ee}}\right] \end{aligned}$$

oder, anders geschrieben:

$$\begin{aligned} d(\sigma\cos p) = {} & d\vartheta\cdot g'\left[\cos(G'+v)\frac{\sqrt{1-ee}}{r} + \sin(G'+v)\frac{e\sin(v-\omega)}{\sqrt{1-ee}}\right] \\ & + de\cdot g'\left[\cos(G'+v)\left(\frac{r}{1-ee}+1\right)\sin(v-\omega) - \sin(G'+v)\cos(v-\omega)\right] \\ & + d\omega\cdot g'\left[\cos(G'+v)\left(r-\frac{\sqrt{1-ee}}{r}\right) - \sin(G'+v)\frac{e\sin(v-\omega)}{\sqrt{1-ee}}\right] \end{aligned}$$

Wenn man $d\lambda$ und $d\lambda'$ einführt, also de und $d\omega$ durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} de &= d\lambda.\sin\omega + d\lambda'.\cos\omega \\ ed\omega &= d\lambda.\cos\omega - d\lambda'.\sin\omega \end{aligned}$$

eliminirt und $\frac{\sigma}{r}\cos p$ für $g'\sin(G'+v)$ setzt, erhält man aus diesem Ausdrucke:

$$\frac{d(\sigma\cos p)}{d\vartheta} = g'\cos(G'+v)\frac{\sqrt{1-ee}}{r} + \sigma\cos p\cdot\frac{e\sin(v-\omega)}{r\sqrt{1-ee}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\sigma\cos p)}{d\lambda} = {} & g'\cos(G'+v)\left[\left(r-\frac{\sqrt{1-ee}}{r}\right)\frac{\cos\omega}{e} + \left(\frac{r}{1-ee}+1\right)\sin\omega\sin(v-\omega)\right] \\ & - \frac{\sigma\cos p}{r}\left[\sin\omega\cos(v-\omega) + \frac{\cos\omega\sin(v-\omega)}{\sqrt{1-ee}}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\sigma\cos p)}{d\lambda'} = {} & g'\cos(G'+v)\left[-\left(r-\frac{\sqrt{1-ee}}{r}\right)\frac{\sin\omega}{e} + \left(\frac{r}{1-ee}+1\right)\cos\omega\sin(v-\omega)\right] \\ & - \frac{\sigma\cos p}{r}\left[\cos\omega\cos(v-\omega) - \frac{\sin\omega\sin(v-\omega)}{\sqrt{1-ee}}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13) \end{aligned}$$

Um die Differentialquotienten in Beziehung auf N und I zu erhalten, kann man von dem Ausdrucke

$$\sigma\cos p = \frac{(\varrho)\Delta}{\varrho R}r[(\cos\delta\sin I,-\sin\delta\cos I,\sin(\alpha-N,)\sin(v-N+D) - \sin\delta\cos(\alpha-N,)\cos(v-N+D)]$$

ausgehen. Seine Differentiirung in Beziehung auf Alles was von N und I abhängt, ergibt:

$$d(\sigma\cos p) = \frac{(\varrho)\Delta}{\varrho R}\cdot r\left\{\begin{array}{l}[\cos(v-N+D)(\cos\delta\sin I, -\sin\delta\cos I, \sin(\alpha-N,))\\ \qquad +\sin(v-N+D)\sin\delta\cos(\alpha-N,)]\,d(D-N)\\ +[\sin(v-N+D)\sin\delta\cos I, \cos(\alpha-N,) - \cos(v-N+D)\sin\delta\sin(\alpha-N,)]\,dN,\\ +\ \sin(v-N+D)(\cos\delta\cos I, +\sin\delta\sin I, \sin(\alpha-N,))\,dI,\end{array}\right.$$

Die Differentiirung des sphärischen Dreiecks zwischen dem Aequator, der Jupitersbahn und der Satellitenbahn ergibt aber:

$$d(D-N) = -dN\left(1-\cos I+\frac{\sin I\cos D}{\operatorname{tg} I,}\right) - dI\cdot\frac{\sin D}{\operatorname{tg} I,}$$

$$dN = dN\cdot\frac{\sin I\cos D}{\sin I,} + dI\cdot\frac{\sin D}{\sin I,}$$

$$dI, = -dN\cdot\sin I\sin D + dI\cdot\cos D$$

und aus der Substitution des von dN abhängigen Theils dieser Differentiale geht hervor:

$$\frac{d(\sigma\cos p)}{\sin I\,dN} = \frac{(\varrho)\Delta}{\varrho R}r\left\{\begin{array}{l}-\cos(v-N)[\cos\delta\cos I, +\sin\delta\sin I, \sin(\alpha-N,)]\\ -\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}I[\cos(v-N+D)(\cos\delta\sin I, -\sin\delta\cos I, \sin(\alpha-N,))\\ \qquad +\sin(v-N+D)\sin\delta\cos(\alpha-N,)\end{array}\right\}$$

oder, den Formeln (8) zufolge:

$$\frac{d(\sigma\cos p)}{\sin I\,dN} = -\frac{(\varrho)\Delta}{\varrho R}r\cos g\cos(v-N) - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}I.r.g'\cos(G'+v) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

so wie auch aus der Substitution des von dI abhängigen Theils der Differentiale:

$$\frac{d(\sigma\cos p)}{dI} = \frac{(\varrho)\Delta}{\varrho R}r\sin(v-N)\times \times(\cos\delta\cos I, +\sin\delta\sin I, \sin(\alpha-N,))$$

oder

$$\frac{d(\sigma\cos p)}{dI} = \frac{(\varrho)\Delta}{\varrho R}r\cos g\sin(v-N) \quad \ldots\ldots (15)$$

Indem man ähnliche Ausdrücke für die Differentialquotienten von $\sigma\sin p$ und

$$d\sigma = \cos p\,d(\sigma\cos p) + \sin p\,d(\sigma\sin p)$$
$$\sigma dp = -\sin p\,d(\sigma\cos p) + \cos p\,d(\sigma\sin p)$$

hat, kennt man auch die Differentialquotienten von σ und p in Beziehung auf die 6 Elemente. Setzt man:

$$k\sin K = g'\cos(G'+v) = \frac{(\varrho)\Delta}{\varrho R}\sin g\cos(v-N+D+G)$$

$$k\cos K = f'\cos(F'+v) = \frac{(\varrho)\Delta}{\varrho R}\sin f\cos(v-N+D+F)$$

und

$$l\sin L = \frac{(\varrho)\Delta}{\varrho R}\cos g$$

$$l\cos L = \frac{(\varrho)\Delta}{\varrho R}\cos f$$

und ferner, um abzukürzen:

$$\mu = \left(r-\frac{\sqrt{1-ee}}{r}\right)\frac{\cos\omega}{e} + \left(\frac{r}{1-ee}+1\right)\sin\omega\sin(v-\omega)$$

$$\mu' = -\left(r-\frac{\sqrt{1-ee}}{r}\right)\frac{\sin\omega}{e} + \left(\frac{r}{1-ee}+1\right)\cos\omega\sin(v-\omega)$$

$$\nu = \sin\omega\cos(v-\omega) + \frac{\cos\omega\sin(v-\omega)}{\sqrt{1-ee}}$$

$$\nu' = \cos\omega\cos(v-\omega) - \frac{\sin\omega\sin(v-\omega)}{\sqrt{1-ee}}$$

so erhält man endlich:

$$\left.\begin{array}{ll}\frac{d\sigma}{d\Delta} = \frac{\sigma}{\Delta} & \\ \frac{d\sigma}{d\Theta} = k\sin(K+p)\cdot\frac{\sqrt{1-ee}}{r} + \frac{\sigma}{r}\cdot\frac{e\sin(v-\omega)}{\sqrt{1-ee}} & \\ \frac{d\sigma}{d\iota} = k\sin(K+p)\,\mu & -\frac{\sigma}{r}\cdot\nu \\ \frac{d\sigma}{d\iota'} = k\sin(K+p)\,\mu' & -\frac{\sigma}{r}\cdot\nu' \\ \frac{d\sigma}{\sin I\,dN} = -k\sin(K+p)\,r\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}I & \\ \qquad -l\sin(L+p)\,r\cos(v-N) & \\ \frac{d\sigma}{dI} = l\sin(L+p)\,r\sin(v-N) & \end{array}\right\} \ldots (16)$$

und

$$\left.\begin{array}{ll}\frac{\sigma dp}{d\Delta} = 0 & \\ \frac{\sigma dp}{d\Theta} = k\cos(K+p)\frac{\sqrt{1-ee}}{r} & \\ \frac{\sigma dp}{d\iota} = k\cos(K+p)\,\mu & \\ \frac{\sigma dp}{d\iota'} = k\cos(K+p)\,\mu' & \\ \frac{\sigma dp}{\sin I\,dN} = -k\cos(K+p)\,r\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}I & \\ \qquad -l\cos(L+p)\,r\cos(v-N) & \\ \frac{\sigma dp}{dI} = l\cos(L+p)\,r\sin(v-N) & \end{array}\right\} \ldots\ldots (17)$$

Die Excentricitäten der Bahnen der Jupiterssatelliten sind so klein, dass sie ohne erheblichen Nachtheil in den Ausdrücken der Differentialquotienten von σ und p vernachlässigt werden können. Geschieht dieses, so verwandeln sich die eben gegebenen Formeln in:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Delta} &= \frac{\sigma}{\Delta}\\
\frac{d\sigma}{d\Phi} &= k\sin(K+p)\\
\frac{d\sigma}{d\lambda} &= -k\sin(K+p)\,2\cos v - \sigma\sin v\\
\frac{d\sigma}{d\lambda'} &= k\sin(K+p)\,2\sin v - \sigma\cos v\\
\frac{d\sigma}{\sin I\,dN} &= -l\sin(L+p)\cos(v-N)\\
&\quad -k\sin(K+p)\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}I\\
\frac{d\sigma}{dI} &= l\sin(L+p)\sin(v-N)
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(16^*)$$

und

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\sigma dp}{d\Delta} &= 0\\
\frac{\sigma dp}{d\Phi} &= k\cos(K+p)\\
\frac{\sigma dp}{d\lambda} &= -k\cos(K+p)\,2\cos v\\
\frac{\sigma dp}{d\lambda'} &= k\cos(K+p)\,2\sin v\\
\frac{\sigma dp}{\sin I\,dN} &= -l\cos(L+p)\cos(v-N)\\
&\quad -k\cos(K+p)\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}I\\
\frac{\sigma dp}{dI} &= l\cos(L+p)\sin(v-N)
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(17^*)$$

Diese Formeln sind die von mir zur Rechnung angewandten. Wenn man beabsichtigte, die Coefficienten von Gliedern der Ausdrücke der Länge und des Radius-vectors eines Satelliten, welche nicht unmittelbar von seinen elliptischen Elementen abhängen, durch eine Reihe beobachteter Entfernungen und Positionswinkel zu bestimmen, so würden die in Beziehung auf Δ und Φ genommenen Differentialquotienten auch dabei Anwendung finden.

15.

Damit man nicht allein das Verhalten der gemachten Beobachtungen der Satelliten zu den Tafeln ihrer Bewegung und den im 13. § angeführten Werthen von Δ, Δ', Δ'', Δ''', sondern auch den Einfluss übersehen könne, welchen Aenderungen der Elemente der Tafeln darauf äussern, werde ich die Resultate der Vergleichungen der einzelnen Beobachtungen und diesen Einfluss hier mittheilen. Wenn $\delta\sigma$ und $\sigma\delta p$ die nach einer Veränderung der Elemente übrigbleibenden Unterschiede zwischen der Rechnung und Beobachtung bedeuten, werde ich

$$\begin{aligned}
\delta\sigma &= n + ap + bq + cr + ds + et + fu\\
\sigma\delta p &= n' \quad + b'q + c'r + d's + e't + f'u
\end{aligned}$$

setzen und unter $a, b, c\ldots., b', c'\ldots.$ die durch die Formeln (16*) und (17*) berechneten Coefficienten, sowie unter p, q, r, s, t, u resp.

$$\delta\Delta,\ \frac{\delta\Phi}{206{,}''265},\ \frac{\delta\lambda}{206{,}''265},\ \frac{\delta\lambda'}{206{,}''265},\ \frac{\sin I\,\delta N}{206{,}''265},\ \frac{\delta I}{206{,}''265}$$

verstehen. Die (folgenden) Tafeln enthalten n, a, b, $c,\ldots., n', b', c'\ldots.$ für jedes der § 2 bis § 7 angeführten beobachteten Momente.

[Mittheilung der genannten Grössen für die vier Trabanten.]

19.

Der Beitrag, welchen die, diesen Bedingungsgleichungen zum Grunde liegenden Beobachtungen zu jeder, die Werthe der 6 Elemente der Bewegung eines der Satelliten (oder eines oder mehrerer dieser Elemente) betreffenden Untersuchung liefern können, kann der Methode der kleinsten Quadrate zufolge immer auch durch die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
&(an) + (aa)p + (ab)q + (ac)r + \ldots.\\
&(bn) + (ab)p + (bb)q + (bc)r + \ldots.\\
&(cn) + (ac)p + (bc)q + (cc)r + \ldots.\\
&\qquad\text{u. s. w.}
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(18)$$

erlangt werden, welche Ausdrücke also als die Zusammenziehung sämmtlicher Beobachtungen eines Satelliten in ihre einfachste Gestalt betrachtet werden können. Ich werde daher die Werthe von (an), (aa), $(ab)\ldots.$ (bn), $(bb)\ldots.$ u. s. w., so wie sie aus den Bedingungsgleichungen für jeden Satelliten hervorgehen, hier anführen. [Mittheilung dieser Grössen.]

20.

Die unbekannten Elemente einer gegebenen Theorie werden am vortheilhaftesten bestimmt, wenn die Ausdrücke von der Form (18), gegründet auf alle vorhandenen Beobachtungen, als verschwindend vorausgesetzt werden; sind verschiedene, gesonderte Beobachtungsreihen des Gegenstandes der Theorie vorhanden, so müssen also die auf den einzelnen beruhenden, einander ähnlichen Ausdrücke dieser Art (mit gehöriger Rücksicht auf die Genauigkeit der ihnen zum Grunde liegenden Beobachtungen) summirt und die Summe muss der Bedingung des Verschwindens unterworfen werden. Wenn eine neue Beobachtungsreihe zu schon vorhandenen hinzukommt, so vergrössert sie die Sicherheit der durch diese schon erlangten Bestimmungen. Wesentliche Bedingung des Fortschreitens der astronomischen Bestimmungen von geringerer zu grösserer Sicherheit ist daher, dass ihre Untersuchungen in einer

Form durchgeführt werden, welche das Hinzusetzen der auf spätere Beobachtungen gegründeten Ausdrücke von der Form (18) zu den schon vorhandenen möglich macht.

Diese Art der Durchführung der Untersuchungen ist, seit der Zeit der Erfindung der Methode der kleinsten Quadrate, die eigentliche Aufgabe der practischen Astronomie geworden. Sie hat den Astronomen ein weites Feld zur Bearbeitung eröffnet; ein Feld, welches vor dieser Zeit noch nicht bearbeitet werden konnte, dem aber auch während derselben die Bemühungen weit weniger zugewandt worden sind, als die offenbare Grösse des Erfolges erwarten lassen sollte. Jetzt ist die Aufgabe, deren Auflösung die Astronomen ihre Kräfte vorzugsweise widmen sollten, Untersuchungen, welche noch nicht in dieser Art durchgeführt worden sind, so durchzuführen, dass sie die Grundlage mit der Zeit fortschreitender Vergrösserungen der Sicherheit ihrer Resultate werden können. In der Folge wird dann das Zurückgehen bis zum Anfange nur in Fällen nothwendig werden, in welcher die dem Anfange zum Grunde gelegte Theorie als unvollständig erkannt worden ist.

Diese allgemeine Bemerkung über die nothwendige Art des Fortschreitens der practischen Astronomie hat hier ihren Platz gefunden, weil die Untersuchung, welche der Gegenstand dieser Abhandlung ist, nur durch ihre Verbindung mit den Resultaten früherer Beobachtungen der Jupiterssatelliten bis zu ihrem Ziele geführt werden kann, diese Verbindung aber, bei mangelnder gehöriger Form der früheren Untersuchung, noch nicht auf eine Art gemacht werden kann, welche sich völlig rechtfertigen liesse. Wenn man den ersten der, im vorigen §, aus den jetzigen Beobachtungen gefolgerten Ausdrücke der Bedingung des Verschwindens unterwirft, so bestimmt er die durch diese Beobachtungen gesuchte unbekannte Grösse p, und damit das Element Δ, nicht unabhängig, sondern mehr oder weniger abhängig von den übrigen Elementen der Theorie. Man erhält nämlich dadurch:

$$\begin{aligned}
\delta\Delta &= +0,''0167 + 0,0234\,q - 0,0098\,r + 0,0213\,s + 0,0016\,t - 0,0036\,u\\
\delta\Delta' &= +0,0367 - 0,0359\,q' + 0,0306\,r' - 0,0581\,s' - 0,0013\,t' - 0,0150\,u'\\
\delta\Delta'' &= +0,0635 + 0,0014\,q'' + 0,0063\,r'' + 0,0248\,s'' + 0,0015\,t'' - 0,0067\,u''\\
\delta\Delta''' &= +0,1165 - 0,0177\,q''' - 0,0596\,r''' + 0,1417\,s''' + 0,0019\,t''' - 0,0081\,u'''
\end{aligned}$$

Die wahren, von q, r, s,.... u. s. w. unabhängig gemachten Resultate dieser Untersuchung würde man erhalten, wenn man zu den aus den Beobachtungen der Finsternisse der Satelliten gefolgerten Ausdrücken von der Art des 2., 3..... der Ausdrücke (18), die auf den gegenwärtigen Beobachtungen beruhenden hinzusetzte, die Summen als verschwindend annähme, daraus die Bestimmung der unbekannten Grössen q, r, s.... ableitete und dieser gemäss ihre Einflüsse auf $\delta\Delta$, $\delta\Delta'$.... wegschaffte. Allein da dieses, aus dem angeführten Grunde, für jetzt nicht geschehen kann, so bleibt nur die Wahl übrig, zwischen der — auf Vertrauen auf die aus den Finsternissen abgeleitete Theorie der Satelliten zu gründenden — Voraussetzung des Verschwindens von q, r, s...., und der Benutzung der neuen Beobachtungen selbst zur Elimination ihrer Einflüsse.

Wählt man das erstere, so sind die ersten, von q, r, s.... unabhängigen Theile der eben gefundenen Ausdrücke von $\delta\Delta$, $\delta\Delta'$,.... als die Resultate der gegenwärtigen Beobachtungen anzunehmen; die mittleren Fehler einer Beobachtung des Satelliten

$$\text{I} = \pm\sqrt{\frac{1,5849}{23}} = \pm 0,''2625;\ \text{von}\ \Delta = \pm 0,''05512$$

$$\text{II} = \pm\sqrt{\frac{0,9429}{16}} = \pm 0,2428;\ \text{„}\ \Delta' = \pm 0,06682$$

$$\text{III} = \pm\sqrt{\frac{7,3051}{74}} = \pm 0,''3142;\ \text{von}\ \Delta'' = \pm 0,''04360$$

$$\text{IV} = \pm\sqrt{\frac{16,8742}{93}} = \pm 0,4260;\ \text{„}\ \Delta''' = \pm 0,05275$$

Zieht man aber das andere vor, so muss man die Gleichungen auflösen, welche das Verschwinden der Ausdrücke (18) gibt. Offenbar können nur die vier ersten Elemente der Satelliten I und II dadurch bestimmt werden, indem die allein vorhandenen Beobachtungen der Entfernungen dieser Satelliten die Lage ihrer Bahnen, also die beiden letzten Elemente, so gut wie ganz unbestimmt gelassen haben.

Auf diese Art erhält man:

Satellit I.

$p = +0,0244$;	Gewicht $= 21,0704$;	m. F. $= \pm 0,0588$	
$q = +0,3414$	„ $= 0,1652$	„	$\pm 0,6645$
$r = -1,0997$	„ $= 0,1009$	„	$\pm 0,8502$
$s = -0,5199$	„ $= 0,2746$	„	$\pm 0,5154$

$(nn_4) = 1,4588$;

m. F. einer Beob. $= \pm\sqrt{\frac{1,4588}{20}} = \pm 0,''2701$,

und in Secunden ausgedrückt:

$\delta\Delta = +0,''0244$; m. F. $= \pm 0,''0588$
$\delta\vartheta = +70,''4$ „ $\pm 137,''1$
$\delta(e\sin\omega) = -226,8$ „ $\pm 175,4$
$\delta(e\cos\varphi) = -107,2$ „ $\pm 106,3$

Satellit II.

$p' = +0,0347$; Gewicht $= 12,4211$; m. F. $= \pm 0,0737$
$q' = -0,1306$ „ $= 0,3996$ „ $\pm 0,4106$
$r' = +0,6659$ „ $= 0,1268$ „ $\pm 0,7292$
$s' = +0,4651$ „ $= 0,2636$ „ $\pm 0,5056$
$(n'n'_4) = 0,8760$;

m. F. einer Beobb. $= \pm\sqrt{\frac{0,8760}{13}} = \pm 0,''2596$,

und in Secunden ausgedrückt:

$\delta\Delta' = +0,''0347$; m. F. $= \pm 0,''0737$
$\delta\vartheta' = -26,''9$ „ $\pm 84,''7$
$\delta(e'\sin\omega') = +137,4$ „ $\pm 150,4$
$\delta(e'\cos\omega') = +95,9$ „ $\pm 104,3$

Satellit III.

$p'' = +0,0637$; Gewicht $= 51,3366$; m. F. $= \pm 0,04174$
$q'' = -0,0359$ „ $= 1,9938$ „ $\pm 0,2118$
$r'' = -0,0940$ „ $= 2,8387$ „ $\pm 0,1775$
$s'' = +0,1423$ „ $= 5,4699$ „ $\pm 0,1279$
$t'' = +0,5734$ „ $= 1,1833$ „ $\pm 0,2750$
$u'' = +0,5217$ „ $= 0,9989$ „ $\pm 0,2993$
$(n''n''_6) = 6,1719$;

m. F. einer Beobb. $= \pm\sqrt{\frac{6,1719}{69}} = \pm 0,''2991$,

und in Secunden ausgedrückt:

$\delta\Delta'' = +0,''0637$; m. F. $= \pm 0,''04174$
$\delta\vartheta'' = -7,''4$ „ $\pm 43,''7$
$\delta(e''\sin\omega'') = -19,4$ „ $\pm 36,6$
$\delta(e''\cos\omega'') = +29,4$ „ $\pm 26,4$
$\sin I''\delta N'' = +118,3$ „ $\pm 56,7$
$\delta I'' = +107,6$ „ $\pm 61,7$

Satellit IV.

$p''' = +0,1657$; Gewicht $= 62,075$; m. F. $= \pm 0,04520$
$q''' = +0,2891$ „ $= 7,095$ „ $\pm 0,1337$
$r''' = -0,1453$ „ $= 10,199$ „ $\pm 0,1115$
$s''' = +0,2858$ „ $= 18,307$ „ $\pm 0,0832$
$t''' = +0,3781$ „ $= 5,501$ „ $\pm 0,1518$
$u''' = +0,5568$ „ $= 4,171$ „ $\pm 0,1743$
$(n'''n'''_6) = 11,1450$;

m. F. einer Beobb. $= \pm\sqrt{\frac{11,1450}{88}} = \pm 0,''3561$,

und in Secunden ausgedrückt:

$\delta\Delta''' = +0,''1657$; m. F. $= \pm 0,''04520$
$\delta\vartheta''' = +59,''6$ „ $\pm 27,''6$
$\delta(e'''\sin\omega''') = -30,0$ „ $\pm 23,0$
$\delta(e'''\cos\omega''') = +59,0$ „ $\pm 17,2$
$\sin I'''\delta N''' = +78,0$ „ $\pm 31,3$
$\delta I''' = -114,9$ „ $\pm 36,0$

21.

Im vorigen § habe ich die den § 13 angenommenen Werthen von Δ, Δ', Δ'', Δ''' anzubringenden Verbesserungen in zwei Voraussetzungen bestimmt, nämlich in der Voraussetzung der Richtigkeit der Elemente der Satellitentafeln und in der Voraussetzung der Hinlänglichkeit der Heliometerbeobachtungen zur Berichtigung dieser Elemente. Ich werde das, was die Verfolgung dieser Voraussetzungen ergeben hat, hier zusammenstellen:

$\delta\Delta$	$= +0,''0167$;	m. F. $=$	$\pm 0,''05512$
$\delta\Delta'$	$= +0,0367$	„	$\pm 0,06682$
$\delta\Delta''$	$= +0,0635$	„	$\pm 0,04360$
$\delta\Delta'''$	$= +0,1165$	„	$\pm 0,05275$
$\delta\Delta$	$= +0,0244$	„	$\pm 0,0588$
$\delta\Delta'$	$= +0,0347$	„	$\pm 0,0737$
$\delta\Delta''$	$= +0,0637$	„	$\pm 0,04174$
$\delta\Delta'''$	$= +0,1657$	„	$\pm 0,04520$

Der Erfolg beider Voraussetzungen ist also nicht erheblich verschieden ausgefallen, wie die Kleinheit der Einflüsse der Elemente der Bewegung der Satelliten auf die durch die Beobachtungen zu bestimmenden Grössen auch erwarten liess; die Unterschiede sind nur:

Sat. I....$+0,''0077$
„ II....$-0,0020$
„ III....$+0,0002$
„ IV....$+0,0492$

So wenig erheblich sie sind, so glaube ich doch, die Gründe nicht verschweigen zu dürfen, welche mich veranlasst haben, im Falle der beiden ersten Satelliten der ersten Voraussetzung, und im Falle der beiden letzten der zweiten den Vorzug einzuräumen.

Die Heliometerbeobachtungen machen die Nothwendigkeit einer Verbesserung der vorhandenen Theorien der Satelliten I und II nicht dringend wahrscheinlich, indem die aus ihnen hervorgehenden Aenderungen der drei untersuchten Elemente dieser Satelliten meistens kleiner und nie beträchtlich grösser sind, als die übrigbleibenden mittleren Fehler ihrer Bestimmungen. Auch scheinen die von diesen Theorien angegebenen Zeiten

der Finsternisse so gut mit den Beobachtungen übereinzustimmen, dass Aenderungen ihrer Elemente von der Grösse der durch die Heliometerbeobachtungen, mit geringer Wahrscheinlichkeit angegebenen, wohl nicht mit ihnen vereinbar sein würden. In dieser Beziehung erinnere ich, dass Aenderungen der Länge der Satelliten I und II von resp. 8″,475 und 4″,22 die Zeiten ihrer Finsternisse um eine Secunde ändern. Ich halte daher nicht für angemessen, an die Elemente dieser Satelliten die Aenderungen anzubringen, welche ihre neueren Beobachtungen allein in die beste Uebereinstimmung bringen würden. Uebrigens wird die Uebereinstimmung durch die Aenderung der Elemente auch nur unerheblich vermehrt, indem diese die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Unterschiede nicht stärker als von resp. 1,5849 und 0,9429, auf 1,4588 und 0,8760 verkleinert. — Bei dieser Gelegenheit kann ich die Aeusserung nicht unterdrücken, dass ich die Sammlung der Beobachtungen der Finsternisse der Jupiterssatelliten und ihre Vergleichung mit den Tafeln für eine verdienstliche Arbeit halten würde.

Für den Satelliten III haben beide Voraussetzungen bis auf einen gänzlich unbedeutenden Unterschied gleichen Erfolg. Die drei Elemente, welche Einfluss auf seine Länge in der Bahn erhalten, werden durch die Heliometerbeobachtungen so wenig geändert, dass die Beobachtungen der Finsternisse damit wohl vereinbar zu sein scheinen, welche Beobachtungen bekanntlich in weit geringerer Uebereinstimmung mit der Rechnung sind, als die der Satelliten I und II; aber wenn auch kein Widerspruch von dieser Seite zu erwarten ist, so ist die Sicherheit der Aenderungen, den mittleren Fehlern ihrer Bestimmung zufolge, doch nicht so gross, dass man sie als durch die Beobachtungen gut begründet betrachten dürfte. Dagegen erfahren die beiden, die Lage der Ebene der Bahn bestimmenden Elemente, vergleichungsweise mit den mittleren Fehlern ihrer Bestimmung, so grosse Aenderungen, dass man ihnen einiges Gewicht beilegen darf. Die Summe der Quadrate der zwischen der Rechnung und den Beobachtungen übrigbleibenden Unterschiede wird durch die Aenderung der Elemente von 7,3051 auf 6,1719 reducirt. — Wenn der Erfolg beider Voraussetzungen wesentlich verschieden wäre, so würde die Wahl zwischen beiden Verlegenheiten verursachen; so wie er ist, habe ich der zweiten den Vorzug zu geben weniger Schwierigkeit gehabt.

Für den Satelliten IV halte ich den Vorzug der zweiten Voraussetzung nicht für zweifelhaft. Die von den Heliometerbeobachtungen geforderten Aenderungen der Elemente sind beträchtlich grösser als die mittleren Fehler ihrer Bestimmungen und die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Unterschiede wird dadurch von 16,8742 auf 11,1450 herabgebracht. Auch scheint aus den Beobachtungen der Finsternisse kein Zweifel an der Wirklichkeit der gefundenen Aenderungen hergenommen werden zu können, denn sie sind bekanntlich in noch weit geringerer Uebereinstimmung mit der Rechnung als die des Satelliten III.

22.

Ich bin nun an die Ableitung der Resultate der gegenwärtigen Untersuchung gelangt. Zuerst werde ich die Masse des ganzen Jupiterssystems aufsuchen, indem ich, den im vorigen § angeführten Gründen gemäss, von folgenden Werthen von Δ, Δ', Δ'', Δ''' ausgehen werde:

$\Delta = 111,''7256 + 0,''0167 = 111,''7423$; m.F. $= \pm 0,''05512$
$\Delta' = 177,7602 + 0,0367 = 177,7969$ „ $= \pm 0,06682$
$\Delta'' = 283,5421 + 0,0637 = 283,6058$ „ $= \pm 0,04174$
$\Delta''' = 498,7006 + 0,1657 = 498,8663$ „ $= \pm 0,04520$

Wenn die Masse der Sonne, die anziehende Kraft welche sie in der mittleren Entfernung der Erde von ihr äussert, und diese Entfernung als Einheiten der Massen, Kräfte und Entfernungen angenommen werden, so zieht die Masse M des ellipsoidischen Jupiters einen Satelliten in der Entfernung r von seinem Mittelpunkte und der Entfernung rv von der Ebene seines Aequators mit der Kraft

$$\frac{M}{rr}\left\{1 + \frac{BB}{rr}(1 - 3vv)(\varrho - \tfrac{1}{2}\varphi)\right\}$$

an, in welchem Ausdrucke B den Aequatorealhalbmesser des Planeten, ϱ seine Ellipticität und φ das Verhältniss der Centrifugalkraft zur Schwere unter seinem Aequator bedeuten (Méc. Cél. Liv. VIII). Wenn der angezogene Satellit die Masse Mm besitzt, so äussert er auf den Planeten eine Anziehung, welche sich zu der vorigen verhält, wie $1 : m$. Die Kraft, welche auf seine Bewegung um den Mittelpunkt des Planeten wirkt, ist daher:

$$\frac{M(1+m)}{rr}\left\{1 + \frac{BB}{rr}(1 - 3vv)(\varrho - \tfrac{1}{2}\varphi)\right\}.$$

Ausser ihr wirken noch die störenden Kräfte der Sonne und der übrigen Satelliten auf diese Bewegung, und aus allen zusammen entsteht die Bewegung, deren Ausdruck ich § 8—11 angeführt und zur Construction der Tafeln benutzt habe. Dieser Ausdruck enthält die Wirkung der störenden Kräfte vollständig, sowie auch die Wirkung der von den Ortsveränderungen des Sa-

telliten erzeugten Veränderungen des zwischen Klammern eingeschlossenen Factors der letzten Formel. Der noch übrige beständige Theil dieses Factors und damit die Kraft:

$$\frac{M(1+m)}{rr}\left\{1+\frac{BB}{aa}(\varrho-\tfrac{1}{2}\varphi)\right\}$$

hat die den Kepler'schen Gesetzen entsprechende Bewegung des Satelliten in einer Bahn zur Folge, deren halbe grosse Axe $a = (\varrho)\sin\Delta$ ist.

Wenn t und T die siderischen Umlaufszeiten des Satelliten und der Erde, M' die Masse der letzteren bedeuten, hat man diesen Gesetzen zufolge bekanntlich:

$$\frac{t^2.M(1+m)\left\{1+\frac{BB}{aa}(\varrho-\frac{1}{2}\varphi)\right\}}{(\varrho)^3\sin\Delta^3} = T^2(1+M')$$

also:

$$M(1+m) = (\varrho)^3 T^2(1+M')\cdot\frac{\sin\Delta^3}{t^2\left\{1+\frac{BB}{aa}(\varrho-\frac{1}{2}\varphi)\right\}}$$

und damit die Masse des ganzen Jupiterssystems

$$= M(1+m+m'+m''+m''') = M(1+(m)),$$

welche schon in der Einleitung dieser Abhandlung durch $\frac{1}{\mu}$ bezeichnet worden ist. Man findet also:

$$\mu = \frac{1}{(\varrho)^3 T^2(1+M')}\cdot\frac{1+m}{1+(m)}\cdot\frac{t^2\left\{1+\frac{BB}{aa}(\varrho-\frac{1}{2}\varphi)\right\}}{\sin\Delta^3}.$$

Ich werde die Werthe der in dieser Formel vorkommenden Grössen, welche ich bei ihrer Anwendung vorausgesetzt habe, angeben:

1) $(\varrho) = 5{,}20273$, die Entfernung, auf welche die Messungen reducirt worden sind (§ 13).
2) $T = 365{,}256374417$ nach meinen Untersuchungen Astron. Nachr. Nr. 133, S. 266 [Abh. 23 p. 197].
3) $M' = 0{,}0000028174$.
4) $\frac{1+m}{1+(m)}$ nach Damoiseau (§ 8), für

   Sat. I = 1 — 0,0001541127
   „ II = 1 — 0,0001477638
   „ III = 1 — 0,0000825650
   „ IV = 1 — 0,0001285190

5) t. Die täglichen tropischen Bewegungen der Satelliten, in Hunderttheilen des Quadranten ausgedrückt, sind § 11 angegeben; die siderischen sind 0,0000424 kleiner, also:

   Sat. I....n = 226,0988391; $t = \frac{400}{n}$
   „ II....n' = 112,8385821; $t' = \frac{400}{n'}$
   „ III....n'' = 55,9084536; $t'' = \frac{400}{n''}$
   „ IV....n''' = 23,9678570; $t''' = \frac{400}{n'''}$

6) $1+\frac{BB}{aa}(\varrho-\frac{1}{2}\varphi)$. Die Méc. Cél. IV. p. 125 gibt den Werth von $\varrho-\frac{1}{2}\varphi = 0{,}0219013$. Herr Damoiseau gibt $\varrho = \frac{1}{13{,}492} = 0{,}074118$, woraus, verbunden mit $\varphi = 0{,}098799$ (Méc. Cél. IV. p. 125), $\varrho-\frac{1}{2}\varphi = 0{,}0247185$ folgt. Die erste Angabe setzt die Werthe der in Halbmessern des Jupiter ausgedrückten Entfernungen der Satelliten $\left(=\frac{a}{B}\right)$ so voraus, wie ich sie § 9 angeführt habe; dass Herr Damoiseau daran etwas geändert habe, ist nicht wahrscheinlich. Ich habe $\varrho-\frac{1}{2}\varphi = 0{,}0247185$ und diese Werthe von $\frac{a}{B}$ angenommen und damit die Werthe von

$$1+\frac{BB}{aa}(\varrho-\tfrac{1}{2}\varphi)$$

für

   Sat. I = 1,000761206
   „ II = 1,000300703
   „ III = 1,000118188
   „ IV = 1,000038206

Unter diesen Voraussetzungen berechnet, ergeben die aus meinen Beobachtungen abgeleiteten Werthe von Δ, Δ', Δ'', Δ''' den Werth von μ:

   Sat. I....1048,381; m. F. = ± 1,5514
   „ II....1048,153 „ ± 1,1817
   „ III....1048,143 „ ± 0,4628
   „ IV....1047,746 „ ± 0,2848

und aus allen vier erhält man endlich:

$$\mu = 1047{,}879;\ \text{m. F.} = \pm\, 0{,}235.$$

Um aus jedem der vier Satelliten diesen Werth von μ zu erhalten, darf man das ihm zugehörige Δ nur um

$$+0''{,}0178,\quad +0''{,}0154,\quad +0''{,}0238,\quad -0''{,}0211$$

ändern, welche Aenderungen sämmtlich beträchtlich kleiner sind als die mittleren Fehler der Bestimmungen der Entfernungen der Satelliten.

23.

Ein zweites Resultat von hinreichendem Gewichte um ihm einige Aufmerksamkeit zu erwerben, ist die aus den Beobachtungen hervorgehende Bestimmung der drei Elemente, von welchen der Ort des Satelliten IV in seiner elliptischen Bahn abhängt. Ich habe § 20 gefunden:

$$\delta\vartheta''' = +\,59''{,}6;\ \text{m. F.} = \pm\,27''{,}6$$
$$\delta(e'''\sin\omega''') = -\,30{,}0 \quad „ \quad \pm\,23{,}0$$
$$\delta(e'''\cos\omega''') = +\,59{,}0 \quad „ \quad \pm\,17{,}2$$

und werde jetzt die dieser Bestimmung entsprechenden

Werthe von ϑ''', ω''' und e''' für den etwa in die Mitte der Zeiten der Beobachtungen fallenden Anfang von 1836 aufsuchen.

Die im 11. § enthaltenen Formeln für die mittleren Bewegungen ergeben für den Anfang von 1836:

$$\vartheta''' = 9^0\,31'\,49,''8$$
$$\omega''' = 241\;37\;58,7$$

und aus dem grössten Gliede der Mittelpunktsgleichung des Satelliten $= 2988,''09$ (§ 8) folgt die Excentricität $e''' = 0{,}00724338$. Man findet hieraus, in Secunden ausgedrückt:

$$e'''\sin\omega''' = -1314,''65; \quad e'''\cos\omega''' = -709,''85;$$

also die meinen Beobachtungen entsprechenden Werthe derselben Grössen:

$$-1344,''65 \quad \text{und} \quad -650,''85,$$

woraus

$$\omega''' = 244^0\,10'\,18,''8; \quad e''' = 0{,}00724254$$

hervorgehen. Diesen Beobachtungen zufolge wäre also für 1836:

$$\vartheta''' = 9^0\,32'\,49,''4$$
$$\omega''' = 244\;10\;18,8$$
$$e''' = 0{,}00724254.$$

Das letzte Resultat, welches aus meinen Beobachtungen gezogen werden kann, ist die Bestimmung der Lage der Ebenen der Bahnen der Satelliten III und IV. Im 20. § ist dafür gefunden:

$$\sin I''\,\delta N'' = +118,''3; \text{ m. F.} = \pm 56,''7$$
$$\delta I'' = +107,6 \quad " \quad \pm 61,7$$
$$\sin I'''\,\delta N''' = +78,0 \quad " \quad \pm 31,3$$
$$\delta I''' = -114,9 \quad " \quad \pm 36,0$$

Die Tafeln des Satelliten III ergeben für den Anfang von 1836:

$$I''\cos N'' = +1^0\,59'\,1,''17; \quad I''\sin N'' = -1^0\,58'\,52,''91;$$

woraus

$$N'' = 315^0\,1'\,59,''4, \quad I'' = 2^0\,48'\,13,''3$$

hervorgehen. Eben so ergeben die Tafeln des Satelliten IV:

$$I'''\cos N''' = +2^0\,4'\,7,''74; \quad I'''\sin N''' = -1^0\,46'\,17,''78$$

und damit

$$N''' = 319^0\,25'\,31,''1, \quad I''' = 2^0\,43'\,25,''4.$$

Setzt man die durch die Heliometerbeobachtungen angedeuteten Unterschiede hinzu, so erhält man zur Bestimmung der Lage der veränderlichen Ebenen der Bahnen für den Anfang von 1836:

$$N'' = 315^0\,41'\,51,''8 \quad N''' = 319^0\,53'\,12,''0$$
$$I'' = 2\;50\;0,9 \quad I''' = 2\;41\;30,5$$

24.

Ich habe die im vorigen § enthaltenen Resultate nicht unterdrückt, weil ihre mittleren Fehler ihnen einiges Gewicht beilegen; ich halte dieses Gewicht aber nicht für hinreichend zu ihrer befriedigenden Begründung. Indessen kann dadurch anschaulich werden, dass eine Reihe von Heliometerbeobachtungen, welche in der Absicht angestellt wird, dadurch Beiträge zur Bestimmung der Elemente der Bahnen der Jupiterssatelliten zu erlangen, in Verbindung mit den Beobachtungen der Finsternisse und der Vorübergänge der Satelliten und ihrer Schatten, zu einer vollständigeren Kenntniss der merkwürdigen Bewegungen im Jupiterssysteme führen kann, als man durch die letzteren allein erlangt hat. Vorzüglich lehrreich würde die erstere in Beziehung auf die Lage der Ebenen der Bahnen werden, worüber die Beobachtungen der Finsternisse viel zu wünschen übrig lassen. Diese führen nämlich zur Kenntniss der Lage der Ebenen nur durch die Verschiedenheit ihrer Dauer in den verschiedenen Stellungen des Jupiter; welche Dauer zugleich von anderen Elementen abhängt, deren Einfluss von dem Einflusse der Lagen der Ebenen nicht auf eine Art getrennt werden kann, welche die Unsicherheit der Bestimmung der letzteren nicht beträchtlich vermehrte. Die Lage der Ebene der Bahn des Satelliten I kennt man z. B. nichtsowohl, als man nur weiss, dass ihre Neigung gegen die Ebene des Jupitersäquators nicht sehr beträchtlich ist; auch scheint die jetzige Kenntniss der Ebenen der Bewegungen der übrigen Satelliten noch nicht Unsicherheiten auszuschliessen, welche so gross oder grösser sind, als die im vorigen § gefundenen Unterschiede für die beiden äussersten derselben. Ueber die Ebenen der Bahnen der beiden innersten Satelliten geben meine Beobachtungen indessen keine Andeutung, indem sie sich nicht auf die dazu unentbehrlichen Positionswinkel ausdehnen; allein man muss weder dieses noch den nicht genügenden Erfolg, welchen meine, in einer anderen Absicht gemachten Beobachtungen in Beziehung auf einige der Elemente des Jupiterssystems gelegentlich gehabt haben, zum Maasse des Erfolges machen, welchen eine, die Bestimmung dieser Elemente beabsichtigende Beobachtungsreihe haben kann.

[Es folgen nun die Tafeln für die Bewegungen der Jupiterssatelliten.]

169. Analyse der Finsternisse.*)

(Astron. Untersuchungen II, p. 95.)

Die folgende Abhandlung ist der Theorie der Erscheinungen gewidmet, welche sich an verschiedenen Punkten der Erde zeigen, wenn ihre und zweier Himmelskörper relative Bewegung den näheren zwischen sie und den entfernteren führt; einer Theorie, welche oft, vielleicht öfter als irgend eine andere, Bemühungen der Astronomen und Geometer hervorgerufen hat. Nach so vielen vorangegangenen Arbeiten bedarf die meinige einer Einleitung, welche nachweiset, was jene noch zu wünschen übrig liessen.

Jede Theorie der Finsternisse muss von der Bedingung ausgehen, dass die Ränder zweier Gestirne, deren Grössen gegeben sind, sich berühren; also wenn sie analytisch entwickelt werden soll, von der Gleichung zwischen den Oertern der Mittelpunkte der beiden Gestirne und des Auges, welche der Ausdruck dieser Bedingung ist. Ich werde daher die angewandten verschiedenen Arten dieses Ausdruckes darstellen und mit der in der bekannten Projectionsmethode der Sonnenfinsternisse enthaltenen anfangen.

Wenn man die Sonne, aus einem beliebigen, der täglichen Bewegung folgenden Gesichtspunkte auf der Erde, auf eine Ebene projicirt, welche senkrecht auf der, die Mittelpunkte der ersteren und der Erde miteinander verbindenden Linie, durch den Mittelpunkt des Mondes gelegt ist, so zeigt dieser Entwurf den Mittelpunkt der Sonne in derselben Curve bewegt, in welcher der Gesichtspunkt von ihm aus bewegt erscheint; den Mittelpunkt des Mondes da, wo er sich wirklich befindet. Die Sonne und den Mond selbst zeigt der Entwurf als Ellipsen, erzeugt durch die Schnitte der Projectionsebene und der sie einhüllenden Kegel, deren Spitzen im Gesichtspunkte liegen; welche Ellipsen aber kaum von den grössten Kreisen zweier Kugeln verschieden sind, deren erste von dem die Sonne einhüllenden Kegel eingehüllt wird, während ihr Mittelpunkt sich in der Projectionsebene befindet und deren andere der Mond selbst ist. Dieser Entwurf entspricht vollkommen der Erscheinung der Sonne und des Mondes am Himmel: die Bedingung, dass die Ränder beider Gestirne sich berühren, erlangt also durch den Entwurf den Ausdruck, dass die in ihm gemessene Entfernung gleichzeitiger Oerter beider, der Summe (oder dem Unterschiede) der auf der Projectionsebene entworfenen Halbmesser der Sonne und des Mondes gleich werde. — Ich benutze diese Gelegenheit, über die vielfältig behandelte Projectionsart der Sonnenfinsternisse einige Worte zu sagen. Die, die Flamsteed im Jahre 1680 bekannt machte**), ist eine Näherung an die hier erklärte; von ihr abweichend durch die Substitution der orthographischen Projection des Parallels des Gesichtspunkts, statt der perspectivischen seiner Bewegung, und durch die Entwerfung der Sonnenkugel aus dem Mittelpunkte der Erde, statt aus dem Gesichtspunkte. Hierdurch wird sie leichter ausführbar, ohne so unrichtig zu werden, dass sie nicht angewandt werden dürfte, wenn nur eine Näherung verlangt wird. Die Ehre ihrer ersten Erfindung tritt Flamsteed dem berühmten Baumeister Sir Christopher Wren ab, der jedoch nie etwas darüber bekannt gemacht hat; auch Dominicus Cassini ist, wahrscheinlich durch eigene Kraft, darauf geführt worden. — Später hat Lambert die Eigenschaft der stereographischen Projection, jeden Kreis als Kreis darzustellen, angewandt, um dadurch die Zeichnung der Ellipse zu vermeiden, welche der orthographische Entwurf des Parallels ist***). Lagrange hat eine sinnreiche Construction angegeben†), wodurch die Flamsteed'sche so verändert wird, dass sie die Entfernung zeigt, in welcher die Mittelpunkte der Sonne und des Mondes am Gesichtspunkte erscheinen; allein für die Zeichnung der Finsternisse wird dadurch nichts gewonnen, da sie zugleich die Anwendung des scheinbaren Halbmessers des Mondes fordern würde, welcher nicht leichter zu erlangen ist, als der in der früheren Entwerfungsart vorausgesetzte Halbmesser des Entwurfes der Sonne von dem Gesichtspunkte aus. Wollte man die Lagrangesche Construction auf Fixsternbedeckungen anwenden, so würde sie erst durch ihre Verbindung mit dem scheinbaren Halbmessers des Mondes so richtig werden, als die Flamsteed'sche unmittelbar ist.

*) [Abh. X aus 356 d. a. Verz. — Der 1. Abschnitt findet sich, im Wesentlichen, Astr. Nachr. **14**, p. 129 (300 d. a. Verz.); der Inhalt des 3. Abschn., in ähnlicher Darstellung, Astr. Nachr. **7**, p. 1 (Abh. 26); ein Theil des 4. Abschn. in Astr. Nachr. **7**, p. 121 (234 d. a. Verz.); vgl. auch 229* und 234*. — Br. m. O. II. 322. 324.]

**) In einem Werke, welches in Delambre's Hist. de l'Astr. du 18. Siècle, p. 93 angeführt, mir aber unbekannt geblieben ist.

***) Beiträge zum Gebrauche der Mathematik. II. Theil. 2. Abschn. S. 727 etc. Berlin 1770.

†) Berliner Astr. Jahrb. für 1781. S. 41 etc.

Ein anderer Ausdruck der Bedingung der Ränderberührung ist der ganz dem Augenscheine folgende, nämlich der, dass die Entfernung der scheinbaren Oerter der Mittelpunkte der Sonne und des Mondes der Summe (oder dem Unterschiede) ihrer scheinbaren Halbmesser gleich sei. Dieser Ausdruck ist am häufigsten, auch in neuerer Zeit, verfolgt worden. Indem die darin angewandten scheinbaren Grössen nur durch Rechnung, für jeden besonderen Fall, gefunden werden können, kann er nicht die Grundlage einer allgemeinen Theorie der Finsternisse sein. Indessen haben die Astronomen seine Anwendung dadurch erleichtert, dass sie den geocentrischen Ort und Halbmesser der Sonne, statt der scheinbaren angenommen, dagegen aber den Unterschied der Horizontalparallaxen des Mondes und der Sonne statt der ersteren in der Rechnung angewandt haben; wodurch ihr Resultat nicht mehr als einige Hundertelsecunden fehlerhaft werden kann.

Den dritten Ausdruck derselben Bedingung hat LAGRANGE in der wichtigen Abhandlung erlangt, in welcher er zuerst die analytische Geometrie auf die Theorie der Finsternisse angewandt hat*). Er geht von der Gleichung aus, welche bedingt, dass die Entfernung der scheinbaren Oerter der Gestirne der Summe (oder dem Unterschiede) der scheinbaren Halbmesser gleich sei; allein er schafft diese scheinbaren Grössen daraus fort, indem er auf den Mittelpunkt der Erde sich beziehende dafür einführt. Um der nur solche Grössen enthaltenden Gleichung die einfachste Form zu geben, in welcher LAGRANGE sie darstellt, waren verschiedene Vernachlässigungen nothwendig, von welchen er zwar nachweiset, dass sie die Anwendungen wenig beeinträchtigen, welche aber doch den Wunsch erregen, dass sich ein Mittel finden möge, einer Gleichung, welche die Grundlage jeder weiteren Analyse der Finsternisse werden soll, bei gleicher Einfachheit geometrische Strenge zu geben. Wenn der unsterbliche Geometer, dem wir die angeführte Abhandlung verdanken, nicht die Absicht gehabt hätte, die Hülfsmittel der analytischen Geometrie an einem Beispiele in helles Licht zu stellen, sondern wenn er nur seine Grundgleichung der Analyse der Finsternisse hätte erlangen wollen, so würde er sie vielleicht aus der oben erklärten Projection entnommen haben, welche wirklich nichts Anderes ist als die graphische Darstellung dieser Gleichung. DIONIS DU SÉJOUR ist auf diese Art zu der Grundgleichung gelangt**).

*) Berliner Astr. Jahrb. für 1782. S. 46.

**) Traité Analytique etc. Tome I. Chap. I. Dieses Werk ist zwar erst 1786 erschienen, jedoch aus früher schon gedruckten Abhandlungen zusammengesetzt.

Die in der folgenden Abhandlung enthaltene Analyse der Finsternisse geht von einer Gleichung aus, welche geometrische Richtigkeit mit der grössten Einfachheit vereinigt. Diese Gleichung ist nichts Anderes, als der Ausdruck der Bedingung, dass das Auge sich in der einen oder der anderen der beiden, beide Gestirne einhüllenden Oberflächen befinden muss, wenn es eine äussere oder eine innere Berührung ihrer Ränder sehen soll: vorausgesetzt, dass die Gestirne Kugeln sind, ist sie also die Gleichung des geraden Kegels. — Da diese nur in ihrer einfachsten Gestalt erscheint, wenn eine der Axen der rechtwinkligen Coordinaten, der Axe des Kegels parallel genommen wird, so ist hierdurch die Richtung jener Axe bestimmt, indem sie dieselbe ist, in welcher das eine der beiden Gestirne von dem anderen erscheint. Nachdem sowohl diese Richtung, als auch der den Kegel erzeugende Winkel und der Ort seiner Spitze, aus den Oertern und Halbmessern beider Gestirne abgeleitet worden sind, kommt ferner nur der Ort eines von ihnen in Betracht, wodurch die Analyse der Bedingung der Ränderberührung bedeutend vereinfacht wird. Der erste Abschnitt der folgenden Abhandlung enthält Alles was zur Erfindung der in der Grundgleichung dieser Analyse vorkommenden Grössen erforderlich ist. Ich füge ihm die Bemerkung hinzu, dass alle Aufgaben, welche die gegenseitige Stellung zweier, der Einwirkung ihrer Parallaxen unterworfenen Gestirne betreffen, ihre einfachste Auflösung erhalten, wenn die Oerter derselben auf den Punkt der Himmelskugel bezogen werden, welcher die Richtung von dem einen zu dem anderen bezeichnet; welcher Punkt der ist, wo grösste Kreise, durch die von jedem beliebigen Punkte aus gesehenen Oerter der Gestirne gelegt, sich durchschneiden. Ferner bemerke ich, dass eine Projection des Mondes und der Bewegung des Gesichtspunkts, aus der Spitze des Schattenkegels auf jede beliebige Ebene, die Zeiten der Ränderberührungen vollkommen genau bestimmt; z. B. auf die, senkrecht auf die Axe des Kegels, durch den Mittelpunkt der Erde gelegte Ebene, auf welcher der Mond als ein Kreis, das Parallel als eine Ellipse erscheint; oder auf die Ebene des Erdäquators, auf welcher der Mond die Ellipse, das Parallel der Kreis wird.

Nach der Erlangung der wahren Grundgleichung der Analyse der Finsternisse, kann auch eine wahre Auflösung der Aufgaben gesucht werden, welche den Hergang einer Finsterniss auf der ganzen Erde betreffen. Diese Auflösung hat keine Schwierigkeit, wenn man die Aufgaben dadurch verändert, dass man die Erde als

kugelförmig ansieht; sie wird noch kürzer, wenn auch statt des Schattenkegels ein Cylinder angenommen wird. Worauf sie sich dann reducirt, habe ich am Anfange des § 32 angeführt. Die Auflösung der so erleichterten Aufgaben ist seit langer Zeit bekannt, auch gewöhnlich angewandt worden, um Linien auf der Erde kennen zu lernen, auf welchen die eine oder andere Art der Erscheinung einer bevorstehenden Sonnenfinsterniss zu erwarten war. Diese Linien sind häufig auf Erdkarten dargestellt worden, welche einen Ueberblick über die Art, wie eine Finsterniss sich auf der Erde zeigen wird, gewähren, und auch den Nutzen haben können, die Punkte kennen zu lehren, wo Beobachtungen der Finsterniss, am vortheilhaftesten für einen oder den anderen Zweck, angestellt werden können. Diesen Nutzen haben solche Darstellungen der Durchgänge der Venus durch die Sonne gehabt, indem sie die Wahl der Oerter leiteten, wohin die Astronomen, welche diese Erscheinungen zu beobachten beabsichtigten, sich in den Jahren 1761 und 1769 begaben. — Wenn die erwähnten Linien nur dieses Zweckes wegen gesucht werden, so erscheinen Fehler ihrer Züge von einem oder ein paar Grad als unerheblich; destomehr, da man nie rathsam finden wird, einen Beobachtungsort sehr nahe an der Grenze zu wählen, wo die Erscheinung, welche wahrgenommen werden soll, aufhört sichtbar zu sein. Die in dem jetzigen Zustande der Astronomie noch vorhandenen Unsicherheiten der Elemente einer Finsterniss widersetzen sich auch der Erlangung eines, ein oder einige Zehntel eines Grades verbürgenden Erfolges. Ich bin daher der Meinung, dass jede Vermehrung der Arbeit, welche nöthig ist, um Punkte dieser Linien genauer kennen zu lernen, als sie aus der Auflösung der erleichterten Aufgaben hervorgehen, nicht durch ihren Nutzen gerechtfertigt werden kann; also auch, dass ein Versuch ihrer, den gegebenen Elementen einer Finsterniss genau angemessenen Bestimmung, nur durch das mathematische Interesse der Aufgabe selbst hervorgerufen werden darf. Dieses Interesse aber kann durch eine Anwendung der allgemeinen Methode, eine anfängliche Näherung nach und nach zu verbessern, nicht befriedigt werden; welche Anwendung ihre Belohnung immer nur in ihrem Resultate findet; in dem gegenwärtigen Falle also in einem Resultate, dessen Werth wenigstens zweifelhaft ist.

Ich habe streng richtige und directe Auflösungen der Aufgaben gesucht, welche den ganzen Hergang der Finsternisse betreffen. Der zweite Abschnitt der Abhandlung verfolgt die Absicht, die Punkte der Erde zu finden, wo die Ränderberührung zweier Gestirne zu einer gegebenen Zeit des ersten Meridians wahrgenommen wird; sowie auch diejenigen dieser Punkte auszuzeichnen, welche den Grenzen des Raumes angehören, wo die Finsterniss sichtbar wird; und endlich die Grenzen der Zeit, sowohl ihrer Sichtbarkeit, als auch des Stattfindens besonderer Verhältnisse derselben, zu bestimmen. — Indem die Ausdrücke der Oerter der in Betracht kommenden Gestirne transcendente Functionen der Zeit sind, können gesuchte Zeiten nur durch transcendente Gleichungen bestimmt werden; die Analyse der Aufgabe muss diese Gleichungen rein darstellen und die etwa vorhandenen, ihre Auflösung leitenden Eigenschaften geltend machen. Punkte der Curve auf der Erde, auf welcher die Ränderberührung zu gegebener Zeit sichtbar ist, werden durch eine quadratische Gleichung bestimmt. Der Raum wo eine Finsterniss sichtbar wird, wird durch zwei verschiedenartige Curven begrenzt, deren eine die Punkte verbindet, wo der Auf- oder Untergang des Berührungspunkts seine Sichtbarkeit aufhören lässt, die andere die Punkte, wo die Ränderberührung das Maximum der Finsterniss ist. Jede dieser Curven kann entweder ganz zusammenhangen, oder aus zwei getrennten Theilen bestehen; im Falle von Durchgängen der unteren Planeten durch die Sonne ist gewöhnlich nur die erste vorhanden. Punkte dieser ersten Curve werden durch eine Gleichung des 4. Grades bestimmt, welche in der Form hervortritt, deren Zerlegung in zwei Factoren des zweiten Grade sich im 1. Bande dieses Werks, Abh. VI, § 10 [Abh. 51, p. 337] gegeben habe. Diese Zerlegung, verbunden mit derselben Transformation, durch welche Gauss die in seiner berühmten Abhandlung: Determinatio attractionis etc. betrachtete astronomische Aufgabe, und Jacobi schwierige geometrische Aufgaben, aufgelöset haben, hat die zur vollständigen Bestimmung von Punkten der ersten Curve nöthigen Mittel geliefert. — Gegebenen Zeiten zugehörige Punkte der zweiten Curve werden dagegen durch eine Gleichung des 8. Grades bestimmt, deren Beschaffenheit aber ihre Auflösung leicht genug macht. — Ich habe den zweiten Abschnitt, der schon fast Zweidrittel der ganzen Abhandlung ausfüllt, von welchem aber wohl nur das im 32. § Enthaltene Anwendung finden wird, nicht noch weiter ausdehnen wollen, und daher nur Aufgaben verfolgt, welche, wenn auch vielleicht nicht die allein interessirenden, doch die sind, deren Auflösung zur Erreichung des beabsichtigten, oben bezeichneten Ziels erforderlich war. — Ausser dem Angeführten enthält dieser Abschnitt noch die Bestimmung der Curve, auf welcher die Finsterniss central gesehen wird.

Die im dritten Abschnitte enthaltene Bestimmung der Finsternisse für gegebene Punkte der Erde ist von der Schwierigkeit frei, welche die Excentricität der Erdmeridiane in die Auflösung aller Aufgaben bringt, durch welche Punkte bestimmt werden sollen, wo die Ränderberührung, oder besondere sie begleitende Umstände, sichtbar werden; sie fordert aber die Auflösung einer transcendenten Gleichung, welche hier durch ein schnell convergirendes Verfahren erlangt wird. In der Anwendung verlangt man weit weniger; nämlich nur eine ohngefähre Vorausbestimmung der Zeiten und Oerter des Anfanges und Endes einer Finsterniss, deren Genauigkeit zureichend ist, die Aufmerksamkeit jedes Beobachters, wo er sich auch befinden mag, gehörig zu leiten. Die hierzu hinreichende geringe Annäherung kann durch eine kurze, mit vier Decimalstellen der Logarithmen zu führende Rechnung erlangt werden, vorausgesetzt dass die Ephemeriden für jede Finsterniss einige, in den Rechnungen für alle Beobachtungsörter Anwendung findende Zahlen angeben. Seit der ersten Bekanntmachung dieses früher entbehrten, das Gelingen der Beobachtungen befördernden Hülfsmittels, theilt Herr Prof. ENCKE die Zahlen, welche es voraussetzt, für alle vorkommenden Bedeckungen der Sonne, der Planeten und der Fixsterne im astronomischen Jahrbuche mit.

Der vierte Abschnitt handelt von der Anwendung der Beobachtungen der Finsternisse; von einem Gegenstande, dessen Wichtigkeit für die practische Astronomie die besondere Vorliebe rechtfertigt, welche er immer auf sich gezogen hat. Die zahlreichen Rechnungen, welche ausgeführt worden sind, um durch Beobachtungen der Sonnenfinsternisse, Sternbedeckungen und Durchgänge der unteren Planeten durch die Sonne, die Mittagsunterschiede der Beobachtungsörter zu bestimmen, sind, vielleicht mit einzelnen Ausnahmen, einer Methode gefolgt, welche dem sich dem Beobachter zeigenden Hergange der Erscheinung ganz getreu bleibt. Sie setzt die wahren Oerter der Gestirne, so wie die Tafeln oder Ephemeriden sie für die auf den ersten Meridian bezogene Beobachtungszeit ergeben, als bekannt voraus; dann bestimmt sie durch Rechnung ihre scheinbaren Halbmesser, ihre scheinbaren Entfernungen vom Pole und ihre im Sinne des Winkels am Pole stattfindenden Parallaxen; ferner sucht sie in dem sphärischen Dreiecke zwischen dem Pole und den Mittelpunkten der beiden Gestirne, dessen Seiten schon bekannt geworden sind, den Winkel am Pole, der, durch Hinzufügung des Einflusses der Parallaxen auf ihn, in den ähnlichen geocentrischen Winkel verwandelt wird; dieser, verbunden mit der aus den Tafeln oder Ephemeriden entlehnten Geschwindigkeit seiner Aenderung, führt zur Kenntniss der Zwischenzeit zwischen den Momenten der Beobachtung und der Zusammenkunft beider Gestirne, und dadurch zu dem, sich auf den Meridian des Beobachtungsorts beziehenden Ausdrucke des letzteren Moments. — Diese Methode ist von LALANDE*) und vollständiger und einfacher von BOHNENBERGER**) entwickelt worden, welche beide für den erwähnten Pol den der Ecliptik annehmen und also unter der Zeit der Zusammenkunft die Zeit verstehen, wenn beide Gestirne gleiche Länge haben; GERSTNER hat die Rechnungsvorschriften auf den Pol des Aequators bezogen, also auch die Zeit, wenn beide Gestirne gleiche Geradeaufsteigung haben, als Zusammenkunftszeit angesehen***). CARLINI aber hat diese Methode für den Fall ihrer Anwendung auf Fixsternenbedeckungen wesentlich verbessert†), indem er vorschreibt, die Parallaxen nicht für den wahren Ort des Mittelpunkts des Mondes, sondern für den scheinbaren Ort wo der Stern seinen Rand berührt, d. h. für den Ort des Sterns selbst, zu berechnen. Durch diese Vorschrift wird die Aufsuchung des scheinbaren Halbmessers und der wahren Länge des Mondes vermieden. — Vielfältige vorhandene Bemühungen, die Formeln, welche die Wirkungen der Parallaxe ausdrücken, geschmeidiger zu machen, müssen auch zu den durch diese Methode veranlassten gezählt werden.

Die eben beschriebene Rechnungsart hat die Unvollkommenheit, dass sie Länge, Breite und Horizontalparallaxe der Gestirne für die der Beobachtungszeit entsprechende Zeit des ersten Meridians verlangt, während diese doch erst nach der Bestimmung des durch die Beobachtung gesuchten Mittagsunterschiedes bekannt wird. Sie würde nur das wahre Resultat einer Beobachtung ergeben, wenn die Einflüsse eines Fehlers des als näherungsweise bekannt angenommenen Mittagsunterschiedes auf alles von ihm Abhängige bis zum Ende der Rechnung verfolgt würden, was aber, zumal ohne die von CARLINI verlangte Verbesserung, die Rechnung nicht unbeträchtlich vermehren würde. Ferner hat sie die Unvollkommenheit, dass sie, wenn beide Gestirne Parallaxen haben, entweder doppelte Rechnung, oder eine, wenn auch nicht grosse, Vernachlässigung fordert. Endlich sind die Einflüsse unbestimmter, kleiner Aenderungen der der Rechnung zum Grunde gelegten Elemente nicht vollständig entwickelt worden.

*) Astronomie. 3. Edition. § 1970 etc.
**) Geogr. Ortsbestimmungen. Göttingen 1795. S. 323 etc.
***) Berliner Astr. Jahrb. für 1798. S. 128.
†) v. ZACH, Monatl. Corresp. Bd. XVIII. S. 528.

Weit grössere Ansprüche auf Anwendung als diese Methode hätte die von LAGRANGE entwickelte gehabt*), für deren nichts destoweniger stattgefundene Vernachlässigung man vergebens einen haltbaren Grund suchen würde. Sie geht von der, nur geocentrische Data enthaltenden, die Ränderberührung bedingenden Gleichung aus, und leitet daraus eine directe Auflösung der Aufgabe her. LAGRANGE selbst entwickelt sie so, dass die Zeit der gleichen Länge der beiden Gestirne als ihre unbekannte Grösse erscheint. Der scharfsinnige CLAUSSEN ist, so viel ich weiss, der Erste, welcher die Vorzüge einer ähnlichen Ansicht der Aufgabe gewürdigt und darüber einen Aufsatz, in welchem er die Zeit der kleinsten geocentrischen Entfernung zur unbekannten Grösse macht, geschrieben hat**). Diese Ansicht habe auch ich im vierten Abschnitte der Abhandlung verfolgt. Ich bin von der Gleichung ausgegangen, welche die Bedingung der Ränderberührung ausdrückt; von derselben, von welcher alle in dieser Abhandlung gegebenen Auflösungen ausgehen. Diese Gleichung hat den wesentlichen Vorzug, dass sie die Coordinaten des entfernteren Gestirns, nachdem sein Einfluss auf die Elemente der Finsterniss übertragen worden ist, nicht enthält; wovon die Folge ist, dass der zusammengesetztere Fall, in welchem beide Gestirne Halbmesser und Parallaxen zeigen, bis auf einen hier wenig hervortretenden Unterschied sich auf den einfachern reducirt, in welchem das eine ein Fixstern ist; so dass Beobachtungen von Finsternissen beider Fälle nach der dem letzteren angemessenen Vorschrift berechnet werden können, ohne dass durch diese Zusammenziehung beider Gestirne etwas von der vollkommenen Genauigkeit der Grundgleichung verloren wird. Ich habe den Mittagsunterschied des Beobachtungsorts zur unbekannten Grösse gemacht und die Auflösung der Gleichung so entwickelt, dass sie selbst die Reduction der Beobachtung von Sternenzeit auf Sonnenzeit, oder umgekehrt, nicht fordert und also auch dazu den Mittagsunterschied nicht als bekannt voraussetzt. Die Einflüsse unbestimmter, kleiner Aenderungen der Rechnungselemente habe ich leicht vollständig, und in den Verbindungen in welchen sie sich bei einer Finsterniss äussern, angeben können.

Die Finsternisse sind immer als Erscheinungen angesehen, welche keinen Einfluss der Strahlenbrechung erfahren. HANSEN hat aber bemerkt, dass sie von diesem Einflusse wirklich nicht frei sind, obgleich er meistens sehr klein ist***); welches letztere jedoch das Interesse der Bemerkung nicht vermindert. Jeder zum Auge gelangende Strahl würde ohne seine Brechung über ihm fortgehen und die Lothlinie da schneiden, wo die Asymptote an seine krumme Bahn sie wirklich durchschneidet; die an einem Punkte der Erde sichtbare Ränderberührung ist also die jenem Punkte zugehörige, weshalb die Befreiung ihrer Beobachtung von dem Einflusse der Strahlenbrechung durch die Versetzung des Beobachtungsorts an jenen Punkt erlangt wird. Wenn der Beobachtungsort selbst über der Oberfläche des Rotationssphäroids liegt, welche für die der Erde angenommen worden ist, so kommt seine Erhöhung offenbar zu der von der Strahlenbrechung erzeugten hinzu; dass ihr Einfluss in genau geführten Rechnungen nicht immer unbeachtet bleiben darf, hat, so viel ich weiss, zuerst Herr Prof. GERLING erinnert*).

Auf welche Art die Berechnung von Beobachtungen der Finsternisse die Strahlenbrechung und die eigene Erhöhung des Beobachtungsorts berücksichtigen muss, findet man am Ende des vierten Abschnittes angeführt. Die den Hergang einer Finsterniss auf der Erde im Allgemeinen betreffenden, im zweiten Abschnitte aufgelösten Aufgaben, können keine Rücksicht auf die eigenen Erhöhungen der Punkte der physischen Oberfläche der Erde nehmen, da diese keinem Gesetze folgen; die von der Strahlenbrechung herrührende Erhöhung würden sie aber berücksichtigen können, indem, statt der Coordinaten von Punkten der ellipsoidischen Oberfläche, die angenommen würden, welche den Punkten zugehören, wo die Asymptoten an die in der Richtung der Axe des Schattenkegels ankommenden Strahlen, die verschiedenen Lothlinien treffen. Diese Punkte werden durch das Gesetz der Strahlenbrechung bestimmt, welches aber viel zu wenig einfach ist, um nicht seiner directen Verfolgung unübersteigliche Schwierigkeiten in den Weg zu legen. Die Umgehung dieser Schwierigkeiten durch die indirecte Erlangung von Zahlenresultaten würde aber, der über den Werth solcher Resultate oben schon gemachten Bemerkung gemäss, keinen Zweck haben; desto weniger, da der Einfluss der Unregelmässigkeiten der Erdoberfläche, welcher meistens grösser ist als der der Strahlenbrechung, nicht berücksichtigt werden kann, auch die Abhängigkeit des letzteren von den (unbekannten) Ständen des Barometers und Thermometers unbeachtet bleiben muss. Ich habe daher die kleinen Einflüsse der Strahlenbrechung nur im vierten Abschnitte berücksichtigt.

Ueber die ganze Abhandlung bemerke ich noch, dass

*) Berliner Astr. Jahrb. für 1782. S. 46 etc.

**) Astron. Nachrichten Nr. 40.

***) Astron. Nachrichten Nr. 347.

*) Astron. Nachrichten Nr. 217.

ich alle Vorschriften der drei ersten Abschnitte in einem durchgehenden [hier ohne numerische Werthe angeführten] Beispiele angewandt habe, welches ich jedoch in dem vierten entbehren zu können glaubte. Hierdurch und durch Erläuterungen der Eigenthümlichkeiten verschiedener Fälle von Finsternissen, ist die Abhandlung weit über den Raum hinaus angewachsen, welcher erforderlich gewesen sein würde, den Gang der darin verfolgten mathematischen Betrachtungen darzustellen. Wenn ich noch grössere Ausdehnung nicht hätte vermeiden wollen, so würde ich mich noch auf die besondere Betrachtung zweier Fälle eingelassen haben, in welchen das Verhältniss der Grösse der Erde zu der sie treffenden Ausdehnung des Schattenkegels, von dem bei den übrigen Arten von Finsternissen stattfindenden so beträchtlich verschieden ist, dass es der Mühe werth gewesen sein würde, diese Verschiedenheiten geltend zu machen. Der eine dieser Fälle wird durch die Durchgänge der unteren Planeten durch die Sonne, der andere durch die inneren Berührungen der Ränder der Sonne und des Mondes dargeboten: in jenem Falle ist die Grösse der Erde, vergleichungsweise mit der sie treffenden Ausdehnung des Schattenkegels, sehr klein, in diesem sehr gross, aus welchen Verhältnissen, so wie immer aus ähnlichen, Nutzen gezogen werden kann.

Erster Abschnitt.

Grundgleichung der Analyse der Finsternisse.

1.

Die Ränder zweier Gestirne werden in Berührung gesehen, wenn das Auge sich in der einen oder der anderen der beiden Oberflächen befindet, welche beide Gestirne einhüllen. Eine dieser Oberflächen verengt sich zwischen beiden Gestirnen, die andere (insofern eins derselben in jeder Richtung kleiner ist als das andere) über das kleinere hinaus. Befindet das Auge sich in der ersteren, so sieht es die äussere Berührung der Ränder, in der anderen die innere. Die Richtung, in welcher der Berührungspunkt der Ränder erscheint, ist die Richtung der geraden, von dem Auge aus, in der einhüllenden Oberfläche, den Gestirnen zu gezogenen Linie. — Die Grundgleichung der Analyse aller Aufgaben, welche die Ränderberührung zweier Gestirne veranlassen kann, ist daher nichts Anderes als der Ausdruck der Bedingung, dass das Auge sich in der einen oder der anderen der einhüllenden Oberflächen befinde.

Die Analyse der Gleichung der beiden Oberflächen, welche zwei Körper von beliebiger Form einhüllen, ist bekannt; unter Anderen entwickelt sie Laplace in 4. Bande der Mécanique Céleste (Liv. VIII. Chap. VII. Hier soll aber nur der einfachste Fall verfolgt werden, der Fall in welchem beide Gestirne Kugeln, die sie einhüllenden Oberflächen also gerade Kegel sind, deren Spitzen in der ihre Mittelpunkte verbindenden geraden Linie liegen. Das Folgende wird daher unmittelbare Anwendung finden, wenn Gestirne in Betracht kommen, welche keine bekannte Abweichung von der Kugelgestalt besitzen, wie dieses der Fall des Mondes, der Fixsterne, der Sonne und, mit Ausnahme des Jupiter und Saturn, der Planeten ist. Die Ränderberührungen jedes Paars dieser Gestirne können nach den Vorschriften, welche ich entwickeln werde, untersucht werden.

Die Grundgleichung der Analyse der Finsternisse zweier kugelförmigen Gestirne erhält ihre einfachste Gestalt, wenn sie auf ein System sich im Mittelpunkte der Erde rechtwinklig durchschneidender Axen bezogen wird, deren eine der geraden Linie parallel ist, welche die Mittelpunkte beider Gestirne miteinander verbindet. Diese Axe trifft die Himmelskugel an einem Punkte Z, an welchem der Mittelpunkt des entfernteren Gestirns von dem Mittelpunkte des näheren gesehen wird, und dessen Geradeaufsteigung und Abweichung ich durch a und d bezeichnen werde. Die zweite Axe werde ich so legen, dass sie die Himmelskugel an einem Punkte Y trifft, welcher im Declinationskreise von Z, 90° nördlich entfernt von diesem Punkte, in der Geradenaufsteigung a und Abweichung $d + 90^0$ liegt. Die dritte Axe soll einen Punkt X der Himmelskugel treffen, welcher sowohl von Z, als auch von Y einen Quadranten entfernt ist, dessen Geradeaufsteigung $a + 90^0$ ist und dessen Abweichung verschwindet. Bezeichnet man die auf diese Axen bezogenen Coordinaten des näheren Gestirns durch z, y, x, des entfernteren durch z', y', x', so hat die getroffene Wahl der ersten Axe zur Folge, dass die Entfernung des einen Gestirns von dem anderen, welche ich durch G bezeichnen werde, der Unterschied der Coordinaten z und z' ist und dass $y = y'$ und $x = x'$ sind. Man hat also:

$$\left.\begin{aligned} z' - z &= G \\ y' - y &= 0 \\ x' - x &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1$$

Indem die erste Axe jeder durch die Mittelpunkte der beiden Gestirne gelegten Ebene parallel ist, erscheinen diese und auch die Spitze des Schattenkegels, von welchem Punkte des Raumes sie auch gesehen werden mögen, in einem durch den Punkt Z gehenden grössten Kreise der Himmelskugel. Der Mittelpunkt des ent-

fernteren Gestirns erscheint immer dem Punkte Z am nächsten; dann folgt, bei äusseren Berührungen der Ränder, die Spitze des Kegels und endlich der Mittelpunkt des näheren Gestirns; bei inneren Berührungen erscheinen die beiden letzteren in umgekehrter Ordnung. Der Winkel zwischen dem grössten Kreise, auf welchem diese Punkte erscheinen und dem Declinationskreise ZY ist der gemeinschaftliche Positionswinkel beider Gestirne am Punkte Z; ich werde ihn durch p bezeichnen. Wenn man die Entfernung vom Punkte Z, in welcher die Spitze des Schattenkegels erscheint, durch f, die Entfernung dieser Spitze vom Auge durch Δ bezeichnet, so sind die Projectionen der letzteren auf die drei Axen:

$$\Delta \cos f, \quad \Delta \sin f \cos p, \quad \Delta \sin f \sin p,$$

welche Projectionen auch die Unterschiede der Coordinaten der Spitze des Kegels und des Auges sind. Man hat also, wenn man die ersteren durch s und die schon dafür geschriebenen y, x, die letzteren durch ζ, η, ξ bezeichnet, die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Delta \cos f &= s - \zeta \\ \Delta \sin f \cos p &= y - \eta \\ \Delta \sin f \sin p &= x - \xi \end{aligned}$$

oder, nach der Elimination von Δ:

$$\left.\begin{aligned} (s-\zeta) \operatorname{tg} f \cos p &= y - \eta \\ (s-\zeta) \operatorname{tg} f \sin p &= x - \xi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Hierdurch wird der Punkt der Himmelskugel bestimmt, wo die Spitze des Schattenkegels erscheint. Wenn eine Ränderberührung stattfindet, erscheint sie entweder an demselben Punkte oder an dem ihm gerade entgegengesetzten; das erstere offenbar, wenn die Spitze des Schattenkegels in der Richtung von dem Auge nach den Gestirnen, das letztere, wenn sie in der entgegengesetzten liegt; jenes also wenn die Ränderberührung eine äussere und eine sich bei ringförmigen Finsternissen ereignende innere, dieses wenn sie eine sich bei gänzlichen Finsternissen ereignende innere ist. Eine Ränderberührung findet daher statt, wenn f dem den Kegel erzeugenden Winkel gleich ist, welcher Winkel in dem ersten Falle spitz, in dem zweiten stumpf angenommen wird; oder ihre Bedingung ist, dass f den Gleichungen entspreche, welche zwischen den Halbmessern k und k' der beiden kugelförmigen Gestirne, ihren Entfernungen von einander und von der Spitze des Schattenkegels, und dem diesen Kegel erzeugenden Winkel stattfinden.

Diese Gleichungen sind für äussere Berührungen, für welche $s > z$ und $< z'$ ist:

$$(s-z) \sin f = k; \quad (z'-s) \sin f = k';$$

und für innere Berührungen, für welche $s < z$ und $< z'$ ist:

$$(z-s) \sin f = k; \quad (z'-s) \sin f = k';$$

und es folgen daraus:

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{k'z \pm kz'}{k' \pm k} \\ \sin f &= \frac{k' \pm k}{z' - z} = \frac{k' \pm k}{G} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

wo das obere Zeichen den äusseren, das untere den inneren Ränderberührungen zugehört. Wenn s und f diesen Ausdrücken gemäss in den Gleichungen (2) angenommen werden, so werden also diese die Bedingungsgleichungen der Ränderberührung. Der darin vorkommende Positionswinkel p der beiden sich berührenden Gestirne ist entweder auch der Positionswinkel des Berührungspunkts ihrer Ränder oder 180^0 davon verschieden; das erstere oder das letztere, je nachdem der Winkel f spitz oder stumpf angenommen werden muss, also je nachdem die Ränderberührung eine äussere und eine sich bei einer ringförmigen Finsterniss ereignende innere, oder eine sich bei einer gänzlichen Finsterniss ereignende innere ist. Will man f immer spitz annehmen, so muss man den Gleichungen (2) die Vorschrift hinzusetzen, dass in dem Falle einer inneren Berührung bei einer gänzlichen Finsterniss unter p nicht der Positionswinkel des Berührungspunkts der Ränder an dem Punkte Z, sondern der um 180^0 davon verschiedene verstanden werde.

Diese Gleichungen sind die Grundgleichungen der Analyse aller Aufgaben, welche durch die Berührungen der Ränder zweier kugelförmigen Gestirne veranlasst werden können. Das Folgende wird zeigen, wie einfach, vergleichungsweise mit früheren Untersuchungen über denselben Gegenstand, diese Analyse wird, indem man sie von der einfachsten Gestalt der Grundgleichungen ausgehen lässt. Die Einführung des Punktes Z in die Betrachtung, von welcher die Gleichungen (2) die Folge sind, erscheint daher als ein wesentlicher der Schritte, welche zur Vereinfachung der Theorie der Finsternisse nothwendig waren.

2.

Ich werde die im vorigen § vorkommenden Grössen durch solche ausdrücken, welche entweder aus den astronomischen Tafeln oder Ephemeriden entnommen, oder als anderweitig bekannt geworden angesehen werden können.

Die in den Gleichungen (2) vorausgesetzte Lage der Coordinatenaxen, oder die Bestimmung von a und

d, wovon sie abhängt, erhält man durch die Unterschiede der von beiden Gestirnen auf den Aequator und zwei auf ihn senkrechte Ebenen gefällten Perpendikel. Wenn die Entfernung des näheren Gestirns von dem Mittelpunkte der Erde und seine geocentrische Geradeaufsteigung und Abweichung durch r, α, δ bezeichnet und r', α', δ' in ähnlicher Bedeutung für das entferntere angewandt werden, hat man nämlich:

$$\begin{aligned} G\cos d\cos a &= r'\cos\delta'\cos\alpha' - r\cos\delta\cos\alpha \\ G\cos d\sin a &= r'\cos\delta'\sin\alpha' - r\cos\delta\sin\alpha \\ G\sin d &= r'\sin\delta' - r\sin\delta \end{aligned}$$

oder, bequemer für die Rechnung ausgedrückt:

$$\left.\begin{aligned} g\cos d\cos(a-\alpha') &= \cos\delta' - m\cos\delta\cos(\alpha-\alpha') \\ g\cos d\sin(a-\alpha') &= -m\cos\delta\sin(\alpha-\alpha') \\ g\sin d &= \sin\delta' - m\sin\delta \end{aligned}\right\} \ldots (4)$$

in welchen Formeln $r'g$ für G und $r'm$ für r geschrieben sind.

Nachdem die zur Bestimmung der Punkte Z, Y, X der Himmelskugel oder zur Bestimmung der Lage der Coordinatenaxen erforderlichen a und d hierdurch gefunden sind, kann man die Cosinusse der Entfernungen, sowohl des näheren, als auch des entfernteren Gestirns von Z, Y, X, und damit die Coordinaten folgendermaassen ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} z &= r\{\sin d\sin\delta + \cos d\cos\delta\cos(\alpha-a)\} \\ y &= r\{\cos d\sin\delta - \sin d\cos\delta\cos(\alpha-a)\} \\ x &= r\cos\delta\sin(\alpha-a) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (5)$$

$$\left.\begin{aligned} z' &= r'\{\sin d\sin\delta' + \cos d\cos\delta'\cos(\alpha'-a)\} \\ y' &= r'\{\cos d\sin\delta' - \sin d\cos\delta'\cos(\alpha'-a)\} \\ x' &= r'\cos\delta'\sin(\alpha'-a) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (6)$$

Aehnliche Formeln, in welchen statt r, δ, α, die Entfernung des Auges von dem Mittelpunkte der Erde ϱ, seine geocentrische Abweichung, oder die sogenannte verbesserte Polhöhe φ', und seine Geradeaufsteigung, oder die in Theilen des Kreises ausgedrückte Sternenzeit μ geschrieben werden, drücken auch ξ, η, ξ aus, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \varrho\{\sin d\sin\varphi' + \cos d\cos\varphi'\cos(\mu-a)\} \\ \eta &= \varrho\{\cos d\sin\varphi' - \sin d\cos\varphi'\cos(\mu-a)\} \\ \xi &= \varrho\cos\varphi'\sin(\mu-a) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (7)$$

Indem $z' = z + G$, $y' = y$, $x' = x$ sind und G schon durch die Formeln (4) bekannt geworden ist, ist es unnöthig, die Formeln (6) anzuwenden, wenn (5) schon angewandt worden sind, oder umgekehrt.

Die zweite der Formeln (5) (oder (6)) bedarf vor der Anwendung noch einer Abänderung, durch welche sie aufhört y durch den Unterschied zweier weit grösseren Quantitäten zu ergeben; schreibt man dafür:

$$y = r\{\sin(\delta-d)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-a)^2 + \sin(\delta+d)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-a)^2\}$$

so besitzt sie diese Unbequemlichkeit nicht mehr. Die erste Formel kann auf ähnliche Art, nämlich in:

$$z = r\{\cos(\delta-d)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-a)^2 - \cos(\delta+d)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-a)^2\}$$

verändert werden.

Obgleich man Umformungen von Ausdrücken, welche den Zweck haben, diese zur logarithmischen Berechnung geschickt zu machen, lieber selbst hinzufügen, als die Ausdehnung dieser Abhandlung durch ihre jedesmalige Anführung vermehrt sehen wird, und obgleich ich daher dergleichen Umformungen, sowie auch der Anführung jedes Mittels die Berechnung einer Formel zu erleichtern, keinen Platz einzuräumen beabsichtige, so glaube ich doch, eine zweite Art, zur Kenntniss von g, a, d, z, y, x zu gelangen, hier mittheilen zu müssen. Sie setzt voraus, dass man die Entfernung der geocentrischen Oerter beider Gestirne an der Himmelskugel von einander $= \gamma$, und den Positionswinkel, entweder des näheren am entfernteren $= \omega'$, oder des entfernteren am näheren $= 180^0 + \omega$, aus α, δ, α', δ' ableite, was nach den Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}(\omega+\omega') &= \cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta') \\ \sin\tfrac{1}{2}\gamma\sin\tfrac{1}{2}(\omega+\omega') &= \sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta') \\ \cos\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}(\omega-\omega') &= \cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta') \\ \cos\tfrac{1}{2}\gamma\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\omega') &= \sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta') \end{aligned}\right\} \ldots (8)$$

geschieht. In dem Dreiecke zwischen dem Mittelpunkte der Erde und beiden Gestirnen ist der Winkel am Mittelpunkte der Erde $= \gamma$, und wenn man die geocentrische Entfernung des entfernteren Gestirns vom Punkte Z der Himmelskugel durch c bezeichnet, der Winkel am entfernteren Gestirne $= c$, am näheren $= 180^0 - \gamma - c$. Man hat also:

$$\left.\begin{aligned} g\cos c &= 1 - m\cos\gamma \\ g\sin c &= m\sin\gamma \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (9)$$

oder auch:

$$\left.\begin{aligned} g\cos(c+\tfrac{1}{2}\gamma) &= (1-m)\cos\tfrac{1}{2}\gamma \\ g\sin(c+\tfrac{1}{2}\gamma) &= (1+m)\sin\tfrac{1}{2}\gamma \end{aligned}\right\} \ldots (9^*)$$

wodurch man g und c, und dann a, d und den gemeinschaftlichen Positionswinkel beider Gestirne (w) am Punkte Z durch die Formeln

$$\left.\begin{aligned}
\cos(45^0+\tfrac{1}{2}d)\sin\tfrac{1}{2}(w+a-\alpha') &= \sin\tfrac{1}{2}\omega'\cos\left(45^0+\frac{\delta'+c}{2}\right)\\
\cos(45^0+\tfrac{1}{2}d)\cos\tfrac{1}{2}(w+a-\alpha') &= \cos\tfrac{1}{2}\omega'\cos\left(45^0+\frac{\delta'-c}{2}\right)\\
\sin(45^0+\tfrac{1}{2}d)\sin\tfrac{1}{2}(w-a+\alpha') &= \sin\tfrac{1}{2}\omega'\sin\left(45^0+\frac{\delta'+c}{2}\right)\\
\sin(45^0+\tfrac{1}{2}d)\cos\tfrac{1}{2}(w-a+\alpha') &= \cos\tfrac{1}{2}\omega'\sin\left(45^0+\frac{\delta'-c}{2}\right)
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

findet. Durch r, $c+\gamma$, w ausgedrückt, sind:

$$\left.\begin{aligned}
z &= r\cos(c+\gamma)\\
y &= r\sin(c+\gamma)\cos w\\
x &= r\sin(c+\gamma)\sin w
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

In dem Falle der Bedeckung eines Fixsterns sind w, a, d resp. $=\omega'$, α', δ', und c verschwindet, weshalb in diesem Falle nur die Formeln (8), und statt (11)

$$\left.\begin{aligned}
z &= r\cos\gamma\\
y &= r\sin\gamma\cos\omega'\\
x &= r\sin\gamma\sin\omega'
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (11^*)$$

anzuwenden sind.

3.

Die Einheit, wodurch r, r', ϱ, k, k' gemessen werden, ist willkürlich; allein es ist bequem, jede dieser Grössen so ausgedrückt, wie ihre gewöhnliche Angabe in den Tafeln oder Ephemeriden voraussetzt, in die Rechnung zu bringen. Wählt man den Aequatorealhalbmesser der Erde zur Einheit, so sind also die durch dieses Maass gemessenen r, r', k, k' durch die Angaben, welche die Tafeln oder Ephemeriden dafür enthalten, auszudrücken.

Wenn der Mond das nähere Gestirn ist und seine Aequatoreal-Horizontalparallaxe durch π bezeichnet wird; die Sonne das entferntere und ihre Entfernung r' von der Erde durch das allgemeine Maass des Planetensystems, nämlich den mittleren Werth dieser Entfernung, ausgedrückt ist, welchem die Aequatoreal-Horizontalparallaxe Π entspricht, so ist statt r und r' der obigen Formeln:

$$\frac{1}{\sin\pi} \quad \text{und} \quad \frac{r'}{\sin\Pi}$$

anzunehmen. Der in Theilen des Aequatorealhalbmessers der Erde ausgedrückte Halbmesser des Mondes kann als unmittelbar gegeben angenommen werden; und wenn unter H der Halbmesser, in welchem die Sonnenscheibe in der Entfernung $r'=1$ erscheint, verstanden wird, so ist das in den obigen Formeln vorkommende

$$k'=\frac{\sin H}{\sin\Pi}.$$

Man hat also für Sonnenfinsternisse die Ausdrücke von:

$$\left.\begin{aligned}
r &= \frac{1}{\sin\pi}\\
m &= \frac{\sin\Pi}{r'\sin\pi}\\
\sin f &= \frac{1}{r'g}[\sin H \pm k\sin\Pi]\\
s\,\mathrm{tg}\,f &= z\,\mathrm{tg}\,f \pm k\sec f
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (12)$$

anzuwenden. Der Zähler des Ausdruckes von m und der zwischen Klammern eingeschlossene Theil des Ausdruckes von $\sin f$ sind von den Umständen jeder einzelnen Sonnenfinsterniss unabhängig und können daher für alle Erscheinungen dieser Art ein für allemal berechnet werden. Nimmt man z. B. $\Pi = 8''{,}5776$ nach der erneuerten Berechnung der Beobachtungen der beiden letzten Durchgänge der Venus durch die Sonne von Encke; $k = 0{,}2725$ nach Burckhardt's Bestimmung; $H = 959''{,}788$ nach einigen, in Schumacher's Astron. Nachr. Nr. 228 [s. Abh. 171] bekannt gemachten Messungen von mir, so erhält man:

$$\log\sin\Pi = 5{,}6189407$$

$$\left.\begin{aligned}
\log[\sin H + k\sin\Pi] &= 7{,}6688050\ldots \text{ f. äussere}\\
\log[\sin H - k\sin\Pi] &= 7{,}6666896\ldots \text{ „ innere}
\end{aligned}\right\} \text{Berührungen.}$$

Für Bedeckungen der Planeten durch den Mond hat man ähnliche Ausdrücke, in welchen aber r' die Entfernung des Planeten von der Erde und H den Halbmesser seiner, in der Entfernung $=1$ gesehenen Scheibe bedeuten. — Für Bedeckungen der Fixsterne fallen äussere und innere Berührungen zusammen; a und d sind die Geradeaufsteigung und Abweichung des bedeckten Fixsterns selbst; m und f verschwinden, und statt $(s-\xi)\,\mathrm{tg}\,f$ wird in den Gleichungen (2) die beständige Grösse k angewandt. — Das Product $s\,\mathrm{tg}\,f$ ist der Halbmesser des Kreises, welchen der Schattenkegel auf der Ebene ausschneidet, welche senkrecht auf der Axe der z durch den Mittelpunkt der Erde geht; es wird in der Folge durch l bezeichnet werden.

Für Durchgänge der unteren Planeten durch die Sonne sind r und r', in dem allgemein gebräuchlichen Maasse des Planetensystems ausgedrückt, als gegeben anzusehen; wenn h den in der Entfernung $=1$ gesehenen Halbmesser der Scheibe des Planeten bedeutet, ist:

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{r}{\sin \Pi} \\ m &= \frac{r}{r'} \\ \sin f &= \frac{\sin H \pm \sin h}{r' g} \\ s \operatorname{tg} f &= z \operatorname{tg} f \pm \frac{\sin h}{\sin H} \sec f \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (13)$$

In diesem Falle ist m keine kleine Grösse, welches in den vorigen Fällen stattfand; g ist daher auch nicht, wie vorher, näherungsweise $= 1$, sondern näherungsweise $= 1 - m$; der Punkt Z der Himmelskugel ist der dem heliocentrischen Orte des durch die Sonne gehenden Planeten gerade entgegengesetzte. — In allen Fällen wird durch die Einführung des Punktes Z der Himmelskugel in die Betrachtung erlangt, dass man den Ort des verfinsterten Gestirns nicht weiter gebraucht, als zur Berechnung der Formeln (4).

4.

[Anwendung der Formeln auf die Sonnenfinsterniss vom 15. Mai 1836 (s. Abh. XIII der Astron. Unters.): Aus dem Berliner Jahrbuch ARen und Declin. von ☾ und ☉, Parallaxe ☾ und log Entfernung ☉. Durch Interpolation dieselben Grössen nebst den zugehörigen Sternzeiten in einstündigen Intervallen für Zeiten des 1. Meridians. Hieraus finden sich die Grössen a, d, log g, ferner die Coord. z, y, x, und für die äussere und innere Berührung die Werthe $s \operatorname{tg} f (= l)$, $\operatorname{tg} f (= i)$ und log s. Ueber die Zeit des 1. Meridians bemerkt Bessel:]

Ich erlaube mir bei dieser Gelegenheit eine Bemerkung über den ersten Meridian. So nenne ich den Meridian von Paris, auf den ich alle Zeitangaben beziehe, welche nicht (wie z. B. unmittelbare Beobachtungen) natürliche Beziehung zu einem anderen Orte haben. Ich folge hierin der Gewohnheit auf dem festen Lande von Europa, von welcher zwar Ausnahmen vorkommen, aber nicht so entschieden sich zu einem anderen Meridiane neigende, dass zweifelhaft würde, welcher von beiden der am allgemeinsten angewandte ist. Man findet Zeitangaben von Erscheinungen, welche keine Beziehung zu einem bestimmten Orte haben, auf die Meridiane von Altona, Berlin, Göttingen, Mailand, Seeberg, Wien und andere bezogen; z. B. die Zeiten, für welche Oerter der Himmelskörper in ihren Theorien, Tafeln oder Ephemeriden angegeben werden. Nothwendig ist diese Verschiedenheit offenbar nicht; die allgemeine Anwendung der astronomischen Angaben erleichternd ist sie so lange nicht, als nicht die Unterschiede anderer Meridiane von den angeführten unmittelbarer bekannt sein werden, als von dem Pariser. Ich finde nicht, dass dieses bis jetzt der Fall wäre; dass vorhandene Oerterverzeichnisse, See- und Landkarten u. s. w. vorzugsweise auf einen der angeführten Meridiane bezogen wären. Dass ein an sich ganz willkürliche Wahl sich auf einen bestimmten Meridian gewandt hat, sehe ich als ein günstiges Ereigniss an, dessen Vortheil man nicht ohne Grund aufopfern soll. Bekanntlich wird auf einem anderen grossen Theil der Erde der Meridian von Greenwich als der erste angenommen; dieser Theil würde eine Aenderung seiner Gewohnheit unbequem finden, weshalb wenigstens ich sie nicht zu rechtfertigen wissen würde. — Dass ich in dieser Ansicht nie in Versuchung gewesen sein kann, neben den beiden gebräuchlichen Anfangsmeridianen noch einen dritten, z. B. den von Königsberg, zu wünschen, ist einleuchtend: einer wäre am besten; zwei sind besser als drei u. s. w.

Zweiter Abschnitt.

Analyse der Finsternisse für die Erde im Allgemeinen.

5.

Ich werde den gegenwärtigen Abschnitt durch eine Darstellung des Herganges einer Finsterniss, so wie er auf der ganzen Erde gesehen wird, eröffnen. Es werden sich daraus die Fragen ergeben, welche der sich nicht auf gegebene Punkte der Erde beziehende Theil der Theorie der Finsternisse zu beantworten hat. Ich werde nur von der Ränderberührung im Allgemeinen reden, ohne der äusseren und der inneren abgesondert zu erwähnen: das Folgende gilt also für die eine oder die andere, je nachdem der der einen oder der anderen entsprechende Schattenkegel angenommen wird.

Der Schattenkegel eines Paars von Gestirnen bewegt sich mit diesen: jede ihrer geocentrischen Zusammenkünfte verursacht, dass seine Axe sich dem Mittelpunkte der Erde bis auf ein grösseres oder kleineres Minimum der Entfernung nähert. Wenn dieses Minimum so gross ist, dass die Oberflächen des Schattenkegels und der Erde ausser Berührung bleiben, so wird offenbar keine Ränderberührung auf der Erde sichtbar, oder die Zusammenkunft der Gestirne erzeugt keine Finsterniss. Wenn aber die Oberflächen zum Durchschneiden gelangen, so ist ihre jedesmalige Durchschnittslinie die Curve auf der Oberfläche der Erde, für deren Punkte die Ränderberührung stattfindet. Sichtbar wird diese nur auf dem Theile der Curve, welchem der Berührungspunkt der Ränder über dem Horizonte liegt.

Die Ränderberührung wird am frühesten und am spätesten gesehen, wenn die Oberflächen des Schatten-

kegels und der Erde sich äusserlich berühren. In dem Momente jeder dieser Berührungen sieht nur ein Punkt der Erde die Berührung der Ränder der Gestirne, und die Bestimmung sowohl des Moments selbst, als auch des Punktes der Erde, wo die Ränderberührung dann sichtbar ist, ist die erste der zu erfüllenden Forderungen. Sind Grösse und Bewegung des Schattenkegels so beschaffen, dass er im Verlaufe der Finsterniss ganz in die Erde, oder diese ganz in ihn eintritt, so entstehen noch zwei Berührungen der beiden Oberflächen, so dass dann die Forderung, die Zeiten ihrer Berührungen und die Punkte der Erde, wo diese stattfinden, zu bestimmen, durch vier Momente erfüllt werden kann, nämlich ausser den, den äusseren Berührungen beider Oberflächen entsprechenden τ und τ', auch durch die den inneren zugehörenden $\tau_,$ und $\tau'_,$.

Offenbar werden zwei Punkte der zwischen τ und $\tau_,$ und zwischen $\tau'_,$ und τ' durch die Oberfläche des Schattenkegels aus der der Erde ausgeschnittenen Curve von geraden Linien in der ersteren berührt; nur der auf der Seite der Berührungspunkte, auf welcher die beiden Gestirne sich befinden, liegende Theil der Curve sieht die Ränderberührung wirklich; dem anderen Theile wird sie durch den zwischenliegenden Körper der Erde verborgen. Verbindet man diese besonderen Punkte der mit der Zeit fortschreitenden Curven durch eine krumme Linie, so ist dieses die Linie, auf welcher die Berührung der Ränder gesehen wird, während der Berührungspunkt sich in der Ebene des Horizonts befindet. Ihre Bestimmung ist die zweite der zu erfüllenden Forderungen. Diese Linie besteht offenbar aus zwei getrennten Theilen wenn der Schattenkegel in die Erde oder diese in ihn ganz eintritt; denn dann sind $\tau_,$ und $\tau'_,$ wirklich vorhanden, und während ihrer Zwischenzeit gibt es keine die Erde berührende gerade Linien in der Oberfläche des Kegels; dagegen ist sie, wenn $\tau_,$ und $\tau'_,$ nicht wirklich vorhanden sind, es also jederzeit zwischen τ und τ' solche Linien gibt, ganz zusammenhangend.

Diese krumme Linie begrenzt den Raum der Erde, auf welchem die Finsterniss sichtbar wird. Sie begrenzt ihn an zwei von einander getrennten Seiten, wenn sie selbst aus zwei getrennten Theilen besteht; sie schliesst ihn dagegen von einer Seite ganz ein, wenn sie selbst ganz zusammenhangend ist; das erstere also, wenn $\tau_,$ und $\tau'_,$ wirklich vorhanden, das andere wenn sie nicht wirklich vorhanden sind. Wo sie ihn nicht begrenzt, wird er von einer anderen Linie eingeschlossen, auf welcher die Gestirne einander nicht näher kommen als die Summe ihrer scheinbaren Halbmesser, oder auf welcher die Ränderberührung das Maximum der Finsterniss ist. Die Bestimmung dieser Linie ist die dritte der zu erfüllenden Forderungen.

Auf die Begrenzungen der Zeit einer Finsterniss und des Raums auf der Erde, wo sie sichtbar ist, welche beide durch die Erfüllung dieser drei Forderungen gegeben werden, beschränkt sich der in diesem Abschnitte abzuhandelnde Theil der Analyse der Finsternisse. Will man noch Linien auf der Erde bestimmen, auf welchen ein gegebener Theil der Scheibe des entfernteren Gestirns verdeckt wird, so darf dieses nicht als eine neue Forderung angesehen werden, indem dadurch nur verlangt wird, dass ein gegebener Theil des Halbmessers des entfernteren Gestirns statt des ganzen angenommen werde. Andere Aufgaben, welche frühere Behandlungen der Theorie der Finsternisse berücksichtigen, werden zum Theil ihr Interesse verlieren, wenn die ausgesprochenen Forderungen erfüllt sind; zum Theil werden sie aus der Erfüllung der letzteren abgeleitet werden können.

6.

Aufgabe I.

Die krumme Linie auf der Erde zu bestimmen, auf welcher die Ränderberührung zweier kugelförmigen Gestirne zu gegebener Zeit gesehen wird.

Diese Aufgabe befindet sich zwar nicht unter den ausgesprochenen Forderungen, allein die Auflösung derselben eröffnet den Zugang zu ihrer Erfüllung. Wenn diese in ihrer vollen Einfachheit hervortreten soll, so muss der Auflösung der gegenwärtigen Aufgabe ein angemessener Grad von Entwickelung gegeben werden, welchen herbeizuführen ich versuchen werde.

Indem die Zeit gegeben ist, sind die von ihr abhängigen x, y, s, f gegeben; die in den Gleichungen (2) ausser diesen Grössen vorkommenden ξ, η, ζ hängen aber sowohl von a, d, π, als auch von der Polhöhe φ und der Sternenzeit μ jedes die Ränderberührung sehenden Punktes der Erde ab und enthalten daher, indem die letztere die Summe der — entweder unmittelbar oder durch die mittlere oder wahre Zeit, für welche die Aufgabe aufgelöset werden soll — gegebenen Sternenzeit μ' des ersten Meridians und der von ihm an gezählten östlichen Länge ω ist, sowohl die Zeit, als auch beide zur Bestimmung des Punktes auf der Erde nöthigen Angaben φ und ω. Die Aufgabe fordert entweder einen Ausdruck der einen dieser Grössen durch die andere, oder die Ausdrücke beider durch eine unbestimmte Grösse, deren Wahl willkürlich bleibt. Jeder Werth dieser unbestimmten Grösse ergibt dann

zusammengehörige Werthe von φ und ω, also einen Punkt der gesuchten Curve; durch Aenderungen ihres Werthes werden beliebig viele Punkte der Curve bekannt. Den letzteren dieser Wege werde ich einschlagen.

Die in den Ausdrücken (7) von ξ, η, ξ vorkommenden $\varrho \cos \varphi'$ und $\varrho \sin \varphi'$ haben, durch φ und die Excentricität der Erdmeridiane e, bekanntlich die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} \varrho \cos \varphi' &= \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - ee \sin \varphi^2}} \\ \varrho \sin \varphi' &= \frac{\sin \varphi (1 - ee)}{\sqrt{1 - ee \sin \varphi^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

Führt man $\varphi_,$ ein, so dass

$$\cos \varphi_, = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - ee \sin \varphi^2}}, \quad \sin \varphi_, = \frac{\sin \varphi \sqrt{1-ee}}{\sqrt{1 - ee \sin \varphi^2}}$$

also

$$\operatorname{tg} \varphi_, = \operatorname{tg} \varphi \sqrt{1 - ee} \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

$$[\text{compl. } \log \sqrt{1 - ee} = 0{,}0014467]$$

ist und schreibt man $\mu' + \omega$ statt μ, so verwandeln sich die Formeln (7) in:

$$\xi = \sin d \sin \varphi_, \sqrt{1-ee} + \cos d \cos \varphi_, \cos (\mu' - a + \omega)$$
$$\eta = \cos d \sin \varphi_, \sqrt{1-ee} - \sin d \cos \varphi_, \cos (\mu' - a + \omega)$$
$$\xi = \cos \varphi_, \sin (\mu' - a + \omega)$$

und wenn man

$$\left.\begin{aligned} u &= \cos \varphi_, \sin (\mu' - a + \omega) \\ v &= \cos \varphi_, \cos (\mu' - a + \omega) \\ w &= \sin \varphi_, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (16)$$

annimmt, in:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= w \sin d \sqrt{1-ee} + v \cos d \\ \eta &= w \cos d \sqrt{1-ee} - v \sin d \\ \xi &= u \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (17)$$

Diese u, v, w werde ich statt φ und ω als die unbekannten Grössen der aufzulösenden Aufgabe betrachten. Hat man ihre, einem Werthe der unbestimmten Grösse entsprechenden Werthe gefunden, so ergeben die beiden ersten $\mu' - a + \omega$ und $\cos \varphi_,$, die letztere ist $= \sin \varphi_,$; man findet also $\operatorname{tg} \varphi_,$, und indem man seinen Werth durch $\sqrt{1-ee}$ dividirt, auch $\operatorname{tg} \varphi$ (15); ω wird durch $\mu' - a + \omega$ bekannt, da $\mu' - a$ gegeben ist. Ich werde also u, v, w durch die zu wählende unbestimmte Grösse ausdrücken.

Zuerst werde ich den Positionswinkel p des Berührungspunkts der Ränder am Punkte Z der Himmelskugel zur unbestimmten Grösse wählen. Dadurch erhält man aus den Gleichungen (2):

$$\eta = y - (s - \xi) \operatorname{tg} f \cos p$$
$$\xi = x - (s - \xi) \operatorname{tg} f \sin p$$

und aus ihrer Verbindung mit (17):

$$u = x - (s - \xi) \operatorname{tg} f \sin p$$
$$v = -y \sin d + (s - \xi) \operatorname{tg} f \cos p + \xi \cos d$$
$$\sqrt{1-ee} \cdot w = y \cos d - (s - \xi) \operatorname{tg} f \cos p + \xi \sin d$$

oder, anders geschrieben:

$$\left.\begin{aligned} u &= a + \alpha \xi \\ v &= b + \beta \xi \\ w &= c + \gamma \xi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

in welchen Ausdrücken also a, b, c, α, β, γ folgende Bedeutungen haben:

$$\left.\begin{aligned} a &= x - l \sin p; & \alpha &= i \sin p \\ b &= -(y - l \cos p) \sin d; & \beta &= \cos d - i \sin d \cos p \\ c &= (y - l \cos p) \frac{\cos d}{\sqrt{1-ee}}; & \gamma &= \frac{\sin d + i \cos d \cos p}{\sqrt{1-ee}} \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

indem l für $s \operatorname{tg} f$ und i für $\operatorname{tg} f$ geschrieben sind.

Da $uu + vv + ww = 1$ ist, hat man zur Bestimmung von ξ die Gleichung:

$$1 = (a + \alpha \xi)^2 + (b + \beta \xi)^2 + (c + \gamma \xi)^2 \ldots (20)$$

und wenn man die Bezeichnungen

$$m = aa + bb + cc - 1$$
$$m' = a\alpha + b\beta + c\gamma$$
$$m'' = \alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma$$
$$P = \sqrt{m'm' - mm''}$$

einführt, durch ihre Auflösung:

$$\xi = \frac{-m' \pm P}{m''},$$

wodurch sich die Formeln (18) in:

$$\left.\begin{aligned} m''u &= m''a - m'\alpha \pm \alpha P \\ m''v &= m''b - m'\beta \pm \beta P \\ m''w &= m''c - m'\gamma \pm \gamma P \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (21)$$

verwandeln. Hierdurch ist unsere Aufgabe aufgelöset. Ihre Auflösung musste nothwendig auf eine quadratische Gleichung führen, denn durch p, den den Schattenkegel erzeugenden Winkel f und den Ort seiner Spitze ist die Lage der geraden Linie in der Oberfläche des Kegels gegeben, deren beide Durchschnittspunkte mit der Oberfläche der Erde gesucht, und da diese eine Oberfläche der zweiten Ordnung ist, durch eine quadratische Gleichung gefunden werden.

Die Bedeutung des unbestimmt gebliebenen Zeichens erkennt man, wenn man die Formeln (21) resp. in α, β, γ multiplicirt und die Producte addirt. Man erhält nämlich dadurch:

$$m''(\alpha u + \beta v + \gamma w) = \pm (\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma) P$$

oder

$$\pm P = \alpha u + \beta v + \gamma w; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

von welchem Ausdrucke man leicht zeigen kann, dass er dem Cosinusse der Zenithdistanz des Berührungspunkts der Ränder proportional ist. Bezeichnet man nämlich die Geradeaufsteigung und Abweichung dieses Punktes durch a' und d', so hat man durch die auf das sphärische Dreieck zwischen ihm, dem Punkte Z der Himmelskugel und dem Pole angewandten trigonometrischen Formeln:

$$\begin{aligned} \cos d' \sin (a' - a) &= \sin f \sin p &&= \alpha \cos f \\ \cos d' \cos (a' - a) &= \cos f \cos d - \sin f \sin d \cos p &&= \beta \cos f \\ \sin d' &= \cos f \sin d + \sin f \cos d \cos p &&= \gamma \cos f \sqrt{1 - ee} \end{aligned}$$

und den Ausdrücken (16) von u, v, w zufolge:

$$\cos f (\alpha u + \beta v + \gamma w) = \frac{\sin d' \sin \varphi,}{\sqrt{1-ee}} + \cos d' \cos \varphi, \cos (\mu' - a' + \omega)$$

oder wenn man φ wieder einführt:

$$\pm P = \frac{\sin d' \sin \varphi + \cos d' \cos \varphi \cos (\mu' - a' + \omega)}{\cos f \sqrt{1 - ee \sin \varphi^2}}.$$

Der Zähler dieses Ausdruckes ist der Cosinus der Zenithdistanz des Berührungspunkts der Ränder, also positiv oder negativ, je nachdem dieser über oder unter dem Horizonte des durch u, v, w bestimmten Punktes der Erde liegt; der Nenner ist immer positiv. Durch die Anwendung des oberen Zeichens wird also derjenige der beiden, den Formeln (21) entsprechenden Punkte der Erde gefunden, welcher die Ränderberührung über seinem Horizonte sieht, während die Anwendung des unteren Zeichens den zweiten Punkt ergibt, unter dessen Horizonte sie, in gleicher Lage des Berührungspunkts an der Himmelskugel, vor sich geht. Da man nur Veranlassung haben wird, den ersten dieser Punkte aufzusuchen, so kann man das untere Zeichen der Formeln (21) weglassen.

In dem Falle einer inneren Berührung der Ränder muss noch entschieden werden, ob sie einer ringförmigen oder einer gänzlichen Finsterniss zugehört. Das erstere ist der Fall, wenn das nähere Gestirn kleiner erscheint als das entferntere, oder wenn die Spitze des Schattenkegels in der Richtung der Gestirne liegt; das letztere, wenn sie in der entgegengesetzten Richtung liegt. Die Finsterniss ist daher ringförmig oder gänzlich, je nachdem $s - \zeta$ positiv oder negativ ist.

7.

Es hat keine Schwierigkeit, aus den hier mitgetheilten einfachen Formeln zur Erfindung eines Punktes der Erdoberfläche, welcher die Ränderberührung zu einer gegebenen Zeit, bei einem gegebenen Werthe von p sieht, Vorschriften abzuleiten, nach welchen beliebig viele Punkte der in der Aufgabe I geforderten Curve durch leichtere Rechnung gefunden werden können. Man erlangt solche Vorschriften, wenn man die Formeln (21) so verändert, dass sie statt dreier der zugleich von der Zeit und von p abhängigen Grössen a, b, c, α, β, γ, drei andere enthalten, welche nur von der Zeit abhängen, also für jeden gegebenen Werth derselben nur einmal berechnet werden dürfen. Ich werde zwei verschiedene Veränderungen dieser Art verfolgen: beide beruhen auf der Einführung von

$$\begin{aligned} \alpha' &= a + \alpha s \\ \beta' &= b + \beta s \\ \gamma' &= c + \gamma s \end{aligned}$$

welche Grössen den Formeln (19) zufolge von p unabhängig sind, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= x \\ \beta' &= s \cos d - y \sin d \\ \gamma' &= \frac{s \sin d + y \cos d}{\sqrt{1 - ee}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Schafft man a, b, c aus der Rechnung, indem man $\alpha' - \alpha s$, $\beta' - \beta s$, $\gamma' - \gamma s$ dafür setzt, so verwandeln die Formeln (21) sich in:

$$\begin{aligned} m'' u &= m'' \alpha' + (P - m'' s - m') \alpha \\ m'' v &= m'' \beta' + (P - m'' s - m') \beta \\ m'' w &= m'' \gamma' + (P - m'' s - m') \gamma \end{aligned}$$

und wenn man ϑ für $m'' s + m' = \alpha \alpha' + \beta \beta' + \gamma \gamma'$ schreibt, in:

$$\left.\begin{aligned} m'' u &= m'' \alpha' + (P - \vartheta) \alpha \\ m'' v &= m'' \beta' + (P - \vartheta) \beta \\ m'' w &= m'' \gamma' + (P - \vartheta) \gamma \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Durch α, β, γ, α', β', γ' ausgedrückt ist

$$PP = m'm' - mm'' = (\alpha \alpha' + \beta \beta' + \gamma \gamma')^2 - (\alpha \alpha + \beta \beta + \gamma \gamma)(\alpha' \alpha' + \beta' \beta' + \gamma' \gamma' - 1)$$

und wenn man $\alpha' \alpha' + \beta' \beta' + \gamma' \gamma'$ durch $\sigma \sigma$ bezeichnet:

$$P = \sqrt{\vartheta \vartheta - m''(\sigma \sigma - 1)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Diese Formeln können durch die Benutzung der trigonometrischen Tafeln zur Anwendung geschickter gemacht werden. Sucht man für die Zeit, für welche

man die in der Aufgabe geforderte krumme Linie kennen lernen will, σ, ε, δ nach den Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \sigma \sin\varepsilon &= x &&= \alpha' \\ \sigma \cos\varepsilon \cos\delta &= s\cos d - y \sin d &&= \beta' \\ \sigma \cos\varepsilon \sin\delta &= \frac{s\sin d + y\cos d}{\sqrt{1-ee}} &&= \gamma' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (26)$$

worin das Zeichen von σ so bestimmt werden kann, dass ε und δ zwischen -90^0 und 90^0 fallen, und ferner für jeden Werth von p, für welchen man u, v, w verlangt, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{b}$:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{r}\sin\mathfrak{e} &= i\sin p &&= \alpha \\ \mathfrak{r}\cos\mathfrak{e}\cos\mathfrak{b} &= \cos d - i\sin d\cos p &&= \beta \\ \mathfrak{r}\cos\mathfrak{e}\sin\mathfrak{b} &= \frac{\sin d + i\cos d\cos p}{\sqrt{1-ee}} &&= \gamma \end{aligned}\right\} \quad \ldots (27)$$

so erhält man:

$$\vartheta = \mathfrak{r}\sigma[\sin\varepsilon\sin\mathfrak{e} + \cos\varepsilon\cos\mathfrak{e}\cos(\delta-\mathfrak{b})]$$
$$m'' = \mathfrak{r}\mathfrak{r}$$

und wenn man Θ nach einer der Formeln:

$$\cos\Theta = \sin\varepsilon\sin\mathfrak{e} + \cos\varepsilon\cos\mathfrak{e}\cos(\delta-\mathfrak{b})$$

oder

$$\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2 = \sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon-\mathfrak{e})^2\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\mathfrak{b})^2 + \cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon+\mathfrak{e})^2\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\mathfrak{b})^2$$

bestimmt,

$$P = \mathfrak{r}\sqrt{1-\sigma\sigma\sin\Theta^2}$$

also

$$\frac{P-\vartheta}{m''} = \frac{\sqrt{1-\sigma\sigma\sin\Theta^2} - \sigma\cos\Theta}{\mathfrak{r}}.$$

Setzt man nun

$$\sin\Theta' = \sigma\sin\Theta,$$

so wird

$$\frac{P-\vartheta}{m''} = \frac{-\sin(\Theta'-\Theta)}{\mathfrak{r}\sin\Theta},$$

wodurch die Formeln (24) sich in:

$$\left.\begin{aligned} u &= \alpha' - \frac{\sin(\Theta'-\Theta)}{\sin\Theta}\sin\mathfrak{e} \\ v &= \beta' - \frac{\sin(\Theta'-\Theta)}{\sin\Theta}\cos\mathfrak{e}\cos\mathfrak{b} \\ w &= \gamma' - \frac{\sin(\Theta'-\Theta)}{\sin\Theta}\cos\mathfrak{e}\sin\mathfrak{b} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (28)$$

verwandeln. Das Kennzeichen einer ringförmigen oder gänzlichen Finsterniss, im Falle einer inneren Berührung der Ränder, ist der positive oder negative Werth von

$$s - \xi = \frac{\sin(\Theta'-\Theta)}{\mathfrak{r}\sin\Theta}.$$

Obgleich diese Formeln ohne Ausnahme eines besonderen Falles angewandt werden können, so ergeben sie doch das Gesuchte nur dann mit einer Genauigkeit, welche der auf die Rechnung gewandten etwa gleich ist, wenn die Entfernung der Spitze des Schattenkegels von der Erde, vergleichungsweise mit x, y nicht sehr gross ist. Denn wenn sie sehr gross ist, sind δ und $\mathfrak{b}$ sehr wenig von einander verschieden, so wie auch ε und $\mathfrak{e}$ sehr klein, wodurch Θ gleichfalls sehr klein wird und die Ausdrücke (28) Unterschiede zweier Grössen von der Ordnung der Entfernung der Spitze des Schattenkegels werden. — Unter allen wirklich vorkommenden Ränderberührungen zweier Gestirne gehört aber allein den inneren der Sonne und des Mondes ein Schattenkegel an, dessen Spitze nicht sehr weit von der Erde entfernt ist, weshalb die Formeln (28) nur für die inneren, sich bei Sonnenfinsternissen ereignenden Ränderberührungen empfehlenswerth sind.

8.

Die zweite Veränderung der im 6. § gegebenen Auflösung der Aufgabe I erhält man durch die Wegschaffung von α, β, γ und ihren Ersatz durch α', β', γ'. Man gelangt am einfachsten dazu, wenn man die Ausdrücke (18) von u, v, w, statt von ξ, von einer anderen unbekannten Grösse ξ' abhängig macht, welche zu der vorigen die Relation

$$\xi = \frac{s\xi'}{s+\xi'}$$

hat, also jene Ausdrücke in:

$$\left.\begin{aligned} (s+\xi')u &= as + \alpha'\xi' \\ (s+\xi')v &= bs + \beta'\xi' \\ (s+\xi')w &= cs + \gamma'\xi' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (29)$$

und die Gleichung (20) in:

$$(s+\xi')^2 = (as+\alpha'\xi')^2 + (bs+\beta'\xi')^2 + (cs+\gamma'\xi')^2 \ldots (30)$$

verwandelt. Die Auflösung dieser Gleichung ergibt:

$$\xi' = \frac{-s[a\alpha'+b\beta'+c\gamma'-1] \pm s\sqrt{(a\alpha'+b\beta'+c\gamma'-1)^2 - (aa+bb+cc-1)(\sigma\sigma-1)}}{\sigma\sigma-1}$$

welcher Ausdruck, der schon im 6. § gemachten Bemerkung zufolge, ohne Zweideutigkeit nur mit dem oberen Zeichen zu nehmen ist. Er wird unbestimmt wenn $\sigma\sigma = 1$ ist, weshalb dieser Fall ausgeschlossen und die Fälle $\sigma\sigma > 1$ und $\sigma\sigma < 1$ von einander unterschieden werden müssen. Führt man ϑ' und P' ein, so dass in dem 1. Falle:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta' &= \frac{a\alpha'+b\beta'+c\gamma'-1}{\sqrt{\sigma\sigma-1}} \\ P'P' &= 1 - aa - bb - cc + \vartheta'\vartheta' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (31)$$

in dem 2. Falle:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta' &= \frac{a\alpha'+b\beta'+c\gamma'-1}{\sqrt{1-\sigma\sigma}} \\ P'P' &= aa + bb + cc - 1 + \vartheta'\vartheta' \end{aligned}\right\} \quad \ldots (31^*)$$

bedeuten, so wird in jenem Falle

$$\zeta' = \frac{s}{\sqrt{\sigma\sigma - 1}}(P' - \vartheta'),$$

in diesem

$$\zeta' = \frac{-s}{\sqrt{1 - \sigma\sigma}}(P' - \vartheta')$$

und die Formeln (29) verwandeln sich, wenn $\sigma\sigma > 1$ ist, in:

$$\left.\begin{aligned}\left[1 + \frac{P' - \vartheta'}{\sqrt{\sigma\sigma - 1}}\right] u &= a + \alpha' \cdot \frac{P' - \vartheta'}{\sqrt{\sigma\sigma - 1}} \\ \left[1 + \frac{P' - \vartheta'}{\sqrt{\sigma\sigma - 1}}\right] v &= b + \beta' \cdot \frac{P' - \vartheta'}{\sqrt{\sigma\sigma - 1}} \\ \left[1 + \frac{P' - \vartheta'}{\sqrt{\sigma\sigma - 1}}\right] w &= c + \gamma' \cdot \frac{P' - \vartheta'}{\sqrt{\sigma\sigma - 1}}\end{aligned}\right\} \quad \ldots . (32)$$

und wenn $\sigma\sigma < 1$ ist, in:

$$\left.\begin{aligned}\left[1 - \frac{P' - \vartheta'}{\sqrt{1 - \sigma\sigma}}\right] u &= a - \alpha' \cdot \frac{P' - \vartheta'}{\sqrt{1 - \sigma\sigma}} \\ \left[1 - \frac{P - \vartheta'}{\sqrt{1 - \sigma\sigma}}\right] v &= b - \beta' \cdot \frac{P' - \vartheta'}{\sqrt{1 - \sigma\sigma}} \\ \left[1 - \frac{P' - \vartheta'}{\sqrt{1 - \sigma\sigma}}\right] w &= c - \gamma' \cdot \frac{P' - \vartheta'}{\sqrt{1 - \sigma\sigma}}\end{aligned}\right\} \quad \ldots (32^*)$$

Das in diesen Formeln vorkommende P' hängt mit dem früher angewandten P so zusammen, dass

in dem 1. Falle.... $P'P'(\sigma\sigma - 1) = PPss$

in dem 2. Falle.... $P'P'(1 - \sigma\sigma) = PPss$

ist; dieses geht aus dem Ausdrucke von P hervor, wenn darin α', β', γ' statt α, β, γ eingeführt werden.

Wenn diese Formeln angewandt werden sollen, wird es bequem sein ϱ und δ' so zu bestimmen, dass

$$\left.\begin{aligned}\varrho \sin\delta' &= \sin d \\ \varrho \cos\delta' &= \frac{\cos d}{\sqrt{1 - ee}}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (33)$$

sind. Dadurch erhält man:

$$\left.\begin{aligned}a &= x - l\sin p \\ b &= -(y - l\cos p)\,\varrho\sin\delta' \\ c &= (y - l\cos p)\,\varrho\cos\delta'\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (34)$$

und ferner:

1) wenn $\sigma\sigma > 1$ ist und $\frac{1}{\sigma} = \sin\lambda$ gesetzt wird:

$$\vartheta' = (x - l\sin p)\frac{\sin\varepsilon}{\cos\lambda} + \varrho(y - l\cos p)\frac{\cos\varepsilon\sin(\delta - \delta')}{\cos\lambda} - \operatorname{tg}\lambda$$

$$P'P' = 1 - (x - l\sin p)^2 - \varrho\varrho(y - l\cos p)^2 + \vartheta'\vartheta'$$

$$\left.\begin{aligned}[1 + \operatorname{tg}\lambda(P' - \vartheta')]\,u &= a + \frac{\sin\varepsilon}{\cos\lambda}(P' - \vartheta') \\ [1 + \operatorname{tg}\lambda(P' - \vartheta')]\,v &= b + \frac{\cos\varepsilon\cos\delta}{\cos\lambda}(P' - \vartheta') \\ [1 + \operatorname{tg}\lambda(P' - \vartheta')]\,w &= c + \frac{\cos\varepsilon\sin\delta}{\cos\lambda}(P' - \vartheta')\end{aligned}\right\} .. (35)$$

2) wenn $\sigma\sigma < 1$ ist und $\sigma = \sin\lambda$ gesetzt wird:

$$\vartheta' = (x - l\sin p)\sin\varepsilon\operatorname{tg}\lambda + \varrho(y - l\cos p)\cos\varepsilon\sin(\delta - \delta')\operatorname{tg}\lambda - \sec\lambda$$

$$P'P' = (x - l\sin p)^2 + \varrho\varrho(y - l\cos p)^2 - 1 + \vartheta'\vartheta'$$

$$\left.\begin{aligned}[1 - \sec\lambda(P' - \vartheta')]\,u &= a - \sin\varepsilon\operatorname{tg}\lambda(P' - \vartheta') \\ [1 - \sec\lambda(P' - \vartheta')]\,v &= b - \cos\varepsilon\cos\delta\operatorname{tg}\lambda(P' - \vartheta') \\ [1 - \sec\lambda(P' - \vartheta')]\,w &= c - \cos\varepsilon\sin\delta\operatorname{tg}\lambda(P' - \vartheta')\end{aligned}\right\} . (35^*)$$

Das Kennzeichen einer ringförmigen oder gänzlichen Finsterniss im Falle einer inneren Berührung der Ränder ist der positive oder negative Werth von

$$s - \zeta = \frac{ss}{s + \zeta'},$$

oder die Gleichheit oder Verschiedenheit des Zeichens von s und des Zeichens des gemeinschaftlichen Factors von u, v, w.

Die Unbequemlichkeit, welche die im vorigen § gegebene Vorschrift in dem Falle besass, in welchem die Entfernung der Spitze des Schattenkegels von der Erde weit grösser ist als x und y, besitzt die gegenwärtige nicht; vielmehr wird diese desto vortheilhafter, jemehr $\sigma\sigma$ von 1 verschieden ist. Sie empfiehlt sich also im Allgemeinen, indem allein die inneren Berührungen der Ränder der Sonne und des Mondes Fälle herbeiführen können, in welchen die frühere Vorschrift vorzuziehen ist.

9.

Ich muss noch Einiges über den im vorigen § ausgeschlossenen Fall sagen, welcher eintritt, wenn $\sigma\sigma = 1$ ist.

Legt man um den Mittelpunkt der Erde ein ihr ähnliches elliptisches Rotationssphäroid, dessen Oberfläche durch die Spitze des Schattenkegels geht, deren dem Erdäquator parallele Coordinaten x und $s\cos d - y\sin d$ sind, während die auf ihm senkrechte Coordinate $s\sin d + y\cos d$ ist, so ist das Quadrat seiner halben grossen Axe

$$= xx + (s\cos d - x\sin d)^2 + \frac{(s\sin d + y\cos d)^2}{1 - ee}.$$

Da dieses auch der Ausdruck von $\sigma\sigma$ ist, so folgt, dass der ausgeschlossene Fall eintritt, wenn die Spitze des Schattenkegels durch die Oberfläche der Erde geht. Er kann also nur bei inneren Berührungen der Ränder zweier Gestirne, in der Wirklichkeit nur bei den inneren Berührungen der Ränder der Sonne und des Mondes und zwar nur dann vorkommen, wenn die Spitze des Schattenkegels sich durch die Erde hindurch bewegt, in welchem Falle er in den beiden Zeitmomenten ihres Durchganges durch die Oberfläche der Erde wirklich eintritt.

Wenn $\sigma\sigma = 1$ ist, werden die beiden Wurzeln der Gleichung (20) rational. Denn da

$$\sigma\sigma = (a+\alpha s)^2 + (b+\beta s)^2 + (c+\gamma s)^2$$
$$= 1 + m + 2m's + m''ss$$

also in dem Falle $\sigma\sigma = 1$:

$$0 = m + 2m's + m''ss$$

und die Gleichung (20)

$$0 = m + 2m'\xi + m''\xi\xi$$

ist, kann diese

$$0 = m''(\xi\xi - ss) + 2m'(\xi - s)$$

oder

$$0 = (\xi - s)[m''(\xi + s) + 2m']$$

geschrieben, ihr also durch

$$\xi = s \text{ und } \xi = -s - \frac{2m'}{m''}$$

Genüge geleistet werden. Die erste dieser Wurzeln gehört dem Falle zu, in welchem der durch u, v, w bestimmte Punkt der Erde der ist, wo auch die Spitze des Schattenkegels sich befindet; wenn er stattfindet, verwandeln die Formeln (18) sich in:

$$\left.\begin{aligned} u &= a + \alpha s = \alpha' = \sin\varepsilon \\ v &= b + \beta s = \beta' = \cos\varepsilon\cos\delta \\ w &= c + \gamma s = \gamma' = \cos\varepsilon\sin\delta \end{aligned}\right\} \quad \ldots . (36)$$

und bestimmen also den gesuchten Punkt der Erde unabhängig von p; was auch nothwendig ist, indem dieser Punkt die Berührung der Ränder der beiden Gestirne an allen ihren Punkten sieht. Die zweite Wurzel entspricht dem Falle, in welchem der durch u, v, w bestimmte Punkt der Erde auf der Curve liegt, welche der Schattenkegel, während seine Spitze in der Oberfläche der Erde ist, nach seinem Durchgange durch ihr Inneres ausschneidet; wenn man sie anwendet, erhält man:

$$\left.\begin{aligned} u &= a - \alpha\left(s + \frac{2m'}{m''}\right) = \alpha' - 2\alpha\left(s + \frac{m'}{m''}\right) \\ v &= b - \beta\left(s + \frac{2m'}{m''}\right) = \beta' - 2\beta\left(s + \frac{m'}{m''}\right) \\ w &= c - \gamma\left(s + \frac{2m'}{m''}\right) = \gamma' - 2\gamma\left(s + \frac{m'}{m''}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (37)$$

Ob die erste oder die zweite Wurzel angewandt werden muss, geht aus dem Zeichen von (22):

$$\pm P = \alpha u + \beta v + \gamma w$$

hervor. Setzt man in diesen Ausdruck sowohl die Ausdrücke (36) als auch die Ausdrücke (37), so erhält man im ersten Falle $\pm P = m''s + m' = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$, im zweiten $= -\alpha\alpha' - \beta\beta' - \gamma\gamma'$: jener oder dieser ist also der vorhandene, je nachdem $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$ positiv oder negativ ist.

Ausser dem hier verfolgten Falle $\sigma\sigma = 1$ muss noch der Fall $s = 0$ von der im vorigen § gegebenen Bestimmung von u, v, w ausgeschlossen werden. Denn in diesem Falle verschwindet ξ', welchen Werth auch ξ haben mag, und die dadurch identisch $= 0$ werdenden Ausdrücke (29) lassen u, v, w unbestimmt. Wenn dieser Fall eintritt, so wie auch wenn s sehr klein ist, und nicht minder wenn $\sigma\sigma$ sehr wenig von 1 verschieden ist, müssen die im 7. § gegebenen Vorschriften befolgt werden. Alle diese Ursachen, die Vorschriften des vorigen §'s zu verlassen, können nur in Fällen innerer Berührungen der Ränder der Sonne und des Mondes, und zwar nur wenn die Spitze des Schattenkegels durch die Erde geht, also nur in selteneren Fällen solcher Berührungen vorhanden sein.

10.

Die in dem Vorigen entwickelte Auflösung der Aufgabe I lehrt, wie man bestimmten Werthen des willkürlichen Winkels p zugehörige Punkte der ihr entsprechenden Curve finden kann. Man würde sich hiemit begnügen können, wenn nichts anderes gefordert würde; aber es muss wirklich mehr gefordert werden, indem das Interesse der Aufgabe, wie ich schon am Anfange des 6. §'s bemerkt habe, nichtsowohl in der Kenntniss der ihr zu jeder gegebenen Zeit entsprechenden Curve, als in den Mitteln zu suchen ist, welche ihre Auflösung der Auflösung anderer Aufgaben der Analyse der Finsternisse gewährt; es muss also nicht allein eine möglichst leicht anwendbare, von bestimmten Werthen von p ausgehende Vorschrift zur Erfindung von Punkten der Curve, sondern auch die einfachste, die willkürliche Grösse unbestimmt lassende Auflösung der Aufgabe gefordert werden.

Um zu zeigen, dass in der letzteren Beziehung noch Wesentliches zu wünschen ist, bemerke ich hier nur, dass die erste und zweite der im 5. § an die Theorie der Finsternisse gemachten Forderungen durch die Verfolgung der Bedingung $P = 0$ erfüllt werden müssen: dass sie die Bestimmung der dieser Bedingung entsprechenden Werthe von p und ihre weitere Anwendung verlangen; dass sie auf beträchtliche Schwierigkeiten führen müssen, indem der Ausdruck von PP den Cosinus und den Sinus von p, sowie auch ihre Quadrate und ihr Product enthält, also in Beziehung auf p vom 4. Grade ist. Dieser, die Durchführung der noch zu suchenden Auflösungen anderer Aufgaben erschwerende, hohe Grad der Gleichung $PP = 0$ kann zwar nicht vermieden werden, so lange p die unbestimmte Grösse bleibt, von welcher die Ausdrücke von u, v, w abhängig

gemacht werden; aber die Wahl der unbestimmten Grösse ist willkürlich und man kann statt p eine andere substituiren, durch deren Einführung der Ausdruck von PP wesentlich vereinfacht wird.

EULER hat, als es darauf ankam, eine ganze rationale Function von x vom 4. Grade von den ungeraden Potenzen von x zu befreien, dieses durch die Substitution einer anderen veränderlichen Grösse y erlangt, deren Verbindung mit x im Wesentlichen dieselbe ist, welche man zwischen den trigonometrischen Linien eines neuen unbestimmten Winkels und denen von p annehmen muss, um den Grad von PP auf den zweiten zu erniedrigen; er hat damit die glänzende Reihe neuerer Entdeckungen über die elliptischen Transcendenten eröffnet. GAUSS hat in der berühmten Abhandlung*), in welcher er die Auflösung einer sehr wichtigen Aufgabe der physischen Astronomie gegeben hat, den Erfolg wieder durch dieselbe Substitution, welche jedoch nun in ganz verschiedener Form auftreten musste, erlangt. JACOBI hat viel Vortreffliches darüber gesagt**), auch sie in einer Richtung verfolgt, welche jene Aufgabe nicht nimmt und welche zu der Auflösung schwieriger geometrischer Probleme führt, zu denen sich auch das gegenwärtige gesellen wird. Die beiden zuletzt genannten grossen Geometer haben diese Materie in so helles Licht gesetzt, dass ihre fernere Anwendung keine Schwierigkeit mehr hat. — Indem ich die im ersten Bande dieses Werkes S. 263 [Abh. 51, Bd. I. p. 338] gegebene Zerlegung von PP in zwei Factoren mit dieser Substitution einer neuen unbestimmten Grösse verbunden habe, glaube ich die Aufgaben der Theorie der Finsternisse auf ihre einfachste Gestalt zurückgeführt zu haben.

11.

Der Ausdruck von PP hat, nach $\cos p$ und $\sin p$ geordnet, die Form:

$$PP = a + 2b\cos p + 2c\sin p + d\cos p^2 + 2e\cos p\sin p + f\sin p^2 \ldots (38)$$

deren Coefficienten ich zuerst näher angeben werde.

Im 7. § findet sich der Ausdruck:

$$PP = (\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')^2 - (\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma)(\alpha'\alpha' + \beta'\beta' + \gamma'\gamma' - 1)$$

welcher durch die Substitution der Ausdrücke (27) von α, β, γ unmittelbar in die Form (38) übergeht. Die Ausdrücke ihrer Coefficienten werden vereinfacht, wenn zwei neue, mit s und y nahe verbundene Grössen s' und y', welche aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} s\cos d - y\sin d &= s'\cos d - y'\sin d \\ \frac{s\sin d + y\cos d}{\sqrt{1-ee}} &= (s'\sin d + y'\cos d)\sqrt{1-ee} \end{aligned}\right\} \ldots . (39)$$

hervorgehen, statt s und y in die Ausdrücke (26) von α', β', γ' eingeführt, diese Ausdrücke also in:

$$\begin{aligned} \alpha' &= x \\ \beta' &= s'\cos d - y'\sin d \\ \gamma' &= (s'\sin d + y'\cos d)\sqrt{1-ee} \end{aligned}$$

verwandelt werden. Durch diese Aenderung wird nämlich der Nenner $1 - ee$ von $\gamma\gamma'$ weggeschafft und $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$ erhält den Ausdruck:

$$\begin{aligned} &xi\sin p + (s'\cos d - y'\sin d)(\cos d - i\sin d\cos p) \\ &\quad + (s'\sin d + y'\cos d)(\sin d + i\cos d\cos p) \end{aligned}$$

welcher ganz einfach, nämlich:

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = s' + y'i\cos p + xi\sin p$$

ist. Indem man noch die Ausdrücke (27) von α, β, γ, und $\sigma\sigma$ für $\alpha'\alpha' + \beta'\beta' + \gamma'\gamma'$ schreibt, wird

$$\begin{aligned} PP = {} & [s' + y'i\cos p + xi\sin p]^2 \\ & - (\sigma\sigma - 1)\left[ii\sin p^2 + (\cos d - i\sin d\cos p)^2 + \frac{(\sin d + i\cos d\cos p)^2}{1-ee}\right] \end{aligned}$$

oder die Coefficienten des Ausdruckes (38) werden:

$$\left.\begin{aligned} a &= s's' - (\sigma\sigma - 1)\frac{1 - ee\cos d^2}{1-ee} \\ b &= i\left[s'y' - (\sigma\sigma - 1)\frac{ee\cos d\sin d}{1-ee}\right] \\ c &= is'x \\ d &= ii\left[y'y' - (\sigma\sigma - 1)\frac{1 - ee\sin d^2}{1-ee}\right] \\ e &= ii xy' \\ f &= ii[xx - (\sigma\sigma - 1)] \end{aligned}\right\} \ldots . (40)$$

Der erste dieser Coefficienten kann auch in der Form:

$$a = (1 - xx)\frac{1 - ee\cos d^2}{1-ee} - \frac{yy}{1-ee}$$

dargestellt werden, welche ihn, immer wenn $\sigma\sigma - 1$ einige Einheiten übersteigt, bei gleich genauer Rechnung genauer ergibt. Die hier eingeführten Grössen haben den Gleichungen (39) gemäss die Ausdrücke:

*) Determinatio Attractionis etc. Gottingae 1818. [Werke, III. Bd.]

**) CRELLE. Journal für die reine und angewandte Mathematik. 8. Band. S. 253 und 321. Berlin 1832.

$$\left.\begin{aligned} s' &= s\frac{1-ee\cos d^2}{1-ee}+y\frac{ee\cos d\sin d}{1-ee}=s+\frac{ee\sin d}{1-ee}[s\sin d+y\cos d]\\ y' &= s\frac{ee\cos d\sin d}{1-ee}+y\frac{1-ee\sin d^2}{1-ee}=y+\frac{ee\cos d}{1-ee}[s\sin d+y\cos d]\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(41)$$

Die im 8. § entwickelte Form der Ausdrücke von u, v, w enthält nicht P, sondern P', und zwischen beiden findet in den dort getrennten Fällen die Verbindung

$$P'P'=\frac{ss}{\sigma\sigma-1}PP \text{ und } =\frac{ss}{1-\sigma\sigma}PP$$

statt. Will man die Ausdrücke der Coefficienten des nach $\cos p$ und $\sin p$ geordneten Ausdruckes von $P'P'$ kennen lernen, so muss man daher die Ausdrücke (40), je nachdem der erste oder der zweite Fall der vorhandene ist, in

$$\frac{ss}{\sigma\sigma-1} \text{ oder } \frac{ss}{1-\sigma\sigma}$$

multipliciren. Wenn man aber die Vorschriften des 8. §'s befolgt, ist die Einführung von s' und y' nicht zur Erlangung einfacher Ausdrücke der Coefficienten des Ausdruckes von $P'P'$ nothwendig, indem die dort schon eingeführten Grössen gleichfalls solche Ausdrücke hervorbringen. Bezeichnet man durch h, k, q die in dem Falle einer grossen Entfernung der Spitze des Schattenkegels von der Erde immer sehr kleinen Grössen:

$$\left.\begin{aligned} h &= \sin\varepsilon\sec\lambda\\ k &= \cos\varepsilon\sin(\delta-\delta')\sec\lambda\\ q &= hx+k\varrho y-\operatorname{tg}\lambda\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(42)$$

so wird, in dem Falle $\sigma\sigma>1$ (35):

$$\vartheta'=q-k\varrho l\cos p-hl\sin p\quad\ldots\ldots(43)$$

und die Coefficienten von $P'P'$ werden:

$$\left.\begin{aligned} a &= 1-xx-\varrho\varrho yy+qq\\ b &= \varrho l[\varrho y-kq]\\ c &= l[x-hq]\\ d &= -\varrho\varrho ll[1-kk]\\ e &= \varrho llhk\\ f &= -ll[1-hh]\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(44)$$

Bezeichnet man dagegen für den Fall $\sigma\sigma<1$ (35*):

$$\left.\begin{aligned} h &= \sin\varepsilon\operatorname{tg}\lambda\\ k &= \cos\varepsilon\sin(\delta-\delta')\operatorname{tg}\lambda\\ q &= hx+k\varrho y-\sec\lambda\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(42^*)$$

so wird wieder:

$$\vartheta'=q-k\varrho l\cos p-hl\sin p\quad\ldots\ldots(43^*)$$

und die Coefficienten von $P'P'$ werden:

$$\left.\begin{aligned} a &= xx+\varrho\varrho yy-1+qq\\ b &= -\varrho l[\varrho y+kq]\\ c &= -l[x+hq]\\ d &= \varrho\varrho ll[1+kk]\\ e &= \varrho llhk\\ f &= ll[1+hh]\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(44^*)$$

12.

Von Ausdrücken, welche in der Form (38) begriffen sind, habe ich in der VI. Abhandlung des ersten Bandes dieses Werkes, S. 263 u. s. w. [Abh. 51, p. 338] gezeigt, dass sie in die immer reellen Factoren:

$$PP=\frac{1}{a+g}[a+g+(b+R)\cos p+(c+R')\sin p]\times$$
$$\times[a+g+(b-R)\cos p+(c-R')\sin p]\quad\ldots(45)$$

zerlegt werden können, worin g eine reelle Wurzel der cubischen Gleichung:

$$0=(a+x)(d-x)(f-x)-bb(f-x)-cc(d-x)$$
$$-ee(a+x)+2bce\ldots(46)$$

bedeutet, welche Gleichung, nach den Potenzen von x geordnet:

$$0=x^3-Axx+Bx-C\quad\ldots\ldots(47)$$

die Coefficienten

$$A=d+f-a$$
$$B=bb+cc-ee-a(d+f)+df$$
$$C=bbf+ccd+eea-adf-2bce$$

hat; worin ferner R und R' durch die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} RR &= bb-(a+g)(d-g)\\ R'R' &= cc-(a+g)(f-g)\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(48)$$

und ihr Product, also auch die Gleichheit oder Verschiedenheit ihrer Zeichen durch

$$RR'=bc-e(a+g)\quad\ldots\ldots(49)$$

gegeben werden, die Zeichen aber übrigens willkürlich bleiben, was auch nothwendig ist, indem diese Willkür durch die offenbar gleichgültige Verwechselung der beiden Factoren miteinander hervorgebracht wird.

Daselbst habe ich ferner gezeigt, dass, wenn die cubische Gleichung drei reelle Wurzeln hat, der Gleichung $PP=0$ entweder durch vier imaginäre, oder durch vier reelle Werthe von p Genüge geleistet wird, das erstere oder das letztere offenbar, je nachdem

$$(b+R)^2+(c+R')^2 \text{ und } (b-R)^2+(c-R')^2$$

kleiner oder grösser sind als $(a+g)^2$; dass ihr durch zwei imaginäre und zwei reelle Werthe von p genügt wird, wenn die cubische Gleichung nur eine reelle Wurzel hat, in welchem Falle also eine der eben angeführten Summen der Quadrate kleiner, die andere grösser ist als $(a+g)^2$. Auf diese Sätze werde ich das Folgende gründen.

Wenn die Ränderberührung zu einer gegebenen Zeit, für welche geltend die Werthe der Coefficienten

von (38) angenommen werden, nirgends auf der Erde sichtbar ist, so muss P für jeden Werth von p imaginär oder PP negativ werden; wird aber PP für jeden Werth von p positiv, so entspricht auch jedem ein Punkt der Erde, welcher die Ränderberührung sieht. In diesen beiden Fällen hat die cubische Gleichung drei reelle Wurzeln, deren eine die Zerfällung von PP in zwei reelle Factoren ergibt, und $(b+R)^2+(c+R')^2$ und $(b-R)^2+(c-R')^2$ sind beide kleiner als $(a+g)^2$. Wird PP nur zwischen gewissen Grenzen von p positiv, für alle übrigen Werthe von p negativ, so muss es entweder für zwei Werthe von p verschwinden, also eine der angeführten Summen der Quadrate kleiner, die andere grösser sein als $(a+g)^2$, und die cubische Gleichung nur eine reelle Wurzel haben; oder es muss für vier Werthe von p verschwinden, also beide Summen grösser sein als $(a+g)^2$, und die cubische Gleichung muss drei reelle Wurzeln haben. — Indem jeder Werth von p eine ihm entsprechende gerade Linie in der Oberfläche des Schattenkegels, ein Werth von p für welchen PP verschwindet, aber eine die Oberfläche der Erde berührende dieser Linien bestimmt (§ 6), so wird klar, dass der zuletzt angeführte Fall nur eintreten kann, wenn vier gerade Linien in der Kegeloberfläche die Erde berühren können. Mathematisch möglich ist dieser Fall und er muss offenbar eintreten, wenn die Ausdehnung des Schattenkegels und seine Lage gegen die Erde so beschaffen sind, dass die kleine Axe der Erde sich ganz innerhalb des von ihm umschlossenen Raumes befindet, die Enden der grossen aber aus diesem hervorragen; aber in der Wirklichkeit wird er nicht vorkommen, indem kein Paar von Gestirnen vorhanden ist, von dessen Schattenkegeln einer, da wo er die Erde treffen kann, die dazu erforderliche Ausdehnung besässe. Ich werde ihn daher ausschliessen und das Folgende auf die Voraussetzung gründen, dass P entweder für keinen Werth oder nur für zwei Werthe von p verschwinden kann; unter welcher Voraussetzung, wie ich vorher bemerkt habe, wenigstens in einem der beiden von p abhängigen Factoren von PP die Summe der Quadrate der Coefficienten von $\cos p$ und $\sin p$ kleiner ist als $(a+g)^2$.

Ich werde also die Substitution einer neuen unbestimmten Grösse statt p so wählen, dass sie auf reelle Formeln führt, wenn diese Bedingung durch einen der beiden von p abhängigen Factoren von (45), und zwar durch den zuletzt geschriebenen erfüllt wird. Da die Zeichen von R und R' willkürlich bleiben und nur aus (49) hervorgeht, ob beide gleich oder verschieden anzunehmen sind, so kann unter dem zuletzt geschriebenen Factor immer der von beiden verstanden werden, für welchen die Summe der Quadrate der Coefficienten von $\cos p$ und $\sin p$ den kleineren Werth hat. Man kann also immer reelle Winkel n und m durch die Formeln:

$$\left.\begin{aligned}\sin n\cos m &= \frac{b-R}{a+g}\\ \sin n\sin m &= \frac{c-R'}{a+g}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (50)$$

bestimmen, in welchen $\sin n$ positiv angenommen werden kann, und durch deren Einführung

$$a+g+(b-R)\cos p+(c-R')\sin p = \\ = (a+g)[1+\sin n\cos(p-m)]$$

wird.

Führt man nun, statt des unbestimmten p, einen anderen Winkel u in die Betrachtung ein, der mit dem ersteren durch die Formeln:

$$\left.\begin{aligned}\cos(p-m) &= \frac{\cos u-\sin n}{1-\sin n\cos u}\\ \sin(p-m) &= \frac{\cos n\sin u}{1-\sin n\cos u}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (51)$$

verbunden ist, so wird dadurch

$$1+\sin n\cos(p-m) = \frac{\cos n^2}{1-\sin n\cos u}$$

und also auch

$$\frac{1}{a+g}[a+g+(b-R)\cos p+(c-R')\sin p] = \frac{\cos n^2}{1-\sin n\cos u} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (52)$$

Der noch übrige Factor von PP kann

$$a+g+[(b+R)\cos m+(c+R')\sin m]\cos(p-m)-[(b+R)\sin m-(c+R')\cos m]\sin(p-m)$$

geschrieben werden, und verwandelt sich durch die Substitution (51) in:

$$\left.\begin{aligned}&a+g-(b+R)\sin n\cos m-(c+R')\sin n\sin m\\ &+[(b+R)\cos m+(c+R')\sin m-(a+g)\sin n]\cos u\\ &-[(b+R)\sin m-(c+R')\cos m]\cos n\sin u\end{aligned}\right\} : (1-\sin n\cos u)$$

und durch die aus (50) hervorgehenden Ausdrücke:

$$b\cos m+c\sin m = R\cos m+R'\sin m+(a+g)\sin n; \qquad b\sin m-c\cos m = R\sin m-R'\cos m$$

in:

$$\frac{a+g-\dfrac{bb-RR+cc-R'R'}{a+g}+2(R\cos m+R'\sin m)\cos u-2(R\sin m-R'\cos m)\cos n\sin u}{1-\sin n\cos u}$$

Das erste Glied dieses Ausdruckes wird durch (48) in

$$3g + a - d - f$$

oder, da $d + f - a = A$ ist (47), in

$$3g - A$$

verwandelt. Der Ausdruck (38) hat daher, durch die Einführung des unbestimmten Winkels u die Form:

$$PP = \frac{\cos n^2 \{3g - A + 2(R\cos m + R'\sin m)\cos u - 2(R\sin m - R'\cos m)\cos n \sin u\}}{(1 - \sin n \cos u)^2} \quad \ldots\ldots\ldots (53)$$

angenommen.

Die durch die Formeln (51) ausgedrückte Relation zwischen $p - m$ und u, durch welche diese Verwandlung erlangt worden ist, ist dieselbe, welche zwischen der wahren und der excentrischen Anomalie in einer Ellipse stattfindet, deren Excentricität $= \sin n$ ist*). Sie kann auch in der bekannten Form:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(p - m) = \operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}n) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} u \ldots\ldots (54)$$

dargestellt werden.

13.

Der Ausdruck (53) von PP wird noch einfacher, wenn man darin nicht allein die durch g bezeichnete Wurzel der cubischen Gleichung (47), sondern auch ihre übrigen Wurzeln, welche ich durch g' und g'' bezeichnen werde, benutzt. Wenn nur eine ihrer Wurzeln reell ist, so versteht es sich von selbst, dass die geforderte Zerfällung von PP in zwei reelle Factoren nur erlangt wird, wenn g die reelle Wurzel bedeutet; allein wenn alle drei Wurzeln reell sind, so wird nöthig zu untersuchen, welche von ihnen die durch g bezeichnete, die Zerfällung in zwei reelle Factoren ergebende ist. Ich werde daher die Beschaffenheit der Wurzeln der Gleichung (47) näher betrachten.

Zuerst werde ich zeigen, dass diese Gleichung immer, wenn ihr letztes Glied nicht verschwindet, eine negative Wurzel hat. Wenn man in ihrem letzten Gliede, nämlich in

$$-C = -bbf - ccd - eea + adf + 2bce$$

die Ausdrücke (40) von a, b, c u. s. w. substituirt und nach den Potenzen von $\sigma\sigma - 1$ ordnet, so findet man, dass das in die erste Potenz dieser Grösse multiplicirte und das sie nicht enthaltende Glied verschwinden, die beiden übrigbleibenden Glieder aber

$$\frac{i^4(\sigma\sigma-1)^2}{1-ee}[xx + y'y'(1 - ee\cos d^2) - 2y's'ee\cos d \sin d + s's'(1 - ee\sin d^2) - \sigma\sigma + 1]$$

werden, und da der zwischen Klammern eingeschlossene Theil dieses Ausdruckes, den Formeln (39) zufolge:

$$= xx + (s\cos d - y\sin d)^2 + \frac{(s\sin d + y\cos d)^2}{1-ee} - \sigma\sigma + 1 = 1$$

ist, sich in:

$$-C = \frac{i^4(\sigma\sigma-1)^2}{1-ee} \quad \ldots\ldots\ldots (55)$$

zusammenziehen. Wenn man aber die Ausdrücke (44) von a, b, c, ..., nämlich die Coefficienten des Ausdruckes von

$$P'P' = \frac{ss}{\sigma\sigma - 1} PP$$

setzt, so erhält man, da $-C$ die dritte Dimension von a, b, c ... enthält, dafür den Ausdruck:

$$-C = \frac{i^4(\sigma\sigma-1)^2}{1-ee}\left(\frac{ss}{\sigma\sigma-1}\right)^3 = \frac{i^4 ss}{(1-ee)(\sigma\sigma-1)} \ldots (55^*)$$

welcher, wenn, wie die Ausdrücke (44) voraussetzen, $\sigma\sigma > 1$ ist, gleich dem vorigen, immer positiv ist. Ebenfalls wird er positiv, wenn man die $\sigma\sigma < 1$ voraussetzenden Ausdrücke (44*) der Coefficienten a, b, c ... von

$$P'P' = \frac{ss}{1 - \sigma\sigma} PP$$

annimmt. Das letzte Glied der Gleichung (47) ist also, wenn es nicht verschwindet, in allen Fällen positiv, weshalb sie, wenn nicht eine verschwindende, immer eine negative Wurzel, und falls ihre 3 Wurzeln reell sind, entweder noch zwei negative, oder zwei positive hat.

Die Wahl der Wurzel g der cubischen Gleichung bleibt willkürlich, wenn sie vor g' und g'' nicht dadurch ausgezeichnet wird, dass sie die einzige ist, welche eine Zerlegung von PP in zwei reelle Factoren ergibt. Willkürlich bleibt sie, wenn der Gleichung $PP = 0$ durch vier reelle Werthe von p Genüge geleistet wird, in welchem — jedoch im vorigen § ausgeschlossenen — Falle die cubische Gleichung drei reelle Wurzeln hat und g jede von ihnen sein kann, weil jede Combination der vier einfachen Factoren von PP zu zwei Paaren dann reell ist. Sie bleibt aber nicht willkürlich, wenn der Gleichung $PP = 0$ durch zwei und durch vier imaginäre Werthe von p Genüge geleistet wird. In dem ersten Falle ist g die einzige reelle Wurzel der cubischen Gleichung; in dem zweiten ist sie unter den drei dann reellen Wurzeln die, welche allein eine Zerlegung von PP in zwei reelle Factoren (45) ergibt. Diese Bedingung fordert, dass

$RR = bb - (a+g)(d-g)$ und $R'R' = cc - (a+g)(f-g)$

positiv, die ähnlichen Ausdrücke, in welchen g' oder g'' statt g geschrieben werden, z. B.

$$bb - (a+g')(d-g') \text{ und } cc - (a+g')(f-g')$$

aber negativ sind, und zwar beide negativ, weil sonst

*) Jacobi a. a. O. S. 324.

das Product ihrer Quadratwurzeln, welches zufolge (49) für jeden reellen Werth der angewandten Wurzeln reell ist, imaginär sein würde. Hieraus geht hervor, dass

$$(a+g')(d-g')-(a+g)(d-g)$$

und $(a+g')(f-g')-(a+g)(f-g)$

oder $(g'-g)(d-a-g-g')$ und $(g'-g)(f-a-g-g')$

oder, wegen $d+f-a=g+g'+g''$:

$$(g'-g)(g''-f) \text{ und } (g'-g)(g''-d)$$

positiv, die drei Grössen

$$g'-g,\quad g''-f,\quad g''-d$$

also von gleichem Zeichen sind. Aus demselben Grunde müssen auch

$$g''-g,\quad g'-f,\quad g'-d$$

gleiches Zeichen haben. Aber auch das gemeinschaftliche Zeichen der drei ersten Grössen muss dasselbe sein, welches die drei letzten haben; denn wenn beide verschieden wären, müssten $g''-g-(g'-g)=g''-g'$ und $g'-f-(g''-f)=g'-g''$ gleiches Zeichen haben, was nur im Falle des Verschwindens von $g''-g'$ nicht widersprechend ist, in welchem Falle jedoch die drei ersten und die drei letzten Grössen nicht im Zeichen allein, sondern völlig übereinstimmen. Hieraus folgt, dass, wenn nicht alle drei Wurzeln der cubischen Gleichung einander gleich sind, g'' und g', beide entweder kleiner oder grösser sind, nicht nur als g, sondern auch als d und als f.

Man kann nun zeigen, dass die Wurzel g der cubischen Gleichung, wenn die Spitze des Schattenkegels sich ausserhalb der Erde befindet, negativ ist, wenn innerhalb der Erde positiv. Wenn der Schattenkegel ganz ausserhalb der Erde ist, muss PP für keinen Werth von p positiv werden können, was nur stattfinden kann, wenn das von p unabhängige Glied des Ausdruckes (53), nämlich $3g-A=2g-g'-g''$ negativ ist. In diesem Falle sind also $g-g'$ und $g-g''$ negativ, oder g ist die kleinste der drei reellen Wurzeln, also, da wenigstens eine von ihnen negativ ist, jedenfalls negativ. Wenn der Schattenkegel zum Theil von der Erde umschlossen ist, hat die cubische Gleichung nur eine reelle Wurzel, von welcher wir schon wissen, dass sie negativ ist. Wenn er endlich ganz von der Erde umschlossen ist, kann die in den beiden vorigen — immer vor dem gegenwärtigen Falle vorangehenden und auf ihn folgenden — Fällen negative Wurzel g ihr Zeichen nur geändert haben, wenn sie vorher verschwunden ist, wenn also auch das Product der drei Wurzeln verschwunden ist, was, seinem Ausdrucke (55) gemäss, nur geschehen kann, indem $\sigma\sigma=1$ wird, oder die Spitze des Schattenkegels durch die Oberfläche der Erde geht. Wenn die Spitze des Schattenkegels, während des Verlaufes einer Finsterniss, nicht in das Innere der Erde gelangt, kann also auch g nur negativ sein. — In dem entgegengesetzten Falle muss g positiv sein, wenn gezeigt werden kann, dass dann nicht alle drei Wurzeln der cubischen Gleichung negativ sein können. Denn immer wenn der Schattenkegel ganz von der Erde umschlossen ist, also auch immer wenn seine Spitze sich in ihrem Inneren befindet, ist das von p unabhängige Glied des Ausdruckes (53) positiv, woraus folgt, dass g dann die grösste der drei Wurzeln, also, wenn nicht alle negativ sind, jedenfalls positiv ist. Wenn man die Ausdrücke (40) der Coefficienten von PP in dem Ausdrucke des zweiten Coefficienten der cubischen Gleichung, nämlich:

$$B=bb+cc-ee-a(d+f)+df$$

substituirt, so findet man, dass ihr nicht in $\sigma\sigma-1$ multiplicirter Theil verschwindet, die übrigen Theile aber nach einigen leichten, auf den Formeln (39) beruhenden Reductionen, sich in:

$$B=-\frac{ii(1-\sigma\sigma)}{1-ee}\Big\{(1-ee\cos d^2)+ss(1+ii)+$$

$$+\frac{ee}{1-ee}(s\sin d+y\cos d)^2+(1-\sigma\sigma)-ii(1-ee\sin d^2)\Big\}$$

zusammenziehen. Wenn $\sigma\sigma<1$ ist, oder die Spitze des Schattenkegels sich im Inneren der Erde befindet, ist nur das letzte Glied des zwischen Klammern eingeschlossenen Theils dieses Ausdruckes negativ, allein es ist kleiner als das erste Glied allein, da ii immer ein sehr kleiner Bruch ist; B selbst ist also negativ, womit erwiesen ist, dass die cubische Gleichung in dem gegenwärtigen Falle nicht drei negative Wurzeln haben kann, also auch g positiv sein muss. Da schon bekannt geworden ist, dass sie nie eine positive Wurzel allein haben kann, so geht auch hervor, dass in dem gegenwärtigen Falle auch eine der Wurzeln g' und g'' positiv sein muss, während die andere negativ ist. — Alles zusammengenommen, was ich jetzt von der Wurzel g der cubischen Gleichung gesagt habe, lässt ihre Wahl nie zweifelhaft. Wenn die Spitze des Schattenkegels ausserhalb der Erde ist, ist sie immer negativ; wenn diese Spitze innerhalb der Erde ist, positiv. Wenn der Schattenkegel ganz ausserhalb der Erde ist, ist sie die kleinste unter den drei reellen Wurzeln; wenn er ganz von der Erde umschlossen ist, ist sie die grösste. Wenn in diesem Falle seine Spitze ausserhalb der Erde ist, ist sie selbst negativ, also unter den drei dann negativen Wurzeln der absoluten Grösse nach die kleinste; wenn diese Spitze innerhalb der Erde ist, ist g die grösste

von zwei positiven Wurzeln. Der Vollständigkeit wegen bemerke ich noch, dass in dem Momente des Durchganges der Spitze des Schattenkegels durch die Oberfläche der Erde zwei Wurzeln der cubischen Gleichung zugleich verschwinden und dass g eine von ihnen ist.

Man kann auch Grenzen angeben, zwischen welchen die Wurzel g liegen muss. Erhebt man die immer reelle Grösse $bR'-cR$ zum Quadrate und substituirt man für RR, $R'R'$, RR' ihre Ausdrücke (48) und (49), so wird dieses Quadrat:

$$=(a+g)[2bce-bb(f-g)-cc(d-g)]$$

oder der Gleichung (46) zufolge, welcher $x=g$ Genüge leistet:

$$(bR'-cR)^2=(a+g)^2[ee-(d-g)(f-g)] \quad \ldots \quad (56)$$

Da dieser Ausdruck also positiv sein muss, welches nur für Werthe von g, die zwischen den Grenzen

$$\tfrac{1}{2}(d+f)-\sqrt{ee+\tfrac{1}{4}(d-f)^2} \text{ und } \tfrac{1}{2}(d+f)+\sqrt{ee+\tfrac{1}{4}(d-f)^2}$$

liegen, stattfindet, so sind diese Grenzen die Grenzen von g. Wenn e verschwindet, verwandeln sie sich in d und f, zwischen welchen Grössen also dann g liegt.

14.

Ich kehre wieder zu dem Ausdrucke (53) von PP zurück. Setzt man darin

$$\left.\begin{aligned} R^0\cos m^0 &= R\cos m+R'\sin m \\ R^0\sin m^0 &= (-R\sin m+R'\cos m)\cos n \end{aligned}\right\} \ldots (57)$$

so wird er:

$$PP=\frac{\cos n^2[3g-A+2R^0\cos(u-m^0)]}{(1-\sin n\cos u)^2}$$

und das jetzt eingeführte R^0 kann durch die drei Wurzeln der cubischen Gleichung sehr einfach ausgedrückt werden. Wenn man nämlich in dem Ausdrucke

$$R^0R^0=(R\cos m+R'\sin m)^2+(R\sin m-R'\cos m)^2\cos n^2$$

$1-\sin n^2$ statt $\cos n^2$ schreibt, nimmt er die Form

$$R^0R^0=RR+R'R'-(R\sin m-R'\cos m)^2\sin n^2$$

an, welche durch die Substitution der Ausdrücke (50) von $\sin n\cos m$ und $\sin n\sin m$ in

$$R^0R^0=RR+R'R'-\frac{(bR'-cR)^2}{(a+g)^2}$$

und durch (48) und (56) in:

$$R^0R^0=bb+cc-ee-a(d+f)+df-2(d+f-a)g+3gg$$

verwandelt wird. Der von g unabhängige Theil dieses Ausdrucks ist der zweite Coefficient der Gleichung (47), der in $-2g$ multiplicirte ihr erster; jener ist also $=gg'+gg''+g'g''$, dieser $=g+g'+g''$. Man hat also:

$$\left.\begin{aligned} R^0R^0 &= gg'+gg''+g'g''-2g(g+g'+g'')+3gg \\ &= (g-g')(g-g'') \end{aligned}\right\} (58)$$

und, da auch $3g-A=2g-g'-g''$ ist, die einfachste Form des Ausdrucks von PP:

$$PP=\frac{\cos n^2[2g-g'-g''+2\sqrt{(g-g')(g-g'')}\cos(u-m^0)]}{(1-\sin n\cos u)^2}$$

oder, wenn man $u-m^0$ als unbestimmten Winkel einführen und ihn durch η bezeichnen will:

$$P=\frac{\cos n\sqrt{2g-g'-g''+2\sqrt{(g-g')(g-g'')}\cos\eta}}{1-\sin n\cos(\eta+m^0)} \quad \ldots (59)$$

Um imaginäre Grössen, auch wenn g' und g'' solche sind, zu vermeiden, kann man das immer reelle Quadrat von $g''-g'$ in diesen Ausdruck einführen, wodurch er die Gestalt:

$$P=\frac{\cos n}{1-\sin n\cos(\eta+m^0)}\sqrt{3g-A+\cos\eta\sqrt{(3g-A)^2-(g''-g')^2}} \quad \ldots \quad (60)$$

annimmt, welche auch unmittelbar zeigt, dass P verschwinden oder nicht verschwinden kann, je nachdem $(g''-g')^2$ negativ oder positiv ist, oder je nachdem die cubische Gleichung zwei imaginäre, oder nur reelle Wurzeln hat. —

Offenbar gilt Alles, was in den letzten §§ von P gesagt ist, auch von P', indem beide in einem von p unabhängigen Verhältnisse zu einander sind.

15.

Um den willkürlichen Winkel p ganz aus der Betrachtung zu schaffen, müssen auch die, noch ausser P in den Ausdrücken von u, v, w vorkommenden, von p abhängigen Grössen, durch den neuen willkürlichen Winkel η ausgedrückt werden. Ich werde die Formeln mittheilen, durch welche der Ersatz von p durch η erlangt wird.

Schreibt man statt $\cos p$ und $\sin p$:

$$\cos p=\cos m\cos(p-m)-\sin m\sin(p-m)$$
$$\sin p=\sin m\cos(p-m)+\cos m\sin(p-m)$$

und wendet man dann die Substitution (51) an, so erhält man:

$$\cos p=\frac{-\sin n\cos m+\cos m\cos(\eta+m^0)-\cos n\sin m\sin(\eta+m^0)}{1-\sin n\cos(\eta+m^0)}$$

$$\sin p=\frac{-\sin n\sin m+\sin m\cos(\eta+m^0)+\cos n\cos m\sin(\eta+m^0)}{1-\sin n\cos(\eta+m^0)}$$

oder

$$\cos p=\frac{-\nu+\nu'\cos\eta+\nu''\sin\eta}{\mu-\mu'\cos\eta-\mu''\sin\eta}$$

$$\sin p=\frac{-\xi+\xi'\cos\eta+\xi''\sin\eta}{\mu-\mu'\cos\eta-\mu''\sin\eta}$$

wo die eingeführten Zeichen folgende Bedeutung haben:

$$\left.\begin{aligned}
\mu &= 1\\
\mu' &= \sin n \cos m^0\\
\mu'' &= -\sin n \sin m^0\\
\nu &= \sin n \cos m\\
\nu' &= \cos m \cos m^0 - \cos n \sin m \sin m^0\\
\nu'' &= -\cos m \sin m^0 - \cos n \sin m \cos m^0\\
\xi &= \sin n \sin m\\
\xi' &= \sin m \cos m^0 + \cos n \cos m \sin m^0\\
\xi'' &= -\sin m \sin m^0 + \cos n \cos m \cos m^0
\end{aligned}\right\} \ldots (61)$$

Diese Ausdrücke von $\cos p$ und $\sin p$ müssen in den Ausdrücken von u, v, w substituirt werden. Am einfachsten werden die ganz von η abhängig gemachten Ausdrücke von u, v, w, wenn man von den Formeln (32) und (32*) ausgeht, welche, ausser in P', nur die erste Dimension von $\cos p$ und $\sin p$ enthalten, und daher, nachdem man sie in den gemeinschaftlichen Nenner der von η abhängig gemachten Ausdrücke, sowohl dieser Grössen als von P', multiplicirt hat, offenbar die folgende Gestalt annehmen:

$$\left.\begin{aligned}
[D + D' \cos\eta + D'' \sin\eta + D''' \Pi]\, u &= A + A' \cos\eta + A'' \sin\eta + A''' \Pi]\\
[D + D' \cos\eta + D'' \sin\eta + D''' \Pi]\, v &= B + B' \cos\eta + B'' \sin\eta + B''' \Pi]\\
[D + D' \cos\eta + D'' \sin\eta + D''' \Pi]\, w &= C + C' \cos\eta + C'' \sin\eta + C''' \Pi]
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (62)$$

worin $A, A', \ldots, B, B', \ldots$ u. s. w., von η unabhängig sind und Π für

$$\sqrt{2g - g' - g'' + 2\sqrt{(g-g')(g-g'')}\cos\eta}$$

geschrieben ist. Weniger einfach werden die den Formeln (24) entsprechenden Ausdrücke, indem diese Formeln in der Grösse m'' schon die zweite Dimension von $\cos p$ und $\sin p$ enthalten und daher ihre Umformung in η auch die zweite Dimension von $\cos\eta$ und $\sin\eta$ enthalten muss. Will man auch den Positionswinkel des Berührungspunkts der Ränder am Punkte Z für den durch u, v, w bestimmten Punkt der Erde kennen lernen, so erhält man ihn durch die Formel (54), welche nun

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(p - m) = \operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}n) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\eta + m^0) \ldots (63)$$

wird.

Ich habe hier nur der Form der ganz von η abhängig gemachten Ausdrücke von u, v, w erwähnt, ohne die Ausdrücke ihrer Coefficienten anzugeben. In jener Form erscheint die Auflösung der Aufgabe I. in ihrer einfachsten Gestalt, allein für die Anwendungen wird man vorziehen, die Aufsuchung der Werthe von μ, ν, ξ, u. s. w. und von $A, A', \ldots B, B', \ldots$ u. s. w. zu vermeiden, welches, wenn η gegeben ist, nur die Aufsuchung von p nach der Formel (63) und seine Anwendung in den Formeln des 7. und 8. §s fordert.

16.

Die Coefficienten $a, b, c \ldots$ (40) haben eine Eigenschaft, deren Benutzung zur Erleichterung der Anwendung der gegebenen Vorschriften wesentlich beiträgt, und daher hier geltend gemacht werden muss. Sie hängen von x, y, s, l, d ab, von welchen Grössen, während des Verlaufes einer Finsterniss, die beiden ersten sich der Zeit nahe proportional ändern, die drei letzten aber nur geringe Aenderungen erfahren. Da sie ganze rationale Functionen dieser Grössen sind, so sind sie auch näherungsweise solche Functionen der Zeit, weshalb eine Reihe ihrer Werthe, für in arithmetischer Progression fortgehende Zeiten berechnet, wenn sie nur die dem Grade dieser Functionen angemessene Zahl von Gliedern besitzt, auch unabhängig von der Voraussetzung kleiner Aenderungen der Zeit, muss interpolirt werden können. Wenn man die Zusammensetzung der Ausdrücke (40) betrachtet, so bemerkt man, dass der Grad der ihnen näherungsweise gleichen Functionen der Zeit für a der 2te, für b, c der 1te, für d, e, f der 0te ist; welches unter der sich in allen vorkommenden Fällen bewährenden Voraussetzung gilt, dass $iixx$, $iixy$, $iiyy$ sehr kleine Grössen sind. Von den Ausdrücken (44) und (44*) der Coefficienten der Entwickelung von $P'P'$ kann Aehnliches bemerkt werden. Ich werde den Fall voraussetzen, von welchem nur bei den inneren Berührungen der Ränder der Sonne und des Mondes eine Ausnahme vorkommen kann, nämlich den Fall einer, vergleichungsweise mit x und y sehr grossen Entfernung der Spitze des Schattenkegels von der Erde, in welchem Falle h und k kleine, sich nahe der Zeit proportional ändernde Grössen sind, und die kleine Grösse q, in Beziehung auf die Zeit, nahe von der zweiten Ordnung ist. In dem Coefficienten a ist $xx + \varrho\varrho yy$ näherungsweise von der zweiten Ordnung und qq eine kleine Grösse der vierten: die Reihe der Werthe von a muss daher nahe beständige zweite und weit näher beständige vierte Differenzen haben. Die Coefficienten b, c haben aus ähnlichem Grunde nahe beständige erste, und weit näher beständige dritte Differenzen; d, e, f haben sehr nahe beständige zweite Differenzen. Man kann daher a, b, c, d, e, f für jede Zeit während des Verlaufes einer Finsterniss als bekannt annehmen, wenn

man ihre Werthe für fünf Momente berechnet hat, welche übrigens so gewählt werden müssen, wie die Sicherheit der Interpolationen im Allgemeinen fordert, d. h. so, dass der ganze Verlauf zwischen ihren äussersten enthalten ist. Wenn man diese Berechnung für die 7 Zeitmomente macht, für welche die im 4. § mitgetheilten Zahlen gelten, so ist sie daher mehr als genügende Grundlage der Interpolationen.

Dieser Eigenschaft der Coefficienten $a, b, c \ldots$ ist es angemessen, ihre Werthe nicht für jede Zeit, für welche man sie gebraucht, sondern ein für allemal für dieselben Zeitmomente, für welche man die Elemente einer Finsterniss aufgesucht hat (§ 4), aus diesen zu berechnen.

[Mittheilung der Werthe von $\log a$, δ, ε, ($\log \varrho$, δ'); ferner von q, k, h für die 7 Zeitmomente des Beispiels, und in Beziehung auf die äussere Ränderberührung; nach den Formeln (26), (33), (35) und (44).]

Man kann auch die bei der Anwendung der Formeln (35) nothwendigen

$$\log \varrho \sin \delta', \quad \log \varrho \cos \delta', \quad \sin \varepsilon \sec \lambda,$$
$$\cos \varepsilon \cos \delta \sec \lambda, \quad \cos \varepsilon \sin \delta \sec \lambda$$

für die (7) Zeitmomente aufsuchen und leicht dazwischen interpoliren.

[Werthe der Coefficienten $a \ldots f$ des Ausdrucks $P' P'$.]

17.

Ich muss hier Einiges über das Interpoliren sagen.

[Zahlenwerthe der Coefficienten a und b, bis zu ihren nahe constanten 4. bezw. 3. Differenzen.]

Die vortheilhaftesten Interpolationsformeln — die Newton'schen — sind bekanntlich die folgenden:

Fall I. Zwei Werthe der zu interpolirenden Grösse und jeder ungeraden Differenz, und ein Werth jeder geraden Differenz sind gegeben:

Schema.

Arg.	ft	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	
$-\frac{1}{2}$	$a_,$		$c_,$		$e_,$	
		b		d		u. s. w.
$+\frac{1}{2}$	a'		c'		e'	

$$2a = a_, + a', \quad 2c = c_, + c', \quad 2e = e_, + e', \text{ u. s. w.}$$

$$ft = a + t.b + \frac{tt - \frac{1}{4}}{2} \cdot c + \frac{t.tt - \frac{1}{4}}{2.3} \cdot d + \frac{tt - \frac{1}{4}.tt - \frac{9}{4}}{2.3.4} \cdot e + \frac{t.tt - \frac{1}{4}.tt - \frac{9}{4}}{2.3.4.5} \cdot f + \ldots.$$

Fall II. Ein Werth der zu interpolirenden Grösse und jeder geraden Differenz, und zwei Werthe jeder ungeraden Differenz sind gegeben:

Schema.

Arg.	ft	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	
		$b_,$		$d_,$		
0	a		c		e	u. s. w.
		b'		d'		

$$2b = b_, + b', \quad 2d = d_, + d', \text{ u. s. w.}$$

$$ft = a + t.b + \frac{tt}{2} \cdot c + \frac{t.tt-1}{2.3} d + \frac{tt.tt-1}{2.3.4} e + \frac{t.tt-1.tt-4}{2.3.4.5} f + \ldots$$

Diese Formeln sind am vortheilhaftesten, wenn t innerhalb $\pm \frac{1}{2}$ genommen wird, was immer geschehen kann, wenn die gegebenen Werthe von ft unbestimmt weit nach Oben und Unten fortgehen und daher keine der als bekannt vorausgesetzten Grössen $a, b, c, d, \ldots$ fehlen. Wenn aber, wie häufig und auch bei der jetzigen Anwendung, der Fall ist, nur eine begrenzte Reihe von Werthen von ft gegeben ist, und daher von $a, b, c, d, \ldots$, am Anfange und Ende derselben, nur mehr oder wenigere der früheren vorhanden sind, muss entweder t von der ersten vollständig vorhandenen Reihe der $a, b, c \ldots$ bis zum Anfange zurück, und von der letzten bis zum Ende vorwärts gezählt; oder wenn t immer zwischen $\mp \frac{1}{2}$ bleiben soll, müssen die fehlenden Glieder der Reihe der $a, b, c \ldots$ am Anfange durch die höchsten, am Ende durch die niedrigsten der in den Differenzreihen vorhandenen Zahlen ersetzt werden. Die dann anzuwendenden, den Newton'schen so weit als möglich folgenden Formeln werde ich mittheilen. Um sie kurz schreiben zu können, werde ich das Product einer Reihe, in arithmetischer Progression, von 1 zu 1 fortgehender Factoren, deren erster $t + a$, der letzte $t + b$ ist, durch $[a, b]$ bezeichnen, z. B. $t-3.t-2.t-1.t.t+1$ durch $[-3, 1]$ oder $[1, -3]$ $t - \frac{5}{2}.t - \frac{3}{2}.t - \frac{1}{2}.t + \frac{1}{2}$ durch $[-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}]$ oder $[\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}]$ das Product $2.3.4 \ldots n$ aber durch $[n]$; so dass z. B. die beiden Newton'schen Interpolationsformeln folgendermassen bezeichnet werden:

$$\text{I. } ft = a + t.b + \frac{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}{[2]} c + t.\frac{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}{[3]} d + \frac{[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]}{[4]} e + t.\frac{[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]}{[5]} f + \ldots$$

$$\text{II. } ft = a + t.b + \frac{tt}{[2]} c + \frac{[-1, 1]}{[3]} d + \frac{t[-1, 1]}{[4]} e + \frac{[-2, 2]}{[5]} f + \ldots$$

Dieser Bezeichnung gemäss hat man, wenn man für die Newton'schen Formeln, in beiden Fällen, um abzukürzen

$$a + N^{(1)}b + N^{(2)}c + N^{(3)}d + N^{(4)}e + \ldots$$

schreibt:

Fall I.

Am Anfange fehlen $c_{,}$ und die folgenden	$a+N^{(1)}b+N^{(2)}\Delta_2+\frac{[\frac{1}{2},-\frac{3}{2}]}{[3]}\Delta_3+\frac{[\frac{1}{2},-\frac{5}{2}]}{[4]}\Delta_4+\ldots$
$e_{,}$ „ „ „	$a+N^{(1)}b+N^{(2)}c+N^{(3)}d+N^{(4)}\Delta_4+\frac{[\frac{3}{2},-\frac{5}{2}]}{[5]}\Delta_5+\frac{[\frac{3}{2},-\frac{7}{2}]}{[6]}\Delta_6+\ldots$
$g_{,}$ „ „ „	$a+N^{(1)}b+N^{(2)}c+N^{(3)}d+N^{(4)}e+N^{(5)}f+N^{(6)}\Delta_6+\frac{[\frac{5}{2},-\frac{7}{2}]}{[7]}\Delta_7+\ldots$
	u. s. w.
Am Ende fehlen g' und die folgenden	$a+N^{(1)}b+N^{(2)}c+N^{(3)}d+N^{(4)}e+N^{(5)}f+N^{(6)}\Delta_6+\frac{[-\frac{5}{2},\frac{7}{2}]}{[7]}\Delta_7+\ldots$
e' „ „ „	$a+N^{(1)}b+N^{(2)}c+N^{(3)}d+N^{(4)}\Delta_4+\frac{[-\frac{3}{2},\frac{5}{2}]}{[5]}\Delta_5+\frac{[-\frac{3}{2},\frac{7}{2}]}{[6]}\Delta_6+\ldots$
c' „ „ „	$a+N^{(1)}b+N^{(2)}\Delta_2+\frac{[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}]}{[3]}\Delta_3+\frac{[-\frac{1}{2},\frac{5}{2}]}{[4]}\Delta_4+\ldots$

Fall II.

Am Anfange fehlen $b_{,}$ und die folgenden	$a+N^{(1)}\Delta_{,}+\frac{[0,-1]}{[2]}\Delta_2+\frac{[0,-2]}{[3]}\Delta_3+\frac{[0,-3]}{[4]}\Delta_4+\ldots$
$d_{,}$ „ „ „	$a+N^{(1)}b+N^{(2)}c+N^{(3)}\Delta_3+\frac{[1,-2]}{[4]}\Delta_4+\frac{[1,-3]}{[5]}\Delta_5+\ldots$
$f_{,}$ „ „ „	$a+N^{(1)}b+N^{(2)}c+N^{(3)}d+N^{(4)}e+N^{(5)}\Delta_5+\frac{[2,-3]}{[6]}\Delta_6+\ldots$
	u. s. w.
Am Ende fehlen f' und die folgenden	$a+N^{(1)}b+N^{(2)}c+N^{(3)}d+N^{(4)}e+N^{(5)}\Delta_5+\frac{[-2,3]}{[6]}\Delta_6+\ldots$
d' „ „ „	$a+N^{(1)}b+N^{(2)}c+N^{(3)}\Delta_3+\frac{[-1,2]}{[4]}\Delta_4+\frac{[-1,3]}{[5]}\Delta_5+\ldots$
b' „ „ „	$a+N^{(1)}\Delta_1+\frac{[0,1]}{[2]}\Delta_2+\frac{[0,2]}{[3]}\Delta_3+\frac{[0,3]}{[4]}\Delta_4+\ldots$

Bekanntlich wird die Anwendung der Interpolationsformeln am leichtesten, wenn man ihre früheren Glieder nach und nach durch die Berücksichtigung der späteren verändert. Damit man die Formeln, welche zur Ausführung der in der gegenwärtigen Abhandlung geforderten Interpolationen nöthig sind, hier beisammen finde, werde ich auch diese Aenderung, unter der Voraussetzung, dass man nicht über die vierten Differenzen hinausgehe und dass man dem Falle I. gemäss verfahre, mittheilen:

Erste Zwischenzeit	$d'=\Delta_3+\frac{1}{4}(t-\frac{5}{2})\Delta_4$,	$c'=\Delta_2+\frac{1}{3}(t-\frac{3}{2})d'$,	$b'=b+\frac{1}{2}t.c'$,	$a'=a-\frac{1}{8}c'$,
Zweite „	$c'=c+\frac{1}{12}(tt-\frac{9}{4})\Delta_4$,	$b'=b+\frac{1}{6}(tt-\frac{1}{4})d$,	$a'=a+\frac{1}{2}(tt-\frac{1}{4})c'$	
Dritte „	$c'=c+\frac{1}{12}(tt-\frac{9}{4})e$,	$b'=b+\frac{1}{6}(tt-\frac{1}{4})d$,	$a'=a+\frac{1}{2}(tt-\frac{1}{4})c'$	
	u. s. w.			
Vorletzte „	$c'=c+\frac{1}{12}(tt-\frac{9}{4})\Delta_4$,	$b'=b+\frac{1}{6}(tt-\frac{1}{4})d$,	$a'=a+\frac{1}{2}(tt-\frac{1}{4})c'$	
Letzte „	$d'=\Delta_3+\frac{1}{4}(t+\frac{5}{2})\Delta_4$,	$c'=\Delta_2+\frac{1}{3}(t+\frac{3}{2})d'$,	$b'=b+\frac{1}{2}t.c'$,	$a'=a-\frac{1}{8}c'$

Nachdem a' und b' hierdurch bekannt geworden sind, ist:

$$ft=a'+t.b'.$$

Die Differenzen einer Reihe von Zahlenwerthen einer Function convergiren im Allgemeinen nur am Anfange; später divergiren sie in Folge der begrenzten Annäherung der Zahlenwerthe selbst, aus welchen sie abgeleitet sind. Indem jeder dieser Werthe um eine halbe Einheit seiner letzten Decimalstelle fehlerhaft sein kann, kann jede Zahl der ersten Differenzreihe um eine Einheit, jede der zweiten um zwei Einheiten, jede der dritten um vier u. s. w. fehlerhaft sein. Gewöhnlich werden zwar die Fehler nicht diese Grösse erlangen, indem gewöhnlich die Fehler der berechneten Reihe nicht so gross sein werden als sie sein können und indem auch die wirklich in ihr vorhandenen nicht leicht in der nachtheiligsten Ordnung aufeinander folgen wer-

den; aber dennoch ist es weder nothwendig, noch im Allgemeinen vortheilhaft, eine Interpolationsformel bis zu einer Differenzreihe fortzusetzen, deren Zahlen aus der eben angegebenen Ursache gänzlich entstellt sein können. In dem ersten der beiden, am Anfange dieses §'s angeführten Fälle wird z. B. die Interpolation mit der vierten, in dem zweiten mit der dritten Differenzreihe zu schliessen sein.

18.

Es kommen zwei, im Vorhergehenden schon an verschiedenen Orten von einander getrennte Fälle von Finsternissen vor, welche nicht durchaus nach gleichen Vorschriften behandelt werden können, nämlich der Fall einer vergleichungsweise mit x und y sehr grossen Entfernung der Spitze des Schattenkegels von der Erde, und der Fall einer zu der Ordnung dieser Grössen zu zählenden. Jener ist der häufigere; dieser findet nur bei den inneren Berührungen der Ränder der Sonne und des Mondes statt. Um nicht fortwährend von dem einen zu dem anderen übergehen zu dürfen, werde ich den zweiten Fall jetzt ganz verlassen und erst gegen das Ende dieses Abschnitts, im 28. §, zu ihm zurückkehren. Bis dahin wird also nur von der Verfolgung der Formeln (31), (32), (44) die Rede sein.

Verschiedene Theile des Vorhergehenden bedürfen einer weiteren Ausführung, welche ich in diesem § mittheilen werde. Zuerst werde ich die mir am leichtesten erscheinende Art, die Wurzel g der cubischen Gleichung (47) zu finden, anführen. Ich habe im 13. § gezeigt, dass sie zwischen den Grenzen

$$\tfrac{1}{2}(d+f)-\sqrt{ee+\tfrac{1}{4}(d-f)^2}$$

und

$$\tfrac{1}{2}(d+f)+\sqrt{ee+\tfrac{1}{4}(d-f)^2}$$

liegt. Setzt man daher

$$g=\tfrac{1}{2}(d+f)+z,$$

so ist z eine kleine Grösse, welche nicht ausserhalb der Grenzen $\pm\sqrt{ee+\frac{1}{4}(d-f)^2}$ liegt, und die Substitution dieses Ausdrucks der Wurzel verwandelt die cubische Gleichung, in ihrer Form (46), in:

$$0=-\left(a+\frac{d+f}{2}+z\right)[ee+\tfrac{1}{4}(f-d)^2-zz]+(bb+cc)z-(bb-cc)\frac{f-d}{2}+2bce$$

welche auch:

$$z=\frac{\frac{1}{2}(bb-cc)(f-d)-2bce+[a+\frac{1}{2}(f+d)][ee+\frac{1}{4}(f-d)^2]}{bb+cc-ee-\frac{1}{4}(f-d)^2+z[a+\frac{1}{2}(f+d)]+zz} \quad (64)$$

geschrieben werden kann. In dieser Form ist die Gleichung geeignet, z durch aufeinanderfolgende Näherungen kennen zu lehren, deren erste durch Weglassung des von z abhängigen Theils des Nenners erlangt wird. Jedoch verliert man diesen Vortheil, wenn $bb+cc$ eine kleine Grösse von der Ordnung von $f-d$ und e ist, welcher Fall übrigens nur wenn die Axe des Schattenkegels sehr nahe bei dem Mittelpunkte der Erde vorbeigeht, und auch dann nur während kurzer Zeit, eintreten kann.

Die hier vorkommenden Grössen haben die im 16. § bemerkte Eigenschaft, so dass ihre für die Zeitmomente, für welche die Angaben § 4 und § 16 gelten, berechneten Zahlenwerthe wie dort interpolirt werden können. Ich werde die Gleichung abgekürzt durch

$$z=\frac{\mu}{\nu+\xi z+zz} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (64^*)$$

bezeichnen.

[Folgen die Werthe von μ, ν, ξ für das Beispiel.]

Wenn die Wurzel g der cubischen Gleichung bekannt ist, erhält man ihre beiden übrigen Wurzeln g' und g'' durch die Auflösung der Gleichung:

$$\begin{aligned}0&=x^3-Ax^2+Bx-C-(g^3-Ag^2+Bg-C)\\&=(x-g)[xx-(A-g)x+B-Ag+gg]\\&=(x-g)\left[xx-(A-g)x+\frac{C}{g}\right]\end{aligned}$$

welcher, ausser $x=g$, auch

$$x=g'=\frac{A-g}{2}+\sqrt{\left(\frac{A-g}{2}\right)^2-\frac{C}{g}}$$

$$x=g''=\frac{A-g}{2}-\sqrt{\left(\frac{A-g}{2}\right)^2-\frac{C}{g}}$$

Genüge leisten. Indessen setzt der Ausdruck (60) von P, wofür nun P' geschrieben wird, nicht sowohl g' und g'', als das Quadrat ihres Unterschiedes bekannt voraus, welches aus den eben gegebenen Ausdrücken:

$$(g''-g')^2=(A-g)^2-\frac{4C}{g} \quad \ldots\ldots \quad (65)$$

hervorgeht. Substituirt man dieses in jenem Ausdrucke, so wird er:

$$P'=\frac{\cos n}{1-\sin n\cos(\eta+m^0)}\sqrt{3g-A+\cos\eta\,2\sqrt{g(2g-A)+\frac{C}{g}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (66)$$

oder, wenn man statt g die kleine Grösse z einführt und $d+f-a$ für A schreibt:

$$P'=\frac{\cos n}{1-\sin n\cos(\eta+m^0)}\sqrt{a+\tfrac{1}{2}(f+d)+3z+\cos\eta\,2\sqrt{(\tfrac{1}{2}(f+d)+z)(a+2z)+\frac{C}{\frac{1}{2}(f+d)+z}}} \quad \ldots\ldots \quad (67)$$

Um diese Formel anzuwenden, muss man, ausser z, die Werthe von

$$a+\tfrac{1}{2}(f+d),\quad \tfrac{1}{2}(f+d),\quad a,\quad C$$

kennen. Der erste davon ist schon bei der Auflösung der cubischen Gleichung (64*) unter der Bezeichnung ξ benutzt worden; sucht man ihn durch Interpolation aus seinen schon mitgetheilten Werthen für die 7 Zeiten und $\frac{1}{2}(f+d)$ und C durch andere Interpolationen, so hat man Alles, was die Formel als bekannt voraussetzt, indem a der Unterschied der beiden ersten Werthe ist. Die Interpolationen von $\frac{1}{2}(f+d)$ und C sind sehr wenig mühsam, da diese Grössen sich langsam ändern.

[Folgen die 7 Werthe von $\frac{1}{2}(f+d)$ und $\log -C$, nach § 16 und der Formel (55*).]

Die Berechnungsart der Winkel n, m, m^0 bedarf gleichfalls einer weiteren Ausführung, indem die Kleinheit von $d-g$ und $f-g$ verursacht, dass R und R' wenig kleiner oder grösser sind als b und c und dass daher die Zähler der Formeln (50) im Allgemeinen weit kleiner sind als die Grössen, durch deren Unterschied sie gegeben werden; wovon die Folge ist, dass n und m durch diese Formeln weit weniger genau gefunden werden, als der in ihrer Berechnung angewandten Sorgfalt angemessen ist. Diese Unbequemlichkeit wird durch folgende Vorschriften vermieden, in welchen ich z statt g einführen, auch für $a+\frac{1}{2}(f+d)$ das dafür schon angewandte Zeichen ξ schreiben werde:

Fall	I.	II.
$a+g=\xi+z$ u. $d-g=-\frac{1}{2}(f-d)-z$ haben	gleiches Zeichen	verschiedene Zeichen
dann wird ψ so bestimmt, dass	$\sin\psi=\frac{\sqrt{-(\xi+z)\,[\frac{1}{2}(f-d)+z]}}{b}$	$\operatorname{tg}\psi=\frac{\sqrt{(\xi+z)\,[\frac{1}{2}(f-d)+z]}}{b}$
damit wird	$R=b\cos\psi$	$R=b\sec\psi$
und $\sin n\cos m$	$=\sqrt{\frac{-[\frac{1}{2}(f-d)+z]}{\xi+z}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi$	$=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(f-d)+z}{\xi+z}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi$
welches genommen wird mit dem Zeichen von	$\frac{b}{a+g}$	$-\frac{b}{a+g}$

Der Winkel ψ wird $<90^0$ genommen, wenn b und R gleiches Zeichen haben, $>90^0$, wenn verschiedene. $\sin n\sin m$ findet man aus c, $a+g$, $f-g=\frac{1}{2}(f-d)-z$ auf gleiche Art.

Da unter $a+g+(b-R)\cos p+(c-R')\sin p$ derjenige der beiden Factoren (45) verstanden werden soll, in welchem die Summe der Quadrate der Coefficienten von $\cos p$ und $\sin p$ kleiner ist als in dem anderen (§ 12) und da $RR'=bc-e(a+g)$ ist, so sind R und b, so wie auch R' und c immer dann mit gleichen Zeichen zu nehmen, wenn bc und $bc-e(a+g)$ gleiches Zeichen besitzen, welches wegen der Kleinheit von e gewöhnlich der Fall ist. Tritt jedoch der entgegengesetzte ein, so sind entweder R und b, oder R' und c von entgegengesetzten Zeichen, und über die hierdurch entstehende Willkür ist (wenn eine Entscheidung nöthig sein sollte) so zu verfügen, dass die zu treffende Wahl die kleinere Summe der Quadrate der Coefficienten von $\cos p$ und $\sin p$ zur Folge hat.

Nachdem m mit der gehörigen Genauigkeit gefunden ist, wird m^0 durch die Formeln (57) berechnet. Führt man einen Hülfswinkel μ ein, so dass

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{R'}{R}$$

wird, so hat man dadurch:

$$\left.\begin{aligned} R^0\cos m^0&=\frac{R}{\cos\mu}\cos(\mu-m)\\ &=\frac{R'}{\sin\mu}\cos(\mu-m)\\ R^0\sin m^0&=\frac{R}{\cos\mu}\sin(\mu-m)\cos n\\ &=\frac{R'}{\sin\mu}\sin(\mu-m)\cos n \end{aligned}\right\}\quad\ldots.\ (68)$$

und der zugleich mit m^0 hieraus hervorgehende Werth von R^0 muss mit dem in der Formel (67) ausgedrückten übereinstimmen.

19.

Jedesmal wenn die Auflösung der Aufgabe, mit welcher ich mich von dem 6. § an beschäftigt habe, Anwendung findet, wird auch die Unterscheidung der Punkte der ihr entsprechenden Curve, wo der Anfang und wo das Ende der Finsterniss gesehen wird, verlangt werden. Es wird daher nöthig, die Frage zu beantworten:

> ob ein, die Ränderberührung sehender Punkt der Erde den Anfang oder das Ende der Finsterniss wahrnimmt?

Ein Punkt der Erde, welcher zur Zeit t die Berührung der Ränder sieht, sieht offenbar den Anfang oder das Ende der Finsterniss, je nachdem er sich, im nächsten Zeitmomente $t+dt$, innerhalb oder ausserhalb des

Schattenkegels befindet. Das erstere oder das andere findet statt, je nachdem $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2$, welches zur Zeit $t=(s-\zeta)^2\operatorname{tg}f^2=(s-\zeta)^2 ii$ (2) ist, während der unendlich kleinen Zeit dt kleiner oder grösser wird als die letztere Grösse. Die Bedingung, dass eine Ränderberührung dem Anfange oder dem Ende einer Finsterniss zugehöre, ist daher die, dass der in Beziehung auf die Zeit genommene Differentialquotient von

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2-ii(s-\zeta)^2$$

oder

$$(x-\xi)\frac{dx-d\xi}{dt}+(y-\eta)\frac{dy-d\eta}{dt}-ii(s-\zeta)\frac{ds-d\zeta}{dt}-i\frac{di}{dt}(s-\zeta)^2$$

oder, den Gleichungen (2) gemäss:

$$(s-\zeta)\left[\frac{dx-d\xi}{dt}\sin p+\frac{dy-d\eta}{dt}\cos p-i\frac{ds-d\zeta}{dt}-\frac{di}{dt}(s-\zeta)\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (69)$$

negativ oder positiv sei.

Die Werthe der Differentialquotienten von x, y, s, i, $\mu'-a$ und d können aus den von Stunde zu Stunde berechneten Werthen dieser Grössen (§ 4), durch Differentiirung ihrer Interpolationsformeln, gefunden werden; allein die Ausdrücke der Differentialquotienten von ξ, η, ζ, in Beziehung auf die beiden letzten derselben, müssen aus den Formeln (16) und (17) abgeleitet werden. Die Formeln (16) ergeben:

$$\frac{du}{dt}=v\frac{d(\mu'-a)}{dt}=(-\eta\sin d+\zeta\cos d)\frac{d(\mu'-a)}{dt}$$
$$\frac{dv}{dt}=-u\frac{d(\mu'-a)}{dt}=-\xi\frac{d(\mu'-a)}{dt}$$
$$\frac{dw}{dt}=0$$

wodurch man aus (17) erhält:

$$\frac{d\zeta}{dt}=-\xi\cos d\frac{d(\mu'-a)}{dt}+\eta\frac{dd}{dt}$$
$$\frac{d\eta}{dt}=\xi\sin d\frac{d(\mu'-a)}{dt}-\zeta\frac{dd}{dt}$$
$$\frac{d\xi}{dt}=(-\eta\sin d+\zeta\cos d)\frac{d(\mu'-a)}{dt}$$

Schafft man ξ und η durch die Gleichungen (2), nämlich:

$$\xi=x-(s-\zeta)i\sin p$$
$$\eta=y-(s-\zeta)i\cos p$$

fort, so werden diese Ausdrücke:

$$\frac{d\zeta}{dt}=-[x-(s-\zeta)i\sin p]\cos d\frac{d(\mu'-a)}{dt}+[y-(s-\zeta)i\cos p]\frac{dd}{dt}$$
$$\frac{d\eta}{dt}=[x-(s-\zeta)i\sin p]\sin d\frac{d(\mu'-a)}{dt}-\zeta\frac{dd}{dt}$$
$$\frac{d\xi}{dt}=-[y-(s-\zeta)i\cos p]\sin d\frac{d(\mu'-a)}{dt}+\zeta\cos d\frac{d(\mu'-a)}{dt}$$

und ihre Substitution gibt dem Ausdrucke (69) die Form:

$$(s-\zeta)(V-W\zeta) \quad \ldots\ldots\ldots (70)$$

wo die Bedeutung von V und W die folgende ist:

$$V=\left[\frac{dy}{dt}-x\sin d\frac{d(\mu'-a)}{dt}-sii\frac{dd}{dt}\right]\cos p+\left[\frac{dx}{dt}+y\sin d\frac{d(\mu'-a)}{dt}+sii\cos d\frac{d(\mu'-a)}{dt}\right]\sin p-ix\cos d\frac{d(\mu'-a)}{dt}+iy\frac{dd}{dt}-i\frac{ds}{dt}-s\frac{di}{dt}$$
$$W=-(1+ii)\frac{dd}{dt}\cos p+(1+ii)\cos d\frac{d(\mu'-a)}{dt}\sin p-\frac{di}{dt}$$

Die seit dem 18. § ausschliesslich verfolgte, von den Formeln (31), (32) ausgehende Auflösung der Aufgabe I. führt indessen nicht unmittelbar zu der Kenntniss von ζ, sondern zur Kenntniss von

$$\zeta'=\frac{s}{\sqrt{\sigma\sigma-1}}(P'-\vartheta'),$$

wodurch

$$\zeta=\frac{s\zeta'}{s+\zeta'}=\frac{\frac{s}{\sqrt{\sigma\sigma-1}}(P'-\vartheta')}{1+\frac{P'-\vartheta'}{\sqrt{\sigma\sigma-1}}}$$

wird und der Ausdruck (69) sich in

$$\frac{s}{\left[1+\frac{P'-\vartheta'}{\sqrt{\sigma\sigma-1}}\right]^2}\left[V-\frac{Ws-V}{\sqrt{\sigma\sigma-1}}(P'-\vartheta')\right]$$

verwandelt. Da es nur auf das Zeichen dieses Ausdrucks ankommt, so kann der immer positive Nenner weggelassen und daher ein negativer oder positiver Werth des Ausdrucks:

$$s\left[V-\frac{Ws-V}{\sqrt{\sigma\sigma-1}}(P'-\vartheta')\right]=s[V-W'(P'-\vartheta')]$$

als Bedingung des Anfanges oder Endes der Finsterniss angesehen werden. Da V und W, also auch der in $P'-\vartheta'$ multiplicirte Factor, $\cos p$ und $\sin p$ nur in der ersten Dimension enthalten, so kann dieser Ausdruck:

$$s[\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\cos p+\mathfrak{c}\sin p+(\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}'\cos p+\mathfrak{c}'\sin p)(P'-\vartheta')] \quad (71)$$

geschrieben werden, wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ u. s. w. die Bedeutung:

$$\mathfrak{a}=-ix\cos d\frac{d(\mu'-a)}{dt}+iy\frac{dd}{dt}-i\frac{ds}{dt}-s\frac{di}{dt}$$
$$\mathfrak{b}=\frac{dy}{dt}-x\sin d\frac{d(\mu'-a)}{dt}-sii\frac{dd}{dt}$$
$$\mathfrak{c}=\frac{dx}{dt}+y\sin d\frac{d(\mu'-a)}{dt}+sii\cos d\frac{d(\mu'-a)}{dt}.$$

$$\mathfrak{a}' = \frac{s}{\sqrt{\sigma\sigma-1}}\left[\frac{ix}{s}\cos d\frac{d(\mu'-a)}{dt} - \frac{iy}{s}\frac{dd}{dt} + \frac{i}{s}\frac{ds}{dt}\right]$$

$$\mathfrak{b}' = \frac{s}{\sqrt{\sigma\sigma-1}}\left[-\frac{dy}{sdt} + \frac{x}{s}\sin d\frac{d(\mu'-a)}{dt} - \frac{dd}{dt}\right]$$

$$\mathfrak{c}' = \frac{s}{\sqrt{\sigma\sigma-1}}\left[-\frac{dx}{sdt} - \frac{y}{s}\sin d\frac{d(\mu'-a)}{dt} + \cos d\frac{d(\mu'-a)}{dt}\right]$$

haben.

Setzt man die Werthe dieser Grössen von Stunde zu Stunde berechnet voraus, so wird die verlangte Entscheidung so leicht als möglich. Gewöhnlich wird das diese Entscheidung ergebende Zeichen des Ausdrucks (71) schon aus einem Ueberblicke hervorgehen, welcher nur eine ohngefähre Kenntniss der Werthe von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ u. s. w. voraussetzt; allein in allen Fällen, in welchen die Finsterniss, an dem die Ränderberührung sehenden Punkte der Erde, eine sehr geringe Grösse erreicht, ist grössere Genauigkeit nothwendig; auch wird noch eine zweite, diese fordernde Anwendung derselben Grössen vorkommen.

[Mittheilung der Werthe $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ für das Beispiel.]

20.

Durch das Vorhergehende werden die Aufgaben zugänglich, durch deren Auflösung die im 5. § geforderte Begrenzung der Zeit und des Raumes der Sichtbarkeit einer Finsterniss erlangt werden muss. Zuerst bietet sich dar:

Aufgabe II.

Die Zeiten des Anfangens und des Aufhörens der Erscheinung der Ränderberührung im Horizonte, und auch die Punkte der Erde zu bestimmen, wo dieses Anfangen und Aufhören gesehen wird.

Die hier geforderten Zeiten und Punkte der Erde sind offenbar die den Berührungen der Oberflächen des Schattenkegels und der Erde entsprechenden. Die Spitze des Schattenkegels muss also im Horizonte erscheinen, oder, dem 6. § zufolge, muss $P' = 0$ sein; ferner müssen die Zeiten so gewählt werden, dass die Erfüllung dieser Bedingung entweder unmittelbar vorher, oder unmittelbar nachher unmöglich wird. Dem 12. § gemäss sind dieses die Zeiten, wenn die cubische Gleichung (47) zwei reelle Wurzeln verliert und dagegen zwei imaginäre gewinnt, oder umgekehrt; also die Zeiten, wenn die beiden Wurzeln g' und g'' einander gleich werden. Hieraus geht hervor, dass die Bedingungen des Verschwindens der Ausdrücke (65) und (66) die beiden Gleichungen ergeben, aus deren Auflösung die Auflösung unserer Aufgabe folgt, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= (A-g)^2 - \frac{4C}{g} \\ 0 &= 3g - A + \cos\eta\sqrt{4g(2g-A)+\frac{4C}{g}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (72)$$

Die erste bestimmt die Zeiten, die zweite η, wodurch u, v, w bestimmt werden.

Wenn man, der ersten Gleichung zufolge, in der zweiten $4C = g(A-g)^2$ setzt, so verwandelt sich diese in:

$$0 = 3g - A \pm \cos\eta\,(3g-A),$$

wo das zweideutige Zeichen so zu verstehen ist, dass $\pm(3g-A)$, so wie die positive Annahme der Quadratwurzel verlangt, positiv wird. Diese Gleichung fordert daher, dass im Falle eines positiven Werthes von $3g-A$, $1+\cos\eta = 0$ oder $\cos\eta = -1$, im Falle eines negativen, $-1+\cos\eta = 0$ oder $\cos\eta = 1$ ist.

In dem Falle, in welchem allein g positiv ist, nämlich in dem Falle, in welchem die Spitze des Schattenkegels sich im Inneren der Erde befindet, kann offenbar keine gerade Linie in der Oberfläche des ersteren, noch weniger also diese Oberfläche selbst, die Erde berühren. Da g also hier immer negativ ist und C ebenfalls (§ 13), so ist das letzte Glied der ersten der Gleichungen (72) immer negativ, und sie kann in die beiden reellen Factoren:

$$0 = \left[A - g - 2\sqrt{\frac{C}{g}}\right]\left[A - g + 2\sqrt{\frac{C}{g}}\right]$$

zerlegt werden. Das Verschwinden des ersten dieser beiden Factoren bestimmt die Zeiten der beiden äusseren Berührungen des Schattenkegels und der Erde, die schon im 5. § durch τ und τ' bezeichneten; das Verschwinden des zweiten bestimmt dagegen die, den Bedingungen (72) nicht minder entsprechenden Zeiten der beiden inneren Berührungen beider Oberflächen, die durch $\tau_,$ und $\tau'_,$ bezeichneten. Dass ihr Verschwinden in dieser Ordnung vor sich geht, wird dadurch klar, dass das $(g''-g')^2$ ausdrückende, also sowohl bis zu τ und nach τ', als auch von $\tau_,$ bis $\tau'_,$ positive Product beider Factoren, ausserhalb der ersten und innerhalb der zweiten Grenzen die Gleichheit des Zeichens beider fordert; welches Zeichen ausserhalb der ersten Grenzen nur das positive sein kann, weil A, noch mehr also der zweite Factor, hinreichend weit vor und nach der Zeit der Zusammenkunft beider Gestirne positiv ist und vor τ und nach τ' nicht mehr verschwindet; welches Zeichen ferner innerhalb der zweiten Grenzen das negative ist, weil dann der Schattenkegel ganz von der Erde umschlossen ist und daher g' und g'', dem 13. § zufolge, negativ sind, also auch $A - g = g' + g''$, und noch mehr der erste Factor, negativ ist.

Man hat also zur Bestimmung der Zeiten τ und τ' die Gleichung:

$$0 = A - g - 2\sqrt{\frac{C}{g}} \ldots\ldots\ldots (73)$$

und zur Bestimmung der Zeiten $\tau_,$ und $\tau'_,$ die folgende:

$$0 = A - g + 2\sqrt{\frac{C}{g}} \ldots\ldots\ldots (73^*)$$

Die den ersteren Zeiten entsprechenden Punkte der Erde, welche ich durch O und O' bezeichnen werde, werden bestimmt, indem man $\cos\eta = 1$, oder $\eta = 0$ annimmt, also p durch die Formel (63):

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(p-m) = \operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}n)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}m^0 \ldots (74)$$

und u, v, w durch die Formeln (35), aus welchen jedoch P' verschwindet, berechnet; die Bestimmung der den letzteren Zeiten entsprechenden Punkte $O_,$ und $O'_,$ erfordert die Annahme $\cos\eta = -1$, oder $\eta = 180^0$, also die Berechnung von p durch die Formel:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(p-m) = -\operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}n)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}m^0 \ldots (74^*)$$

u. s. w. Denn bis zu τ und von τ' an hat $P'P'$ nur negative, zwischen τ, und $\tau'_,$ nur positive Werthe, weshalb der nicht in $\cos\eta$ multiplicirte Theil seines Ausdrucks (72), nämlich $3g - A$, zu den Zeiten τ und τ' negativ, zu den Zeiten $\tau_,$ und $\tau'_,$ positiv ist, in welchen Fällen das Verschwinden von $P'P'$ also einen resp. positiven und negativen Werth von $\cos\eta$ bedingt.

21.

Ich werde die Auflösungen der beiden Gleichungen (73) erläutern, auch die zur Auflösung der Aufgabe II. führenden Vorschriften auf das von der Sonnenfinsterniss am 15. Mai 1836 hergenommene Beispiel anwenden. — Setzt man in diesen Gleichungen $d+f-a$ für A und $\frac{1}{2}(f+d)+z$ für g, so werden sie:

$$0 = -a + \tfrac{1}{2}(f+d) - z \mp 2\sqrt{\frac{C}{\frac{1}{2}(f+d)+z}}$$

oder

$$a - \tfrac{1}{2}(f+d) + 2\sqrt{\frac{2C}{f+d}} = -z + 2\sqrt{\frac{2C}{f+d}} - 2\sqrt{\frac{2C}{f+d+2z}}$$

und

$$a - \tfrac{1}{2}(f+d) - 2\sqrt{\frac{2C}{f+d}} = -z - 2\sqrt{\frac{2C}{f+d}} + 2\sqrt{\frac{2C}{f+d+2z}}$$

oder, wenn man die wenig von 1 verschiedene Grösse:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2z}{f+d}}} \cdot \frac{2}{1+\sqrt{1+\frac{2z}{f+d}}}$$

einführt,

$$\left.\begin{aligned} a - \tfrac{1}{2}(f+d) + 2\sqrt{\frac{2C}{f+d}} &= -z\left[1 - 2\sqrt{\frac{2C}{f+d}}\cdot\frac{\psi}{f+d}\right] \\ \text{und} \\ a - \tfrac{1}{2}(f+d) - 2\sqrt{\frac{2C}{f+d}} &= -z\left[1 + 2\sqrt{\frac{2C}{f+d}}\cdot\frac{\psi}{f+d}\right] \end{aligned}\right\} (75)$$

Der links vom Gleichheitszeichen stehende Theil dieser Gleichungen hat die schon bei ähnlichen, früher angewandten Grössen benutzte Eigenschaft, vollständig bekannt zu werden, wenn seine Werthe für fünf Zeiten bekannt sind. Berechnet man daher diese Werthe von Stunde zu Stunde (was geringe Mühe verursacht, da man a, $\frac{1}{2}(f+d)$, C schon kennt), so kann man seine Abhängigkeit von der Zeit aus den darauf beruhenden Interpolationsformeln erkennen; also, sobald der Werth des rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Theils bekannt ist, die den Gleichungen Genüge leistenden Zeiten finden. Dieser Theil ist eine kleine Grösse von der Ordnung von z, welche sich sehr langsam ändert. Auf ihre anfängliche Vernachlässigung kann eine näherungsweise richtige Bestimmung jeder der gesuchten Zeiten gegründet werden, für welche dann der Werth des vernachlässigten Theils aufgesucht und einer neuen Auflösung der Gleichungen zum Grunde gelegt werden kann u. s. w. Wegen der Kleinheit und der langsamen Veränderung von z convergiren diese Näherungen sehr schnell zur Wahrheit.

Wendet man, um die Abhängigkeit des links vom Gleichheitszeichen stehenden Theils der Gleichungen von der Zeit t zu erkennen, die für den ersten der in 17. § getrennten Fälle gegebenen Interpolationsformeln an und setzt man diese bis zu den vierten Differenzen fort, was immer hinreichend ist, also die Formeln:

Erste	Zwischenzeit	$a + t.b + \frac{1}{2}(tt-\frac{1}{4})\{\Delta_2 + (t-\frac{3}{2})\frac{1}{3}\Delta_3 + (t-\frac{3}{2})(t-\frac{5}{2})\frac{1}{12}\Delta_4\}$
Zweite	„	$a + t.b + \frac{1}{2}(tt-\frac{1}{4})\{c + t.\frac{1}{3}d + (tt-\frac{9}{4})\frac{1}{12}\Delta_4\}$
Dritte u. vierte	„	$a + t.b + \frac{1}{2}(tt-\frac{1}{4})\{c + t.\frac{1}{3}d + (tt-\frac{9}{4})\frac{1}{12}e\}$
Fünfte	„	$a + t.b + \frac{1}{2}(tt-\frac{1}{4})\{c + t.\frac{1}{3}d + (tt-\frac{9}{4})\frac{1}{12}\Delta_4\}$
Sechste	„	$a + t.b + \frac{1}{2}(tt-\frac{1}{4})\{\Delta_2 + (t+\frac{3}{2})\frac{1}{3}\Delta_3 + (t+\frac{3}{2})(t+\frac{5}{2})\frac{1}{12}\Delta_4\}$

welche ich sämmtlich durch

$$a + t.b + \tfrac{1}{2}(tt-\tfrac{1}{4})c'$$

bezeichnen werde; und schreibt man ζ für den von z abhängigen Theil der Gleichungen, so sind diese:

$$a + t.b + \tfrac{1}{2}(tt-\tfrac{1}{4})c' = \zeta$$

und ihre Auflösung ergibt:

$$t = -\frac{b}{c'} \pm \sqrt{\frac{bb}{c'c'} - \frac{2(a-\zeta)}{c'} + \tfrac{1}{4}} \ldots (76)$$

worauf also die Bestimmung von t, durch aufeinanderfolgende Annäherungen, gegründet wird.

[Folgen die numerischen Werthe des links vom = stehenden Theils der ersten Gleichung (75). Ferner die Zeiten t der beiden äusseren Berührungen, wo bei der ersten Näherung in (76) $\xi = 0$ gesetzt wird; μ, ν, ξ nach § 18, daraus nach (64*) z und damit nach (75) ζ. — Zur Bestimmung der Punkte O und O' werden berechnet: Aus den interpolirten Werthen b, c, $\frac{1}{2}(f+d)$, ξ (§§ 16 und 18) und z: $a+g$, $d-g$, $f-g$ und nach den Formeln § 18 die log von R, R', $\sin n \cos m$, $\sin n \sin m$, und m, n, m^0, $\log R^0$; ferner p nach (74) und mit Zugrundelegung der Werthe von x, y, l (§ 4), sowie von σ, δ, ε, ϱ, δ' (§ 16): $x - l \sin p$, $y - l \cos p$, ϑ', dann die log der linken Seiten von (35) (P' verschwindet), woraus hervorgehen: $\mu' - a + \omega$, $\log \operatorname{tg} \varphi$, $\log (1 - \operatorname{tg} \lambda . \vartheta')$. Aus den (§ 4 angegebenen) Sternzeiten folgen τ und τ', also μ', und, da a bekannt, die Grösse ω; endlich findet sich aus (15) φ; φ und ω bestimmen die Punkte O und O' (s. § 6).]

Es versteht sich, dass in O die Ränderberührung am Anfange der Finsterniss und bei dem Aufgange des Berührungspunkts, in O' dagegen am Ende und bei dem Untergange sichtbar ist. Die Punkte am Sonnenrande, wo diese Berührungen stattfinden, gehen aus den schon angegebenen Werthen von p hervor.

22.

In jedem Momente zwischen τ und τ, und zwischen τ', und τ', oder, wenn τ, und τ', nicht wirklich vorhanden sind, zwischen τ und τ', berühren zwei gerade Linien in der Oberfläche des Schattenkegels die Oberfläche der Erde, oder zwei Punkte der Erde sehen die Berührung der Ränder im Horizonte. Die Bestimmung dieser Punkte, oder die Auflösung der

Aufgabe III.

Die Punkte auf der Oberfläche der Erde zu bestimmen, wo die Berührung der Ränder, zu einer gegebenen Zeit, im Horizonte gesehen wird,

gewährt, durch ihre Ausführung für hinreichend viele Zeitmomente zwischen den schon durch die Auflösung der vorigen Aufgabe bekannt gewordenen Grenzen, die Erfüllung der im 5. § an die Theorie der Finsternisse gemachten zweiten Forderung.

Die zu erfüllende Bedingung ist, dass die Berührung im Horizonte gesehen werde. Ihr entspricht, dem 6. § zufolge, die Gleichung

$$P' = 0$$

welche, nach der Formel (60):

$$\cos \eta = \frac{A - 3g}{\sqrt{(3g - A)^2 - (g'' - g')^2}}$$

und wenn der Ausdruck (65) von $(g'' - g')^2$ substituirt wird:

$$\cos \eta = \frac{(A - 3g)}{\sqrt{(3g - A)^2 + \frac{4C}{g} - (A - g)^2}} \quad \ldots . (76)$$

ergibt. Da die Zeit, welcher A, C, g zugehören, zwischen dieselben Grenzen fällt, zwischen welchen g'' und g' imaginär sind, also $(g'' - g')^2$ negativ und der zu $(3g - A)^2$ hinzugesetzte Theil der unter dem Quadratwurzelzeichen stehenden Grösse positiv ist, so wird $\cos \eta$ nicht kleiner als -1 und nicht grösser als 1; oder es sind, innerhalb dieser Grenzen der Zeit, immer zwei der Bedingung entsprechende Werthe von η vorhanden, nämlich der sowohl negativ, als auch positiv genommene Werth, dessen Cosinus den Ausdruck (76) hat. Statt dieser Formel kann auch der Ausdruck von

$$\operatorname{tg} \eta = \mp \frac{\sqrt{\frac{4C}{g} - (A - g)^2}}{A - 3g} \quad \ldots \ldots . (77)$$

angewandt werden, welcher fordert, dass die beiden Werthe von η innerhalb oder ausserhalb $\mp 90^0$ genommen werden, je nachdem $A - 3g$ positiv oder negativ ist; er ist von der Unbequemlichkeit frei, welche die Anwendung von (76) darbietet, wenn η sehr klein oder sehr nahe $= 180^0$ ist. Will man, statt A und g, die Grössen in diesen Formeln haben, durch welche ähnliche Formeln schon ausgedrückt sind, so muss man $\frac{1}{2}(f+d) \pm z$, $f + d - \xi - z$, $-\xi - 3z$ für g, $A - g$, $A - 3g$ schreiben. Wenn η hierdurch bekannt geworden ist, findet sich p durch die Formel (63).

Indessen ist die Einführung des Winkels η, in die Auflösung dieser Aufgabe, offenbar nicht wesentlich; man kann ebensowohl p unmittelbar bestimmen, indem man das Verschwinden des ersten der beiden Factoren (45) in seiner ungeänderten Form verfolgt, also die Gleichung

$$0 = a + g + (b + R) \cos p + (c + R') \sin p$$

auflöset. Hierdurch vermeidet man zwar die Ableitung von p aus η (63); wogegen man aber Hülfsgrössen aufsuchen muss, welche zur Auflösung der letzten Gleichung erforderlich sind, z. B.:

$$\operatorname{tg} K = \frac{c + R'}{b + R}; \quad k = \frac{b + R}{\cos K} = \frac{c + R'}{\sin K}; \quad \cos L = -\frac{a + g}{k}$$

wodurch

$$p = K - L \quad \text{und} \quad = K + L$$

wird. Auch erleichtert die Kenntniss von η die Auflösung der folgenden Aufgabe, vorausgesetzt dass man sie und die gegenwärtige für gleiche gegebene Zeiten ausführen will. Die Reduction von η auf p ist an sich so leicht, dass selbst ein kleiner, durch den ersten

Winkel zu erlangender Vortheil die Mühe, welche sie verursacht ersetzt; allein die Aufsuchung von n, m, m^0, welche Winkel sie als bekannt voraussetzt, erfordert etwas mehr Rechnung, in welcher Beziehung ich bemerke, dass es zur Erleichterung der Anwendung fast aller in diesem Abschnitte enthaltenen Vorschriften nicht unwesentlich beitragen wird, wenn die kleine Grösse s und einige der von ihr abhängigen, sich langsam ändernden Grössen, z. B. $\frac{1}{2}(f-d)+s$, $\frac{1}{2}(f-d)-s$, ... Anfangs für einander so nahe Zeiten berechnet werden, dass man leicht daraus interpoliren kann.

Wenn p auf die eine oder die andere Art bekannt geworden ist, so finden sich u, v, w durch die Formeln (35), aus welchen P' verschwindet. Von der Bestimmung von p an ist also die auszuführende Rechnung genau dieselbe, welche im vorigen § zur Kenntniss der Punkte O und O' geführt hat. Diese Punkte, sowie auch $O_{,}$ und $O'_{,}$ wenn sie wirklich vorhanden sind, liegen offenbar auf der Curve, welche die durch die Auflösung der gegenwärtigen Aufgabe zu bestimmenden Punkte der Erdoberfläche mit einander verbindet. Ich werde diese Curve, um sie kurz bezeichnen zu können, die O-Curve nennen. Dass sie aus zwei getrennten Theilen besteht wenn τ, und $\tau'_{,}$ wirklich vorhanden sind, aber ganz zusammenhängend ist wenn der Schattenkegel nicht ganz in die Erde eintritt, habe ich schon bemerkt.

Ob einer der Punkte der O-Curve den Anfang oder das Ende der Finsterniss sieht, wird durch den negativen oder positiven Werth des Ausdruckes (71), welcher sich gegenwärtig in

$$s[\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\cos p+\mathfrak{c}\sin p+(\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}'\cos p+\mathfrak{c}'\sin p)\vartheta'] \quad ..(78)$$

verwandelt, bedingt. Ob er die Ränderberührung bei dem Aufgange oder dem Untergange des Berührungspunkts sieht, wird durch die Grösse des Stundenwinkels dieses Punkts $=\mu'-a'+\omega$ (§. 6) bedingt, welche im ersten Falle $>180^0$, im zweiten $<180^0$ ist. Die Bedingung des Aufganges oder Unterganges ist also der negative oder positive Werth von $\sin(\mu'-a'+\omega)$; welche Bedingung jedoch noch weiter entwickelt werden muss, damit sie von der, in der gegenwärtigen Untersuchung nicht weiter angewandten Geradenaufsteigung a' des Berührungspunkts der Ränder unabhängig werde. Ich habe schon im 6. § die Formeln:

$$\cos d'\sin(a'-a)=\alpha\cos f$$
$$\cos d'\cos(a'-a)=\beta\cos f$$

angeführt, welche mit den beiden ersten der Formeln (21), nämlich:

$$m''u=m''\cos\varphi,\sin(\mu'-a+\omega)=m''a-m'\alpha+\alpha P$$
$$m''v=m''\cos\varphi,\cos(\mu'-a+\omega)=m''b-m'\beta+\beta P$$

verbunden,

$$m''\cos d'\cos\varphi,\sin(\mu'-a'+\omega)=m''\cos f(\beta a-\alpha b)$$

ergeben, und daher, da $\cos d'$, $\cos\varphi_{,,}$ $\cos f$ immer positiv sind, zeigen, dass $\sin(\mu'-a'+\omega)$ und $\beta a-\alpha b$ gleiches Zeichen besitzen. Die letztere Grösse ist, der Formeln (19) zufolge,

$$=(x-l\sin p)\cos d+(y\sin p-x\cos p)\,i\sin d$$

und es geht daraus hervor, dass die Ränderberührung bei dem Aufgange oder bei dem Untergange des Berührungspunkts gesehen wird, je nachdem

$$x-l\sin p+(y\sin p-x\cos p)\,i\,\mathrm{tg}\,d \quad .....(79)$$

negativ oder positiv ist. Offenbar kann das Zeichen dieses Ausdruckes nur wenn er selbst sehr klein ist, von dem Zeichen von $x-l\sin p\,(=u)$ verschieden sein.

23.

[Anwendung der Formeln auf die dritte der Zeiten des Beispiels.]

24.

Es ist noch die dritte der im 5. § an die Analyse der Finsternisse gemachten Forderungen zu erfüllen, nämlich die krumme Linie auf der Oberfläche der Erde zu bestimmen, auf welcher die Ränderberührung das Maximum der Finsterniss ist. Die Punkte dieser Curve werden durch die Auflösung der

Aufgabe IV.

Die Punkte auf der Erde zu bestimmen, wo zu einer gegebenen Zeit die Ränderberührung als Maximum der Finsterniss gesehen wird,

gegeben.

Diese Aufgabe fordert die Erfüllung zweier Bedingungen, nämlich dass die Ränder sich in dem gegebenen Zeitmomente berühren, und dass sie sich in dem folgenden nicht von einander entfernen. Die erste dieser Bedingungen wird durch die Gleichungen (2) ausgedrückt, und die diesen entsprechenden Punkte der Erde werden, mittelst der Formeln (29), durch eine Grösse ζ' gegeben, welche durch die Gleichung (30)

$$(s+\zeta')^2=(as+\alpha'\zeta')^2+(bs+\beta'\zeta')^2+(cs+\gamma'\zeta')^2$$

bestimmt ist. Die zweite Bedingung fordert, dass der Ausdruck (71) verschwinde, dass also der Gleichung

$$0=V-W'(P'-\vartheta')$$

Genüge geleistet werde. Die unbekannte Grösse ζ' der ersten Gleichung und $P'-\vartheta'$ der zweiten sind durch

$$\zeta'=\frac{s}{\sqrt{\sigma\sigma-1}}(P'-\vartheta')$$

miteinander verbunden.

Man erhält eine, beide Bedingungen zugleich oder wenn man lieber will, die Bedingung, dass die sich berührenden Ränder sich im nächsten Momente nicht voneinander entfernen, ausdrückende Gleichung, wenn man $P'-\vartheta'$ zwischen diesen beiden Gleichungen eliminirt; nämlich:

$$\left.\begin{aligned}\left(W'+\frac{V}{\sqrt{\sigma\sigma-1}}\right)^2&=\left(aW'+\frac{\alpha'V}{\sqrt{\sigma\sigma-1}}\right)^2\\&+\left(bW'+\frac{\beta'V}{\sqrt{\sigma\sigma-1}}\right)^2+\left(cW'+\frac{\gamma'V}{\sqrt{\sigma\sigma-1}}\right)^2\end{aligned}\right\}\ldots.(80)$$

Aus der Auflösung dieser Gleichung müssen die Werthe von p hervorgehen, welche die Punkte der Erde bestimmen, wo die Berührung der Ränder, zu der gegebenen Zeit, das Maximum der Finsterniss ist.

Da a, b, c, V, W' die erste Dimension von cos p und sin p enthalten, so enthält diese Gleichung die 4., oder sie ist vom 8. Grade. Dagegen können nie mehr als vier Parallelkreise der Erde den (bewegten) Schattenkegel zugleich berühren, nämlich zwei auf der den Gestirnen zugewandten, und zwei auf der von ihnen abgewandten Seite der Erde. Indem hierdurch nur 4 Auflösungen der Aufgabe anschaulich werden, wird die Bemerkung vielleicht nicht überflüssig erscheinen, dass Fälle der Aufgabe mathematisch möglich sind, in welchen sie wirklich 8 reelle Auflösungen haben muss. Der einfachste dieser Fälle ist der, in welchem statt des Kegels ein Cylinder angenommen wird, dessen Axe in der Ebene des Aequators liegt, und der, ohne eigene Bewegung, so gelegt wird, dass er mehr als halb von der Erde umschlossen ist. Dann berühren zwei Parallelkreise der Erde die nördlichsten und die südlichsten Punkte der Durchschnittslinie der Oberflächen des Cylinders und der Erde, und für die vier Berührungspunkte ist die Ränderberührung das Maximum der Finsterniss. Ferner berühren zwei Parallelkreise der Erde die beiden Punkte der ausgeschnittenen Curve, welche einander am nächsten kommen, und zwar sehen diese Punkte die Ränderberührung als Minimum der Finsterniss, d. h. nicht in Folge der Annäherung, sondern der Entfernung der Mittelpunkte der beiden Gestirne. Da Beides ebensowohl für eine kugelförmige, als für eine kugelähnliche Figur der Erde gilt, so sind hierdurch, selbst in dem ersten Falle, 6 Auflösungen gerechtfertigt. Aber 8 Auflösungen kann die Aufgabe nur in dem zweiten Falle haben. Diese treten wirklich hervor, wenn der Halbmesser des Cylinders grösser als der Krümmungshalbmesser der Meridiane unter dem Aequator, aber kleiner als die halbe Axe der Erde angenommen, und er so gelegt wird, dass er die Oberfläche der Erde auf jeder Seite des Aequators zweimal durchschneidet, während er unter dem Aequator innerhalb der Erde ist; dann berühren vier Parallelkreise statt der zuletzt gefundenen zwei die Oberfläche des Cylinders, und zwar sehen die vier Punkte, wo diese Berührungen stattfinden, die Ränderberührung der Gestirne als Minimum der Finsterniss. — Von den 8, in diesem Falle reell hervortretenden Auflösungen der Aufgabe, können in anderen Fällen wohl einige imaginär werden, aber in der die Aufgabe auflösenden Gleichung kann keine davon fehlen. Die Finsternisse zeigen die Ränderberührung nie als ihr Minimum, was von der Bewegung des Schattenkegels herrührt, welche grösser ist als die tägliche Bewegung der Punkte der Erde. — Ich bemerke zu dem Vorhergehenden noch, dass die Gleichung (80) wirklich auf den 6. Grad herabkommt, wenn die Excentricität der Erdmeridiane als verschwindend angenommen wird.

Die Gleichung (80) ergibt die Bestimmung aller Punkte der Erde, wo ein Parallelkreis, zu der gegebenen Zeit, mit der Oberfläche des bewegten Schattenkegels in Berührung ist. Es hat aber kein Interesse, diejenigen dieser Punkte kennen zu lernen, unter deren Horizonten die Ränderberührung der Gestirne dann vor sich geht. Man schliesst sie aus, wenn man die Gleichung so beschränkt, dass sie nur positive Werthe von P' statuirt, oder wenn man statt ihrer die Gleichung:

$$0 = V - W'(P'-\vartheta'),$$

oder dem Ausdrucke (71) zufolge:

$$0=\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\cos p+\mathfrak{c}\sin p-(\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}'\cos p+\mathfrak{c}'\sin p)(P'-\vartheta')\ldots(81)$$

in welcher P' nur positiv genommen wird, auflöset. Diese irrationale Gleichung ist auch bequemer zu behandeln als die vorige rationale; welche, indem sie vom 8. Grade ist, eben so wenig direct aufgelöset werden kann. Die darin vorkommenden ϑ' und P' sind (35):

$$\vartheta'=(x-l\sin p)\frac{\sin\varepsilon}{\cos\lambda}+\varrho(y-l\cos p)\frac{\cos\varepsilon\sin(\delta-\delta')}{\cos\lambda}-\operatorname{tg}\lambda$$

$$P'=\sqrt{1-(x-l\sin p)^2-\varrho\varrho(y-l\cos p)^2+\vartheta'\vartheta'}$$

25.

Der Schattenkegel des Mondes, von welchem entfernteren Gestirne er auch herrühren mag, ist, da wo er die Erde trifft, nie so ausgedehnt, dass diese ganz in sein Inneres eintreten könnte. Bei allen vom Monde veranlassten Finsternissen ist daher wenigstens eine krumme Linie auf der Erdoberfläche vorhanden, einerseits von welcher die Finsterniss nicht sichtbar wird, deren Punkte also die Ränderberührung als Maximum der Finsterniss sehen; tritt der Schattenkegel ganz in die Erde ein, so ist noch eine zweite Linie dieser Art vorhanden und ausserhalb des hierdurch und durch die

O-Curve begrenzten Raumes der Erdoberfläche wird die Finsterniss nicht wahrgenommen. Diese zweite krumme Linie, deren Punkte durch die Auflösung der Aufgabe IV. bestimmt werden sollen, werde ich, um sie kurz bezeichnen zu können, die *M*-Curve nennen, und zwar werde ich unter dieser Benennung die ganze Curve, sie mag einen ununterbrochenen Zug haben, oder aus zwei getrennten Theilen bestehen, begreifen. — In dem Falle der Durchgänge der unteren Planeten durch die Sonne ist dagegen der Schattenkegel, da wo die Erde ihn trifft, sehr viel weiter ausgedehnt als die Erde, so dass diese nur einen kleinen Theil seiner Oberfläche durchschneidet und daher die *M*-Curve, nur wenn dieses Durchschneiden sich an der Grenze ereignete und nur unvollständig stattfände, wirklich über die Erde gehen könnte. Da dieser Fall vermuthlich nie vorkommen wird, so ist die *M*-Curve im Allgemeinen nur in dem Falle der vom Monde verursachten Finsternisse wirklich vorhanden, so dass die Auflösung der gegenwärtigen Aufgabe auch nur bei dieser Art der Finsternisse in Betracht kommt.

Indem auf einem Theile der *O*-Curve der Anfang, auf einem anderen das Ende der Finsterniss gesehen wird, muss sie, wenn sie ganz zusammenhängend ist, nothwendig zwei Punkte haben, wo Anfang und Ende zusammenfallen, oder die Ränderberührung das Maximum der Finsterniss ist; wenn sie aus zwei getrennten Theilen besteht, muss jeder derselben zwei solche Punkte haben. Diese Punkte sind offenbar auch Punkte der *M*-Curve, nämlich die ihren Anfang und ihr Ende bestimmenden. In dem einen Paare dieser Punkte, welches ich durch O_2 und O'_2 bezeichnen werde, ist die Ränderberührung am frühesten und am spätesten das Maximum der Finsterniss, nämlich zu zwei Zeiten, denen ich die Zeichen τ_2 und τ'_2 beilegen werde; in dem anderen Paare (O_3 und O'_3) erscheint, wenn der Schattenkegel ganz in die Erde eintritt, die Ränderberührung am entgegengesetzten Theile der Sonne zuerst und zuletzt als Maximum der Finsterniss, zu den Zeiten τ_3 und τ'_3. Offenbar liegen sowohl τ_2 und τ'_2 als auch τ_3 und τ'_3 innerhalb τ und τ' und ausserhalb τ_1 und τ'_1. In jedem Momente zwischen τ_2 und τ'_2 ist eine Auflösung der Gleichung (81) vorhanden; in jedem Momente zwischen τ_3 und τ'_3 noch eine zweite. Mehr Auflösungen können nicht wirklich vorhanden sein, da die vier, für welche die Ränderberührung das Minimum der Finsterniss sein würde, nicht vorkommen und die zwei, welche Punkte der Erde ergeben, unter deren Horizonten die Ränderberührung vor sich geht, in der Gleichung (81) nicht enthalten sind.

Um diese Gleichung aufzulösen, werde ich sie in der Form:

$$0 = \log\frac{\mathfrak{a}'+\lambda'\sin(p-L')}{\mathfrak{a}+\lambda\sin(p-L)}(P'-\vartheta') \quad \ldots \quad (82)$$

anwenden, in welcher λ, L, λ', L' folgende Bedeutung haben:

$$\lambda\sin L = -\mathfrak{b} \qquad \lambda'\sin L' = -\mathfrak{b}'$$
$$\lambda\cos L = \mathfrak{c} \qquad \lambda'\cos L' = \mathfrak{c}'$$

Ich werde zuerst einen Näherungswerth von p bekannt voraussetzen und den Werth welchen der Ausdruck (82) durch seine Anwendung erlangt, durch $\varkappa$ bezeichnen. Vernachlässigt man das Quadrat und die höheren Potenzen der nöthigen Verbesserung δp jenes Werthes, so wird sie durch die Gleichung:

$$0 = \varkappa + \left\{\frac{\lambda'\cos(p-L')}{\mathfrak{a}'+\lambda'\sin(p-L')} - \frac{\lambda\cos(p-L)}{\mathfrak{a}+\lambda\sin(p-L)} + \frac{dP'-d\vartheta'}{dp(P'-\vartheta')}\right\}\mu\delta p$$

bestimmt, in welcher μ den Modul des Brigg'schen Logarithmensystems bedeutet. Soll δp in Secunden ausgedrückt werden, so muss μ in Arc. 1″ multiplicirt, oder

$$\delta p = \frac{-\varkappa \times 474942''.3}{\frac{\lambda'\cos(p-L')}{\mathfrak{a}'+\lambda'\sin(p-L')} - \frac{\lambda\cos(p-L)}{\mathfrak{a}+\lambda\sin(p-L)} + \frac{dP'-d\vartheta'}{dp(P'-\vartheta')}} \quad (83)$$

genommen werden.

Die Aufsuchung der zur Berechnung von $\varkappa$ und des Nenners der Formel (83) erforderlichen Werthe von P' und $\frac{dP'}{dp}$ kann entweder von p oder von η abhängig gemacht werden. Das erstere fordert die Anwendung der oft, und auch am Ende des vorigen §'s, angeführten Formeln (35), durch deren Differentiirung man

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\vartheta'}{dp} &= -\frac{l\sin\varepsilon}{\cos\lambda}\cos p + \frac{l\varrho\cos\varepsilon\sin(\delta-\vartheta')}{\cos\lambda}\sin p\\ \frac{dP'-d\vartheta'}{dp(P'-\vartheta')} &= \frac{(x-l\sin p)l\cos p - \varrho\varrho(y-l\cos p)l\sin p}{P'(P'-\vartheta')} - \frac{d\vartheta'}{P'dp}\end{aligned}\right\} \quad (84)$$

erhält.

Der von η abhängige Ausdruck von P' ist dagegen:

$$P' = N\cos n\sqrt{3g - A + 2R^0\cos\eta}$$

wo zur Abkürzung geschrieben ist:

$$N = \frac{\cos n}{1-\sin n\cos(\eta+m^0)}.$$

Sein Differentialquotient ist:

$$\frac{dP'}{dp} = -N\frac{d\eta}{dp}\left[N\cos n^2\frac{R^0}{P'}\sin\eta + \operatorname{tg} n\sin(\eta+m^0)\right]$$

oder da

$$dp = Nd\eta$$

ist,

$$\frac{dP'}{dp} = -N\cos n^2\frac{R^0}{P'}\sin\eta - \operatorname{tg} n\sin(\eta+m^0).$$

Wenn diese Art, P' und seinen Differentialquotienten zu berechnen, angewandt wird, so gebraucht man die

Werthe von $x - l\sin p$ und $y - l\cos p$ nicht, weshalb es auch vortheilhaft ist, sie bei der Berechnung von ϑ' und $\frac{d\vartheta'}{dp}$ zu vermeiden. Dieses geschieht, wenn man ϑ' in der Form (42):

$$\vartheta' = q - \varrho l \frac{\cos\varepsilon \sin(\delta - \delta')}{\cos\lambda}\cos p - \frac{l\sin\varepsilon}{\sin\lambda}\sin p$$

schreibt und sie durch Einführung von λ'' und L'':

$$\lambda''\sin L'' = -\frac{\varrho l\cos\varepsilon\sin(\delta-\delta')}{\cos\lambda}$$

$$\lambda''\cos L'' = \frac{l\sin\varepsilon}{\cos\lambda}$$

in

$$\vartheta' = q - \lambda''\sin(p''-L'')$$

zusammenzieht, wo q die schon in der Formel (42) angewandte Grösse ist, deren Zahlenwerthe sich § 16 finden. Man hat also, wenn man diese Form der Rechnung wählt und dabei von einem gegebenen Werthe von p ausgeht, aufzusuchen:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\eta+m^0) &= \operatorname{cotg}(45^0+\tfrac{1}{2}n)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(p-m)\\ P' &= N\cos n\sqrt{3g-A+2R^0\cos\eta}\\ \vartheta' &= q-\lambda''\sin(p-L'')\\ \frac{dP'-d\vartheta'}{dp} &= -N\cos n^2\frac{R^0}{P'}\sin\eta\\ &\quad -\operatorname{tg} n P'\sin(\eta+m^0)+\lambda''\cos(p-L'')\end{aligned}\right\}\ldots(85)$$

Die Grösse N kann auch nach der Formel

$$\operatorname{tg}(45^0+\tfrac{1}{2}n)\frac{\cos\frac{1}{2}(p-m)^2}{\cos\frac{1}{2}(\eta+m^0)^2} = \operatorname{cotg}(45^0+\tfrac{1}{2}n)\frac{\sin\frac{1}{2}(p-m)^2}{\sin\frac{1}{2}(\eta+m^0)^2}$$

berechnet werden. Indessen ist sie nur in der Ordnung von n von 1 verschieden, und man bemerkt leicht, dass die Convergenz der Formel (83) zur Wahrheit durch die Vernachlässigung kleiner Grössen in ihrem Nenner wenig vermindert wird: wenn δp noch einen beträchtlicheren Werth hat, wird der aus der Vernachlässigung von δp^2 u. s. w. hervorgehende Fehler zu derselben Ordnung zu zählen sein, zu welcher der durch jene Vernachlässigungen hervorgebrachte gehört; wenn aber δp schon sehr klein geworden ist, wird ein kleiner Fehler des Nenners der Formel (83) sehr geringen Einfluss auf seinen Werth erhalten. — Wenn man für die Zeit, für welche man das Gegenwärtige anwenden will, schon s, m, n, m^0, $3g-A$, R^0 aufgesucht hat, was in der That der Fall ist wenn man Punkte der O-Curve für dieselbe Zeit gesucht hat, so ist die Anwendung der Formeln (85) vielleicht etwas vortheilhafter als die Anwendung von (84).

Ich muss noch zeigen, wie man den im Vorigen als gegeben vorausgesetzten Näherungswerth von p erlangt. Dem 19. § zufolge ist $\mathfrak{a}$ immer eine kleine Grösse von der Ordnung von i, und $\mathfrak{a}'$ eine noch weit kleinere von der Ordnung von $\frac{i}{s}$. Auch ϑ' ist eine kleine Grösse; η ist näherungsweise $= p - m - m^0$. Die Gleichung (82) ist also näherungsweise:

$$\left.\begin{aligned} 0 = \log\frac{\lambda'}{\lambda} &+ \log\frac{\sin(p-L')}{\sin(p-L)}\\ &+\tfrac{1}{2}\log[3g-A+2R^0\cos(p-m-m^0)]\end{aligned}\right\}..(82^*)$$

und aus dieser ist p durch leicht zu machende Versuche mit der vorausgesetzten Annäherung zu suchen. Man kann auch die Grenzen von p angeben, zwischen welchen diese Versuche gemacht werden müssen. Da nämlich der irrationale Theil der Gleichung:

$$1 = \frac{\lambda'}{\lambda}\frac{\sin(p-L')}{\sin(p-L)}\sqrt{3g-A+2R^0\cos(p-m-m^0)}$$

nicht kleiner als 0 und nicht grösser als 1 werden kann und für den ersten dieser Werthe $\sin(p-L)=0$, also $p = L$ oder $= 180^0 + L$ ist; für den anderen

$$\lambda\sin(p-L) = \lambda'\sin(p-L'),$$

also

$$\operatorname{tg}[p-\tfrac{1}{2}(L+L')] = \frac{\lambda+\lambda'}{\lambda-\lambda'}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(L-L'),$$

und wenn die rechts vom Gleichheitszeichen stehende Grösse $= \operatorname{tg}\psi$ gesetzt wird, $p = \frac{1}{2}(L+L') + \psi$ oder $180^0 + \frac{1}{2}(L+L') + \psi$ ist, so liegt p entweder zwischen L und $\frac{1}{2}(L+L')+\psi$, oder zwischen 180^0+L und $180^0+\frac{1}{2}(L+L')+\psi$; und zwar ist es der ersten oder zweiten Grenze desto näher zu suchen, je kleiner oder grösser der irrationale Theil der Gleichung ist. Die Grösse dieses Theils wird gewöhnlich, durch die eben gegebene Begrenzung von p, in so wenig von einander entfernte Grenzen eingeschlossen werden, dass selbst der Werth von p, mit welchem der erste Versuch gemacht wird, der Wahrheit ziemlich nahe, durch Schätzung erlangt werden wird; in welcher Beziehung ich noch bemerke, dass ein gegebener Werth des irrationalen Theils $= r$, durch die zuletzt angeführte Formel zur Kenntniss von p führt, wenn in derselben $\lambda' r$ statt λ' geschrieben wird. Uebrigens kann der wahre Werth von p die vorher angegebenen Grenzen offenbar etwas überschreiten, weil sie nicht aus der streng richtigen Gleichung abgeleitet worden sind.

26.

Die Art der Anwendung der eben gegebenen Vorschriften, welche ich beabsichtige, ist die folgende. Zuerst werden für die Zeit, für welche ein Punkt der M-Curve bestimmt werden soll, aus der Tafel § 19:

$$\mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{a}',\ \mathfrak{b}',\ \mathfrak{c}',$$

genommen und dadurch λ, L, λ', L' gesucht; ferner aus den Angaben § 16:

$$q,\quad k=\frac{\cos\varepsilon\sin(\delta-\delta')}{\cos\lambda},\quad h=\frac{\sin\varepsilon}{\cos\lambda},$$

wodurch λ'', L'' bestimmt werden. Die Werthe von m, n, m^0, $3g-A$, R^0 sind schon bekannt, wenn man die Punkte der M-Curve für Zeitmomente aufsucht, für welche man schon Punkte der O-Curve bestimmt hat. Nach diesen Vorbereitungen sucht man, falls eine erste Annäherung an den Werth von p nicht schon aus der vorangegangenen Bestimmung von Punkten der M-Curve für wenig verschiedene Zeiten abgeleitet werden kann, dieselbe durch die Gleichung (82*). Diese Annäherung legt man der ersten Anwendung der Gleichung (82) zum Grunde, wobei fünf Decimalstellen der Logarithmen hinreichend sind; sobald man $\varkappa$ dadurch gefunden hat, berechnet man den Nenner der Formel (83), dessen Ausdruck man aber, durch Vernachlässigung von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ und anderer kleiner Grössen, in

$$\frac{\sin(L'-L)}{\sin(p-L)\sin(p-L')}-\frac{R^0\sin\eta}{P'(P'-\vartheta')}\cdots(83^*)$$

zusammenziehen kann, wodurch man δp findet. Die hierdurch verbesserte erste Näherung legt man der zweiten Anwendung der Gleichung (82) zum Grunde, welche man aber mit aller der Genauigkeit durchführt, welche das Resultat erlangen soll. Der daraus hervorgehende neue Werth von δp wird keiner weiteren Verbesserung bedürfen, und man wird nun den gesuchten Punkt der M-Curve nach den Formeln (35) bestimmen, in welchen $P'-\vartheta'$ durch den gleichgültigen Ausdruck

$$\frac{\mathfrak{a}+\lambda\sin(p-L)}{\mathfrak{a}'+\lambda'\sin(p-L')}$$

ersetzt werden kann.

[Numerisches Beispiel für die gleiche Zeit, wie bei Bestimmung der O-Curve (s. p. 400).]

§ 27.

Zur Vollständigkeit der Auflösung der Aufgabe IV. ist noch erforderlich, dass die Grenzen der Zeit bestimmt werden, zwischen welchen resp. eine Auflösung, oder zwei Auflösungen vorhanden sind. Diese Grenzen sind die im 25. § durch τ_2 und τ'_2 und durch τ_3 und τ'_3 bezeichneten Zeiten, die Zeiten wenn die durch O_2 und O'_2 und durch O_3 und O'_3 bezeichneten, der O-Curve und der M-Curve gemeinschaftlichen Punkte der Erde die Ränderberührung sehen; welche Punkte, dem Vorhergehenden zufolge, durch jene Zeiten gegeben sind.

Wenn man die Auflösung der Aufgabe III. für ein beliebiges Zeitmoment ausgeführt hat, also die ihm entsprechenden beiden Werthe von p kennt, kann man dadurch die Werthe des Ausdruckes (78) finden. Berechnet man diese wirklich für mehrere Zeitmomente, so werden dadurch Grenzen bekannt, zwischen welchen die gegenwärtig gesuchten Zeiten liegen; nämlich diejenigen unter diesen Momenten, zwischen welchen die Werthe von (78) ihr Zeichen ändern. Sind diese Momente einander hinreichend nahe, so dass man auf die einer Zeichenänderung vorangehenden und folgenden eine Interpolationsformel für die Werthe von (78) gründen kann, so erlangt man, indem man sie $=0$ setzt, eine Gleichung, welche die Zeit des Verschwindens, also eine der gesuchten Zeiten, bestimmt. Auf diese Art kann man, in Folge der vorangegangenen Berechnung zahlreicher Punkte der O-Curve, mit leichter Mühe zur Kenntniss von τ_2 und τ'_2 und (wenn sie vorhanden sind) auch von τ_3 und τ'_3 gelangen.

Indessen habe ich in der gegenwärtigen Abhandlung die Absicht verfolgt, directe Methoden für die Analyse der Finsternisse zu suchen, und werde daher auch die Gleichung entwickeln, durch deren Auflösung τ_2, τ'_2, τ_3, τ'_3 direct gefunden werden können.

Die zu der Bestimmung dieser Zeiten führenden Bedingungen sind, dass die ihnen entsprechenden Punkte O_2, O'_2, O_3, O'_3, zugleich auf der O-Curve und auf der M-Curve liegen. Die erste fordert, dass (§ 22)

$$0=P',$$

die andere, dass (§ 24)

$$0=V-W'(P'-\vartheta')$$

ist; welche Gleichung sich, da sie mit der vorigen zugleich erfüllt werden soll, auf

$$0=V+W'\vartheta'$$

reducirt. Aus diesen beiden Gleichungen, welche beide in Beziehung auf p vom 4. Grade sind, muss dieser Winkel eliminirt werden, damit eine Gleichung übrig bleibe, welche die Zeit als einzige unbekannte Grösse enthält.

Diese Elimination verliert ihre Schwierigkeit durch dieselbe Umformung der ersten Gleichung, von welcher ich die directe Auflösung der übrigen Aufgaben der Analyse der Finsternisse in dieser Abhandlung abhängig gemacht habe. Indem diese Gleichung dadurch

$$0=2g-g'-g''+2\sqrt{(g-g')(g-g'')}\cos\eta$$

geworden ist, also die Ausdrücke:

$$\cos\eta=\frac{g''+g'-2g}{2\sqrt{(g'-g)(g''-g)}}$$

$$\sin\eta=\frac{\pm(g''-g')\sqrt{-1}}{2\sqrt{(g'-g)(g''-g)}}$$

ergibt; die zweite, oder, wenn sie durch W' dividirt wird,

$$0=\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\cos p+\mathfrak{c}\sin p}{\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}'\cos p+\mathfrak{c}'\sin p}+q-\varrho lk\cos p-lk\sin p\ldots(86)$$

aber durch die Substitution der im 15. § gegebenen Ausdrücke von $\cos p$ und $\sin p$ durch $\cos\eta$ und $\sin\eta$ die Form

$$0 = \frac{\alpha+\beta'\cos\eta+\alpha''\sin\eta}{\beta+\beta'\cos\eta+\beta''\sin\eta} + \frac{\gamma+\gamma'\cos\eta+\gamma''\sin\eta}{\mu-\mu'\cos\eta-\mu''\sin\eta}$$

annimmt, in welcher α, β, γ, μ u. s. w. von η unabhängig sind, so wird die Gleichung, durch welche die gesuchten Zeiten bestimmt werden:

$$0 = \frac{\alpha G+\alpha' G'\pm\alpha'' G''}{\beta G+\beta' G'\pm\beta'' G''} + \frac{\gamma G+\gamma' G'\pm\gamma'' G''}{\mu G-\mu' G'\mp\mu'' G''} \ldots (87)$$

wo G, G', G'', um abzukürzen, für

$$2\sqrt{(g'-g)(g''-g)},\quad g''+g'-2g,\quad (g''-g')\sqrt{-1}$$

oder für

$$2\sqrt{g(2g-A)+\frac{C}{g}},\quad A-3g,\quad \sqrt{\frac{4C}{g}-(A-g)^2}$$

geschrieben sind. Diese Grössen sind reell, wenn die cubische Gleichung (47) zwei imaginäre Wurzeln hat, was während der Zwischenzeiten zwischen τ und $\tau_,$ und zwischen $\tau_,'$ und τ', oder, wenn $\tau_,$ und $\tau_,'$ nicht wirklich vorhanden sind, zwischen τ und τ' stattfindet, welche Zwischenzeiten von den Wurzeln der Gleichung (87) nicht überschritten werden (§ 25). Man kann also den Werth des Ausdruckes, dessen Verschwinden die Bedingung dieser Gleichung ist, sowohl bei der einen, als auch bei der anderen Annahme des zweideutigen Zeichens, für jedes Moment der angegebenen Zwischenzeiten berechnen und auf eine Reihefolge so bekanntgewordener Werthe ihre Auflösung gründen.

Wenn man bei der Auflösung der Gleichung von berechneten Werthen ihres Ausdruckes ausgeht, so ist die Art diese zu erlangen offenbar gleichgültig: leichter als in der Form (87) wird man sie kennen lernen, wenn man die Reduction von (86) auf diese vermeidet, was geschieht, wenn man zuerst den einem gegebenen Momente zugehörenden Werth von $\cos\eta$, dann die beiden ihm entsprechenden Werthe von p aufsucht und diese zur Berechnung des Ausdruckes (86) anwendet. Dieses ist genau dasselbe, was die am Anfange dieses §'s erwähnte Bestimmungsart der gesuchten Zeiten fordert.

28.

Ich habe jetzt streng richtige und directe Methoden, die im 5. § an die Analyse der Finsternisse gemachten Forderungen zu befriedigen, gegeben und sie für den Fall einer beträchtlichen Entfernung der Spitze des Schattenkegels auch in einem Beispiele durchgeführt. Dieser Fall ist, mit Ausnahme innerer Berührungen der Ränder der Sonne und des Mondes, der immer vorhandene. Im Falle solcher Berührungen können aber einige Abweichungen von den für jenen entwickelten Vorschriften nöthig werden, worüber ich jetzt das Erforderliche sagen werde.

Diese Abweichungen entstehen grösstentheils aus einer grossen Verschiedenheit der aufzulösenden cubischen Gleichung in den verschiedenen Arten der Finsternisse. Damit man sie leicht übersehen könne, habe ich die Ausdrücke (40) der Coefficienten a, b, c, ... des Ausdruckes von PP, in den Ausdrücken der Coefficienten der cubischen Gleichung (47) substituirt und diese auf die ursprünglichen Elemente x, y, s, d und die Grösse (26):

$$\sigma\sigma = ss\frac{1-ee\cos d^2}{1-ee} + 2sy\frac{ee\cos d\sin d}{1-ee} + yy\frac{1-ee\sin d^2}{1-ee} + xx$$

zurückgeführt. Ich habe gefunden:

$$\left.\begin{aligned} -A &= \frac{(1-xx)(1-ee\cos d^2)-yy}{1-ee} - ii\left[1-\sigma\sigma+\frac{1-ee\sin d^2-ss}{1-ee}-\frac{xx\,ee\cos d^2}{1-ee}\right] \\ B &= \frac{ii(\sigma\sigma-1)}{1-ee}\left[1-xx-yy+1-ee\cos d^2-ii\,(1-ee\sin d^2-ss)\right] \\ -C &= \frac{i^4(\sigma\sigma-1)^2}{1-ee} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (88)$$

Da ii immer sehr klein ist, so wird die Grösse dieser Coefficienten sehr verschieden, je nachdem s, und damit σ, klein oder gross sind. Für kleine Werthe dieser Grössen, so wie sie nur bei den inneren Berührungen der Ränder der Sonne und des Mondes vorkommen, sind B und C sehr klein, so dass die Gleichung dann zwei sehr kleine Wurzeln hat; für grössere Werthe, wie sie sich bei allen übrigen vom Monde verursachten Finsternissen zeigen, ist is, und damit $ii(\sigma\sigma-1)$, zu derselben Grössenordnung zu zählen, zu welcher x und y gehören, wodurch alle drei Coefficienten der Gleichung, und damit ihre 3 Wurzeln, von gleicher Ordnung werden; für noch grössere Werthe endlich, wie sie bei den Durchgängen der unteren Planeten durch die Sonne stattfinden, wird A, vergleichungsweise mit B und C, sehr klein und die Gleichung erhält zwei sehr grosse Wurzeln. Diese Verschiedenheiten der cubischen Gleichung haben zur Folge, dass die Art ihrer Auflösung durch aufeinanderfolgende Näherungen, welche in den beiden letzten Fällen schnell zur Kenntniss ihrer Wurzeln

führt, in dem ersten durch eine andere, denselben Vortheil gewährende, ersetzt werden muss. Ich werde jetzt diesen Fall weiter verfolgen.

Wenn i und is kleine Grössen der ersten Ordnung sind, so ist die Wurzel g von der zweiten, indem sie, dem 13. § gemäss, zwischen Grenzen liegt, welche zugleich mit d, e, f von der zweiten Ordnung sind. Das Product C aller drei Wurzeln ist von der vierten Ordnung, $g'g''$ also von der zweiten; die Summe $g'+g''$ hat aber, dem Ausdrucke von A zufolge, i nicht zum Factor. Wenn A nicht so klein ist, dass es als zur ersten Ordnung gehörend betrachtet werden kann, so hat daher die cubische Gleichung eine sich ihm nähernde Wurzel und ausser g noch eine Wurzel von der zweiten Ordnung; wenn aber A sehr klein ist, was wegen der Schnelligkeit der Veränderungen von x und y nur während kurzer Zeit eintreten kann, so sind g' und g', entweder beide sehr klein, oder beide imaginär.

Man muss diese beiden Fälle von einander trennen, wenn man Vorschriften sucht, welche durch aufeinanderfolgende Näherungen schnell zur Kenntniss der Wurzeln der Gleichung führen. Wenn A beträchtlich grösser ist als i, was immer der Fall ist, wenn die Entfernung der Axe des Schattenkegels von dem Mittelpunkte der Erde nicht ihrem Halbmesser näherungsweise gleich ist, so kann die dann reelle und beträchtlich von g verschiedene Wurzel der Gleichung, welche ich durch g'' bezeichnen werde, durch aufeinanderfolgende Näherungen leicht bestimmt werden. Gibt man nämlich der Gleichung (47) die Form:

$$g'' = A - \frac{B}{g''} + \frac{C}{g''g''}$$

so ist ihr erstes Glied allein eine Näherung, welche zur Berechnung der folgenden Glieder angewandt, einen mehr genäherten Werth ergibt u. s. w. — Wenn man dadurch g'' kennen gelernt hat, erhält man die beiden übrigen Wurzeln aus der Formel:

$$\frac{A-g''}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A-g''}{2}\right)^2 - \frac{C}{g''}}$$

wofür aber, wegen der Kleinheit dieser Wurzeln, besser die folgende:

$$\frac{1}{2g''}\left(B - \frac{C}{g''}\right) \pm \frac{1}{2g''}\sqrt{\left(B-\frac{C}{g''}\right)^2 - 4Cg''}$$

angewandt wird. Wenn der Schattenkegel sich ganz ausserhalb der Erde befindet, so ist, dem 13. § zufolge, g die kleinste der dann reellen Wurzeln der Gleichung; wenn er ganz von der Erde umschlossen ist, so ist g die grösste derselben: in dem ersten Falle wird also g gefunden, indem der zweideutige Theil dieses Ausdruckes negativ, in dem zweiten indem er positiv genommen wird.

Wenn dagegen A sehr klein ist, führt folgende Form der Gleichung:

$$g = \frac{C}{B - Ag + gg}$$

durch aufeinanderfolgende Näherungen zur Bestimmung der Wurzel g. Denn das erste Glied ihres Nenners ist von der zweiten Ordnung, das zweite von einer höheren (weil g von der zweiten und A sehr klein ist), das dritte von der vierten; weshalb Anfangs nur das erste Glied berücksichtigt, oder da, wegen der vorausgesetzten Kleinheit von A, dieses näherungsweise

$$= \frac{ii(\sigma\sigma - 1)(1 - ee\cos d^2)}{1 - ee}$$

ist, als erste Näherung an den Werth von g

$$\frac{-ii(\sigma\sigma-1)}{1 - ee\cos d^2}$$

angenommen werden darf. Hierdurch erhält man eine weiter getriebene Näherung u. s. w. — Da hieraus hervorgeht, dass die cubische Gleichung, in dem Falle einer kleinen Entfernung der Spitze des Schattenkegels von der Erde, leicht aufgelöset werden kann, wenn man ihre Coefficienten A, B, C kennt, so gewährt in diesem Falle die tabellarische Kenntniss der Werthe dieser Grössen für die Zeiten, für welche man x, y, s u. s. w. berechnet hat, denselben Vortheil, welcher im 18. § die Einführung von μ, ν, ξ veranlasst hat.

Will man alle inneren Berührungen der Ränder der Sonne und des Mondes nach gleichen Vorschriften behandeln, so muss man die im 7. § gegebenen anwenden, indem diese die Unterscheidung der Fälle, in welchen die Spitze des Schattenkegels entweder durch die Erde geht oder nicht, nicht fordern. Wenn dieses geschieht, muss auch der im 19. § entwickelte, die Entscheidung zwischen dem Anfange und dem Ende der Finsterniss gebende Ausdruck dadurch abgeändert werden, dass er von dem im 7. § angewandten Ausdrucke von ζ abhängig gemacht wird. Dieser ist:

$$\zeta = \frac{P - \vartheta}{m''} + s,$$

und durch seine Substitution verwandelt sich die Formel (70) in:

$$-\frac{P-\vartheta}{m''}\left(V - Ws - W\frac{P-\vartheta}{m''}\right)$$

woraus hervorgeht, dass die Ränderberührung dem Anfange oder dem Ende zugehört, je nachdem

$$\frac{P-\vartheta}{m''}\left(V - Ws - W\frac{P-\vartheta}{m''}\right)$$

ositiv oder negativ ist. Schreibt man dafür:

$$\frac{\rho-\vartheta}{m''}\left[\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\cos p+\mathfrak{c}\sin p-(\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}'\cos p+\mathfrak{c}'\sin p)\frac{P-\vartheta}{m''}\right] \quad (89)$$

o erhalten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ u. s. w. gegenwärtig folgende Bedeutung:

$$\mathfrak{a} = -ix\cos d\frac{d(\mu'-a)}{dt}+iy\frac{dd}{dt}-i\frac{ds}{dt}$$

$$\mathfrak{b} = \frac{dy}{dt}-x\sin d\frac{d(\mu'-a)}{dt}+s\frac{dd}{dt}$$

$$\mathfrak{c} = \frac{dx}{dt}+y\sin d\frac{d(\mu'-a)}{dt}-s\cos d\frac{d(\mu'-a)}{dt}$$

$$\mathfrak{a}' = -\frac{di}{dt}$$

$$\mathfrak{b}' = -(1+ii)\frac{dd}{dt}$$

$$\mathfrak{c}' = (1+ii)\cos d\frac{d(\mu'-a)}{dt}$$

Die im 21. § gegebene Auflösung der Gleichungen (73) erfährt in dem gegenwärtigen Falle die Aenderung, dass die durch die Interpolationsformel

$$a+t.b+\tfrac{1}{2}(tt-\tfrac{1}{4})c'$$

darzustellende Grösse, jetzt $A=d+f-a$, die durch ξ bezeichnete aber

$$\xi = g\pm 2\sqrt{\frac{C}{g}} = g\pm 2\sqrt{B-Ag+gg}$$

wird. Weitere Aenderungen der früheren Vorschriften führt der gegenwärtige Fall nicht herbei.

29.

[Numerisches Beispiel in Beziehung auf die innere Ränderberührung. $\log\varrho$ und δ' wie früher; $\log\sigma$, δ, ε der inneren Berührung entsprechend nach (26). Berechnung von α', β', γ' (§ 7); Bessel bemerkt hierzu:]

Die zweiten Differenzen sind hier, so wie in allen ähnlichen Fällen nahe beständig; die Differenzreihen von $\log\sigma$, δ, ε sind aber nur dann convergirend, wenn die Spitze des Schattenkegels nicht nahe bei dem Mittelpunkte der Erde vorbeigeht. Erforderlichenfalls müssen daher σ, δ, ε aus α', β', γ' abgeleitet werden.

[Aus den nach § 3 und (41) gefundenen $\log x$, y', s', folgen gemäss (40) die Grössen $a....f$; endlich Berechnung der Coeff. A, B, C in Gleichung (47) und $\mathfrak{a}....\mathfrak{c}'$ in (89).]

30.

Obgleich die im 5. § an die Analyse der Finsternisse gemachten Forderungen durch das Vorhergehende befriedigt sind, so glaube ich doch noch

Aufgabe V.

Den Weg der centralen Finsterniss auf der Erde und die Zeiten ihres Anfanges und Endes zu bestimmen,

auflösen zu müssen. Sie ist viel einfacher als die schon aufgelöseten Aufgaben, weil der Schattenkegel sich in ihr in eine gerade Linie und seine Durchschnittslinie mit der Erdoberfläche in einen Punkt verwandeln; sie kann als der besondere Fall des Vorhergehenden, in welchem sowohl i als auch l verschwinden, angesehen werden. Die Grundgleichungen (2) werden für diese Aufgabe:

$$0 = y-\eta$$
$$0 = x-\xi$$

oder (17):

$$y = w\cos d\sqrt{1-ee}-v\sin d$$
$$x = u$$

Wenn man r', d', y' einführt, so dass sie durch

$$r'\cos d' = \cos d\sqrt{1-ee}$$
$$r'\sin d' = \sin d$$
$$y' = \frac{y}{r'}$$

bestimmt werden, so verwandeln sich diese Gleichungen in:

$$y' = w\cos d'-v\sin d'$$
$$x = u$$

welche, verbunden mit $1=uu+vv+ww$,

$$\sin d'^2 = (w-y'\cos d')^2+(xx+y'y')\sin d'^2$$

oder

$$w = y'\cos d'\pm\sin d'\sqrt{1-xx-y'y'}$$

ergeben; in welchem Ausdrucke, wenn er von den dadurch bestimmten beiden Punkten der Erde den angeben soll, über dessen Horizonte die centrale Finsterniss vor sich geht, der früheren Bemerkung zufolge, das obere Zeichen zu nehmen ist. Man erhält also:

$$\left.\begin{aligned} u &= x \\ v &= -y'\sin d'+\cos d'\sqrt{1-xx-y'y'} \\ w &= y'\cos d'+\sin d'\sqrt{1-xx-y'y'} \end{aligned}\right\} \quad ....(90)$$

wodurch der die Finsterniss zu einer gegebenen Zeit central sehende Punkt der Erde bestimmt wird.

Die Zeiten, wenn die centrale Finsterniss anfängt und aufhört auf der Erde sichtbar zu sein, sind die der Gleichung

$$0 = 1-xx-y'y' \quad ..... \quad (91)$$

Genüge leistenden. Ich werde sie durch t und t' bezeichnen. Die zuerst und zuletzt die centrale Finsterniss sehenden Punkte der Erde gehen aus den Formeln (90) hervor, wenn x, y', d' für die Zeiten t und t' angenommen werden und also das letzte Glied der durch diese Formeln gegebenen Ausdrücke von v und w weggelassen wird.

Um die gegenwärtige Aufgabe durch möglichst leichte Rechnung aufzulösen, muss man x und y' die Ausdrücke:

$$x = m \sin M + n \sin N.t$$
$$y' = m \cos M + n \cos N.t$$

geben, deren von t unabhängige Glieder die zu der Anfangszeit von t gehörigen Werthe von x und y' sind, während $n \sin N$ und $n \cos N$, und damit n und N sich während des Verlaufes der Finsterniss wenig ändern. Setzt man die Werthe von x und y' von Stunde zu Stunde, und zwar in ungerader Anzahl, wie in dem bisher verfolgten Beispiele, berechnet voraus, so ist die für den Fall II. (§ 17) dienende der Newton'schen Interpolationsformeln die anzuwendende, und ihr gemäss hat man, wenn diese Werthe durch

$$\ldots x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$$
$$\ldots y'_{-3}, y'_{-2}, y'_{-1}, y'_0, y'_1, y'_2, y'_3 \ldots$$

bezeichnet werden:

$$m \sin M = x_0, \quad m \cos M = y'_0$$

und $n \sin N$:

für $t = -3$	$b + \frac{4}{3}d + \frac{1}{3}f - (\frac{3}{2}c + e + g)$	$= \frac{1}{3}(x_0 - x_{-3})$
-2	$b + \frac{1}{2}d \quad - (c + \frac{1}{4}e)$	$= \frac{1}{2}(x_0 - x_{-2})$
-1	$b \ldots\ldots\ldots - \frac{1}{2}c$	$= x_0 - x_{-1}$
0	$b - \frac{1}{6}d \quad \frac{1}{30}f$	
1	$b \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2}c$	$= x_1 - x_0$
2	$b + \frac{1}{2}d \quad + (c + \frac{1}{4}e)$	$= \frac{1}{2}(x_2 - x_0)$
3	$b + \frac{4}{3}d + \frac{1}{3}f + (\frac{3}{2}c + e + g)$	$= \frac{1}{3}(x_3 - x_0)$

sowie auch ähnliche Ausdrücke für $n \cos N$. Man erhält hieraus die Werthe von n und N von Stunde zu Stunde.

Bestimmt man nun k und ψ durch:

$$k \cos \psi = m \cos (M - N) + nt$$
$$k \sin \psi = m \sin (M - N)$$

so erhält man:

$$x = k \sin (\psi + N)$$
$$y' = k \cos (\psi + N)$$

und daher (90):

$$\left.\begin{aligned} u &= k \sin (\psi + N) \\ v &= \sqrt{1 - kk} \cos d' - k \sin d' \cos (\psi + N) \\ w &= \sqrt{1 - kk} \sin d' + k \cos d' \cos (\psi + N) \end{aligned}\right\} \ldots (92)$$

welche Formeln auf gewöhnliche Art zur logarithmischen Rechnung eingerichtet werden können. Hierdurch ist der Punkt der Erde bestimmt, welcher zur Zeit t die Finsterniss central sieht.

Es sind noch die Zeiten t und t', wenn die Finsterniss am frühesten und am spätesten central gesehen wird, aufzusuchen. Die Gleichung (91) fordert, dass zu diesen Zeiten $k = 1$ ist; sie wird:

$$1 = [m \cos (M - N) + nt]^2 + m^2 \sin (M - N)^2$$

und ergibt, wenn

$$\sin \psi = m \sin (M - N)$$

gesetzt und ψ kleiner als 90^0 genommen wird:

$$\left.\begin{aligned} nt &= -m \cos (M - N) - \cos \psi \\ nt' &= -m \cos (M - N) + \cos \psi \end{aligned}\right\} \ldots . (93)$$

oder auch:

$$\left.\begin{aligned} t &= -\frac{\sin (M - N + \psi)}{n \sin (M - N)} \\ t' &= +\frac{\sin (M - N + \psi)}{n \sin (M - N)} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots . (93^*)$$

Diese Ausdrücke setzen n und N, wovon das letztere auch im Ausdrucke von $\sin \psi$ vorkommt, für die Zeiten t und t' als bekannt voraus: man kann Anfangs ihre Werthe für $t = 0$ annehmen; wenn man dadurch die gesuchten Zeiten näherungsweise gefunden hat, die Rechnung mit berichtigten Werthen von n und N wiederholen u. s. w. Diese Rechnungen convergiren, wegen Langsamkeit der Veränderungen von n und N, sehr schnell zur Wahrheit.

31.

[Beispiel: Berechnung von log r', d', y'; von $n \sin N$, $n \cos N$, log n, N aus x und y'; x_0 und y'_0, denen log m und M entsprechen, für das mittlere der Zeitmomente. Hiermit und den ersten Näherungswerthen von log n und N nach (93) t und t'; diesen entsprechen genauere log n und N, aus denen zweite t und t' hervorgehen, also die Zeiten des 1. Meridians, wenn die centrale Finsterniss zuerst und zuletzt auf $\odot$ erscheint. Endlich noch — mittelst der Grössen ψ, $\psi + N$, d', u, v, w [$k = 1$ in (92)], $\mu' - \alpha + \omega$, log tg φ', sowie (nach § 4) μ' und α — die durch α und φ bestimmte Lage der beiden Punkte, welche die centrale Finsterniss zuerst und zuletzt sehen. — Berechnung eines anderen Punktes der Centralitäts-Curve (k nicht $= 1$) für eine bestimmte Zeit des 1. Meridians.]

32.

Zum Schlusse dieses Abschnittes werde ich noch der Näherungen an die Auflösungen, welche ich darin gegeben habe, erwähnen.

Wenn die Erde als eine Kugel angenommen wird, so verwandelt sich der Ausdruck von PP in:

$$(1 + ii)(1 - xx - yy) - ll + 2l(x \sin p + y \cos p) + ii\,(x \sin p + y \cos p)^2.$$

Er ist in Beziehung auf $x \sin p + y \cos p$ vom zweiten Grade, weshalb die Auflösung der Gleichung $PP = 0$, bei der Voraussetzung der Kugelgestalt der Erde, nicht mehr auf eine cubische Gleichung führt. Er wird selbst

in Beziehung auf die trigonometrischen Linien von p vom zweiten Grade, wenn ausser der Excentricität der Erdmeridiane auch i, wo es nicht in s multiplicirt ist, vernachlässigt wird, welche Vernachlässigung auf die Voraussetzung zurückkommt, dass die scheinbaren Grössen der beiden Gestirne von ihren Lagen gegen den Horizont unabhängig seien. Will man sich beide Vernachlässigungen erlauben, so wird

$$PP = 1 - xx - yy - ll + 2l(x\sin p + y\cos p) \ldots (A)$$

und die Auflösung der Aufgabe I vereinfacht sich durch die ihnen entsprechende Vereinfachung der Ausdrücke von

$$\begin{aligned} a &= x - l\sin p; & \alpha &= 0 \\ b &= -(y - l\cos p)\sin d; & \beta &= \cos d \\ c &= (y - l\cos p)\cos d; & \gamma &= \sin d \end{aligned}$$

wodurch $m'' = 1$, $m' = 0$ und die Formeln (21)

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi\sin(\mu' - a + \omega) &= x - l\sin p \\ \cos\varphi\cos(\mu' - a + \omega) &= -(y - l\cos p)\sin d + P\cos d \\ \sin\varphi &= (y - l\cos p)\cos d + P\sin d \end{aligned}\right\} (B)$$

werden. Auch fallen dann die Gründe weg, welche Anlass gegeben haben, die in den Formeln (24) und (35) enthaltenen Aenderungen der Formeln (21) zu suchen.

Der im 19. § entwickelte Ausdruck, dessen Zeichen die Unterscheidung zwischen dem Anfange und dem Ende der Finsterniss gibt, wird nun (70):

$$(s - P)(V - WP),$$

oder:

$$(s - P)[\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\cos p + \mathfrak{c}\sin p - (\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}'\cos p + \mathfrak{c}'\sin p)P] \ldots (C)$$

worin aber $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ als verschwindend und

$$\begin{aligned} \mathfrak{b} &= \frac{dy}{dt} - x\sin d\frac{d(\mu' - a)}{dt} \\ \mathfrak{c} &= \frac{dx}{dt} + y\sin d\frac{d(\mu' - a)}{dt} \\ \mathfrak{b}' &= -\frac{dd}{dt} \\ \mathfrak{c}' &= \cos d\frac{d(\mu' - a)}{dt} \end{aligned}$$

angenommen werden können.

Die Aufgabe II führt, statt auf die Gleichungen (73), jetzt auf

$$0 = xx + yy - 1 \mp 2l - ll$$

$$\left.\begin{aligned} \text{oder} \ldots\ldots\ldots\ xx + yy &= (1 + l)^2 \\ \text{und} \ldots\ldots\ldots\ xx + yy &= (1 - l)^2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (D)$$

woraus die Zeiten τ, τ' und $\tau_{,,}$, $\tau'_{,}$ auf die Art gefunden werden, welche ich § 30 angewandt habe. Die ihnen zugehörigen Werthe von p sind die das Verschwinden von P hervorbringenden, also die, welche

$$x\sin p + y\cos p = \frac{xx + yy + ll - 1}{2l} = l \pm 1$$

Genüge leisten, oder:

$$\sin p = \frac{x}{l \pm 1}, \quad \cos p = \frac{y}{l \pm 1}.$$

Durch ihre Substitution in den Formeln (B), aus welchen P verschwindet, wird die Bestimmung der Punkte O, O', und $O_{,,}$, $O'_{,}$ erlangt; nämlich O und O' gehen aus

$$\left.\begin{aligned} (1 + l)\cos\varphi\sin(\mu' - a + \omega) &= x \\ (1 + l)\cos\varphi\cos(\mu' - a + \omega) &= -y\sin d \\ (1 + l)\sin\varphi &= y\cos d \end{aligned}\right\} \ldots . (E)$$

hervor, so wie $O_{,}$ und $O'_{,}$ aus

$$\left.\begin{aligned} (1 - l)\cos\varphi\sin(\mu' - a + \omega) &= x \\ (1 - l)\cos\varphi\cos(\mu' - a + \omega) &= -y\sin d \\ (1 - l)\sin\varphi &= y\cos d \end{aligned}\right\} \ldots (E^*)$$

Die der Aufgabe III entsprechenden Werthe von p findet man aus

$$x\sin p + y\cos p = \frac{xx + yy + ll - 1}{2l} \ldots\ldots (F)$$

bei ihrer Anwendung zur Bestimmung von Punkten der O-Curve verschwindet P aus den Formeln (B).

Indem die Auflösung der Aufgabe IV jetzt auf den Ausdruck (C) gegründet wird, aus welchem $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ verschwinden, fordert sie die Erfüllung der hierdurch vereinfachten Gleichung (81), nämlich:

$$0 = \mathfrak{b}\cos p + \mathfrak{c}\sin p - (\mathfrak{b}'\cos p + \mathfrak{c}'\sin p)P,$$

oder nach den im 25. § eingeführten Bezeichnungen und der Substitution des Ausdruckes (A):

$$0 = \log\frac{\lambda'\sin(p - L')}{\lambda\sin(p - L)}\sqrt{1 - xx - yy - ll + 2l(x\sin p + y\cos p)} \ldots (G)$$

welcher durch Versuche Genüge geleistet werden muss.

Die Auflösung der Aufgabe V ist für die wahre Figur der Erde nicht weniger einfach, als für die Voraussetzung ihrer Kugelgestalt; nur gründet sie sich im letzteren Falle auf x, y, d, während sie wirklich von x, y', d' ausgehen sollte. Da die Anwendung der Formeln (§ 30), welche y', d' aus y, d ergeben, unbedeutende Mühe verursacht, so kann die Abkürzung der Rechnung kaum ein Grund werden, statt der richtigen Auflösung dieser Aufgabe eine Näherung anzuwenden. Man wird also die Curve auf der Erde, auf welcher die Finsterniss central gesehen wird, richtig bestimmen. Von ihr kann man, unter der Voraussetzung eines sehr kleinen Werthes von l, durch leichte Rechnung zur Kenntniss der sie einschliessenden beiden Theile der M-Curve gelangen; welche Rechnung ich hier entwickeln werde, da ringförmige und gänzliche Finsternisse der Sonne nicht selten in dem Falle dieser

Voraussetzung sind und man, selbst wenn nur eine beiläufige Kenntniss der die äussere Berührung der Ränder der Sonne und des Mondes betreffenden Curven gefordert wird, eine genauere Kenntniss des Raumes der Erde, auf welchem die innere sichtbar ist, wünschen wird.

Die hier zu verfolgende Voraussetzung ist die, dass $(s-\xi)\operatorname{tg} f$, oder $l - i\xi$, eine sehr kleine Grösse ist, deren Quadrat u. s. w. vernachlässigt werden kann. Schreibt man ε dafür, so dass die Gleichungen (2) sich in

$$\eta = y - \varepsilon\cos p$$
$$\xi = x - \varepsilon\sin p$$

verwandeln und nimmt man ε als bekannt an, so findet man den die Ränderberührung unter dem Positionswinkel p sehenden Punkt der Erde, wenn man in den Formeln (90) resp. $y' - \frac{1}{r'}\varepsilon\cos p$ und $x - \varepsilon\sin p$ statt y' und x schreibt. Indem nur die erste Dimension dieser Aenderungen von y' und x in Betracht kommen soll, sind die aus ihnen hervorgehenden Aenderungen von u, v, w:

$$\delta u = \varepsilon\sin p$$
$$\delta v = -\varepsilon\sin p\frac{x\cos d'}{\sqrt{1-xx-y'y'}} - \frac{1}{r'}\varepsilon\cos p\left[\sin d' + \frac{y'\cos d'}{\sqrt{1-xx-y'y'}}\right]$$
$$\delta w = -\varepsilon\sin p\frac{x\sin d'}{\sqrt{1-xx-y'y'}} + \frac{1}{r'}\varepsilon\cos p\left[\cos d' - \frac{y'\sin d'}{\sqrt{1-xx-y'y'}}\right]$$

Hieraus findet man die Aenderungen von ω und $\varphi_,$ nämlich:

$$\cos\varphi,\delta\omega = \delta u\cos(\mu'-a+\omega) - \delta v\sin(\mu'-a+\omega)$$
$$\delta\varphi_, = -\delta u\sin\varphi,\sin(\mu'-a+\omega) - \delta v\sin\varphi,\cos(\mu'-a+\omega) + \delta w\cos\varphi,$$

und wenn man in den Ausdrücken von δv, δu, δx

$$x = \cos\varphi,\sin(\mu'-a+\omega)$$
$$y' = -\cos\varphi,\sin d'\cos(\mu'-a+\omega) + \sin\varphi,\cos d'$$
$$\sqrt{1-xx-y'y'} = \cos\varphi,\cos d'\cos(\mu'-a+\omega) + \sin\varphi,\sin d'$$

schreibt:

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi,\delta\omega = {}& \frac{\varepsilon\sin p}{\sqrt{1-xx-y'y'}}[\cos\varphi,\cos d' + \sin\varphi,\sin d'\cos(\mu'-a+\omega)] \\ & + \frac{\varepsilon\cos p}{r'\sqrt{1-xx-y'y'}}\sin\varphi,\sin(\mu'-a+\omega) \\ \delta\varphi_, = {}& -\frac{\varepsilon\sin p}{\sqrt{1-xx-y'y'}}\sin d'\sin(\mu'-a+\omega) + \frac{\varepsilon\cos p}{r'\sqrt{1-xx-y'y'}}\cos(\mu'-a+\omega)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (H)$$

welche Formeln also Punkte der Curve bestimmen, auf welcher die Ränderberührung, zu der Zeit für welche ω und φ gelten, gesehen wird. Damit diese Punkte der M-Curve zugehören, ist erforderlich, dass p der Gleichung (89):

$$0 = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}\cos p + \mathfrak{c}\sin p - (\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}'\cos p + \mathfrak{c}'\sin p)\frac{P-\mathfrak{P}}{m''}$$

entsprechend angenommen werde, welche, da $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ von der Ordnung von ε sind, aber in

$$0 = \mathfrak{b}\cos p + \mathfrak{c}\sin p - (\mathfrak{b}'\cos p + \mathfrak{c}'\sin p)\frac{P-\mathfrak{P}}{m''}$$

und da

$$\frac{P-\mathfrak{P}}{m''} = \zeta - s$$

ist, in

$$0 = [\mathfrak{b} + \mathfrak{b}'(s-\zeta)]\cos p + [\mathfrak{c} + \mathfrak{c}'(s-\zeta)]\sin p$$

zusammengezogen werden kann. Die hieraus hervorgehenden beiden, 180^0 von einander verschiedenen Werthe von p, nämlich die

$$\operatorname{tg} p = -\frac{\mathfrak{b}+\mathfrak{b}'(s-\zeta)}{\mathfrak{c}+\mathfrak{c}'(s-\zeta)}$$

entsprechenden, ergeben, in den Formeln (H) angewandt, die beiden gesuchten Punkte der M-Curve.

Der Ausdruck von $\delta\omega$ wird etwas einfacher, wenn φ und d statt φ, und d' in ihn eingeführt, also wenn

$$\operatorname{tg}\varphi\sqrt{1-ee},\quad \frac{\cos d}{r'}\sqrt{1-ee},\quad \frac{\sin d}{r'}$$

für

$$\operatorname{tg}\varphi,,\quad \cos d',\quad \sin d'$$

geschrieben werden. Statt des Ausdruckes von $\delta\varphi$, wird man unmittelbar den von $\delta\varphi$ haben wollen, weshalb er in

$$\frac{\delta\varphi}{\delta\varphi,} = \frac{\sqrt{1-ee}}{1-ee\cos\varphi,^2}$$

zu multipliciren ist. Schreibt man noch für ε seinen Ausdruck, so erhält man:

$$\delta\omega = \frac{s-\zeta}{\sqrt{1-xx-y'y'}}\frac{i\sqrt{1-ee}}{r'}[\sin p(\cos d + \sin d\operatorname{tg}\varphi\cos(\mu'-a+\omega)) + \cos p\operatorname{tg}\varphi\sin(\mu'-a+\omega)]$$
$$\delta\varphi = \frac{s-\zeta}{\sqrt{1-xx-y'y'}}\frac{i\sqrt{1-ee}}{r'(1-ee\cos\varphi,^2)}[-\sin p\sin d\sin(\mu'-a+\omega) + \cos p\cos(\mu'-a+\omega)]$$

Führt man m und M ein, so dass sie durch

$$\sin m \cos M = \cos p, \qquad \sin m \sin M = \sin p \sin d, \qquad \cos m = \sin p \cos d,$$

bestimmt werden, so verwandeln sich diese Ausdrücke in:

$$\left.\begin{aligned} \delta\omega &= \frac{s-\zeta}{\sqrt{1-xx-y'y'}} \frac{i\sqrt{1-ee}}{r'} [\cos m + \sin m \operatorname{tg}\varphi \sin(\mu' - a + \omega + M)] \\ \delta\varphi &= \frac{s-\zeta}{\sqrt{1-xx-y'y'}} \frac{i\sqrt{1-ee}}{r'(1-ee\cos\varphi,^2)} \sin m \cos(\mu' - a + \omega + M) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

Das darin sowohl, als auch in dem Ausdrucke von $\operatorname{tg} p$ vorkommende ζ kann ohne Ueberschreitung der hier beobachteten Näherungsgrenze so angenommen werden, wie es für den die Finsterniss central sehenden Punkt der Erde ist; also:

$$\zeta = w \sin d \sqrt{1-ee} + v \cos d;$$

wenig davon verschieden ist

$$\sqrt{1-xx-y'y'} = w \sin d' + v \cos d'$$

dessen Werth schon durch die vorangegangene Bestimmung von ω und φ, also durch die Formeln (92), in welchen er die Bezeichnung $\sqrt{1-kk}$ erhalten hat, bekannt geworden ist. Da beide wenig von einander verschieden sind und der Einfluss ihres Unterschiedes auf $\delta\omega$ und $\delta\varphi$ die kleine Grösse i zum Factor hat, so kann der letztere Werth, ohne wesentlichen Verlust an Genauigkeit, statt ζ angenommen werden.

Dass diese Näherungsmethode nicht angewandt werden darf, wenn $\sqrt{1-xx-y'y'}$ sehr klein ist, oder wenn die Gestirne dem Horizonte sehr nahe sind, ist offenbar.

[Anwendung auf das gewählte Beispiel und für die zu Ende von § 31 erwähnte Zeit. Aus § 29 dafür b, c, b′, c′, aus § 4 s, log i, d; aus § 31 log r', $\zeta = \sqrt{1-xx-y'y'}$; damit p, ferner M, log sin m, log cos m und aus (I) $\delta\omega$ und $\delta\varphi$; welche, zu ω und φ am Schlusse von § 31 hinzugefügt, die beiden Punkte der M-Curve ergeben.]

Dritter Abschnitt.

Berechnung der Finsternisse für jeden gegebenen Ort der Erde.

33.

In dem vorigen Abschnitte sind die Punkte der Erde bestimmt worden, wo die Ränderberührung beider Gestirne unter gewissen Bedingungen gesehen wird; in dem gegenwärtigen sollen die Zeiten der Ränderberührungen an einem gegebenen Punkte, sowie auch die Punkte an der Himmelskugel, wo diese sich ereignen, bestimmt werden.

Die gesuchten Zeiten sind die den Gleichungen (2) oder der Gleichung:

$$(l - i\xi)^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$$

Genüge leistenden, in welcher allein die Zeit unbekannt ist. Da diese Gleichung in Beziehung auf die Zeit transcendent ist, so kann sie nur durch Versuche oder durch aufeinanderfolgende Näherungen aufgelöset werden. Das letztere dieser Mittel werde ich anwenden, vorher aber die Auflösung der quadratischen Gleichung:

$$(c + c't)^2 = (a + a't)^2 + (b + b't)^2 \ldots\ldots (94)$$

auf welche ich später die unsrige reduciren werde, mittheilen.

Schreibt man die Gleichung

$$(a'a' + b'b' - c'c')\,tt + 2(aa' + bb' - cc')\,t = cc - aa - bb$$

multiplicirt man sie in $a'a' + b'b' - c'c'$ und ergänzt man das Quadrat, so verwandelt sie sich in:

$$[(a'a' + b'b' - c'c')\,t + aa' + bb' - cc']^2 = (aa' + bb' - cc')^2 - (aa + bb - cc)\,(a'a' + b'b' - c'c')$$

worin, statt des rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Ausdruckes, auch

$$\left[c\sqrt{a'a' + b'b'} - \frac{c'(aa' + bb')}{\sqrt{a'a' + b'b'}}\right]^2 - \frac{a'a' + b'b' - c'c'}{a'a' + b'b'}(ab' - a'b)^2$$

geschrieben werden kann. Wenn man m, M, n, N den Ausdrücken

$$m \sin M = a; \qquad n \sin N = a'$$
$$m \cos M = b; \qquad n \cos N = b'$$

gemäss und v durch

$$n \sin v = c'$$

bestimmt, so nimmt die Gleichung nach ihrer Division durch nn den Ausdruck:

$$[n \cos v^2 t + m \cos(M - N) - c \sin v]^2 = [c - m \sin v \cos(M - N)]^2 - [m \cos v \sin(M - N)]^2$$

an. Dieser Ausdruck setzt $c' < n$ voraus; den dem entgegengesetzten Falle angemessenen führe ich nicht an, weil er bei der beabsichtigten Anwendung nicht gebraucht wird.

Bestimmt man ψ durch

$$\sin\psi = \frac{m \cos v \sin(M - N)}{c - m \sin v \cos(M - N)} \ldots\ldots (95)$$

so erhält man:

$$n \cos v^2 t + m \cos(M - N) - c \sin v = \mp [c - m \sin v \cos(M - N)] \cos\psi$$

Wenn $\psi < 90^0$ oder $> 90^0$ genommen wird, je nachdem $c - m \sin \nu \cos (M - N)$ positiv oder negativ ist, so bestimmt das obere Zeichen offenbar den kleineren, das untere den grösseren der beiden, der Gleichung Genüge leistenden Werthe von t. Man hat also, indem man das obere Zeichen immer für den kleineren, das untere für den grösseren dieser Werthe beibehält:

$$t = -\frac{m}{n}\frac{1 \mp \sin \nu \cos \psi}{\cos \nu^2} \cos (M-N) \mp \frac{c}{n}\frac{\cos \psi \mp \sin \nu}{\cos \nu^2} \quad .. (96)$$

oder auch, indem man c durch den Ausdruck (95) eliminirt:

$$t = -\frac{m}{n}\left[\cos (M-N) \pm \frac{\cos \psi \mp \sin \nu}{\cos \nu \sin \psi} \sin (M-N)\right] .. (97)$$

Führt man ψ' ein, so dass

$$\cos \psi' = \frac{\cos \psi \mp \sin \nu}{1 \mp \sin \nu \cos \psi}$$

$$\sin \psi' = \frac{\cos \nu \sin \psi}{1 \mp \sin \nu \cos \psi}$$

und, übereinstimmend mit beiden Ausdrücken,

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\psi' = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\psi \operatorname{tg} (45^0 \pm \tfrac{1}{2}\nu) \quad \ldots\ldots (98)$$

ist, so wird:

$$1 \mp \sin \nu \cos \psi = \cos \nu \frac{\sin \psi}{\sin \psi'},$$

und die Formeln (96) und (97) verwandeln sich in:

$$t = -\frac{1}{n \cos \nu}\frac{\sin \psi}{\sin \psi'} [m \cos (M-N) \pm c \cos \psi'] \quad .. (96^*)$$

$$t = -\frac{m}{n}\frac{\sin [\psi' \pm (M-N)]}{\sin \psi'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (97^*)$$

Die beiden Formeln (97) sind jedoch nicht vortheilhaft, wenn ψ' entweder sehr klein, oder sehr nahe $= 180^0$ ist.

Wenn man für t den Ausdruck (97) setzt und ψ' einführt, findet man:

$$a + a't = \mp \frac{m \sin (M-N)}{\sin \psi'} \sin (N \mp \psi')$$

$$b + b't = \mp \frac{m \sin (M-N)}{\sin \psi'} \cos (N \mp \psi')$$

$$c + c't = \frac{m \sin (M-N)}{\sin \psi'}$$

woraus hervorgeht, dass für den kleineren der der Gleichung (94) Genüge leistenden Werthe von t:

$$\left.\begin{aligned} a + a't &= -(c + c't) \sin (N - \psi') \\ &= (c + c't) \sin (N + 180^0 - \psi') \\ b + b't &= -(c + c't) \cos (N - \psi') \\ &= (c + c't) \cos (N + 180^0 - \psi') \end{aligned}\right\} \ldots (99)$$

und für den grösseren

$$\left.\begin{aligned} a + a't &= (c + c't) \sin (N + \psi') \\ b + b't &= (c + c't) \cos (N + \psi') \end{aligned}\right\} \ldots (99^*)$$

ist.

34.

Wenn die Zeit des ersten Meridians, welche einer Ränderberührung der Gestirne an einem durch ω und φ gegebenen Orte zugehört, aus zwei Theilen τ und t zusammengesetzt und τ als gegeben angesehen wird, so sind die zu τ gehörigen Werthe von $x - \xi$, $y - \eta$, $l - i\zeta$ gleichfalls als gegeben anzusehen, und die zu $\tau + t$ gehörigen sind die Summen dieser Werthe und ihrer Aenderungen bis zur Zeit $\tau + t$. Wenn τ sich der Zeit der Ränderberührung so weit nähert, dass die Aenderungen zwischen beiden Zeiten immer in einem gleichen Sinne fortschreiten, so ist die Gleichung (94), welche a, b, c in demselben Sinne verändernde Werthe man auch a', b', c' geben mag, eine Näherung an die $\tau + t$ bestimmende; nämlich ihre Auflösung ergibt, statt dieser unbekannten Grösse, eine sich ihr mehr als τ nähernde. Man kann also, indem man von dem vorausgesetzten Werthe von τ ausgeht, eine Reihe von Zeiten τ_1, τ_2, ... finden, welche sich der gesuchten Zeit der Ränderberührung fortschreitend, und offenbar desto schneller nähert, je näher der Zeit proportional die Aenderungen nach und nach werden.

Wenn der vorausgesetzte Werth von τ ohngefähr die Zeit der Mitte der Finsterniss ist, so sind die Zeiten der Ränderberührungen nie so weit von ihm entfernt, dass die Annahme der Zeit proportionaler Aenderungen von $x - \xi$, $y - \eta$, $l - i\zeta$ zwischen τ und $\tau + t$ nicht näherungsweise wahr wäre. Diese Voraussetzung des Werthes von τ ist selbst hinreichend, eine sehr schnelle Convergenz zu ergeben.

Die Anwendung des Vorigen zur Bestimmung des Anfanges und Endes einer Finsterniss setzt die Kenntniss vorher berechneter Werthe von x, y, l, i, μ', a, b voraus, und zwar der Bemerkung im 17. § zufolge für vier in arithmetischer Progression fortgehende Zeiten, in deren Umfange die gesuchten Zeiten liegen. Dadurch sind sowohl diese Grössen selbst, also auch ihre Aenderungen gegeben.

[Als Beispiel die 4 letzten zur äusseren Berührung gehörigen Werthe der x, y, l, etc. § 4, nebst den entsprechenden, mit (100) bezeichneten, für eine unbestimmte Zeit $T + 3600^s . i$, wo T in der Mitte der 4 letzten Zeiten liegt.]

Man kann zwei Anwendungsarten der Auflösung der Gleichung (94) verfolgen. Die erste beruhet auf der Annahme der jeder der nach und nach bekannt werdenden Zeiten τ zugehörigen Werthe der Differentialquotienten von $x - \xi$, $y - \eta$, $l - i\zeta$, statt a', b', c', ergibt also jede folgende der Näherungen an die Zeit einer Ränderberührung, indem ihr die der vor-

hergehenden zugehörigen Werthe von a, b, c; a', b', c' zum Grunde gelegt werden. Die zweite geht, bei allen Näherungen, von Einem Werthe von τ und also den ihm zugehörigen Werthen von a, b, c aus, fordert aber, dass bei jeder folgenden die Differenzenquotienten der der vorhergehenden zugehörigen Werthe von a, b, c, von den τ zugehörigen an gerechnet, als a', b', c' angenommen werden.

Das erste Verfahren fordert, dass folgende Grössen für jede der Zeiten τ, von welchen man ausgeht um die nächste kennen zu lernen, berechnet werden:

a) die Werthe von x, y, l, welche man durch die Interpolationsformeln oder ihre Entwickelungen (100) erhält;

b) die Werthe von ξ, η, $i\zeta$, deren Ausdrücken (7) eine zur logarithmischen Rechnung geeignete Form gegeben werden kann;

c) die Werthe von $\frac{dx}{d\tau}$, $\frac{dy}{d\tau}$, $\frac{dl}{d\tau}$, welche aus der Differentiirung der Entwickelungen (100) hervorgehen, endlich

d) die Werthe von $\frac{d\xi}{d\tau}$, $\frac{d\eta}{d\tau}$, $\frac{di\zeta}{d\tau}$, wofür man die Formeln (§ 19):

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \varrho \cos\varphi' \cos(\mu' - a + \omega) \frac{d(\mu' - a)}{d\tau}$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \xi \sin d \frac{d(\mu' - a)}{dt} - \zeta \frac{dd}{d\tau}$$

$$\frac{di\zeta}{d\tau} = -i\xi \cos d \frac{d(\mu' - a)}{d\tau} + i\eta \frac{dd}{d\tau} + \zeta \frac{di}{d\tau}$$

anzuwenden hat.

Anfangs, wenn τ noch der Mitte der Finsterniss ohngefähr entsprechend angenommen wird, würde die Berücksichtigung des von der Veränderung von d abhängigen Theils des Differentialquotienten von η, sowie auch der Grösse $i\zeta$ und des Differentialquotienten von $l - i\zeta$, eine unnöthige Vermehrung der Rechnung sein, indem diese kleinen Grössen, vergleichungsweise mit den Fehlern der Annahme der Zeit proportionaler Veränderungen von $x - \xi$ und $y - \eta$, unbedeutend sind. Die erste Annäherung an die Zeiten der Ränderberührungen kann also durch wenig genau geführte Rechnung nach folgenden abgekürzten Formeln gefunden werden:

$$\left.\begin{aligned} m \sin M &= x - \xi; \qquad n \sin N = x' - \varrho \cos\varphi' \cos(\mu' - a + \omega) \frac{d(\mu' - a)}{d\tau} \\ m \cos M &= y - \eta; \qquad n \cos N = y' - \varrho \cos\varphi' \sin(\mu' - a + \omega) \frac{d(\mu' - a)}{d\tau} \sin d \\ \sin\psi &= \frac{m}{l} \sin(M - N) \\ t &= -\frac{m}{n} \cos(M - N) \mp \frac{l}{n} \cos\psi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (101)$$

worin x, y, μ', d der Zeit τ entsprechend anzunehmen sind und x' und y' die Coefficienten von t in den Ausdrücken (100) von x und y bedeuten. Diese leichte Rechnung wird die Zeiten der Ränderberührungen zwar nur bis auf einige Zeitminuten sicher angeben, allein wenn man sie nur kennen lernen will, um dadurch die Beobachtung der Finsterniss zu erleichtern, so wird vielleicht selbst ein Fehler von solcher Grösse nicht als ein bedeutender anzusehen und dann auch keine Veranlassung vorhanden sein, eine grössere Annäherung zu suchen. Der den Ort am Sonnenrande, wo die Ränderberührung zu erwarten ist, bestimmende Werth von p ist nach den Formeln (99) für den Anfang $= N + 180^0 - \psi$, für das Ende $= N + \psi$.

Soll die Bestimmung der Momente der Finsterniss bis zur vollen Uebereinstimmung mit den Elementen der Rechnung getrieben werden, so erlangt man im Allgemeinen zwar die schnellste Convergenz der dahin führenden aufeinanderfolgenden Näherungen, indem man a', b', c' für jede Anfangszeit einer neuen Näherung vollständig bestimmt; allein wenn man die kleinen Veränderungen von d und $l - i\zeta$ vernachlässigt, äussert der dadurch begangene Fehler der Annahme der relativen Bewegung des gegebenen Punktes der Erde und der Gestirne seinen Einfluss nur während der Zwischenzeit zwischen τ und dem wahren Momente der Ränderberührung, also während desto kürzerer Zeit und daher desto kleiner, je stärker die Annäherung von τ an dieses Moment schon ist. Die Convergenz der Annäherungen wird daher durch diese Vernachlässigungen nicht wesentlich vermindert. Kürzt man die Rechnung dadurch ab, so besteht sie in der wiederholten Anwendung der Formeln (101); mit dem einzigen Unterschiede dass in der zweiten und den folgenden Anwendungen statt des in der ersten zureichenden l, $l - i\zeta$ angewandt wird.

35.

[Bestimmung des Anfanges und des Endes der ⊙ Finsterniss für die Königsberger Sternwarte. In der ersten Annäherung $\tau = 0$ ($= T$ M. Z. des 1. Meridians); dafür gelten die von t unabhängigen Theile von (100); aus x, y, x', y', ξ, η, $\frac{d\xi}{d\tau}$, $\frac{d\eta}{d\tau}$

gehen M, m, N, n, und da l bekannt, ψ und die beiden Werthe von t hervor. — In der 2. Näherung nimmt man für τ die in der 1. gefundenen Werthe von t; in der 3. die in der 2. gefundenen.]

36.

Die zweite der beiden § 34 beschriebenen Anwendungsarten der Auflösung der Gleichung (94) unterscheidet sich dadurch von der verfolgten, dass sie nicht von jeder der Näherungen an die gesuchte Zeit: τ, $\tau_,$, τ_2,... zu der nächstfolgenden, sondern von der ersten derselben zu allen folgenden führt. Wenn die diesen Zeiten zugehörigen Werthe von $x-\xi$, $y-\eta$, $l-i\zeta$ durch $x-\xi$, $x_,-\xi_,$, $x_2-\xi_2$,... u. s. w. bezeichnet werden, so sind die Werthe von a', b', c', welche angewandt werden müssen um τ_2 zu erhalten:

$$\frac{x_,-x}{\tau_,-\tau}\ \frac{\xi_,-\xi}{\tau_,-\tau},\quad \frac{y_,-y}{\tau_,-\tau}\ \frac{\eta_,-\eta}{\tau_,-\tau},\quad \frac{l_,-l}{\tau_,-\tau}\ \frac{i\zeta_,-i\zeta}{\tau_,-\tau},$$

um τ_3 zu erhalten:

$$\frac{x_2-x}{\tau_2-\tau}\ \frac{\xi_2-\xi}{\tau_2-\tau},\quad \frac{y_2-y}{\tau_2-\tau}\ \frac{\eta_2-\eta}{\tau_2-\tau},\quad \frac{l_2-l}{\tau_2-\tau}\ \frac{i\zeta_2-i\zeta}{\tau_2-\tau},$$

u. s. w. Die Werthe von a, b, c bleiben die zu τ gehörigen.

Ich werde die Ausdrücke dieser Aenderungen hersetzen. Wenn die Entwickelungen von x, y, l nach den Potenzen der Zeit (100):

$$\alpha+\beta t+\gamma t^2+\delta t^3$$

sind, so sind die von diesen Grössen herrührenden Theile von a', b', c':

$$\beta+2\gamma\tau+3\delta\tau\tau+(\gamma+3\delta\tau)(\tau_,-\tau)+\delta(\tau_,-\tau)^2 \quad\ldots(102)$$

in welchem Ausdrucke τ_2, τ_3,.... statt τ, geschrieben werden müssen, wenn er von τ zu τ_3, τ_4,.... führen soll. Die von ξ, η, $i\zeta$ herrührenden Theile sind:

$$\varrho\cos\varphi'\,\frac{\sin(\mu'_,-a,+\omega)-\sin(\mu'-a+\omega)}{\tau_,-\tau}$$

$$\varrho\sin\varphi'\,\frac{\cos d,-\cos d}{\tau_,-\tau}$$

$$-\varrho\cos\varphi'\,\frac{\sin d,\cos(\mu'_,-a,+\omega)-\sin d\cos(\mu'-a+\omega)}{\tau_,-\tau}$$

$$\varrho\sin\varphi'\,\frac{i,\sin d,-i\sin d}{\tau_,-\tau}$$

$$+\varrho\cos\varphi'\,\frac{i,\cos d,\cos(\mu'_,-a,+\omega)-i\cos d\cos(\mu'-a+\omega}{\tau_,-\tau}$$

Schreibt man darin $d+u$ und $\mu'-a+v$ statt d, und $\mu'_,-a_,$ und um abzukürzen U und V statt

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}u}{\tau_,-\tau},\qquad \frac{2\sin\frac{1}{2}v}{\tau_,-\tau},$$

vernachlässigt man auch die immer unbedeutende Veränderung von i, so kann man sie folgendermassen ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned}
&\varrho\cos\varphi'\cos(\mu'-a+\omega+\tfrac{1}{2}v)V\\
&\varrho\cos\varphi'\sin(\mu'-a+\omega+\tfrac{1}{2}v)\sin(d+\tfrac{1}{2}u)\cos\tfrac{1}{2}u\,.V\\
&\qquad\qquad-\varrho[\sin\varphi'\sin(d+\tfrac{1}{2}u)+\cos\varphi'\cos(d+\tfrac{1}{2}u)\cos(\mu'-a+\omega+\tfrac{1}{2}v)\cos\tfrac{1}{2}v]\,U\\
&-i\varrho\cos\varphi'\sin(\mu'-a+\omega+\tfrac{1}{2}v)\cos(d+\tfrac{1}{2}u)\cos\tfrac{1}{2}u\,.V\\
&\qquad\qquad+i\varrho[\sin\varphi'\cos(d+\tfrac{1}{2}u)-\cos\varphi'\sin(d+\tfrac{1}{2}u)\cos(\mu'-a+\omega+\tfrac{1}{2}v)\cos\tfrac{1}{2}v]\,U
\end{aligned}\right\}\ldots(103)$$

oder, nach unbedeutenden Vernachlässigungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\varrho\cos\varphi'\cos(\mu'-a+\omega+\tfrac{1}{2}v)V\\
&\varrho\cos\varphi'\sin(\mu'-a+\omega+\tfrac{1}{2}v)\sin(d+\tfrac{1}{2}u)V-\varrho[\sin\varphi'\sin d+\cos\varphi'\cos d\cos(\mu'-a+\omega+\tfrac{1}{2}v)]\,U\\
&-i\varrho\cos\varphi'\sin(\mu'-a+\omega+\tfrac{1}{2}v)\cos(d+\tfrac{1}{2}u)V
\end{aligned}\right\}\ldots(103^*)$$

Sowohl v als u können der Zeit proportional angenommen werden; nämlich, wenn die stündlichen Veränderungen von $\mu'-a$ und d durch $\delta(\mu'-a)$ und δd bezeichnet werden, $v=(\tau_,-\tau)\,\delta(\mu_,-a)$, $u=(\tau_,-\tau)\,\delta d$. Nimmt man $\delta(\mu'-a)$ und δd in Theilen des Radius ausgedrückt an, so wird

$$V=\delta(\mu'-a)-\tfrac{1}{24}\delta(\mu'-a)^3(\tau_,-\tau)^2+\tfrac{1}{1920}\delta(\mu'-a)^5(\tau_,-\tau)^4-\text{etc.}\ldots..$$

U aber einfach $=\delta d$, indem nur das erste Glied des ähnlichen Ausdruckes eine merkliche Grösse erlangen kann. Den Logarithmen von V kann man in eine, der Annahme $\delta(\mu'-a)=15^0$ entsprechende und auch seine Veränderung für jede Secunde von $\delta(\mu'-a)-15^0$ angebende Tafel bringen, deren Argument $\tau_,-\tau$ ist.

Diese Methode fordert die Berechnung von $\log u$ und M nur für die Zeit τ, nicht, wie die vorige, ihre Wiederholung für die Zeiten $\tau_,$, τ_2.... Dagegen setzt sie die Berechnung von a', b', c' nach den Ausdrücken (102) und (103*) voraus, deren letztere nicht ganz so einfach sind als die Ausdrücke der Differentialquotienten. In Fällen, in welchen sie so schnell convergirt, dass ihre Anwendung nicht öfter wiederholt werden darf, als die der vorigen Methode, ist sie im Vortheile vor dieser; allein je weiter die Zeit τ von der gesuchten Zeit der Ränderberührung entfernt ist, desto langsamer wird ihre Convergenz. Will man z. B. eine Sonnenfinsterniss bis auf das Hundertel der Secunde richtig berechnen, indem man alle aufeinanderfolgende Näher-

ungen von einem Werthe von τ anfangen lässt, welcher etwa der Mitte der Finsterniss entspricht und von den gesuchten Momenten bis auf anderthalb Stunden oder mehr entfernt sein kann, so wird der Verlust an Convergenz der aufeinanderfolgenden Näherungen, den Vortheil in der Ausführung jeder von ihnen, welchen die gegenwärtige Methode vor der vorigen voraus hat, wenigstens aufwiegen. Will man dagegen die Berechnung des Anfanges und des Endes von den beiden durch die erste Annäherung bekannt gewordenen Werthen von τ anfangen lassen, so wird dieser Vortheil mit hinreichend schneller Convergenz zusammentreffen. Die Annäherung II wird dann nach der vorigen Methode gesucht, also genau so wie sie § 35, in dem zum Beispiele gewählten Falle, durch Rechnung erlangt worden ist; die darauf folgende (III) lässt aber m und M ungeändert, indem ihr dagegen Werthe von a', b', c', so wie die Formeln (102) und (103*) sie ergeben, zum Grunde gelegt werden. — Auf diese Art wird man am leichtesten zur Kenntniss der beiden Zeiten gelangen, welche den Elementen der Rechnung zufolge den Ränderberührungen zugehören. Will man diese Zeiten nur innerhalb einiger Secunden sicher kennen lernen, so wird man sich mit einer Anwendung der gegenwärtigen Methode auf jede von ihnen begnügen, indem man τ so wie es der ersten Annäherung zum Grunde gelegt worden ist, und für τ, die beiden aus dieser hervorgegangenen Zeiten annimmt.

37.

Die gegenwärtige Methode empfiehlt sich vorzüglich in dem Falle der Bedeckungen der Fixsterne durch den Mond. In diesem Falle ist l beständig, nämlich der in Theilen des Aequatorealhalbmessers ausgedrückte Halbmesser des Mondes; i verschwindet und a, d sind nicht von der Geradenaufsteigung und Abweichung des Fixsterns verschieden, also während der Dauer der Finsterniss nicht merklich veränderlich. Hierdurch ziehen sich die beiden ersten der Ausdrücke (103) in folgende zusammen:

$$\varrho \cos\varphi' \cos(\mu' - a + \omega + \tfrac{1}{2}v) V$$
$$\varrho \cos\varphi' \sin(\mu' - a + \omega + \tfrac{1}{2}v) \sin d \,.\, V$$

und der dritte verschwindet; v bedeutet nach und nach die in Kreistheilen ausgedrückte, $\tau, -\tau$, $\tau_2 - \tau, \ldots$ entsprechende Sternenzeit und $\log V$ kann in eine für alle Sternbedeckungen geltende Tafel gebracht werden, welche ich hier folgen lasse*). Die Formeln (101) sind nun vollständig und daher nicht allein bei der ersten Annäherung, sondern auch bei allen folgenden anzuwenden. Endlich wird die geringere Dauer der Sternbedeckungen die Ursache, dass von einem etwa der Mitte der Erscheinung entsprechenden Werthe von τ ausgehende aufeinanderfolgende Näherungen schnell genug convergiren, um die alleinige Anwendung dieser Methode zu empfehlen, selbst wenn die Erlangung vollständiger Genauigkeit das Ziel der Rechnung ist.

Wenn die astronomischen Ephemeriden, auch in Beziehung auf Sonnenfinsternisse und Sternbedeckungen, das Bedürfniss der Beobachter befriedigen sollen, so müssen sie für eine der Mitte der Erscheinung sich nähernde Zeit τ die Werthe der Grössen

$$x,\ y,\ l;\quad x',\ y';\quad \mu' - a,\ d$$

angeben. Wenn die Zeiten des Anfanges und Endes, sowie auch die Oerter am Sonnen- oder Mondrande, wo beide erfolgen, in soweit bestimmt werden sollen, dass ein Beobachter an einem durch φ und ω gegebenen Orte näherungsweise erfährt, wenn und wo er beide Erscheinungen zu erwarten hat, so muss er

$$\xi,\ \eta,\ \frac{d\xi}{d\tau},\ \frac{d\eta}{d\tau}$$

berechnen und die Formeln (101) anwenden. Die daraus hervorgehenden Zeiten des ersten Meridians des Anfanges und Endes müssen durch Hinzufügung des Mittagsunterschiedes auf den Meridian des gegebenen Ortes bezogen werden. — Sollte eine stärkere Näherung wünschenswerth sein, so wird man sie leicht genug durch die zweite Methode erlangen.

Vierter Abschnitt.

Anwendung der Beobachtungen der Finsternisse.

38.

Die Beobachtungen der Finsternisse gewähren der Astronomie so wichtige Resultate, dass die Entwickelung der Verbindungen zwischen beiden die Aufgabe häufiger Bemühungen gewesen ist, welche jedoch die Materie noch nicht so vollständig erschöpfen, dass der gegenwärtige Abschnitt als überflüssig angesehen werden dürfte. Sie sind ein höchst schätzbares Mittel zur Bestimmung des Mittagsunterschiedes der Oerter wo sie gemacht werden; ein Mittel, welches desto häufigere Anwendung findet, je weniger Apparat und vorbereitende Einrichtungen diese fordert. Sie bestimmen in geeigneten Fällen den relativen Ort des verfinsternden Gestirns mit einer Sicherheit, welche anderweitig schwer

*) [Diese Tafel findet sich in Abh. 26, Bd. I p. 216; den Grössen $\tau, -\tau$, V, $\frac{1}{2}v$ entsprechen dort t, λ und $\varkappa$.]

zu erreichen ist. Sie haben endlich zur Bestimmung der Grösse der Sonnenparallaxe geführt. — Diese letztere Anwendung der Beobachtungen der Finsternisse werde ich hier nicht besonders verfolgen; allein welche Anwendung derselben auch beabsichtigt werden mag, so muss ihre Theorie immer von der Gleichung ausgehen, welche die Verbindung der Elemente einer Finsterniss und der zur Bestimmung eines Punktes auf der Erde erforderlichen ω, φ mit den an diesem Punkte stattfindenden Zeiten der Ränderberührung ausdrückt; also von derselben Gleichung:

$$(l - i\zeta)^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \quad \ldots . \quad (104)$$

welche ich zur Grundlage aller in dieser Abhandlung durchgeführten Untersuchungen gemacht habe.

Ich werde aus dieser Gleichung den Ausdruck des Mittagsunterschiedes (ω) eines Ortes ableiten, wo die Zeit einer Ränderberührung durch Beobachtung bekannt geworden ist. Gegeben ist also diese Zeit, und zwar soll sie sowohl in mittlerer als in Sternenzeit ausgedrückt als bekannt angenommen werden; gegeben ist ferner die Polhöhe (φ) des Beobachtungsortes. Sämmtliche Elemente der Finsterniss x, y, l, i, a, d nehme ich, für Zeiten des ersten Meridians, welche von Stunde zu Stunde mittlerer Zeit fortschreiten, in derselben Art aus den Angaben der Tafeln oder Ephemeriden berechnet an, in welcher der 4. § sie für die Sonnenfinsterniss des 15. Mai 1836 enthält; auch werde ich die Werthe der vier letzten dieser Elemente, welche in dem Falle der Fixsternbedeckungen unveränderlich sind, in allen anderen Fällen aber nur sehr langsame Aenderungen erfahren, allgemein als für die Beobachtungszeit bekannt voraussetzen. Um aber die Fehler der Angaben, welche der Berechnung von x, y, l zum Grunde liegen, nicht zu vernachlässigen, werde ich diesen Grössen unbestimmte Aenderungen Δx, Δy, Δl hinzusetzen und ihren Einfluss auf den Ausdruck von ω untersuchen. Aehnliche, sich auf i, a, d beziehende unbestimmte Aenderungen werde ich nicht in die Rechnung aufnehmen, weil ihr (immer unbedeutender) Einfluss nicht durch die Beobachtungen einer Finsterniss bestimmt werden kann. Aber den Einfluss einer kleinen unbestimmten Aenderung Δee des Quadrats der in den Werthen von ξ, η, ζ enthaltenen Excentricität der Erdmeridiane werde ich berücksichtigen.

Wenn die mittlere Zeit der Beobachtung durch t, die ihr gleichgeltende Zeit des ersten Meridians also durch $t - \omega$ bezeichnet wird, und τ eine willkürliche, sich dieser jedoch insofern nähernde Zeit desselben Meridians bedeutet, dass x und y während der Zwischenzeit $t - \omega - \tau$ Aenderungen erfahren, welche ihr näherungsweise proportional angenommen werden können, so können die der Beobachtungszeit entsprechenden Werthe dieser Grössen in der Form:

$$x_0 + x'(t - \omega - \tau) + \Delta x, \quad y_0 + y'(t - \omega - \tau) + \Delta y$$

dargestellt werden, in welcher x_0, y_0 der Zeit τ zugehören und die von der Zwischenzeit abhängigen, also unbekannten x', y' der Voraussetzung gemäss, näherungsweise bekannt sind.

Diesen Annahmen und Erklärungen gemäss nimmt die Gleichung (104) die Form an, in welcher sie zur unmittelbaren Bestimmung von ω geeignet ist. Sie wird nämlich:

$$\left\{l - i\zeta + \Delta l - \frac{id\zeta}{d.ee}\Delta ee\right\}^2 = \left\{x_0 - \xi + x'(t - \omega - \tau) + \Delta x - \frac{d\xi}{d.ee}\Delta ee\right\}^2 + \left\{y_0 - \eta + y'(t - \omega - \tau) + \Delta y - \frac{d\eta}{d.ee}\Delta ee\right\}^2$$

allein man kann das Product $i\Delta ee$, welches in dem Falle der Fixsternbedeckungen verschwindet und in allen anderen Fällen unbedeutend wird, ohne dadurch einen in Betracht kommenden Fehler zu begehen, allgemein vernachlässigen, also statt dieser Gleichung:

$$(l - i\zeta + \Delta l)^2 = \left\{x_0 - \xi + x'(t - \omega - \tau) + \Delta x - \frac{d\xi}{d.ee}\Delta ee\right\}^2 + \left\{y_0 - \eta + y'(t - \omega - \tau) + \Delta y - \frac{d\eta}{d.ee}\Delta ee\right\}^2 \ldots (105)$$

anwenden. Ihre Auflösung führt von den vorausgesetzten, näherungsweise bekannten Werthen von x' und y', zu einer ersten Bestimmung von $t - \omega - \tau$; diese ergibt verbesserte Werthe von x' und y' und dadurch eine zweite Bestimmung u. s. w. Die Convergenz dieser aufeinanderfolgenden Näherungen ist aber so gross, dass man bei gehöriger Anordnung ihrer Anwendung nie über die erste hinauszugehen braucht.

Bestimmt man m, M, n, N nach den Formeln:

$$m \sin M = x_0 - \xi; \qquad n \sin N = x'$$
$$m \cos M = y_0 - \eta; \qquad n \cos N = y'$$

so kann man die Gleichung

$$(l - i\zeta + \Delta l)^2 = \left\{n(t - \omega - \tau) + m\cos(M - N) + \Delta x \sin N + \Delta y \cos N - \frac{d(\xi \sin N + \eta \cos N)}{d.ee}\Delta ee\right\}^2 + \left\{m \sin(M - N) + \Delta x \cos N + \Delta y \sin N - \frac{d(\xi \cos N - \eta \sin N)}{d.ee}\Delta ee\right\}^2$$

schreiben; oder wenn man, um abzukürzen

$$\lambda = \Delta x \sin N + \Delta y \cos N - \frac{d(\xi \sin N + \eta \cos N)}{d.ee} \Delta ee$$

$$\lambda' = -\Delta x \cos N + \Delta y \sin N + \frac{d(\xi \cos N - \eta \sin N)}{d.ee} \Delta ee$$

setzt:

$$(l - i\zeta + \Delta l)^2 = \{n(t - \omega - \tau) + \lambda + m\cos(M - N)\}^2 + \{m \sin(M - N) - \lambda'\}^2 \ldots (106)$$

Wenn Δl und λ' vergleichungsweise mit $l - i\zeta$ sehr kleine Grössen sind und man ψ durch

$$\sin\psi = \frac{m}{L}\sin(M - N)$$

bestimmt, wo L, um abzukürzen, für $l - i\zeta$ geschrieben ist, so folgt hieraus:

$$t - \omega - \tau = \frac{-m}{n}\cos(M - N) - \frac{L}{n}\cos\psi - \frac{\Delta l}{n}\sec\psi - \frac{\lambda'}{n}\operatorname{tg}\psi - \frac{\lambda}{n}$$

oder

$$\omega = t - \tau + \frac{m}{n}\cos(M - N) + \frac{L}{n}\cos\psi + \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda'}{n}\operatorname{tg}\psi + \frac{\Delta l}{n}\sec\psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (107)$$

wofür auch, mit Ausnahme eines sehr kleinen, oder verschwindenden Werthes von $\sin\psi$,

$$\omega = t - \tau + \frac{m}{n}\frac{\sin(M - N + \psi)}{\sin\psi} + \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda'}{n}\operatorname{tg}\psi + \frac{\Delta l}{n}\sec\psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (107^*)$$

angewandt werden kann. Diese Formeln bestimmen ω in Theilen der Stunde ausgedrückt; um seinen auf gewöhnliche Art ausgedrückten Werth zu erhalten, muss man auch t und τ so ausdrücken und die übrigen Glieder in 3600 multipliciren.

39.

Diese Ausdrücke von ω sind zweideutig, da ψ ebensowohl ein spitzer als ein stumpfer Winkel sein kann, indem er nur durch seinen Sinus bestimmt wird. Es muss daher untersucht werden, wie über diese Zweideutigkeit in jedem Falle zu entscheiden ist. — Je nachdem die Ränderberührung dem Anfange oder dem Ende der Finsterniss zugehört, muss die Summe der beiden Quadrate auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens weniger dem Quadrate auf der linken (105) in dem ihr folgenden Momente negativ oder positiv, oder der in Beziehung auf die Zeit genommene Differentialquotient dieses Unterschiedes muss negativ oder positiv sein. Da aber der Differentialquotient des letzten Quadrats, welcher in dem Falle der Fixsternbedeckungen verschwindet, in allen anderen Fällen sehr klein ist, er also das Zeichen des Differentialquotienten des ganzen Ausdruckes nur in Fällen ändern kann, in welchen auch der Differentialquotient der Summe der beiden ersteren Quadrate sehr klein ist, dann aber die aufgenommenen kleinen unbestimmten Grössen sein Zeichen willkürlich machen, auch diese Fälle zur Bestimmung von ω unbrauchbar sind, so kann man eine kleine Vernachlässigung als unbedeutend betrachten und als Unterscheidungszeichen des Anfanges oder Endes annehmen, dass der Differentialquotient von

$$\{x_0 - \xi + x'(t - \omega - \tau)\}^2 + \{y_0 - \eta + y'(t - \omega - \tau)\}^2$$

negativ oder positiv ist. Die Hälfte dieses Differentialquotienten hat den Ausdruck:

$$\left\{x_0 - \xi + x'(t - \omega - \tau)\right\}\left(x' - \frac{d\xi}{dt}\right) + \left\{y_0 - \eta + y'(t - \omega - \tau)\right\}\left(y' - \frac{d\eta}{dt}\right),$$

welcher, durch Substitution des Ausdruckes (107) von $t - \omega - \tau$, in

$$L\left[\sin(\psi - N)\left(x' - \frac{d\xi}{dt}\right) - \cos(\psi - N)\left(y' - \frac{d\eta}{dt}\right)\right]$$

übergeht. Schreibt man darin $n\sin N$ und $n\cos N$ statt x' und y', so wird er ferner:

$$-L\left[\left(n - \frac{d\xi}{dt}\sin N - \frac{d\eta}{dt}\cos N\right)\cos\psi + \left(\frac{d\xi}{dt}\cos N - \frac{d\eta}{dt}\sin N\right)\sin\psi\right]$$

und bestimmt man n', N' durch die Formeln:

$$n'\cos N' = n - \frac{d\xi}{dt}\sin N - \frac{d\eta}{dt}\cos N$$

$$n'\sin N' = \frac{d\xi}{dt}\cos N - \frac{d\eta}{dt}\sin N$$

in welchen n' positiv genommen wird, so wird er endlich:

$$-Ln'\cos(\psi - N').$$

Hieraus geht hervor, dass, wenn $L = l - i\zeta$ positiv, also die Ränderberührung eine äussere, oder eine einer ringförmigen Finsterniss zugehörige innere ist, ψ für den Anfang so genommen werden muss, dass $\cos(\psi - N')$ positiv, für das Ende so, dass derselbe Cosinus negativ wird; oder dass ψ für den Anfang zwischen $N' - 90^0$ und $N' + 90^0$, für das Ende zwischen $N' + 90^0$ und $N' + 270^0$ genommen werden muss. In dem Falle eines negativen Werthes von $l - i\zeta$, welcher nur bei gänzlichen Finsternissen vorkommt, muss ψ für den Anfang zwischen den beiden letzten, für das Ende zwischen den beiden ersten Grenzen genommen werden.

Die Formeln, aus welchen N' hervorgeht, können

noch weiter entwickelt werden, indem statt der Differentialquotienten von ξ und η ihre Ausdrücke:

$$\frac{d\xi}{dt} = \varrho \cos\varphi' \cos(\mu - a) \frac{d(\mu - a)}{dt}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \varrho \cos\varphi' \sin(\mu - a) \frac{d(\mu - a)}{dt} \sin d - \xi \frac{dd}{dt}$$

gesetzt werden. Dadurch erhält man:

$$\left.\begin{aligned} n' \cos N' &= n - \varrho \cos\varphi' [\cos(\mu - a) \sin N + \sin(\mu - a) \cos N \sin d] \frac{d(\mu - a)}{dt} + \xi \cos N \frac{dd}{dt} \\ n' \sin N' &= \varrho \cos\varphi' [\cos(\mu - a) \cos N - \sin(\mu - a) \sin N \sin d] \frac{d(\mu - a)}{dt} + \xi \sin N \frac{dd}{dt} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (108)$$

worin jedoch die von $\frac{dd}{dt}$ abhängigen Glieder nur in seltenen und zur Bestimmung von ω unbrauchbaren Fällen in Betracht kommen können. Gewöhnlich wird man keine Veranlassung haben, die Entscheidung über die Zweideutigkeit der Formeln (107) auf diese Art zu suchen, indem man ω nahe genug kennen wird, um über die zu treffende Wahl nicht zweifelhaft zu bleiben.

40.

Ich muss noch Einiges von den Voraussetzungen sagen, welche im 38. § gemacht worden sind. Als gegeben angenommen sind sowohl die mittlere Zeit, als auch die Sternenzeit der Ränderberührung und die ihr zugehörigen Werthe von l, i, a, d, während wenigstens einer der beiden Ausdrücke der Zeit und diese Werthe nicht ohne die Kenntniss des Mittagsunterschiedes gefunden werden können, diese Kenntniss also vorausgesetzt und daher die § 38 gegebene Bestimmung des Mittagsunterschiedes keine directe ist. Zwar ist dieses kein erhebliches Hinderniss der Anwendung, indem der Mittagsunterschied nicht leicht so weit zweifelhaft sein wird, dass seine Kenntniss nicht hinreichte, die der Beobachtungszeit zugehörigen Werthe der vorausgesetzten, sich langsam verändernden Grössen mit der erforderlichen Genauigkeit zu ergeben; allein in Beziehung auf die Theorie selbst wird es doch einiges Interesse haben, zu zeigen, wie sie vervollständigt werden muss, damit sie den Mittagsunterschied direct bestimme.

Durch unmittelbare Beobachtung kann man entweder die Sternenzeit oder die wahre Sonnenzeit bestimmen, die mittlere Zeit kann man aber nur aus der einen oder der anderen, unter der Voraussetzung der Kenntniss des Mittagsunterschiedes berechnen. Ich werde zuerst annehmen, dass die Sternenzeit bestimmt sei. Damit ist der in ξ, η, ζ enthaltene Werth von μ gegeben. Die Werthe von l, i, a, d für die Zeit der Beobachtung sind:

$$l_0 + l'(t - \omega - \tau), \quad i_0 + i'(t - \omega - \tau),$$
$$a_0 + a'(t - \omega - \tau), \quad d_0 + d'(t - \omega - \tau),$$

in welchen Ausdrücken l_0, i_0, a_0, d_0 der Zeit τ zugehören und die ihnen hinzugesetzten Grössen ihre Aenderungen zwischen dieser und der Beobachtungszeit bedeuten. Wenn man unter ξ, η, ζ die Werthe dieser Grössen versteht, welche die Annahme von a, d für die Zeit τ ergibt, wird die vollständige Gleichung, durch deren Auflösung $t - \omega - \tau$ bestimmt wird:

$$\left.\begin{aligned} &\left[l_0 - i_0\xi + \left(l' - i'\xi + i\frac{d\xi}{d\mu}a' - i\frac{d\xi}{dd}d'\right)(t - \omega - \tau) + \Delta l\right]^2 \\ &= \left[x_0 - \xi + \left(x' + \frac{d\xi}{d\mu}a'\right)(t - \omega - \tau) + \Delta x - \frac{d\xi}{d.ee}\Delta ee\right]^2 \\ &+ \left[y_0 - \eta + \left(y' + \frac{d\eta}{d\mu}a' - \frac{d\eta}{dd}d'\right)(t - \omega - \tau) + \Delta y - \frac{d\eta}{d.ee}\Delta ee\right]^2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (109)$$

und $t - \omega - \tau$ wird daraus nach den § 33 entwickelten Formeln gefunden; allein die im ersten Gliede enthaltene, von der Zeit abhängige Grösse ist immer so klein, dass kein Fall vorkommen wird, in welchem sie nicht als hinreichend genau bekannt angenommen werden könnte, wodurch die Auflösung auf die einfachere Formel § 38 zurückkommt. Indem die Sternenzeit des ersten Meridians $= \mu - \omega$ ist, ist sie von der mittleren Zeit τ, wenn die dieser entsprechende Sternenzeit durch μ_0 bezeichnet wird, $\mu - \omega - \mu_0$ entfernt, oder die unbekannte Grösse der Gleichung ist:

$$t - \omega - \tau = \frac{\mu - \omega - \mu_0}{h}$$

wo, vorausgesetzt, dass $\mu - \omega - \mu_0$ in Secunden ausgedrückt ist, h die Anzahl Sternensecunden bedeutet, welche eine mittlere Stunde enthält, als $h = 3609{}^{s}85647$. Wenn die Auflösung der Gleichung $t - \omega - \tau = U$ ergibt, wird also

$$\omega = \mu - \mu_0 - h.U$$

der gesuchte, von den gemachten Voraussetzungen gänzlich befreiete Ausdruck des Mittagsunterschiedes. — In dem Falle der Fixsternbedeckungen verschwinden i, l',

i', a', d'; weshalb, unter der Voraussetzung ihrer Beobachtung nach Sternenzeit, die Formeln (107) ω direct bestimmen, falls darin $\mu - \mu_0$ statt $t - \tau$ gesetzt, i weggelassen, und ihre auf $\mu - \mu_0$ folgenden Glieder in h multiplicirt werden.

Wenn die beobachtete Zeit der Ränderberührung wahre Sonnenzeit ist und durch t' bezeichnet wird, sowie die Geradeaufsteigung der Sonne zur Zeit τ durch α_0 und zur Beobachtungszeit durch $\alpha_0 + \alpha'(t - \omega - \tau)$, so ist

$$\mu = t' + \alpha_0 + \alpha'(t - \omega - \tau)$$

und

$$\mu - a = t' + \alpha_0 - a_0 + (\alpha' - a')(t - \omega - \tau)$$

Man erhält daher die dieser Annahme angemessene vollständige Gleichung, indem man in der vorigen (109) $a' - \alpha'$ statt a' schreibt, unter ξ, η, ζ aber die Werthe dieser Grössen versteht, welche $\mu = t' + \alpha_0$, sowie den zu τ gehörigen Werthen von a, d entsprechen. Indem die wahre Zeit des ersten Meridians $= t' - \omega$ ist, ist sie von der mittleren Zeit τ, wenn die dieser entsprechende wahre Zeit durch τ' bezeichnet wird, $t' - \omega - \tau'$ entfernt, oder die unbekannte Grösse der Gleichung ist:

$$t - \omega - \tau = \frac{t' - \omega - \tau'}{h}$$

wo, vorausgesetzt dass $t' - \omega - \tau'$ in Secunden ausgedrückt ist, h jetzt die Anzahl wahrer Secunden bedeutet, welche eine mittlere Stunde enthält. Man hat also:

$$\omega = t' - \tau' - h.U.$$

In dem Falle der Sonnenfinsternisse sind α' und a' kaum von einander verschieden, wodurch die a' enthaltenden Theile der Gleichung (109) unter der gegenwärtigen Voraussetzung unerheblich werden. In dem Falle der Fixsternbedeckungen sind die Formeln (107) vollständig, falls

$$n \sin N = x' - \frac{d\xi}{d\mu}\alpha'$$

$$n \cos N = y' - \frac{d\eta}{d\mu}\alpha'$$

angenommen, ihre auf $t - \tau$ folgenden Glieder in h multiplicirt, i weggelassen und $t' - \tau'$ statt $t - \tau$ geschrieben werden.

Wenn auch wohl nie Veranlassung vorhanden sein wird, die in diesem § gegebene Vervollständigung der Gleichung (105) in der Anwendung zu berücksichtigen, so wird doch die gemachte Bemerkung, dass es unnöthig ist, die angegebene wahre Zeit oder Sternenzeit einer Beobachtung, vor ihrer Berechnung, in mittlere Zeit zu verwandeln, dem Rechner diese — freilich nicht sehr erhebliche — Mühe ersparen. Wenn eine Ephemeride die Oerter der Gestirne für wahre Zeiten angibt, so wird die Berechnung der Werthe von x, y, l u. s. w. für Zeiten, welche eine Stunde wahrer Zeit von einander entfernt sind, leichter als für mittlere Zeiten; dass die Beobachtungen der Finsterniss, deren Elemente diese Werthe sind, deshalb nicht von einer anderen Art der Zeitangabe auf diese reducirt werden dürfen, geht gleichfalls aus der gemachten Bemerkung hervor.

41.

Obgleich x' und y' während der Dauer einer Finsterniss sich so wenig ändern, dass die Formeln (107) sehr nahe an die Wahrheit führen, selbst wenn $t - \omega - \tau$ einige Stunden beträgt und statt x' und y' die Werthe der Differentialquotienten von x und y zur Zeit τ angenommen werden; obgleich also eine sehr schnelle Convergenz wiederholter Anwendungen dieser Formeln erlangt wird, wenn ihre erste Anwendung auch von einem so weit von der Beobachtungszeit entfernten Werthe von τ ausgeht, die zweite aber für x' und y' die Differenzenquotienten von x und y zwischen τ und dem durch die erste ergebenen Werthe von $t - \omega$ annimmt u. s. w., so ist es doch vortheilhaft, die Rechnung so anzuordnen, dass $t - \omega - \tau$ nicht sehr gross wird. Je kleiner diese Zwischenzeit ist, desto genauer kann sie nämlich durch logarithmische Rechnung gefunden werden; auch vermehrt diese Kleinheit die Convergenz, allein diese wird immer gross genug sein, um von der näherungsweisen Kenntniss des Werthes von $t - \omega - \tau$, welche in jedem Falle vorhanden sein wird, durch eine Rechnung der Wahrheit so stark zu nähern, dass die Veranlassung einer zweiten nicht vorhanden ist.

Gewöhnlich wird man mehrere Beobachtungen einer Finsterniss, sowohl ihres Anfanges und Endes, als an verschiedenen Orten gemachte, zu berechnen haben und dadurch gezwungen werden, falls man allen eine Annahme von τ zum Grunde legen will, diese von einigen der Beobachtungszeiten weiter zu entfernen. Will man dagegen τ so nahe als möglich an jede Beobachtungszeit verlegen, so muss man ihm für jede Beobachtung einen anderen Werth geben und zwar den Werth $t - \omega$, indem man ω so annimmt, wie es vor der Beobachtung bekannt geworden sein mag. Ich werde beide Verfahrungsarten hier durchgehen.

I. Will man der Berechnung aller Beobachtungen einen Werth von τ zum Grunde legen, so wird man dasjenige der von Stunde zu Stunde fortschreitenden Zeitmomente, für welche man die Elemente der Finsterniss berechnet hat, welches der Mitte aller Beobachtungs-

zeiten am nächsten kommt, als τ annehmen, oder, wenn diese Elemente erst nach dem Bekanntwerden der Beobachtungen aufgesucht werden, wird man die Zeiten, für welche man sie berechnet, von ohngefähr der Mitte der Beobachtungszeiten an, vor- und rückwärts zählen. Berechnet man dann $\log n$ und N von Stunde zu Stunde nach den Formeln § 30:

für $\tau-3^h$	$n \sin N = \frac{1}{3}(x_0 - x_{-3})$;	$n \cos N = \frac{1}{3}(y_0 - y_{-3})$
„ $\tau-2$	$\frac{1}{2}(x_0 - x_{-2})$	$\frac{1}{2}(y_0 - y_{-2})$
„ $\tau-1$	$x_0 - x_{-1}$	$y_0 - y_{-1}$
„ τ	$b - \frac{1}{6}d$	$b - \frac{1}{6}d$
„ $\tau+1$	$x_1 - x_0$	$y_1 - y_0$
	u. s. w.	

so kann man daraus durch Interpolation für jede Zeit $t - \omega$ die Werthe dieser Grössen bestimmen, welche die Formeln (107) voraussetzen. Jede Beobachtung fordert dann

1) die Aufsuchung von a, d, l, $\log i$, $\log n$, N für die Zeit $t - \omega$, worin ω der Wahrheit so nahe angenommen wird, als man es vor der Beobachtung kennt (für Fixsternbedeckungen sind a, d, l beständig und i verschwindet);
2) die Berechnung von ξ, η, ζ und damit $\log m$ und M (für Fixsternbedeckungen wird ζ nicht gebraucht);
3) die Berechnung einer der beiden Formeln (107).

Eine zweite Annäherung an den Werth von ω würde auf den aus der ersten hervorgegangenen gegründet werden; allein sie wird nie nöthig sein, wenn der dieser zum Grunde gelegte bis auf einige Zeitminuten richtig ist. Im Falle der Fixsternbedeckungen würde sie übrigens nur in dem 3. Theile der Rechnung eine Aenderung hervorbringen.

Die ganze Dauer einer Sonnenfinsterniss für die Erde kann über 6 Stunden, die einer Fixsternbedeckung fast 5 Stunden betragen; wäre die eine oder die andere in der ganzen Ausdehnung des ihre Sichtbarkeit begrenzenden Raumes auf der Erde beobachtet, so würden Werthe von $t - \omega - \tau$ bis auf 2 bis 3 Stunden steigen können, und man würde wohl nicht bequem finden, so grosse Werthe logarithmisch zu berechnen. In diesem Falle würde man vorziehen zwei Werthe von τ, den einen den früheren, den anderen den späteren Beobachtungen zum Grunde zu legen und also $\log n$ und N von beiden ausgehend aufzusuchen. Man könnte auch, wenn man der Kleinheit des aus der Berechnung der Formeln (107) hervorgehenden $t - \omega - \tau$ noch grösseres Gewicht beilegen wollte, jede der Zeiten, für welche man die Elemente der Finsterniss berechnet hat, für die ihr nächsten Beobachtungen als τ annehmen.

II. Will man der Berechnung jeder Beobachtung einen ihr möglichst nahen Werth von τ, also $\tau = t - \omega$ zum Grunde legen, so hat man die ihm zugehörigen Werthe von x_0 und y_0 durch Interpolation der gegebenen Reihe der Elemente zu suchen, $\log n$ und N aber so anzunehmen, dass $n \sin N$ und $n \cos N$ die Differentialquotienten von x und y zur Zeit τ werden. Den im 17. § für den Fall II gegebenen Formeln gemäss, hat man die Ausdrücke dieser Differentialquotienten, wenn man nicht über die, immer hinreichenden, dritten Differenzen hinausgeht, für die verschiedenen Zeiten für welche die Elemente berechnet sind:

für die 1.....	$\Delta_1 - \frac{1}{2}\Delta_2 + \frac{1}{3}\Delta_3$
„ 2.....	$b - \frac{1}{6}\Delta_3$
„ 3. etc....	$b - \frac{1}{6}d$
„ vorletzte	$b - \frac{1}{6}\Delta_3$
„ letzte ...	$\Delta_1 + \frac{1}{2}\Delta_2 + \frac{1}{3}\Delta_3$

anzunehmen und dazwischen für jeden Werth der Zeit τ zu interpoliren. Uebrigens bleibt die Rechnung wie vorher.

Die erste Verfahrungsart ergibt m und M durch die Anwendung der unter den Elementen der Finsterniss unmittelbar vorkommenden x_0, y_0; die zweite macht sie von Werthen dieser Grössen abhängig, welche für jede Beobachtung durch Interpolation aus den Elementen gesucht werden müssen. Dagegen hat die zweite den Vortheil vor der ersten voraus, dass das Glied (107*)

$$\frac{m \sin(M - N + \psi)}{n \quad \sin \psi}$$

nur die Berichtigung des angenommenen Werthes von ω ist, und da es gewöhnlich sehr klein sein wird, durch etwas leichtere Rechnung gefunden werden kann, als die ähnliche Grösse bei der ersten Verfahrungsart. Auch ist die Convergenz der zweiten zur Wahrheit die grösstmögliche; der Fehler der ersten Annäherung besteht nur darin, dass die Bewegung des Mondes während des Zeitunterschiedes zwischen dem vorausgesetzten und dem der Beobachtung entsprechenden Meridiane des Beobachtungsortes so angenommen wird, wie sie am Anfange oder Ende dieses Zeitunterschiedes ist, während sie für die Mitte desselben genommen werden sollte. — Obgleich die zweite Verfahrungsart wirklich diese Vortheile vor der ersten voraus hat, so scheint der dieser eigenthümliche Vortheil doch überwiegend zu sein, weshalb ich sie, wenigstens immer wenn mehrere Beobachtungen zu berechnen sind, vorziehe.

42.

Die vorgetragene Methode kann nach dem Gutdünken des Rechners so angewandt werden, dass x, y, a, d, μ, φ' sich auf den Aequator oder auf die Ekliptik beziehen. Das Resultat der Rechnung (ω) hat keine Beziehung zu dem einen oder anderen dieser grössten Kreise und sie dienen im Laufe derselben nur als Mittel, die Lage der in Betracht kommenden Punkte der Himmelskugel anzugeben. Das erstere ist indessen immer leichter, wenn man die Oerter der Gestirne auf den Aequator bezogen schon vorfindet; auch wenn dieses nicht ist, allein mehrere Beobachtungen zugleich zu berechnen sind. Allein wenn wenige Beobachtungen vorhanden sind und man die Oerter der Gestirne aus den Tafeln selbst oder aus einer Ephemeride, welche Längen und Breiten enthält, nehmen muss, so wird die Vorarbeit, welche ihre Reduction auf den Aequator fordert, mühsamer als die Aufsuchung der Länge und Breite des Zeniths, in welchem Falle die Ekliptik den Vorzug verdient.

Vorzüglich werden einzelne Beobachtungen von Sonnenfinsternissen oder Fixsternenbedeckungen durch den Mond, zu einer Zeit gemacht, für welche keine Ephemeriden für die Geradeaufsteigung und Abweichung vorhanden sind, Fälle herbeiführen, in welchen die Rechnung leichter wird, wenn man sie durch Längen und Breiten führt. Dann wird man die mittelst des vorläufig bekannten Näherungswerthes des Mittagsunterschiedes auf den ersten Meridian reducirte Beobachtungszeit als τ annehmen, für diese Zeit die Länge, Breite und Aequatorealhorizontalparallaxe des Mondes aufsuchen, und daraus, verbunden mit der Länge und Breite der Sonne oder des Sterns, x und y berechnen; ferner wird man die stündlichen Veränderungen der Länge, Breite und Parallaxe aufsuchen und x', y' durch Differentiirung der Ausdrücke von x, y in Beziehung auf diese Grössen erlangen; endlich wird man die Länge und Breite des Zeniths berechnen und diese statt μ und φ' in den Ausdrücken von ξ und η anwenden.

43.

Es ist noch nöthig, den von den Verbesserungen der Rechnungselemente abhängigen Theil der Formeln (107) weiter zu entwickeln.

Zuerst werde ich die von Δx und Δy abhängigen Theile von λ und λ' betrachten. Die Ausdrücke von x und y, nämlich:

$$x = x_0 + n \sin N (t - \omega - \tau)$$
$$y = y_0 + n \cos N (t - \omega - \tau)$$

ergeben die folgenden:

$$x \sin N + y \cos N = x_0 \sin N + y_0 \cos N + n(t - \omega - \tau)$$
$$-x \cos N + y \sin N = -x_0 \cos N + y_0 \sin N$$

Der zweite ist, wie hieraus hervorgeht, von der Zeit unabhängig. Schreibt man $\varkappa$ dafür, so hat man:

$$xx + yy = \varkappa\varkappa + [x_0 \sin N + y_0 \cos N + n(t - \omega - \tau)]^2$$

welcher Ausdruck, zu der Zeit für welche das zweite Glied verschwindet, sich auf sein Minimum $= \varkappa\varkappa$ reducirt. Bezeichnet man diese Zeit, auf den ersten Meridian bezogen, durch T, setzt man also:

$$\left.\begin{aligned} T &= \tau - \frac{1}{n}[x_0 \sin N + y_0 \cos N] \\ \varkappa &= -x_0 \cos N + y_0 \sin N \end{aligned}\right\} \ldots . (110)$$

so bedeutet T die Zeit, wenn $\sqrt{xx + yy}$ am kleinsten $= \varkappa$ wird. Hierdurch ausgedrückt werden:

$$\left.\begin{aligned} x \sin N + y \cos N &= n(t - \omega - T) \\ -x \cos N + y \sin N &= \varkappa \end{aligned}\right\} \ldots . (111)$$

und es geht unmittelbar daraus hervor, dass die von Δx und Δy abhängigen Theile

von λ . . . . . $= -n\Delta T + (t - \omega - T)\Delta n$
von λ' . . . . . Δx
von $\lambda + \lambda' \operatorname{tg} \psi$ . . . $= -n\Delta T + \Delta x \operatorname{tg} \psi + (t - \omega - T)\Delta n$

sind.

Ferner werde ich die von Δee abhängigen Theile von λ und λ' betrachten. Indem man

$$\varrho \cos \varphi' = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - ee \sin \varphi^2}}$$
$$\varrho \sin \varphi' = \frac{\sin \varphi (1 - ee)}{\sqrt{1 - ee \sin \varphi^2}}$$

hat, kann man den in Beziehung auf ee genommenen Differentialquotienten dieser Grössen die Form

$$\frac{d\varrho \cos \varphi'}{d.ee} = \tfrac{1}{2}\beta\beta . \varrho \cos \varphi'$$
$$\frac{d\varrho \sin \varphi'}{d.ee} = \tfrac{1}{2}\beta\beta . \varrho \sin \varphi' - \beta$$

geben, worin

$$\beta = \frac{\varrho \sin \varphi'}{1 - ee}$$

bedeutet. Hierdurch erhält man den Ausdrücken (7) gemäss:

$$\frac{d\xi}{d.ee} = \tfrac{1}{2}\beta\beta\xi$$
$$\frac{d\eta}{d.ee} = \tfrac{1}{2}\beta\beta\eta - \beta \cos d$$

und die gesuchten Theile von λ und λ':

$$-\tfrac{1}{2}\beta\beta\{\quad \xi \sin N + \eta \cos N\} + \beta \cos d \cos N$$

und

$$-\tfrac{1}{2}\beta\beta\{-\xi \cos N + \eta \sin N\} + \beta \cos d \sin N.$$

Schreibt man für ξ und η:

$$\xi = x_0 - (x_0 - \xi) = x_0 - m \sin M$$
$$\eta = y_0 - (y_0 - \eta) = y_0 - m \cos M$$

so verwandeln sich diese Ausdrücke, den Formeln (110) gemäss, in

$$-\tfrac{1}{2}\beta\beta\{n(\tau - T) - m\cos(M-N)\} + \beta\cos d\cos N$$

und

$$-\tfrac{1}{2}\beta\beta\{\quad\quad\quad\quad \varkappa + m\sin(M-N)\} + \beta\cos d\sin N$$

oder, da (107)

$$-m\cos(M-N) = L\cos\psi + n(t-\omega-\tau)$$
$$m\sin(M-N) = L\sin\psi$$

ist, in

$$-\tfrac{1}{2}\beta\beta\{n(t-\omega-T) + L\cos\psi\} + \beta\cos d\cos N$$

und

$$-\tfrac{1}{2}\beta\beta\{\quad\quad\quad\quad \varkappa + L\sin\psi\} + \beta\cos d\sin N.$$

Man hat daher den von Δee abhängigen Theil von $\lambda + \lambda' \operatorname{tg}\psi$

$$= -\left\{\tfrac{1}{2}\beta\beta[n(t-\omega-T) + \varkappa\operatorname{tg}\psi + L\sec\psi] - \beta\frac{\cos d\cos(N-\psi)}{\cos\psi}\right\}\Delta ee.$$

In dieser Formel ist der Winkel N vom Declinationskreise an gezählt; hat man aber nicht Geradeaufsteigungen und Abweichungen, sondern Längen und Breiten in der Rechnung angewandt, so lernt man dadurch, unter derselben Bezeichnung N, nicht diesen Winkel kennen, sondern den vom Breitenkreise an gezählten ähnlichen; auch bedeutet dann d nicht die Abweichung, sondern die Breite des Punktes Z der Himmelskugel. Bezeichnet man, um beide Fälle deutlich zu unterscheiden, die Länge und Breite dieses Punktes durch (a) und (d), und den bei der Anwendung von Längen und Breiten gefundenen Werth des Winkels N durch (N), so wird $N = (N) - q$, wo q den Winkel zwischen dem Declinationskreise und dem Breitenkreise bedeutet, welcher, sowie auch $\cos d$, durch die Formeln

$$\cos d\cos q = \cos(d)\cos\varepsilon - \sin(d)\sin\varepsilon\sin(a)$$
$$\cos d\sin q = \sin\varepsilon\cos(a)$$

aus der bekannten Länge, Breite und Schiefe der Ekliptik (ε) gefunden wird.

Der vollständige Ausdruck des Einflusses der Verbesserungen der Rechnungselemente auf ω ist, der gegebenen Entwickelung gemäss:

$$-\Delta T + \Delta\varkappa\cdot\frac{h}{n}\operatorname{tg}\psi + \Delta l\cdot\frac{h}{n}\sec\psi + \frac{\Delta n}{n}(t-\omega-T)$$
$$-\Delta ee\,\frac{h}{n}\left\{\tfrac{1}{2}\beta\beta\left[\frac{n}{h}(t-\omega-T) + \varkappa\operatorname{tg}\psi + L\sec\psi\right] - \beta\frac{\cos d\cos(N-\psi)}{\cos\psi}\right\} \quad (112)$$

wo die Zeiten in Secunden ausgedrückt sind und h die in jeder Stunde der Ephemeride enthaltene Anzahl Secunden der Zeitart, in welcher dieses geschehen und auch die Beobachtung angegeben ist, bedeutet. Wenn diese Zeitart nicht die mittlere, sondern Sternenzeit oder wahre Zeit ist, wird statt t, den Bezeichnungen § 40 zufolge, μ oder t' geschrieben; statt T aber die dieser mittleren Zeit gleichgeltende Sternenzeit oder wahre Zeit.

44.

Aus einer Beobachtung der Zeit des Anfanges oder Endes einer Finsterniss geht eine Bedingungsgleichung zwischen den verschiedenen Grössen, wodurch diese Zeit bestimmt wird, hervor; welche Bedingungsgleichung durch die Formeln (107) ihre einfachste Gestalt erhält, wenn den drei letzten Gliedern derselben der Ausdruck (112) gegeben wird. Sind mehrere Beobachtungen vorhanden, so können dadurch, allgemein zu reden, zwar eben so viele unbekannte Grössen bestimmt werden, allein zu ihrer vortheilhaften Bestimmung ist, ausser dem Vorhandensein der durch die Beobachtungen gegebenen Gleichungen, auch erforderlich, dass sie nicht verschiedene jener Grössen in näherungsweise gleicher Verbindung enthalten. Welche der unbekannten Grössen in jedem besonderen Falle aus vorhandenen Beobachtungen bestimmt werden dürfen, geht zwar am vollständigsten aus den für ihn entwickelten Gleichungen hervor; allein ich werde einigen allgemeinen Bemerkungen darüber hier eine Stelle einräumen.

Die unbekannte, einem Fehler des Ortes in der scheinbaren Bahn, welche eins der Gestirne beziehungsweise auf das andere, an der Himmelskugel beschreibt, entsprechende Grösse ΔT, kann offenbar nur bestimmt werden, wenn ω, womit sie sich vereinigt, wenigstens für einen der Beobachtungsörter bekannt ist. Jede Beobachtung ergibt einen Ausdruck von $\omega + \Delta T$ durch $\Delta\varkappa$, Δl, Δn, Δee, welcher, falls sie an einem Orte gemacht ist, dessen ω als unbekannt angesehen werden soll, nur zur Bestimmung der vier letzteren Grössen beitragen kann, wenn noch eine zweite Beobachtung vorhanden ist, für welche diese Grössen gleiche Werthe besitzen; also wenn, an demselben Orte, Anfang und Ende der Finsterniss beobachtet sind. In diesem Falle gibt das Verschwinden des Unterschiedes der zu beiden gehörigen Ausdrücke von $\omega + \Delta T$ die Gleichung, wodurch beide Beobachtungen zur Bestimmung der vier Grössen beitragen; jede einzelne Beobachtung an einem Orte, dessen ω bekannt ist, liefert dagegen eine Gleichung zwischen diesen Grössen und ΔT.

Offenbar beruhet die Trennung von $\Delta\varkappa$, Δl, Δn, Δee von einander, insofern sie durch Beobachtungen einer Finsterniss erlangt werden soll, nur auf den sich

an verschiedenen Beobachtungsörtern zeigenden Unterschieden in ihrem Hergange: sie kann nur gelingen, wenn die Entfernungen dieser Oerter von einander, vergleichungsweise mit dem Halbmesser der Erde, keine kleinen Grössen sind. Zum Beispiele wird das, aus einem Fehler der in der Rechnung vorausgesetzten Horizontalparallaxe entstehende Δn, nur von ΔT getrennt werden können, wenn der Unterschied der auf den ersten Meridian bezogenen Beobachtungszeiten an verschiedenen Oertern, ein beträchtlicher Theil des grössten, auf der Erde vorkommenden ist; Δee wird von den übrigen unbekannten Grössen nur durch die Verschiedenheit der Werthe von β, also der Polhöhen der Beobachtungsörter, getrennt. — Gewisse Fälle von Finsternissen können indessen die Trennung einer der unbekannten Grössen von den übrigen erleichtern; z. B. die Fälle der inneren Berührungen der Ränder der Sonne und des Mondes die Trennung von Δl, sowie auch die Fälle der Durchgänge der Venus durch die Sonne die Trennung von Δn. Auch können die Beobachtungen mehrerer, fast gleichzeitig vorfallender Finsternisse in der gegenwärtigen Beziehung von beträchtlichem Nutzen sein, z. B. die Beobachtungen der äusseren und inneren Berührungen der Ränder der Sonne und des Mondes, und der Durchgänge des Mondes durch Gruppen von Sternen, deren Oerter relativ bekannt sind.

Im Allgemeinen wird das Zusammentreffen derjenigen Umstände der Beobachtungen, welches zur erfolgreichen Bestimmung aller unbekannten Grössen erforderlich ist, so schwer zu erlangen sein, dass diese schwerlich je gelingen wird. Man hat wiederholt die Beobachtungen der Fixsternbedeckungen durch den Mond als ein Mittel vorgeschlagen, die Abplattung der Erde zu bestimmen; jedoch sind diese Vorschläge nie von einer genügenden Entwickelung ausgegangen, welche, wenn man sie vorgenommen hätte, wohl gezeigt haben würde, dass die Gleichung, welche vorhandene Beobachtungen nach der Elimination der übrigen unbekannten Grössen zur Bestimmung von Δee ergeben, von den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern viel zu abhängig wird, um ihrem Resultate Zutrauen erwerben zu können. Zwar werden die Zeiten der Ein- oder Austritte der Fixsterne am dunkeln Mondrande gewöhnlich sehr genau beobachtet, allein weit seltener gewähren ähnliche Beobachtungen am hellen Rande befriedigende Sicherheit; auch können über den Rand hervorragende Berge des Mondes wesentlich in Betracht kommenden Einfluss auf diese Zeiten erlangen; endlich würde auch die Anwesenheit der Sonne über dem Horizonte Beobachtungsörter einer Sternbedeckung ausschliessen, welche zur vortheilhaften Trennung aller unbekannten Grössen von einander erforderlich sein würden. — Im Falle der äusseren Berührungen der Ränder bei Sonnenfinsternissen ist die Sicherheit der Beobachtungen weit geringer, vorzüglich für den Anfang derselben, so dass jede Folgerung täuschend wird, wenn sie von der Voraussetzung der Richtigkeit seiner Beobachtungen innerhalb 3 bis 4^s ausgehen muss.

In demselben Maasse, in welchem die Trennung der verschiedenen unbekannten Grössen schwierig wird, wird sie aber auch weniger nöthig. Wenn z. B. die Gleichungen, welche die Beobachtungen nach der Elimination einer oder zweier derselben übrig lassen, fast unbestimmt werden, können die übrigen, ohne erheblichen Fehler, als mit jenen sich vereinigend angesehen werden, so dass gewisse Resultate der Beobachtungen, z. B. die Mittagsunterschiede der Beobachtungsörter, auch ohne vollständige Trennung der unbekannten Grössen, näherungsweise von ihnen befreiet werden können.

45.

Wenn die Beobachtungen in einem vorgekommenen Falle nicht zu der Bestimmung aller unbestimmten Grössen des Ausdruckes (112) und ihrer vollständigen Elimination aus den Resultaten hinreichen, so muss die Wahl der vorzugsweise zu eliminirenden von der Betrachtung der Grössen ihrer Unbestimmtheit und ihres Einflusses ausgehen. Verschiedene Arten von Finsternissen können verschiedene Wahlen fordern; das was ich jetzt darüber sagen werde, bezieht sich auf Finsternisse, welche der Mond verursacht.

Aus seinen Tafeln oder Ephemeriden werden seine geocentrischen Oerter, seine Aequatorealparallaxe und das Verhältniss seines Halbmessers zu dieser entlehnt; aus unbestimmten Aenderungen dieser Grössen, sowie auch der ähnlichen, dem verfinsterten Gestirne angehörigen, gehen die unbestimmten Grössen ΔT, $\Delta \pi$, Δl, Δn hervor. Die Fehler der Oerter beider Gestirne müssen, so lange ihre Theorien noch nicht vollkommen genau geworden sein werden, als ganz unbestimmt betrachtet werden; der Fehler der Parallaxe des Mondes ist entweder als eine in jedem Falle willkürliche, oder als eine beständige unbekannte Grösse anzusehen, das erstere wenn die Ungleichheiten ihres theoretischen Ausdruckes als zweifelhaft, das letztere wenn sie als sicher angenommen werden; die Fehler der Verhältnisse der Halbmesser zu den Parallaxen sind jedenfalls beständige unbekannte Grössen. Die als ganz unbestimmt anzusehenden Fehler müssen, insoweit die Be-

obachtungen dazu hinreichen, aus den Resultaten eliminirt werden; die als beständige Grössen anzusehenden dürfen nicht in jedem besonderen Falle bestimmt und aus den Resultaten eliminirt werden, sondern ihre Bestimmung muss dem gemeinschaftlichen Zeugniss aller dazu brauchbaren Beobachtungen überlassen und ihre Elimination aus den Resultaten nur durch die Angabe ihrer Einflüsse darauf vorbereitet werden. Soll aus den Beobachtungen jedes besonderen Falles aller Nutzen gezogen werden, welchen sie für die Bestimmung der beständigen Grössen gewähren können, so müssen aus ihnen die Gleichungen entwickelt werden, durch welche sie zu dieser Bestimmung beitragen.

Der gegenwärtige Zustand der Kenntniss der Bewegungen des Mondes rechtfertigt die Annahme, dass seine Parallaxe für jede Finsterniss mit weit grösserer Sicherheit bekannt ist als sein geocentrischer Ort; auch lässt die Theorie ihre Ungleichheiten so wenig unsicher, dass die vorsichtige Entwickelung derselben ihren möglichen Fehler, wenigstens sehr nahe, beständig machen muss. Hieraus geht hervor, dass die Berechnung der Beobachtungen einer Finsterniss vorzugsweise auf die Elimination der Oerter der Gestirne aus den Resultaten ausgehen muss. Ich werde untersuchen, in welchen Verbindungen die unbestimmten Grössen des Ausdruckes (112) mit unbestimmten Aenderungen der Oerter, Halbmesser und Parallaxen sind.

Wenn man für

$$x = \frac{\cos\delta \sin(\alpha - a)}{\sin\pi}; \quad y = \frac{\cos d \sin\delta - \sin d \cos\delta \cos(\alpha - a)}{\sin\pi}$$

um abzukürzen

$$x = \frac{X}{\sin\pi}; \quad y = \frac{Y}{\sin\pi}$$

schreibt, so hat man die aus Aenderungen der Elemente hervorgehenden Aenderungen von x und y:

$$\Delta x = \frac{\Delta X}{\sin\pi} - x\frac{\Delta\pi}{\operatorname{tg}\pi}; \quad \Delta y = \frac{\Delta Y}{\sin\pi} - y\frac{\Delta\pi}{\operatorname{tg}\pi}$$

und daher den Formeln (111) zufolge:

$$\frac{\Delta X \sin N + \Delta Y \cos N}{\sin\pi} - n(t - \omega - T)\frac{\Delta\pi}{\operatorname{tg}\pi} =$$
$$= -n\Delta T + \Delta n(t - \omega - T)$$
$$\frac{-\Delta X \cos N + \Delta Y \sin N}{\sin\pi} - \varkappa\frac{\Delta\pi}{\operatorname{tg}\pi} = \Delta\varkappa.$$

Wenn man nun

$$\frac{\Delta n}{n} = -\frac{\Delta\pi}{\operatorname{tg}\pi}$$

annimmt, also auch

$$\frac{\Delta X \sin N + \Delta Y \cos N}{\sin\pi} = -n\Delta T$$
$$\frac{-\Delta X \cos N + \Delta Y \sin N}{\sin\pi} = \Delta\varkappa + \varkappa\frac{\Delta\pi}{\operatorname{tg}\pi}$$

so folgt hieraus, dass die Voraussetzung während der Dauer der Finsterniss unveränderlicher Werthe von Δn, ΔT, $\Delta\varkappa$ fordert, dass auch

$$\frac{\Delta\pi}{\operatorname{tg}\pi}, \quad \frac{\Delta X}{\sin\pi}, \quad \frac{\Delta Y}{\sin\pi}$$

während derselben Zeit als unveränderlich angenommen werden. Die Ausdrücke der beiden letzten dieser Grössen sind:

$$\frac{\cos\delta\cos(\alpha - a)\Delta(\alpha - a)}{\sin\pi} - \frac{\sin\delta\sin(\alpha - a)\Delta\delta}{\sin\pi}$$

und

$$\frac{\cos\delta\sin(\alpha - a)\Delta(\alpha - a)}{\sin\pi}\sin d + \frac{\cos d\cos\delta + \sin d\sin\delta\cos(\alpha - a)}{\sin\pi}\Delta\delta$$
$$- \frac{\sin d\sin\delta + \cos d\cos\delta\cos(\alpha - a)}{\sin\pi}\Delta d$$

und für die Zeit der Zusammenkunft beider Gestirne, oder für die $\alpha - a = 0$ entsprechende, verwandeln sie sich in

$$\frac{\cos\delta\,\Delta(\alpha - a)}{\sin\pi} \quad \text{und} \quad \frac{\cos(\delta - d)\Delta(\delta - d)}{\sin\pi}.$$

Nimmt man also δ, π, $\Delta(\alpha - a)$, $\Delta(\delta - d)$ für diese Zeit geltend an und setzt man 1 für $\cos(\delta - d)$, $\varkappa$ für $\sin\pi$ und $\operatorname{tg}\pi$, so hat man:

$$-\Delta T = \frac{\cos\delta\,\Delta(\alpha - a)}{n\pi}\sin N + \frac{\Delta(\delta - d)}{n\pi}\cos N$$
$$\Delta\varkappa = -\frac{\cos\delta\,\Delta(\alpha - a)}{\pi}\cos N + \frac{\Delta(\delta - d)}{\pi}\sin N - \varkappa\frac{\Delta\pi}{\pi}$$
$$\frac{\Delta n}{n} = -\frac{\Delta\pi}{\pi}$$

Der Ausdruck von l ist (12):

$$s\operatorname{tg} f = z\operatorname{tg} f \pm k\sec f$$

oder

$$l\cos f = z\sin f \pm k = \frac{z}{r'g}(\sin H \pm k\sin\Pi) \pm k$$

und g ist nicht merklich von

$$1 - m = 1 - \frac{\sin\Pi}{r'\sin\pi}$$

verschieden, sowie z nicht merklich von $\frac{1}{\sin\pi}$. Hierdurch wird

$$l\cos f = \frac{\sin H \pm r'k\sin\pi}{r'\sin\pi - \sin\Pi}$$

und mit hinreichender Näherung

$$\Delta l = \pm\Delta k + \frac{\Delta H}{r'\pi} - \frac{H}{r'\pi}\cdot\frac{\Delta\pi}{\pi}$$

wo H den mittleren Halbmesser und r' die Entfernung des entfernteren Gestirns, durch die mittlere der Erde von der Sonne gemessen, bedeutet. Für Fixsternbedeckungen ist $\Delta l = \Delta k$.

Substituirt man diese Ausdrücke in dem Ausdrucke

(112), so dass man die von den Veränderungen der Halbmesser, von $\Delta\pi$ und von Δee abhängigen Glieder von einander trennt, so wird er

$$\begin{aligned}
&\nu[\quad \sin N\cos\delta\,\Delta(\alpha-a)+\cos N\Delta(\delta-d)]\\
&+\nu[-\cos N\cos\delta\,\Delta(\alpha-a)+\sin N\Delta(\delta-d)]\,\mathrm{tg}\,\psi\\
&+\nu\left(\frac{\Delta H}{r'}\pm\pi\Delta k\right)\sec\psi\\
&-\nu\left[\frac{n}{h}(t-\omega-T)+\varkappa\,\mathrm{tg}\,\psi+\frac{H}{r'\pi}\sec\psi\right]\Delta\pi\\
&-\nu\left[\tfrac{1}{2}\beta\beta\left\{\frac{n}{h}(t-\omega-T)+\varkappa\,\mathrm{tg}\,\psi+L\sec\psi\right\}-\right.\\
&\qquad\left.-\beta\frac{\cos d\cos(N-\psi)}{\cos\psi}\right]\pi\Delta ee. \qquad (113)
\end{aligned}$$

wo ν, um abzukürzen, für $\frac{h}{n\pi}$ geschrieben ist, also die Zahl Zeitsecunden bedeutet, in welcher die Gestirne sich relativ um eine Secunde bewegen.

46.

Ausser der ersten, sich mit dem Mittagsunterschiede vereinigenden unbekannten Grösse der Formeln (112) und (113) ist zunächst die in $\mathrm{tg}\,\psi$ multiplicirte zu bestimmen. Hierdurch wird gewöhnlich die Kraft der vorhandenen Beobachtungen schon erschöpft werden; oft werden diese selbst dazu nicht hinreichen und einer Unterstützung durch gute Meridianbeobachtungen bedürfen. Indessen werden auch Fälle vorkommen, welche die vortheilhafte Bestimmung der in $\sec\psi$ multiplicirten unbekannten Grösse erlauben; z. B. die inneren Berührungen der Ränder der Sonne und des Mondes, vorzüglich wenn sie in der Nähe beider Grenzen des wenig breiten Raumes auf der Erde, wo diese Erscheinung sichtbar ist, beobachtet werden. In Europa allein gemachte Beobachtungen von Fixsternenbedeckungen versprechen im Allgemeinen einen geringen Erfolg der Bestimmung von Δk.

So selten sich auch Beobachtungen einer Finsterniss vorfinden, welche hierüber hinauszugehen erlauben, so kommen doch auch Fälle vor, in welchen sie das schätzbarste Mittel zur Bestimmung der Parallaxe des Mondes liefern können. Ich benutze diese Gelegenheit, hierauf aufmerksam zu machen, in der Hoffnung, durch das Hervorheben der Wichtigkeit solcher Fälle Anstrengungen der Beobachter dafür zu erregen. Die Formel (112) zeigt unmittelbar, dass die Trennung der Parallaxe von anderen unbekannten Grössen, durch die Verschiedenheit der Beobachtungszeiten an verschiedenen Orten erlangt wird; desto vortheilhafter also, je grösser diese Verschiedenheit ist. Die inneren Berührungen der Ränder der Sonne und des Mondes können sehr genau beobachtet werden; ihre Beobachtung in zwei Gegenden der Erde, deren eine sie in der Nähe des Aufganges, die andere in der Nähe des Unterganges der Sonne wahrnimmt, verspricht einen grösseren Erfolg der Bestimmung der Parallaxe des Mondes als andere Mittel der practischen Astronomie. Erforderlich ist, dass die Mittagsunterschiede der Beobachtungsörter, unabhängig von Finsternissen, gut bestimmt seien und dass allenthalben gleiche Momente der Erscheinung beobachtet werden; im Falle einer ringförmigen Finsterniss die Momente der vollständigen Erscheinung und ersten Unterbrechung des Ringes; im Falle einer gänzlichen die des vollständigen Verschwindens und ersten Wiedererscheinens der Sonne. Wünschenswerth ist, dass in jeder der beiden, weit von einander entfernten Gegenden, mehrere Beobachtungsörter besetzt werden. Da aber nicht zu erwarten ist, dass Erscheinungen, welche die Sicherheit der Kenntniss der Mondparallaxe vergrössern können, so grosse Theilnahme erregen werden, als die der Sonnenparallaxe wegen beobachteten in den Jahren 1761 und 1769 erregten, so kann sich die Hoffnung sie benutzt zu sehen, nur auf den vorhandenen Zustand der Thätigkeit für die beobachtende Astronomie gründen. In dem jetzt vorhandenen Zustande würde eine Sonnenfinsterniss, welche nicht allein in Europa, sondern auch in den vereinigten Staaten von Nordamerika central erscheint, auch ohne besondere Gründe für ihre Beobachtung, wahrscheinlich das zu einer Untersuchung über die Parallaxe des Mondes Erforderliche liefern. Dass die selten vorkommenden Fälle dieser Art als wichtige astronomische Ereignisse behandelt werden mögen, ist der Wunsch, aus welchem diese Bemerkung über ihr Gewicht für die Bestimmung der Mondparallaxe hervorgegangen ist. — Man bemerkt übrigens leicht, dass der Mittagsunterschied zweier weit von einander entfernten Punkte der Erde, durch einen gleichen Fehler der Parallaxe des Mondes, in verschiedenen Finsternissen nahe gleiche Aenderungen erfährt; dass also sein als bekannt vorausgesetzter Werth nicht aus Beobachtungen von Finsternissen abgeleitet sein darf, wenn er die Grundlage einer Untersuchung der Parallaxe werden soll. Das von Gauss in die astronomische Praxis eingeführte Mittel der Mondculminationen ist daher das anzuwendende; wenigstens ein Ort in Amerika muss dadurch mit europäischen Sternwarten verbunden und dann als Grundlage der Bestimmung der Mittagsunterschiede anderer amerikanischer Oerter angenommen werden.

Vorzügliche Aufmerksamkeit verdienen die Durch-

gänge des Mondes durch die Plejaden. Wenn die relativen Oerter der Sterne dieser Gruppe als bekannt angenommen werden dürfen, so liefert jeder Durchgang zur Bestimmung der unbekannten Grössen der Formel (113) so viele Gleichungen, als er beobachtete Momente geliefert hat, denn die erste, sich mit dem Mittagsunterschiede vereinigende derselben hat, so wie auch die zweite, für die verschiedenen Sterne so wenig verschiedene Werthe, dass man sie für alle als gleich annehmen kann; die dritte ist für alle Fixsternenbedeckungen $= \pi \Delta k$; die vierte bezieht sich allein auf den Mond, die fünfte allein auf die Erde. Der gewöhnlichste Fall, in welchem entweder nur die Beobachtungen der Eintritte, oder nur die der Austritte, nicht aber beide, genau gemacht werden können, liefert, durch die einen oder die andern allein, eine Anzahl auf sichere Beobachtungen gegründeter Gleichungen, welche, vorzüglich wenn der Mond nördlich von einigen und südlich von anderen Sternen durchgeht, die Bestimmung der Werthe der zwei oder drei ersten unbekannten Grössen und ihre Elimination aus den Resultaten weit vollständiger macht, als im Falle der Bedeckung eines einzelnen Fixsterns zu erwarten ist. Hierdurch wächst der Werth, welchen ein an zwei Orten beobachteter Durchgang des Mondes durch die Plejaden für die Bestimmung des Mittagsunterschiedes, vergleichungsweise mit dem Werthe der Beobachtung einer einzelnen Sternbedeckung, erhält, stärker als die Zahl der bedeckten Sterne; so dass, wenn jene Beobachtungen (bei vorausgesetzter genauer Zeitbestimmung) einigemal gut gelungen sind, das Gewicht des daraus hervorgegangenen Mittagsunterschiedes durch andere einzelne Sternbedeckungen schwer wird vermehrt werden können. Diesen grossen Vortheil haben die Bedeckungen der Plejaden aber nur voraus, wenn die relativen Oerter ihrer Sterne mit der zu seiner Erlangung erforderlichen Genauigkeit bekannt sind. Dieses war eine der Veranlassungen der im ersten Bande bekannt gemachten Arbeit über die Plejaden; ich hoffe, dass das auf Heliometerbeobachtungen gegründete Verzeichniss von 53 ihrer Sterne (I. S. 237 [Bd. II, p. 304]) auch in der gegenwärtigen Beziehung genügen wird.

Dieselbe Ursache, welche die Durchgänge des Mondes durch die Plejaden besonders werthvoll für die Bestimmung der Mittagsunterschiede macht, hat auch die Folge, dass sie sehr sichere Bestimmungen. seines relativen Orts ergeben; sicherere als man durch ein anderes Mittel zu erhalten vermag; daher zur Prüfung der Genauigkeit einer Mondstheorie vorzüglich geeignete. Der Werth solcher Bestimmungen wird noch dadurch vermehrt, dass sie die frühesten von hinreichender Genauigkeit sind, welche man durch Beobachtungen erlangen kann. Die Sammlung und Reduction derjenigen Beobachtungen dieser Art, für deren richtige Zeitbestimmung man hinreichende Gewähr erlangen kann, würde einen wesentlichen Beitrag zur Untersuchung der Bewegungen des Mondes liefern; einen Beitrag, dessen Werth die Mühe belohnen würde, welche seine Erwerbung kosten wird.

47.

Die im ersten Abschnitte gegebene und später verfolgte Grundgleichung der Analyse der Finsternisse ist der Ausdruck der Bedingung, dass ein die Ränderberührung zweier Gestirne wahrnehmender Punkt sich in der Oberfläche eines der beiden geraden Kegel befinde, welche beide Gestirne einhüllen; Alles was ich in den folgenden Abschnitten aus dieser Gleichung abgeleitet habe, setzt voraus, dass dieser Punkt in der angenommenen, sphäroidischen Oberfläche der Erde liege. Die Strahlenbrechung in der Atmosphäre verursacht aber, dass gerade, in der Oberfläche des Kegels liegende Linien gekrümmt werden, diese Oberfläche also in der Wirklichkeit aufhört, die eines Kegels zu sein; ferner verursachen die vorhandenen Unregelmässigkeiten der physischen Oberfläche der Erde, dass die Beobachtungsörter sich im Allgemeinen nicht in ihrer angenommenen befinden. Es wird daher nöthig, diese Unterschiede der Wirklichkeit von der verfolgten Annahme noch zu berücksichtigen.

Dass die Strahlenbrechung keinen Einfluss auf die Erscheinungen der Finsternisse äussere, ist mehreremale ausgesprochen und öfter stillschweigend angenommen worden. HANSEN hat aber den Fehler dieser Annahme bemerkt, also die Nothwendigkeit einer Verbesserung der bisherigen Theorien dieser Erscheinungen gezeigt*). — Die Asymptote des zum Auge gelangenden Strahls vom Berührungspunkte der Ränder schneidet die Lothlinie des Auges an einem Punkte, wo die Ränderberührung, wenn keine Strahlenbrechung vorhanden wäre, genau so erscheinen würde, wie sie wirklich erscheint. Man berücksichtigt also den Einfluss der Strahlenbrechung, indem man den Beobachtungsort an diesen Punkt, dessen Erhöhung ich durch h' bezeichnen werde, verlegt; liegt er selbst nicht in der angenommenen Oberfläche der Erde, sondern in der Höhe h über ihr, so ist er also auf seiner Lothlinie, $h + h'$ über dieser Ober-

*) Astron. Nachr. Nr. 347 [vgl. Theorie der Sonnenfinsternisse, Abhh. der k. sächs. Gesellsch. d. W. IV. p. 324].

fläche anzunehmen. Diese Erhöhung des Beobachtungsortes verändert die bisher angewandten Werthe von $\varrho \cos \varphi'$ und $\varrho \sin \varphi'$ in:

$\varrho \cos \varphi' + (h + h') \cos \varphi$ und $\varrho \sin \varphi' + (h + h') \sin \varphi$

oder, nach den Formeln (14), in:

$$\varrho \cos \varphi' [1 + (h + h') \sqrt{1 - ee \sin \varphi^2}]$$

und

$$\varrho \sin \varphi' \left[1h + + (h') \frac{\sqrt{1 - ee \sin \varphi^2}}{1 - ee}\right]$$

Indessen sind h und h' immer sehr kleine, selten auf ein Dreitausentel steigende Grössen, weshalb man ihre Producte in ee vernachlässigen, also beide Grössen in dem gleichen Verhältnisse $1 + h + h'$, welches auch nicht merklich von $(1 + h)(1 + h')$ verschieden ist, vergrössern kann. Die Berücksichtigung beider Ursachen reducirt sich also auf die Hinzufügung der Logarithmen dieser beiden Factoren zu dem in der Rechnung bisher angewandten Logarithmen von ϱ.

Ich werde die Ausdrücke beider Logarithmen aufsuchen. Wenn man die Erhöhung des Beobachtungsortes über der Oberfläche des dafür angenommenen elliptischen Rotationssphäroids in Toisen ausgedrückt, und den Halbmesser des Erdäquators $= 3272077{,}14$ voraussetzt, so ist hinreichend nahe

$$\log (1 + h) = h \,.\, 0{,}00000013273 \; (\log = 3{,}12296).$$

Wenn die Atmosphäre aus concentrischen Schichten bestehend angenommen, die Dichte einer von ihnen durch ϱ, ihre Strahlenbrechungskraft durch $\mu\varrho$, ihre Entfernung vom Mittelpunkte durch r, der Winkel eines sie durchschneidenden Strahls mit ihrer Normale durch z bezeichnet wird, so ist die bekannte charakteristische Eigenschaft der Bahn des Strahls die, dass das Product $r \sin z \sqrt{1 + \mu\varrho}$ einen beständigen Werth habe. Bezeichnet man die Werthe von r, z, ϱ für den Punkt des Strahls, wo das Auge sich befindet, durch a, ϑ, (ϱ), so ist also

$$r \sin z \sqrt{1 + \mu\varrho} = a \sin \vartheta \sqrt{1 + \mu(\varrho)}.$$

Wenn man an den durch r und z bestimmten Punkt des Strahls eine Tangente legt, und sie die Lothlinie an dem vom Auge x entfernten Punkte im Winkel ζ durchschneidet, so ist

$$r \sin z = (a + x) \sin \zeta$$

und daher

$$(a + x) \sin \zeta \sqrt{1 + \mu\varrho} = a \sin \vartheta \sqrt{1 + \mu(\varrho)}.$$

Bezieht man das erste Glied dieser Gleichung auf einen unendlich weit entfernten Punkt des Strahls, so verwandelt die Tangente sich in die Asymptote und man hat $x = h'$, $\varrho = 0$, und ζ wird die wahre Zenithdistanz, welche ich, analog mit der scheinbaren ϑ, durch ϑ' bezeichnen werde. Die Gleichung verwandelt sich dann in

$$1 + \frac{h'}{a} = \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta'} \sqrt{1 + \mu(\varrho)}$$

wo a den Krümmungshalbmesser der Oberfläche der Erde in dem Azimuthe des Strahls bedeutet; oder, wenn dieses durch A bezeichnet wird:

$$a = \frac{1 - ee}{(1 - ee + ee \cos \varphi^2 \cos A^2) \sqrt{1 - ee \sin \varphi^2}}.$$

Indessen kann das oben schon vernachlässigte Product $h'ee$ auch hier vernachlässigt werden; mit desto grösserem Rechte, da man die ganze Strahlenbrechung vom Azimuthe unabhängig anzunehmen pflegt und hier nur eine kleine Wirkung derselben betrachtet wird. Man hat also:

$$\log (1 + h') = \log \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta'} + \tfrac{1}{2} \log [1 + \mu(\varrho)].$$

Dieser Logarithme kann in eine Tafel gebracht werden, deren Argument die wahre Zenithdistanz ϑ' des durch a, d bestimmten Punkts der Himmelskugel ist. Die Tafel, welche ich hier mittheile, ist aus der zweiten der drei, im Bande I. S. 198 vereinigten abgeleitet worden, über $\vartheta' = 85^0$ hinaus aber aus derselben Quelle, aus welcher ich diese abgeleitet habe; der Werth von $\mu(\varrho)$ ist $= 0{,}0005600$. Sie gilt unmittelbar für den Zustand der Atmosphäre, für welchen die vom Barometerstande und Thermometerstande abhängigen Factoren β und $\gamma = 1$ sind, wird aber sehr nahe diesen Factoren proportional geändert.

ϑ'	$\log (1 + h')$	ϑ'	$\log (1 + h')$
0°	0,0000000	82° 0′	0,0000069
10	0,0000000	83 0	0,0000086
20	0,0000000	84 0	0,0000111
30	0,0000001	85 0	0,0000147
40	0,0000001	30	0,0000169
50	0,0000002	86 0	0,0000198
60	0,0000005	30	0,0000234
62	0,0000006	87 0	0,0000280
64	0,0000007	30	0,0000337
66	0,0000008	88 0	0,0000412
68	0,0000009	30	0,0000511
70	0,0000012	50	0,0000594
72	0,0000015	89 0	0,0000643
74	0,0000019	10	0,0000695
76	0,0000025	20	0,0000753
78	0,0000033	30	0,0000817
80	0,0000046	40	0,0000888
81	0,0000056	50	0,0000967
82	0,0000069	90 0	0,0001054

Hieraus geht hervor, dass der Einfluss der Strahlen-

brechung meistens sehr klein ist, dass er aber doch nicht immer vernachlässigt werden darf. Wollte man ihn auf die Grösse der Horizontalparallaxe des Mondes übertragen, so würde er bis zu $\vartheta' = 70^0$ unter 0,″01 bleiben, und erst für $\vartheta' = 84^0$ auf etwa 0,″1 und für $\vartheta' = 90^0$ auf etwa eine Secunde steigen können.

170. Ein Hülfsmittel zur Erleichterung der Beobachtungen der Sonnenfinsternisse und Sternbedeckungen.*)

(Astron. Untersuchungen II, p. 241.)

Sowohl von den Sonnenfinsternissen, als von den Sternbedeckungen wird gewöhnlich nur entweder der Anfang oder das Ende, selten werden beide Phasen mit gehöriger Sicherheit beobachtet: der Anfang einer Sonnenfinsterniss und der erste Eingriff eines durch die Sonne gehenden Planeten werden immer zu spät gesehen, wenn der Beobachter den Punkt des Randes, wohin er seine Aufmerksamkeit zu richten hat, nicht genau kennt; der Austritt eines Sterns aus der Mondscheibe ist in demselben Falle, zumal wenn er sich am erleuchteten Rande ereignet. Indem diese Unsicherheit eines Theils der Beobachtung die Folge hat, dass die Werthe der unbekannten Grössen, welche sich mit dem aus ihr zu ziehenden Resultate vereinigen, entweder unbestimmt bleiben, oder eine unsichere Bestimmung erhalten, so geht dadurch ein Theil des Gewichts verloren, welches dem Resultate gebühren würde, wenn es allein auf den sicherer beobachteten Theil der Erscheinung gegründet werden könnte. Es ist daher wesentlich, eine Einrichtung zu treffen, durch deren Hülfe der Punkt des Randes erkannt werden kann, wo die zu beobachtende Erscheinung sich ereignen wird.

Da der Positionswinkel dieses Punktes am Rande der Sonne oder des Mondes, nach den im dritten Abschnitte der Abhandl. X. [Abhandl. 169 p. 411] gegebenen Vorschriften, oder durch die ihnen gemäss berechneten Zahlen, welche das Astr. Jahrb. von ENCKE für jede Finsterniss und Sternbedeckung angibt, leicht gefunden werden kann, so bleibt nur zu wünschen, dass man ein leicht anwendbares Mittel besitze, den, einem bekannten Positionswinkel entsprechenden Punkt zu erkennen. — Offenbar ist er einer der beiden Punkte, wo der Rand durch eine Linie berührt werden kann, deren Richtung ein 90° verschiedener Positionswinkel zugehört: man erkennt ihn also, indem man einem Faden im Fernrohre diese Richtung gibt und dann seinen Berührungspunkt mit dem Rande aufsucht.

Um dem Faden in einem Fernrohre jede bestimmte Richtung geben zu können, habe ich eins der Oculare so abändern lassen, dass es um seine Axe gedrehet, und die Grösse jeder Drehung, auf einer auf seine Röhre geschnittenen Theilung, abgelesen werden kann. — Nachdem man die Angabe des Zeigers der Theilung, welche dem Zusammenfallen des Fadens mit der Richtung der täglichen Bewegung zugehört, ausgemittelt hat, addirt man zu ihr den gegebenen Positionswinkel und drehet das Ocular bis der Zeiger dieser Summe entspricht, wodurch der Faden die erforderliche Richtung erhält.

Wenn das Fernrohr parallactisch aufgestellt ist, kann man die Richtung der täglichen Bewegung auf der Theilung der Ocularröhre einfürallemal bestimmen; wenn es aber, wie gewöhnlich, eine andere Aufstellung hat, muss diese Bestimmung jedesmal wenn eine Finsterniss oder Sternbedeckung beobachtet werden soll, entweder durch das verfinsterte Gestirn selbst, oder durch ein anderes ihm sehr nahes gemacht werden. Im Falle einer Sonnenfinsterniss bestimmt man die Richtung der täglichen Bewegung durch die Aufsuchung der Lage des Fadens, welcher der Sonnenrand kurz vor dem erwarteten Anfange folgt. Im Falle einer Sternbedeckung kann man einen sehr nahe bei dem Monde stehenden Fixstern dazu benutzen, den man mit einem Fernrohre, welches die zur Beobachtung der Austritte am hellen Rande erforderliche Stärke besitzt, nie vergebens suchen wird. Will man einen Fehler des zu findenden Punktes, der bis auf eine halbe Minute steigen kann, nicht für erheblich ansehen, so kann man die scheinbare Bewegung des Mondes im Fernrohre als das Parallel annehmen, also die Richtung der täglichen Bewegung auch durch seinen Rand oder einen seiner Flecken bestimmen. — Indem der Punkt des Mondrandes, wo ein Stern wiedererscheinen wird, durch die in seiner Nähe befindlichen Flecken kenntlich wird, so kann er auch schon vor dem Eintritte aufgesucht werden; die Veränderungen der Positionswinkel der Flecken sind während einer Stunde so klein, dass sie hier nicht in Betracht kommen.

Die Einrichtung eines Oculars zum Drehen um seine

*) [Abh. XI aus 356 d. a. Verz. — Dasselbe in Astr. Nachr. **16**, p. 161 (324 d. a. Verz.).]

Axe und das Auftragen einer Theilung auf seine Röhre sind so leicht auszuführen, und der Nutzen, welcher dadurch für die Beobachtungen der Finsternisse und Sternbedeckungen erlangt wird, ist so beträchtlich, dass jedem Besitzer eines astronomischen Fernrohrs diese Einrichtung empfohlen werden kann. Auf der Königsberger Sternwarte wird sie häufig, mit vollständigem, fast ohne Mühe zu erlangenden Erfolge angewandt.

---

171. Beobachtung des Durchganges des Mercur durch die Sonne, am 4.—5. Mai 1832.*)

(Astron. Untersuchungen II, p. 244.)

Die Beobachtung dieses Durchganges hat auf der Königsberger Sternwarte mit einer Vollständigkeit gemacht werden können, welche ihr grösseres Interesse gegeben hat, als ähnliche Beobachtungen sonst zu haben pflegen: die Möglichkeit, durch das Heliometer zuverlässige Messungen zu erhalten, hat diese Vollständigkeit hervorgebracht; der Zustand des Himmels hat wesentlich dazu beigetragen, denn die Bilder im Fernrohre erschienen so scharf und deutlich begrenzt, dass die Messungen mit grosser Sicherheit gemacht werden konnten. Während der ganzen Dauer der Erscheinung tobte zwar ein heftiger Sturm, welcher das Instrument oft erschütterte und auch bis zum Mittage häufige Wolken vor der Sonne vorübertrieb; allein beides hat nur zur Folge gehabt, dass die Beobachtungen mehr Zeit kosteten; nachtheiligen Einfluss auf die Güte der Messungen hat es nicht gehabt, denn da Erschütterungen des Fernrohrs eine gemeinschaftliche Bewegung der von beiden Objectivhälften gemachten Bilder erzeugen, so kann man die Berührung derselben im nicht ganz ruhigen Fernrohre selbst dann noch sicher beurtheilen, wenn ein nicht auf das Princip der doppelten Bilder gegründetes Mikrometer seine Dienste gänzlich versagen würde. Bei dem heftigen Sturme würde man mit einem Fadenmikrometer nicht haben messen können.

Durch meine Beobachtung habe ich drei verschiedene Zwecke verfolgt: ich wollte nicht nur die Zeiten der Berührungen der Ränder kennen lernen, sondern auch die Erscheinung benutzen, um dadurch über die Irradiation der Sonne ein Urtheil zu erhalten und um die Grösse und die Figur des Mercur zu bestimmen. Wie alles dieses gelungen ist, wird das Folgende zeigen.

1.

Bei dem Eintritte bemerkte ich die äussere Berührung der Ränder beträchtlich zu spät*), die innere aber, meiner Meinung nach ganz zuverlässig:

$1^h\ 17^m\ 36^s{,}68$ St. Z. $= 22^h\ 24^m\ 38^s{,}77$ M. Z.

Bei dem Austritte erfolgte die innere Berührung

$8^h\ 1^m\ 40^s{,}14$ St. Z. $= 5^h\ 7^m\ 38^s{,}03$ M. Z.

die äussere

$8^h\ 5^m\ 3^s{,}19$ St. Z. $= 5^h\ 11^m\ 0^s{,}53$ M. Z.

Beide innere Berührungen der Ränder zeigten sich, ohne dass zwischen dem Rande des Planeten und dem Sonnenrande ein Lichtfaden plötzlich entstanden oder verschwunden wäre; vielmehr lief der den Planeten umgebende Theil der Sonnenscheibe, unmittelbar vor dem gänzlichen Eintritte, in die allerfeinsten Spitzen aus, welche sich, zu der für die innere Berührung angegebenen Zeit, vereinigten, so dass dadurch eine helle Linie zwischen beiden Rändern entstand, deren Anfangs kaum sichtbare Breite sich durch die Bewegung des Planeten stetig vergrösserte. Bei dem Austritte war ich auf diese Umstände vielleicht noch aufmerksamer als bei dem Eintritte, wenigstens wurde die Aufmerksamkeit nicht mehr durch vorüberziehende Wolken unterbrochen; allein die von dem Eintritte gegebene Beschreibung passt, in umgekehrter Ordnung, genau auf den Austritt, so dass über die Art wie das Fernrohr die Erscheinung zeigte, nicht der geringste Zweifel obwaltet. Die angegebene Zeit der äusseren Berührung der Ränder bei dem Austritte ist das Moment, wo der Ausschnitt am Sonnenrande so klein geworden war, dass ich ihn von einer kleinen wallenden Bewegung des Sonnenrandes nicht mehr sicher unterscheiden konnte. Die zu diesen Beobachtungen, sowie zu allen folgenden Messungen angewandte Vergrösserung des Heliometers beträgt 290 Mal; das Dämpfglas war dunkelroth.

Herr Professor ARGELANDER, dessen Gegenwart auf der Sternwarte ich mich erfreuete, bediente sich der 90maligen Vergrösserung eines 30zölligen Fraunhoferschen Fernrohrs, welches sich durch grosse Deutlichkeit

*) [Auszug aus Abh. XII von 356 d. a. Verz. — S. auch Astron. Nachr. **10**, p. 185 (265 d. a. Verz.), wo die gemessenen Entfernungen und Durchmesser und die daraus abgeleiteten Werthe um geringe Quantitäten von den hier gegebenen (späteren) abweichen.]

*) Die Abhandl. XI [Abh. 170] beschriebene Einrichtung war noch nicht vorhanden.

vortheilhaft auszeichnet. Damit sah er die beiden Berührungen des Austritts:

$8^h\ 1^m\ 41^s{,}39$ und $8^h\ 4^m\ 50^s{,}40$ St. Z.

Die Annäherung des Planeten an den Sonnenrand erschien mit diesem Fernrohre nicht so stetig, als das stärkere Fernrohr des Heliometers sie mir gezeigt hat: es entstand nämlich, als die Entfernung zwischen beiden Rändern etwa eine Secunde betragen mochte, eine Verlängerung der runden Figur des Mercur, dem Sonnenrande zu, also wohl eine plötzliche Unterbrechung des Lichtfadens zwischen beiden Rändern.

Herr BUSCH wandte ein Münchener Fernrohr von 42 Zoll an und bemerkte, mit 126maliger Vergrösserung desselben, die Zeiten der beiden Berührungen

$8^h\ 1^m\ 41^s{,}23$ und $8^h\ 4^m\ 36^s{,}23$ St. Z.

2.

Unter Irradiation der Sonne versteht man einen, durch die Lebhaftigkeit des Sonnenlichts erzeugten Lichtrand von einigen Secunden Breite, welcher den Sonnenrand umgibt, so dass er durch Fernröhre nicht von diesem unterschieden werden kann, also die Sonnenscheibe grösser darstellt, als sie wirklich ist. Das Dasein einer solchen Irradiation hat zur nothwendigen Folge, dass bei der Annäherung eines vor der Sonne vorübergehenden Planeten an den Rand derselben, das zwischen den Rändern der beiden Gestirne befindliche Licht in dem Augenblicke verschwindet, in welchem der Rand des Planeten den wahren Sonnenrand bedeckt: es erfolgt also vor dem Antritte des Planeten an den scheinbaren Sonnenrand eine plötzliche Unterbrechung des Lichtfadens zwischen beiden. Da die Irradiation die Planetenscheibe eben so viel verkleinern muss, als sie die Sonnenscheibe vergrössert, so erfolgt die plötzliche Unterbrechung schon in dem Augenblicke, wenn der scheinbare Zwischenraum zwischen beiden Rändern bis auf die doppelte Breite der Irradiation herabgekommen ist. Bei dem Eintritte zeigt sich alles dieses in umgekehrter Ordnung. — Die Grösse der Irradiation kann sowohl dadurch bestimmt werden, dass man die Breite des Lichtrandes im Augenblicke seiner plötzlichen Unterbrechung (oder auch früher wenn man der Beobachtung durch Rechnung zu Hülfe kommen will) misst, als auch durch Vergleichung des gemessenen Sonnendurchmessers mit dem aus der Zeit der Verweilung des durchgehenden Gestirns vor der Sonnenscheibe folgenden.

Wenn man die Beschreibungen vergleicht, welche die meisten Beobachter der Durchgänge der Venus durch die Sonne, in den Jahren 1761 und 1769, von den Erscheinungen entworfen haben, welche ihnen die inneren Berührungen der Ränder darboten, so kann man nicht bezweifeln, dass ihnen die Sonne wirklich durch Irradiation vergrössert erschienen ist; was einige von ihnen auch bei der äusseren Berührung angemerkt haben*), kann aber keine Folge der Irradiation sein. Die Grösse, welche DIONIS DUSÉJOUR der Irradiation beigelegt hat, ist weniger sicher bestimmt als das Dasein derselben; denn sie hängt von den Messungen der Durchmesser ab, welche bekanntlich, selbst bis jetzt, noch nicht mit einer jeden Zweifel zurückweisenden Sicherheit gemacht worden sind.

So sicher die Beobachtungen von 1761 und 1769 das Dasein einer Irradiation zeigen, eben so sicher zeigen die jetzt von mir gemachten, dass ich die Sonne ohne Irradiation gesehen habe. Wenn kein Widerspruch entstehen soll, so muss man annehmen, dass Fernröhre vorhanden sind, welche die Sonne durch Irradiation vergrössern, und andere, welche sie in ihrer wahren Grösse zeigen. Das Heliometer gehört zu den letzteren; das kleinere, von Herrn Prof. ARGELANDER benutzte Fernrohr zu den ersteren, obgleich auch dieses die Erscheinung in unerwartet geringer Ausdehnung gezeigt hat. Denn wenn die Irradiation in diesem Fernrohre die von DUSÉJOUR angegebene Grösse hätte, so hätte der helle Zwischenraum zwischen beiden Rändern schon in der scheinbaren Entfernung von 3″ unterbrochen werden müssen, während es, nach des Beobachters Angabe, in weit kleinerer wirklich geschah.

Da der Augenschein der inneren Berührungen unzweideutig gelehrt hat, dass das Fernrohr des Heliometers die Sonne nicht merklich grösser zeigt als sie wirklich ist, so ist klar, dass eine richtige Messung des Durchmessers der Sonne diesem dieselbe Grösse geben muss, welche man aus der Dauer der Verweilung des Planeten vor der Scheibe erhält. In dieser Beziehung ist also sowohl die Messung des Sonnendurchmessers, als auch die Bestimmung der Entfernung, in welcher der Planet bei dem Mittelpunkte der Sonne vorbeiging, unnöthig. Ich habe aber dennoch beide Bestimmungen gemacht, indem ich theils eine Bestätigung des unmittelbar gesehenen Resultats für interessant hielt, theils die Festsetzung der Entfernung des Planeten von dem Mittelpunkte der Sonne nothwendig war, um den wahren heliocentrischen Ort des Planeten zu erkennen.

Die Bestimmung der Entfernung der scheinbaren Bahn des Mercur von dem Mittelpunkte der Sonne habe

*) ENCKE, Venusdurchgang von 1769, p. 97. [Gotha, 1824.]

ich auf vier Messungen seiner Entfernungen von entgegengesetzten Punkten ihres Randes gegründet:

St. Z.	M. Z.	Gemessene Entf.	Positions. winkel.
$4^h\ 15^m\ 11^s,26$	$1^h\ 21^m\ 45^s,93$	$8'',6919$	348°10′
31 50,46	38 22,73	27,0584	159 28
47 28,66	53 58,37	27,0808	149 57
5 3 0,26	2 9 27,32	8,7043	324 53

Jede dieser Messungen ist das Mittel aus 8 Einstellungen, wovon 4 die Entfernung des nächsten, 4 die des entferntesten Mercursrandes vom Sonnenrande angeben; die eine Objectivhälfte blieb bei allen 8 Einstellungen unverrückt stehen, die andere war bei vieren davon auf der einen, bei den vier übrigen auf der anderen Seite des Coincidenzpunktes. Der angegebene Positionswinkel zeigt die Richtung, in welcher jede Entfernung gemessen worden ist; diese wurde am Anfange jeder der vier Messungen mit der Richtung, in welcher das Maximum oder Minimum der Entfernungen lag, näherungsweise übereinstimmend gemacht, blieb aber während der Dauer der 8 Einstellungen unverändert, weshalb die vier Angaben nicht in aller Schärfe Minima und Maxima der Entfernungen des Planeten von dem Sonnenrande sind. Diese Einrichtung der Messungen, welche voraussetzt, dass die unmittelbar gemessene Entfernung durch Rechnung auf das Minimum oder Maximum reducirt werde, ist weit vortheilhafter als die Messung des Minimums oder Maximums selbst. Denn durch die Angabe des Positionskreises erhält man das zur Berechnung der kleinen Reduction Erforderliche, während es entweder Schwierigkeit haben, oder wenigstens unnöthigen Zeitverlust verursachen würde, wenn man darauf ausgehen wollte, den Durchschnitt der beiden Objectivhälften bei jeder Einstellung genau in die Richtung der Mittelpunkte der beiden Gestirne zu bringen. — Der zur Berechnung des Einflusses der Strahlenbrechung auf diese Messungen nothwendige Stand der meteorologischen Instrumente war: Barom. $337^L,4 + 9°$R; Therm. 50° Fahr. Hiermit finden sich die von der Strahlenbrechung befreieten Entfernungen:

$8^R,6958$	459″,966
27,0696	1431,969
27,0909	1433,096
8,7073	460,574

Den Durchmesser der Sonne habe ich sowohl in verticaler, als in horizontaler Richtung gemessen. Aus zwei vollständigen Beobachtungen habe ich den verticalen Durchmesser $= 35^R,8769$ und aus eben so vielen Beobachtungen den horizontalen $= 35^R,9355$ gefunden; die Beobachtungszeit fällt auf $7^h41^m,4$ St. Z. Befreiet man diese Messungen von der Einwirkung der Strahlenbrechung, so sind sie:

$35^R,9418$	1901″,405
35,9462	1901,637

Reducirt man ihr Mittel auf den Mittelpunkt der Erde, so erhält man den Halbmesser = 15′ 50″,745. Die Tabulae Regiomontanae, welche sich auf die am Meridiankreise beobachteten Durchgänge der Sonnenscheibe durch den Meridian gründen, ergeben 15′ 51″,96: der jetzt gemessene Halbmesser ist also 1″,215 kleiner als nach der Angabe dieser Tafeln.

Den Durchmesser des Mercur habe ich in verschiedenen Winkeln mit dem Declinationskreise gemessen, und jedesmal aus drei vollständigen Beobachtungen*) Mittelwerthe erhalten, deren Reduction auf die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne ergibt:

Positionswinkel.	Durchmesser.
0° 0′	6″,670
	6,665
22 30	6,714
45 0	6,640
67 30	6,681
90 0	6,743
	6,670
112 30	6,660
135 0	6,690
157 30	6,659

Die Uebereinstimmung der Messungen der verschiedenen Durchmesser ist grösser, als man sie selbst von dem Heliometer und unter günstigen Umständen zu erwarten berechtigt ist. Diese Messungen geben daher keinen Grund, eine für uns merkliche Abplattung des Mercur anzunehmen. Das mittlere Resultat ist 6″,6792 für den Durchmesser, oder 3″,3396 für den Halbmesser.

3.

Die beobachteten Zeiten der inneren Berührungen bestimmen die Zeit der nächsten Zusammenkunft des Mercur mit der Sonne unabhängig von den Halbmessern beider Gestirne; aus den zur Zeit der Mitte des Vorüberganges gemachten Messungen der Entfernungen des Planeten von entgegengesetzten Punkten des Sonnenrandes geht die Entfernung seiner scheinbaren Bahn von dem Mittelpunkte der Sonne hervor, ohne dass auch hierauf der Halbmesser derselben Einfluss erhielte. Beides zusammen ergibt den Ort des Planeten vergleichungsweise mit dem Ort der Sonne. — Durch die Zeiten der inneren Berührungen ist ferner die Länge der vom

*) [Detail der Beobachtungen weggelassen.]

Planeten beschriebenen Chorde eines Kreises, dessen Halbmesser der Unterschied der Halbmesser beider Gestirne ist, gegeben, und diese Länge, verbunden mit der schon gefundenen Entfernung der Chorde vom Mittelpunkte, bestimmt den Unterschied der Halbmesser, also auch den Halbmesser der Sonne, wenn der des Planeten bekannt ist. Dieser letztere ist aber aus Beobachtungen vor der Sonnenscheibe, also, wenn eine Irradiation vorhanden ist, um die Grösse dieser Irradiation zu klein gefunden, weshalb der auf diese Art gefundene Halbmesser der Sonne um die Grösse der Irradiation kleiner sein wird als ihr wahrer Halbmesser. Der aus directen Messungen, oder aus der Vergleichung der Entfernungen des Mercur von entgegengesetzten Punkten des Sonnenrandes gefolgerte Halbmesser ist dagegen um eben so viel grösser als der wahre. Zwischen beiden Resultaten ist ein Unterschied von der doppelten Grösse der Irradiation.

Ich werde jetzt die einzelnen Momente der Rechnung, welche dem eben vorgezeichneten Wege im Wesentlichen folgt, anführen. Die Oerter des Planeten und der Sonne habe ich aus ENCKE's Astronom. Jahrbuche entlehnt; die mittlere Horizontalparallaxe der Sonne ist nach den, die beiden Venusdurchgänge des vorigen Jahrhunderts erschöpfenden Untersuchungen desselben Astronomen $= 8''{,}5776$, der Halbmesser nach den Tabulis Regiomontanis angenommen worden.. Auf diese Art erhält man für die in Stunden ausgedrückte mittlere Pariser Zeit t des 5. Mai:

für den Mercur:		für die Sonne:	
Scheinb. AR.	$\alpha = 42^\circ 26' 53''{,}8817 - t.78''{,}79043 - tt.0''{,}00808$		$\alpha' = 42^\circ 28' 33''{,}8966 + t.144''{,}54777 + tt.0''{,}00714$
„ Decl.	$\delta = 16\ 28\ 11{,}7290 - t.68{,}53950 - tt.0{,}02015$		$\delta' = 16\ 20\ 0{,}1800 + t.\ 42{,}60915 - tt.0{,}01424$
Horiz.-Parall.	$\pi = 15{,}3645 + t.\ 0{,}00308 - tt.0{,}00003$		$\pi' = 8{,}4976 - t.\ 0{,}00008$
Halbmesser .	$h = 5{,}9801 + t.\ 0{,}00120 - tt.0{,}00001$		$h' = 15\ 51{,}9790 - t.\ 0{,}00917$

Setzt man die Polhöhe von Königsberg $= 54^\circ 42' 50''{,}4$, seinen Mittagsunterschied $= 1^h 12^m 39^s$, die Abplattung der Erde $= 0{,}00324$, bezeichnet man die Verbesserungen der angenommenen geraden Aufsteigungen und Abweichungen durch $\Delta\alpha$, $\Delta\alpha'$ und $\Delta\delta$, $\Delta\delta'$, die Verbesserung welche man dem angenommenen Halbmesser der Sonne hinzufügen muss um den wahren zu erhalten, durch $\Delta h'$, die Grösse der Irradiation durch i, und nimmt man

$$x = \Delta\alpha \cos\delta - \Delta\alpha' \cos\delta'$$
$$y = \Delta\delta - \Delta\delta'$$

während der Dauer der Erscheinung als beständig an, so findet man:

1) aus den beiden inneren Berührungen:

	Beob. Entfernung.	Berechnete Entfernung.
Eintritt	$946''{,}057 + \Delta h' - i$	$= 944''{,}960 + 0{,}5349\,x + 0{,}8449\,y$
Austritt	$945{,}972 + \Delta h' - i$	$= 940{,}638 - 0{,}9985\,x + 0{,}0545\,y$

Die ersten Gleichungen ergeben, wenn man sie voneinander abzieht, um dadurch $\Delta h' - i$ zu eliminiren:

$$0 = +4''{,}237 + 1''{,}5334\,x + 0{,}7904\,y,$$

die anderen bestimmen, unter Voraussetzung dieser Relation zwischen x und y:

$$x = -3''{,}9571,\quad y = +2''{,}3163,\quad \Delta h' + i = -1''{,}2857,$$

und diese Werthe der unbekannten Grössen zeigen, dass die vier Messungen unter sich in gewünschter Uebereinstimmung sind, denn sie werden dadurch bis auf $+0''{,}02$, $+0''{,}07$, $-0''{,}07$, $-0''{,}02$ dargestellt. Setzt man die gefundenen Werthe von x und y in die durch die inneren Berührungen gegebenen Gleichungen, so erhält man daraus:

$$\Delta h' - i = -1''{,}257.$$

2) aus den gemessenen Entfernungen des ☿ von entgegengesetzten Punkten des ⊙Randes:

$459''{,}966 = 464''{,}462 + 0{,}2367\,x - 0{,}9721\,y + 1{,}0005\,(\Delta h' + i)$
$1431{,}969 = 1429{,}840 - 0{,}3279\,x + 0{,}9450\,y + 1{,}0003\,(\Delta h' + i)$
$1433{,}096 = 1430{,}340 - 0{,}4945\,x + 0{,}8692\,y + 1{,}0000\,(\Delta h' + i)$
$460{,}574 = 466{,}084 + 0{,}5981\,x - 0{,}8109\,y + 1{,}0004\,(\Delta h' + i)$

4.

Aus der Berechnung der gemachten Beobachtungen geht, übereinstimmend mit dem Zeugnisse des unmittelbaren Anblicks der Erscheinung, hervor, dass das Fernrohr des Heliometers die Sonnenscheibe nicht grösser zeigt als sie wirklich ist. Denn der um die Irradiation verkleinerte Halbmesser folgt aus den inneren Berührungen für den mittleren Pariser Mittag des 5. Mai

$$= 15'\,51''{,}979 - 1''{,}257 = 15'\,50''{,}722,$$

der um die Irradiation vergrösserte Halbmesser, den das Heliometer zeigt, ergibt sich aus der directen Messung

$$= 15'\,51''{,}979 - 1''{,}215 = 15'\,50''{,}764$$

und aus den gemessenen Entfernungen des Mercur von entgegengesetzten Punkten des Sonnenrandes

$$= 15'\,51''{,}979 - 1''{,}286 = 15'\,50''{,}693.$$

Also ist im Mittel aus beiden, sehr nahe gleichen Bestimmungen, der wahre Halbmesser

$$= 15'\,50,''729 - i$$

und aus den inneren Berührungen derselbe

$$= 15'\,50,''722 + i$$

so dass beide Bestimmungen mit der Annahme einer verschwindenden Irradiation auf eine unerwartete Art übereinstimmen.

Aus den Beobachtungen der äusseren Berührung beim Austritte kann nichts Anderes gefolgert werden, als die Tiefe des Ausschnittes am Sonnenrande, welcher aufhörte durch die angewandten Fernröhre sichtbar zu sein. Ich habe die beiden Beobachtungen von ARGELANDER und von mir in dieser Beziehung berechnet, die von BUSCH gemachte aber weggelassen, weil die geringere Deutlichkeit des von ihm angewandten Fernrohrs wahrscheinlich Ursache geworden ist, dass er den Ausschnitt früher aus dem Gesichte verloren hat, als die Vergrösserung des Fernrohrs erwarten lassen sollte. Die Beobachtung von mir gibt den Ausdruck der Entfernung:

$$957,''941 + \Delta h' = 952,''375 - 0{,}9989\,x + 0{,}0473\,y;$$

die von Herrn Professor ARGELANDER gemachte:

$$957{,}941 + \Delta h' = 951{,}642 - 0{,}9989\,x + 0{,}0478\,y.$$

Setzt man für x, y, $\Delta h'$ die gefundenen Werthe, so zeigen diese Ausdrücke, dass das Heliometer aufgehört hat, einen Ausschnitt am Sonnenrande zu zeigen, als seine Tiefe 0,″24, das kleinere Fernrohr als sie 0,″98 betrug. Dieses ist so nahe im umgekehrten Verhältnisse der Vergrösserungen beider Fernröhre, dass nichts Anderes erwartet werden kann, als dass Herr Professor ARGELANDER die äussere Berührung etwa so früh sehen musste, wie er sie wirklich gesehen hat: der Unterschied zwischen beiden Beobachtungen ist also weit entfernt, eine Unzuverlässigkeit der angegebenen Momente anzudeuten.

Die bis jetzt bekannte Bestimmung des Durchmessers des Mercur beruhet auf den zwischen den äusseren und inneren Berührungen bei früheren Durchgängen verflossenen Zeiten; sie hat durch unmittelbare Messungen keine so starke Bestätigung erhalten, dass das Resultat meiner Heliometerbeobachtungen dadurch aufgewogen werden könnte. Diese Bestimmung ist gewiss zu klein, da ihr die Voraussetzung zum Grunde liegt, dass man den Ausschnitt am Sonnenrande bis zu seinem wahren Verschwinden habe verfolgen können. Auch habe ich mit dem starken Fernrohre des Heliometers und unter den günstigen Umständen dieser Beobachtung, den Mercur weit länger am Sonnenrande gesehen, als nach der früheren Annahme des Durchmessers (6,″01 für die Entfernung = 1, nach WURM's Rechnungen Mon. Cor. XIV. S. 283) möglich gewesen sein würde.

5.

Indem alle bei Gelegenheit des Durchganges des Mercur durch die Sonne gemachten Beobachtungen sich gegenseitig so glücklich bestätigen, dass in dieser Beziehung nichts zu wünschen übrig bleibt, auch die Beschaffenheit der Luft und das zu den Beobachtungen angewandte Instrument einen ähnlichen Erfolg, wenn auch nicht nothwendig eine der vorhandenen gleiche Uebereinstimmung erwarten liessen, so ist aller Grund vorhanden, dem Orte des Mercur, welchen dieselben Beobachtungen ergeben, eine grosse Sicherheit zuzutrauen. Ich werde daher noch die heliocentrische Länge und Breite des Planeten ableiten.

Für die mittlere Pariser Zeit 0^h36^m, welche der Mitte des Durchganges ohngefähr entspricht, sind die scheinbaren Oerter der beiden Gestirne den Formeln des 3. § gemäss:

	Mercur.	Sonne.
α	42°26′ 6,″605	42°30′ 0,″628
δ	16 27 30, 598	16 20 25, 740

Sieht man den Ort der Sonne als richtig an, so ergeben die gefundenen Werthe von x und y die Verbesserungen der Rectascension und Declination des Mercur: $-4,''126$ und $+2,''316$, also den beobachteten scheinbaren Ort desselben:

$$\alpha = 40^0\,26'\,2,''479; \quad \delta = 16^0\,27'\,32,''914.$$

Befreiet man diesen Ort und den der Sonne von der Aberration, so findet man die wahren Oerter:

	Mercur.	Sonne.
α	42°25′ 56,″450	42°30′ 20,″611
δ	16 27 27,669	16 20 31,631

und wenn man diese, unter Annahme der Schiefe der Ecliptik $= 23^0\,27'\,34,''57$, auf diesen grössten Kreis reducirt:

Länge	44°56′ 26,″895	44°58′ 26,″981
Breite	+ 7 51,733	— 0,377

Wenn man die Logarithmen der Entfernungen des Mercur und der Sonne aus den Ephemeriden zu 9,7467873 und 0,0040698 nimmt, so erhält man den wahren heliocentrischen Ort des Planeten:

M. Z. Paris.	Länge.	Breite.
Mai 5. $0^h\,36^m\,0^s$	225° 0′ 55,″54	+ 0° 9′ 44,″41

Will man eine andere Länge und Breite der Sonne der Rechnung zum Grunde legen, nämlich

$44^0\,58'\,26,''981 + \Delta l$ und $-0,''377 + \Delta b$

so erhalten die Länge und Breite des Planeten dadurch Aenderungen, welche nicht merklich von $+\Delta l$ und $-\Delta b$ verschieden sind.

---

172. Neue Berechnungsart für die Methode der Entfernungen des Mondes von anderen Himmelskörpern.*)

(Astron. Untersuchungen II, p. 266.)

Die vielfältigen vorhandenen Vorschriften zur Ableitung der geographischen Länge eines Ortes aus der daselbst, zu gegebener Zeit, gemessenen Entfernung des Mondes von einem anderen Himmelskörper, sind sämmtlich weit entfernt, nichts zu wünschen übrig zu lassen: alle entfernen sich mehr oder weniger von der Wahrheit; die meisten opfern die Genauigkeit des Resultats absichtlich der Abkürzung der Rechnung auf. Dieses letztere geht von der Ansicht aus, dass dem Seefahrer die Anwendung der Methode erleichtert werden müsse, selbst wenn dadurch die Unsicherheit ihres Resultats über die Grenzen hinaus vergrössert wird, welche der Schwierigkeit der Beobachtungen zur See und den vorhandenen Unvollkommenheiten der astronomischen Tafeln angemessen sind.

Im Allgemeinen kann man eine auf Kosten der Genauigkeit erlangte Erleichterung für erlaubt halten, wenn der Fehler, den man dadurch begeht, beträchtlich kleiner ist, als der aus unvermeidlichen Ursachen entstehende; auch wenn der aus beiden zusammengesetzte Fehler nicht so gross ist, dass er der Erreichung des Zweckes der Anwendung entgegenträte. Allein, so viel ich weiss, ist das Verhältniss der Fehler der Berechnung der Beobachtungen der Entfernungen des Mondes, zu den Fehlern der Beobachtungen selbst und der Tafeln, nie ordentlich untersucht worden, was übrigens auch nur bedingungsweise geschehen könnte, indem unter verschiedenen Verhältnissen gemachten Beobachtungen ein sehr verschiedener Grad von Genauigkeit gegeben werden kann; ferner kann der Zweck der Anwendung der Methode in gewissen Fällen die grösste erreichbare Genauigkeit ihres Resultats wünschenswerth machen, während diese in anderen Fällen kaum einen Werth hat. Wenn z. B. Entfernungen des Mondes beobachtet werden, um den ganz unsicher gewordenen Ort eines Schiffes auf dem hohen Meere wiederzufinden, so wird vielleicht ein Fehler der Länge von einem halben Grade oder mehr unerheblich erscheinen; wenn dagegen der Zweck der Beobachtungen ist, den Gang auf dem Schiffe befindlicher Chronometer von Zeit zu Zeit zu prüfen, oder die Länge eines Aufenthaltsorts möglichst genau festzusetzen, so wird man denselben Fehler der vorher unerheblich erschien, gern vermeiden, indem man den Fehler des Resultats, durch genauere Rechnung, auf seine unvermeidliche Grösse zurückführt. — Ich glaube, dass die Vervollkommnung und allgemeinere Verbreitung, welche die Chronometer erfahren haben, die erstere Anwendung der Methode der Mondsentfernungen schon bedeutend eingeschränkt haben und sie noch mehr einschränken werden, so dass das Gewicht dieser Methode in späterer Zeit nur in der anderen Anwendung hervortreten wird. Je mehr man darauf ausgehen wird, durch häufige, an einander nahen Tagen gemachte Wiederholungen der Beobachtungen der Prüfung der Chronometer, oder der Bestimmung einer festen Länge, möglichst grosse Sicherheit zu geben, desto mehr wird man das Bedürfniss einer genaueren Berechnungsart der Beobachtungen fühlen.

Indem ich hierdurch gezeigt habe, dass Anwendungen der Methode der Mondsentfernungen vorkommen, in welchen eine genaue Berechnungsart derselben wünschenswerth ist, will ich nicht läugnen, dass ich eine solche gesucht haben würde, wenn ich ihr auch allein ein astronomisches Interesse beilegte. Jetzt werde ich näher angeben, was die gebräuchliche Berechnungsart, abgesehen von den schon erwähnten, absichtlichen Beschränkungen ihrer Genauigkeit, zu wünschen übrig lässt.

Die vorgeschlagenen Arten, die Abplattung der Erde in Rechnung zu bringen, sind noch nicht so geschmeidig, dass sie in allgemeine Anwendung gekommen wären, obgleich die Voraussetzung der Kugelgestalt der Erde einen mehr als 15″ betragenden Fehler der Rechnung zur Folge haben kann. — Ferner wird die Befreiung der gemessenen Entfernung von der Strahlenbrechung dadurch fehlerhaft, dass die Strahlenbrechungen

*) [Abh. XIV aus 356 d. a. Verz., zum Theil ohne numerische Beispiele. — Dieselbe Abh. in wenig verschiedener Fassung auch Astron. Nachr. **10,** p. 17 (262 d. a. Verz.).]

für die Mittelpunkte der Gestirne berechnet werden, während sie für diejenigen Punkte ihrer Ränder berechnet werden sollten, zwischen welchen man die Entfernung gemessen hat. Dieser Fehler erlangt seinen grössten Einfluss wenn Mond und Sonne in Einem Verticalkreise, beide auf derselben Seite des Scheitelpunktes stehen und die Entfernung ihrer nächsten Ränder gemessen wird, denn dann ist derselbe der Summe der Veränderungen der Strahlenbrechung vom Mittelpunkte bis zum Rande jedes der beiden Gestirne gleich; er beträgt, wenn eins derselben resp. 20°, 15°, 10°, 5° über dem Horizonte, das andere beträchtlich höher steht, etwa 3″, 5″, 9″, 27″; und selbst dem letzten, grössten Fehler wird man wirklich ausgesetzt sein, indem es nicht rathsam sein würde, einen grösseren Theil der sichtbaren Hälfte der Himmelskugel, als nothwendig geschehen muss, der Anwendung der Mondsmethode zu entziehen. Die Grenze dieses Theils wird durch diejenigen Störungen der Strahlenbrechung bestimmt, welche durch die Nähe des Horizonts erzeugt, aber durch die meteorologischen Instrumente nicht erkannt werden; dass diese selbst in der Zenithdistanz von 85° noch nicht so beträchtlich sind, dass sie nöthigten die Grenze höher hinauf zu verlegen, habe ich durch Beobachtungen gezeigt*).

Zu diesen, der Rechnungsmethode angehörigen Fehlern gesellen sich noch andere, welche nicht eigentlich aus der Methode, sondern aus der gebräuchlichen Art sie anzuwenden entstehen. Diese fordert nämlich die Benutzung von Hülfstafeln, welche die Horizontalparallaxe des Mondes und seine scheinbare Höhe zu Argumenten haben und entweder den Unterschied der Höhenparallaxe und Strahlenbrechung, oder einen davon abhängigen Logarithmen**) enthalten, dessen jedesmalige Berechnung die Arbeit beträchtlich vermehren würde. Diese Tafeln können aber nur unter der Voraussetzung eines mittleren Zustandes der Strahlenbrechung berechnet werden, welche häufig beträchtliche Fehler verursachen wird. Um ihre Grösse anschaulich zu machen, führe ich hier die Veränderungen an, welche die Strahlenbrechung in verschiedenen Zenithdistanzen erfährt, wenn sich der Barometerstand um einen englischen Zoll, der Thermometerstand um 40° F. ändert:

Z. D.	Barom.	Therm.
40°	1″,6	3″,8
50	2, 0	4, 6
60	3, 4	7, 8
70	5, 3	12, 4
75	7, 1	16, 8
80	10, 6	25, 4
85	19, 3	48, 5

Ich bemerke zu dieser Tafel noch, dass die grösseren, darin vorkommenden Einflüsse der Veränderlichkeit des Standes der meteorologischen Instrumente nicht etwa durch Ausschliessung von Beobachtungen, welche bei grösseren Zenithdistanzen der Gestirne gemacht werden, vermieden werden sollen, sondern dass man die erwähnten Tafeln sogar noch weiter, bis zur Zenithdistanz von 87° fortgesetzt hat, ohne die Seefahrer vor grossen Zenithdistanzen zu warnen. — Offenbar kann die Strahlenbrechung nur richtig in Rechnung gebracht werden, wenn zur Zeit der Messung einer Entfernung des Mondes auch die Stände des Barometers und Thermometers beobachtet werden. Diese Beobachtung ist also unerlässliche Bedingung der Erlangung des richtigen Resultats der Messung.

Auch sollte, meines Erachtens, die Auflösung der Aufgabe so eingerichtet werden, dass das Messen der Höhen der Gestirne vermieden und die Beobachtung auf die Messung der Entfernung allein beschränkt wird. Denn durch die scheinbare, zu gegebener Zeit des Beobachtungsortes gemessene Entfernung, durch die Polhöhe und durch die in den Ephemeriden enthaltenen Oerter der Gestirne, ist die Aufgabe völlig bestimmt, und wenn man noch Anderes aus Beobachtungen ableitet und in der Rechnung anwendet, so ist die Folge davon, dass die Fehler dieser Beobachtungen das eigentliche Resultat der Entfernungsmessung mehr oder weniger entstellen. Dieser Nachtheil würde jedoch von geringer Bedeutung für die Anwendungen sein, wenn man die Höhen der Gestirne immer mit einiger Genauigkeit messen könnte; aber oft ist die Undeutlichkeit des Meereshorizonts, oder die unregelmässige Einwirkung der Strahlenbrechung auf die Zenithdistanz in welcher er erscheint, so störend, dass das Messen der Höhen nur eine rohe Annäherung gewähren kann; in gewissen Fällen ist der Horizont ganz unsichtbar, jede Messung der Höhen fällt weg und die Rechnung tritt nothwendig an ihre Stelle. — Die Veranlassung der Beeinträchtigung des Resultats der Hauptbeobachtung durch das Messen der Höhen würde in geringerem Maasse vorhanden sein, wenn man die Arbeit vermindern könnte, welche ihre Berechnung fordert; diese Verminderung

*) Astr. Beobb. auf der Sternwarte zu Königsberg. VII. Abtheilung. S. XXVII.

**) Logarithmic Difference, nach der Benennung der Englischen Navigationsbücher.

ist daher eine der Verbesserungen der bisherigen Rechnungsart, welche man zu erlangen suchen muss.

Die angeführten Unvollkommenheiten des Resultats der bisherigen Berechnungsart der Messungen der Entfernung des Mondes von anderen Gestirnen könnte man zwar verbessern, ohne eine gänzlich veränderte Berechnungsart zu suchen; allein die letztere, deren Darstellung der Zweck dieser Abhandlung ist, führt weit leichter zum Ziele. — Als diese neue Methode im J. 1832 in den Astron. Nachrichten zuerst bekannt wurde [**10**, p. 17], hielt mein Freund SCHUMACHER sie für geeignet zur Anwendung der Seefahrer, und veranstaltete daher die Berechnung so eingerichteter Ephemeriden wie sie sie fordert. Diese sind für die Jahre 1835 bis 1838 incl. erschienen*), allein sie scheinen der Methode den beabsichtigten Eingang nicht verschafft zu haben. Da diese Methode indessen ihr richtiges Resultat nicht durch eine Rechnung von lästiger Weitläuftigkeit erkauft, sondern eine nur wenig grössere Arbeit fordert, als die ist, wodurch man das unrichtige Resultat der älteren Methode erlangt, so glaube ich, dass sie, trotz des jetzigen Fehlschlagens der Bemühungen sie einzuführen, nicht für immer der Vergessenheit übergeben sein wird. Ich erwarte vielmehr, dass eine nicht ferne Zeit die Anwendung der Methode der Mondsentfernungen auf die oben schon erwähnten Fälle der Berichtigung der Chronometer und der Bestimmung fester Längen beschränken, und dass dann Veranlassung vorhanden sein wird, nicht der Leichtigkeit der Rechnung allein, sondern auch den Vernachlässigungen wodurch ihre Kürze erkauft wird, einiges Gewicht beizulegen.

1.

Die bisher angewandten Berechnungsarten der Mondsentfernungen sind, so verschiedenartig sie auch entwickelt worden sind, sämmtlich von Einer Ansicht ihrer Aufgabe ausgegangen: es werden nämlich zwei sphärische Dreiecke betrachtet, deren Seiten resp. die scheinbaren Zenithdistanzen und die scheinbare Entfernung, und die wahren Zenithdistanzen und die wahre Entfernung sind, und welche beide einen gemeinschaftlichen Winkel am Scheitelpunkte haben; die Reduction der scheinbaren Entfernung auf die wahre wird dadurch erlangt, dass die Veränderung der dem gemeinschaftlichen Winkel gegenüberstehenden Seite gesucht wird, welche aus den, von der Parallaxe und der Refraction herrührenden Veränderungen der ihn einschliessenden Seiten entsteht.

Die Berechnungsart, welche ich hier mittheilen werde, geht von einer anderen Ansicht der Aufgabe aus. Ich werde sie zuerst im Allgemeinen erläutern, ohne mich dabei auf die Entwickelung ihrer einzelnen Momente einzulassen; dann werde ich, ohne alle Rücksicht auf das Bedürfniss und die Bequemlichkeit der Seefahrer, diese Entwickelung richtig durchführen; endlich werde ich Abkürzungen aufsuchen, welche die Genauigkeit des Resultats wenig beeinträchtigen und welche benutzt werden können, wenn es sich um wirkliche Anwendung handelt. — Ich werde zuerst den einfachsten Fall voraussetzen, nämlich, dass das Gestirn zwischen welchem und dem Monde die Entfernung gemessen wird ein Fixstern, also ein Punkt ohne Halbmesser und Parallaxe ist. Der zusammengesetztere Fall, welcher eintritt, wenn das mit dem Monde verglichene Gestirn Halbmesser und Parallaxe zeigt, wird später auf den einfacheren zurückgeführt werden.

Ich nehme den Mittagsunterschied des Beobachtungsortes und des Meridians der Ephemeride als näherungsweise bekannt an ($= m$), und suche die aus der Vergleichung der unmittelbar beobachteten Entfernung eines der Mondsränder von dem Sterne ($= D'$) und der Zeit der Beobachtung ($= T$), mit den Angaben der Ephemeride hervorgehende Verbesserung desselben ($= x$). Den Mittagsunterschied und seine Verbesserung, positiv wenn sie westlich, negativ wenn sie östlich sind, und die Zeitart in welcher T ausgedrückt wird so angenommen, wie die Ephemeride sie voraussetzt, suche ich für die Zeit $T + m$, aus der Ephemeride, die wahre Entfernung des Mittelpunktes des Mondes von dem Sterne ($= d$), berechne daraus die durch die Parallaxe geänderte ($= d'$) und endlich die auch die Refraction einschliessende scheinbare Entfernung des Mondrandes ($= D$). Diese mit der beobachteten verglichen, ergibt die gesuchte Verbesserung des angenommenen Mittagsunterschiedes nach der Formel:

$$x = \frac{D' - D}{n'}$$

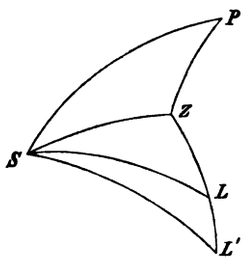
in welcher n' die einer Zeitsecunde des Mittagsunterschiedes entsprechende Veränderung von D bedeutet.

Zuerst bemerke ich, dass man die Abplattung der Erde vollständig berücksichtigt, indem man die für den Mittelpunkt der Erde geltenden Angaben der Ephemeride, vor ihrer Anwendung, auf denjenigen Punkt der Erdaxe reducirt, welcher in der Lothlinie des Beobachtungsorts liegt. Ich werde also hier diese Reduction als schon gemacht annehmen, den Punkt auf welchen

*) Distances of the Sun and the four Planets Venus, Mars, Jupiter and Saturn from the Moon etc. Copenhagen 1834—1837.

sie sich bezieht aber, der Kürze wegen, den Punkt O nennen.

Ferner bringe ich die Wirkungen der Parallaxe und der Refraction, von einander getrennt, die erstere auf folgende Art in Rechnung. Wenn P den Pol, Z das Zenith, S den Stern, L den vom Punkte O gesehenen Ort des Mondes, L' den vom Beobachtungsorte gesehenen bedeuten, so werden die Zenithdistanz ZS ($= Z$) und der parallactische Winkel PSZ ($= q$) des Sterns aus der Polhöhe ($= \varphi$), dem Stundenwinkel ($= t$) und der Declination ($= \Delta$) berechnet; für die Zeit $T + m$ werden die Entfernung, der Positionswinkel des Mondes am Sterne, die Aequatoreal-Horizontalparallaxe und der Halbmesser des Mondes aus der Ephemeride genommen und durch d, Q, π, ϱ, nach ihrer Reduction auf den Punkt O aber durch $d_{,}$, $Q_{,}$, $\pi_{,}$, $\varrho_{,}$ bezeichnet; durch $ZS = Z$, $SL = d$, und den Winkel $ZSL = Q_{,} - q$ ($= P_{,}$) werden endlich $SL' = d'$, ZSL' ($= P'$) und die Entfernung des Mondes von dem Beobachtungsorte ($= r'$) ausgedrückt. Da der scheinbare Halbmesser des Mondes ($= \varrho'$) durch $\varrho_{,}$ und r' gegeben ist, so erhält man, indem man ihn von d' abzieht oder zu d' hinzufügt, die scheinbare Entfernung des Mondrandes vom Sterne ($= d''$), so wie sie sein würde wenn keine Refraction vorhanden wäre.



Die Einwirkung der Refraction, durch welche d'' in D verwandelt wird, erhält man durch Z, d'' und P' ausgedrückt, auf eine Art, welche durch die unten vorkommende Entwickelung besser erläutert werden wird als durch das, was ich in diesem Abrisse der Methode darüber sagen könnte. Ueber die Berechnung von n' braucht hier gleichfalls nichts gesagt zu werden, da es sich von selbst versteht, dass man sie durch dasjenige Mittel erhalten wird, welches das Verhältniss der zusammengehörigen Veränderungen von m und D am leichtesten ergibt.

2.

Ich werde nun die einzelnen Theile dieses Abrisses ausführen und mit der der Ephemeride zu gebenden Einrichtung anfangen.

Die Ephemeride soll die sich auf den Mittelpunkt der Erde beziehenden d und Q und das zu ihrer Reduction auf die sich auf den Punkt O beziehenden ähnlichen Grössen $d_{,}$ und $Q_{,}$ Erforderliche enthalten. Zählt man den Positionswinkel des Mondes am Sterne von Norden durch Osten u. s. w., von 0 bis 360°, so hat man $d_{,}$ und $Q_{,}$, durch Δ, A, $\delta_{,}$, α folgendermassen ausgedrückt:

$$\cos d_{,} = \sin\Delta \sin\delta_{,} + \cos\Delta \cos\delta_{,} \cos(\alpha - A)$$
$$\sin d_{,} \cos Q_{,} = \cos\Delta \sin\delta_{,} - \sin\Delta \cos\delta_{,} \cos(\alpha - A)$$
$$\sin d_{,} \sin Q_{,} = \cos\delta_{,} \sin(\alpha - A)$$

Die Entfernung des Punktes O von dem Mittelpunkte der Erde, welche ich durch $-ai$ bezeichnen werde, ist bekanntlich

$$= \frac{-a\,\varepsilon\varepsilon \sin\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon\varepsilon \sin\varphi^2}}$$

wo a den Aequatorealhalbmesser der Erde, ε die Excentricität ihrer Meridiane bezeichnen. Werden die Entfernungen des Mondes vom Mittelpunkte der Erde und vom Punkte O durch r und $r_{,}$ bezeichnet, so hat man:

$$r_{,} \cos\delta_{,} = r \cos\delta$$
$$r_{,} \sin\delta_{,} = r \sin\delta + ai$$

wodurch die obigen Formeln, wenn man sie in $r_{,}$ multiplicirt, sich in

$$r_{,} \cos d_{,} = r[\sin\Delta \sin\delta + \cos\Delta \cos\delta \cos(\alpha - A)] + ai \sin\Delta$$
$$r_{,} \sin d_{,} \cos Q_{,} = r[\cos\Delta \sin\delta - \sin\Delta \cos\delta \cos(\alpha - A)] + ai \cos\Delta$$
$$r_{,} \sin d_{,} \sin Q_{,} = r \cos\delta \sin(\alpha - A)$$

verwandeln. Die von i unabhängigen Theile dieser Formeln drücken resp.

$$r \cos d, \quad r \sin d \cos Q, \quad r \sin d \sin Q$$

aus. Wenn man daher die aus

$$\cos d = \sin\Delta \sin\delta + \cos\Delta \cos\delta \cos(\alpha - A)$$
$$\sin d \cos Q = \cos\Delta \sin\delta - \sin\Delta \cos\delta \cos(\alpha - A)$$
$$\sin d \sin Q = \cos\delta \sin(\alpha - A)$$

hervorgehenden Werthe von δ und Q in die Ephemeride bringt, so erhält man die zur Berechnung der Mondsentfernungen geeigneten, eine fernere Rücksicht auf die Abplattung der Erde unnöthig machenden Werthe von $r_{,}$, $d_{,}$, $Q_{,}$ aus den Formeln:

$$r_{,} \cos d_{,} = r \cos d + ai \sin\Delta$$
$$r_{,} \sin d_{,} \cos Q_{,} = r \sin d \cos Q + ai \cos\Delta$$
$$r_{,} \sin d_{,} \sin Q_{,} = r \sin d \sin Q$$

welche, wenn man das (wenig bedeutende) Quadrat von i vernachlässigt:

$$r_{,} = r + ai \sin d$$
$$d_{,} = d - \frac{a}{r} i[\sin\Delta \sin d - \cos\Delta \cos d \cos Q]$$
$$Q_{,} = Q - \frac{a}{r} i \frac{\cos\Delta \sin Q}{\sin d}$$

ergeben.

Da die Entfernung des Punktes O vom Beobachtungsorte

$$= \frac{a}{\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon\sin\varphi^2}}$$

ist, so hat man:

$$\sin\pi_, = \frac{a}{r_,\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon\sin\varphi^2}} = \frac{r\sin\pi}{r_,\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon\sin\varphi^2}}$$

$$\sin\varrho_, = \frac{r}{r_,}\sin\varrho$$

Damit man $\pi_,$ und $\varrho_,$ durch die π und ϱ enthaltende Ephemeride leicht finden könne, muss diese also auch den Logarithmen $\frac{r}{r_,}$ leicht angeben. Das erste, allein in Betracht kommende Glied seiner Reihenentwickelung ist:

$$-0{,}43429\,.\,\varepsilon\varepsilon\sin\pi\sin\delta\,\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon\sin\varphi^2}}$$

wovon die Ephemeride das von φ unabhängige Product enthalten kann.

Die Ephemeride wird daher das Erforderliche enthalten, wenn sie für jede dritte Stunde ergibt ($\omega = 206264''{,}8$):

1) d und den Logarithmen von
$$-\omega\,\varepsilon\varepsilon\sin\pi[\sin\Delta\sin d - \cos\Delta\cos d\cos Q];$$
2) Q und den Logarithmen von
$$-\omega\,\varepsilon\varepsilon\sin\pi\cdot\frac{\cos\Delta\sin Q}{\sin d};$$
3) $\log\sin\pi$ und $\log\sin\varrho$ und den Logarithmen von
$$-43429\,\varepsilon\varepsilon\sin\pi\sin\delta;$$
4) die Rectascension der Sonne weniger der Rectascension des Sterns, sowie auch die Declination des Sterns.

Die Anwendung dieser Ephemeride fordert dann, dass zu den drei Logarithmen, von welchen die Reduction auf den Punkt O abhängt, der Logarithme von

$$\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon\sin\varphi^2}}$$

für welchen man ohne wesentlichen Nachtheil $\log\sin\varphi$ nehmen kann, addirt wird; die Summen sind die Logarithmen der Reductionen von d, Q und $\log\sin\varrho$, die letztere in Einheiten der fünften Decimale angegeben. Addirt man auch zu $\log\sin\pi$ die letztere Reduction und überdies den Logarithmen von

$$\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon\sin\varphi^2}}$$

den man aus einer Tafel, deren Argument φ ist, nehmen kann, so erhält man $\log\sin\pi$ und hiermit Alles, was man für den Mond gebraucht. Die beiden Angaben 4. sollen die Rechnung für den Stern erleichtern: die erstere derselben, zu der Beobachtungszeit T addirt, ergibt die Entfernung des Sterns von seiner nächstvorhergegangenen Culmination. Sind die Ephemeriden auf wahre Zeit gestellt, so wird die wahre Rectascension der Sonne, sind sie auf mittlere Zeit gestellt, die mittlere zur Berechnung dieser Angabe angewandt.

[Beispiel einer Ephemeride und deren Anwendung.]

3.

Ich werde nun die Wirkung der Parallaxe betrachten. Die Zenithdistanz Z und der parallactische Winkel q des Sterns finden sich aus den Formeln:

$$\left.\begin{aligned}\cos Z &= \sin\Delta\sin\varphi + \cos\Delta\cos\varphi\cos t\\ \sin Z\cos q &= \cos\Delta\sin\varphi - \sin\Delta\cos\varphi\cos t\\ \sin Z\sin q &= \cos\varphi\sin t\end{aligned}\right\}\ldots(1a)$$

oder aus den zur logarithmischen Rechnung eingerichteten:

$$\left.\begin{aligned} a &= \cos\varphi\sin t\\ f\sin F &= \cos\varphi\cos t \qquad \operatorname{tg} Z\cos q = \operatorname{cotg}(F+\Delta)\\ f\cos F &= \sin\varphi \qquad \operatorname{tg} Z\sin q = \frac{a}{f}\operatorname{cosec}(F+\Delta)\end{aligned}\right\}(1b)$$

Wenn man die Zenithdistanzen des Mondes, so wie sie von dem Punkte O aus und von dem Beobachtungsorte erscheinen, durch z, und z', den Azimuthalwinkel zwischen dem Monde und dem Sterne durch E bezeichnet, übrigens aber die im 1. § gegebenen Bezeichnungen anwendet, so hat man die trigonometrischen Formeln:

$$\begin{aligned}\cos d, &= \cos Z\cos z, + \sin Z\sin z,\cos E\\ \sin d,\cos P, &= \sin Z\cos z, - \cos Z\sin z,\cos E\\ \sin d,\sin P, &= -\sin z,\sin E\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}\cos d' &= \cos Z\cos z' + \sin Z\sin z'\cos E\\ \sin d'\cos P' &= \sin Z\cos z' - \cos Z\sin z'\cos E\\ \sin d'\sin P' &= -\sin z'\sin E\end{aligned}$$

Ferner hat man zwischen $z,$, z' und r' ($r, = 1$ angenommen) die Relationen:

$$\begin{aligned} r'\cos z' &= \cos z, - \sin\pi,\\ r'\sin z' &= \sin z,\end{aligned}$$

welche, wenn man die letzten Formeln in r' multiplicirt und mit den ersten vergleicht,

$$\begin{aligned} r'\cos d' &= \cos d, - \sin\pi,\cos Z\\ r'\sin d'\cos P' &= \sin d,\cos P, - \sin\pi,\sin Z\\ r'\sin d'\sin P' &= \sin d,\sin P,\end{aligned}$$

ergeben.

Die hieraus hervorgehenden, folgenden Ausdrücke der unbekannten Grössen:

$$\left.\begin{aligned} r'\cos d' &= \cos d, - \sin\pi,\cos Z\\ r'\sin d'\cos(P'-P,) &= \sin d, - \sin\pi,\sin Z\cos P,\\ r'\sin d'\sin(P'-P,) &= \sin\pi,\sin Z\sin P,\end{aligned}\right\}(2a)$$

empfehlen sich durch ihre Einfachheit, sowie auch durch den Umstand, dass ihre von der Parallaxe unabhängigen Theile, nämlich $\cos d_,$ und $\sin d_,$, keine Rechnung erfordern, sondern unmittelbar aus den nichtlogarithmischen trigonometrischen Tafeln genommen werden.

Zu einer zweiten Umformung gelangt man durch die Einführung eines Hülfswinkels G. Dividirt man nämlich die Summe der aus den beiden letzten der eben gegebenen Formeln hervorgehenden

$$r' \sin d' \cos(P' - P_,) = \sin d_, - \sin\pi, \sin Z \cos P_,$$
$$r' \sin d' = \sin d_, \cos(P' - P_,) - \sin\pi, \sin Z \cos P'$$

durch $1 + \cos(P' - P_,)$, so erhält man:

$$r' \sin d' = \sin d_, - \sin\pi, \sin Z \frac{\cos\frac{1}{2}(P' + P_,)}{\cos\frac{1}{2}(P' - P_,)}$$

und wenn man g und G so bestimmt, dass

$$g \sin G = \sin Z \frac{\cos\frac{1}{2}(P' + P_,)}{\cos\frac{1}{2}(P' - P_,)}$$
$$g \cos G = \cos Z$$

sind:

$$r' \cos d' = \cos d_, - g \sin\pi, \cos G$$
$$r' \sin d' = \sin d_, - g \sin\pi, \sin G$$

oder:

$$r' \cos(d' - G) = \cos(d_, - G) - g \sin\pi,$$
$$r' \sin(d' - G) = \sin(d_, - G)$$

Durch Division des ersten dieser Ausdrücke durch den zweiten erhält man den Ausdruck von $\operatorname{cotg}(d' - G)$, sowie auch durch Division des obigen Ausdrucks von $r' \sin d'_\bullet \cos P'$ durch den von $r' \sin d' \sin P'$ den Ausdruck von $\operatorname{cotg} P'$, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cotg} P' &= \operatorname{cotg} P_, - \frac{\sin\pi, \sin Z}{\sin d, \sin P,} \\ \operatorname{cotg}(d' - G) &= \operatorname{cotg}(d_, - G) - \frac{g \sin\pi,}{\sin(d_, - G)} \end{aligned}\right\} \ldots (2\text{b})$$

Diese Formeln erscheinen noch bequemer als die vorigen und verdienen, wenn man r' nicht kennen zu lernen verlangt, den Vorzug. Sie ergeben, bei gleicher Schärfe der Rechnung, auch ein genaueres Resultat. Rechnet man nach den Formeln (2a), indem man $\cos d_,$, $\sin d_,$ aus nichtlogarithmischen Tafeln mit 6 richtigen Decimalstellen nimmt und auch im Verfolge der Rechnung Logarithmen mit eben so vielen Decimalstellen anwendet, so kann d' bis auf $0''{,}502$ fehlerhaft werden; wogegen die Rechnung nach den Formeln (2b), bei welcher Logarithmen nur zur Erfindung der von der Parallaxe abhängigen Grössen angewandt werden, unter der Voraussetzung von Tangententafeln mit 6 richtigen Decimalstellen, die Grenze des Fehlers auf $0''{,}206$ reducirt. Man bemerkt übrigens leicht, dass die Berechnung von P' und aller von der Parallaxe abhängigen Grössen, mit geringerer Genauigkeit geführt werden darf, als die Berechnung von d'.

Man kann auch Formeln zur Berechnung der Unterschiede $d' - d_,$ und $P' - P_,$ angeben, sowohl streng richtige, als durch Annäherung zum Ziele führende; allein ich werde es hier bei den abgeleiteten bewenden lassen und jene mittheilen, wo ich sie gebrauchen werde.

Aus r' und $\varrho_,$ erhält man:

$$\varrho' = \frac{\varrho,}{r'}$$

und damit die scheinbare Entfernung des nächsten oder entferntesten Mondrandes (d'') von dem Sterne:

$$d'' = d' \mp \varrho'.$$

4.

Es ist noch nöthig, der Entfernung d'' die Einwirkung der Strahlenbrechung hinzuzusetzen.

Aller Schärfe nach genommen ist diese Einwirkung der Unterschied zwischen d'' und dem Bogen eines grössten Kreises, welcher am scheinbaren Orte des Sterns anfängt und sich da endigt, wo er auf dem Rande des (nicht kreisförmig erscheinenden) Mondes normal ist. Man übersieht zwar wohl, dass der Unterschied dieser, die Figur der Scheibe des Mondes berücksichtigenden Einwirkung und der Veränderung der Entfernung d'' durch die Strahlenbrechung, nicht sehr beträchtlich sein könne; allein ohne nähere Erörterung glaube ich ihn nichtsdestoweniger nicht übergehen zu dürfen.

Zuerst werde ich die Veränderung der Entfernung d'' suchen, welche dadurch entsteht, dass die Strahlenbrechung die beiden Punkte erhöhet, zwischen welchen diese Entfernung stattfindet. Der endliche Ausdruck der scheinbaren Entfernung (D) ist bekanntlich:

$$\cos D = \cos(z - r)\cos(Z - R) + \frac{\sin(z - r)\sin(Z - R)}{\sin z \sin Z}(\cos d'' - \cos z \cos Z)$$

worin die wahren Zenithdistanzen des Punkts am Mondrande und des Sterns durch z, Z, die scheinbaren durch $z - r$, $Z - R$ bezeichnet sind. Wenn man die Winkel, welche in dem Dreiecke zwischen dem Scheitelpunkte und den wahren Oertern des Punkts am Mondrande und des Sterns, an den Seiten z und Z anliegen, durch $360^0 - p'$ und P' bezeichnet, so findet man durch Entwickelung dieses Ausdrucks bis zu den Quadraten und dem Producte der Refractionen incl.:

$$D = d'' - r\cos p' - R\cos P' + (r\sin p' + R\sin P')^2 \tfrac{1}{4} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} d'' - (r\sin p' - R\sin P')^2 \tfrac{1}{4} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} d''$$

welcher Ausdruck so umgeformt werden kann, dass

seine Berechnung wenige Mühe verursacht. Um dieses zu erlangen, führt man statt der Strahlenbrechungen zwei Grössen k und K, welche so davon abhängen, dass

$$k = r \operatorname{cotg} z, \qquad K = R \operatorname{cotg} Z$$

ist, in die Rechnung ein und drückt dann z und p' durch Z, P' und d'' aus, was durch die Formeln:

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos d'' \cos Z + \sin d'' \sin Z \cos P' \\ \sin z \cos p' &= \sin d'' \cos Z - \cos d'' \sin Z \cos P' \\ \sin z \sin p' &= -\sin Z \sin P' \end{aligned}$$

geschieht. Bestimmt man einen Hülfswinkel H nach der Formel:

$$\operatorname{tg} H = \operatorname{tg} Z \cos P'$$

so erhält man dadurch:

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{\cos Z}{\cos H} \cos (d'' - H) \\ \sin z \cos p' &= \frac{\cos Z}{\cos H} \sin (d'' - H) \\ \sin z \sin p' &= -\sin Z \sin P' \end{aligned}$$

und wenn man dieses in dem Ausdrucke von D substituirt:

$$\begin{aligned} D = d'' &- k \operatorname{tg} (d'' - H) - K \operatorname{tg} H \\ &+ \tfrac{1}{4} \operatorname{tg} Z^2 \sin P'^2 \left[\left(\frac{k \cos H}{\cos (d'' - H)} - K \right)^2 \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} d'' - \right. \\ &\left. - \left(\frac{k \cos H}{\cos (d'' - H)} + K \right)^2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} d'' \right] \end{aligned}$$

Die Grössen k, K findet man durch die Formel (Band I. S. 158 [Abh. 167, p. 344]):

$$\alpha' . \beta^{\lambda'} . \gamma^{\lambda'},$$

deren Bestandtheile die Abtheilung II der Strahlenbrechungstafeln (ebendaselbst S. 198—201) für alle Zenithdistanzen bis 85^0 angibt. Von dem zweiten Gliede des Ausdrucks von D, welches man in die Form:

$$-\tfrac{1}{4} \left(\frac{\operatorname{tg} Z \sin P}{\cos (d'' - H)} \right)^2 \left[kk \sin 2H + KK \sin 2(d'' - H) - \right. \\ \left. - 2 (k - K)^2 \frac{\cos H \cos (d'' - H)}{\sin d''} \right]$$

bringen kann, kann der in $(k-K)^2$ multiplicirte Theil weggelassen werden. Er ist nämlich:

$$\tfrac{1}{2} \frac{\operatorname{tg} Z^2 \sin P'^2 \cos H}{\sin d'' \cos (d'' - H)} (k-K)^2 = \tfrac{1}{2} \frac{\sin Z^2 \sin P'^2}{\sin d'' \cos z \cos Z} (k-K)^2$$

also kleiner als

$$\frac{\tfrac{1}{2} (k-K)^2}{\sin d'' \cos z \cos Z}$$

welche Grösse, wenn für k der kleinste, für K der grösste der in der Tafel vorkommenden Werthe von α', dennoch aber z und $Z = 85^0$ angenommen werden, obgleich beide Annahmen unvereinbar mit einander sind und dennoch vereinigt einen viel zu grossen Werth angeben, nur

$$\frac{0''{,}019}{\sin d''}$$

ist. Die untersuchte Grösse ist also viel kleiner, weshalb man

$$\begin{aligned} D = d'' &- k \operatorname{tg} (d'' - H) - K \operatorname{tg} H \\ &- \operatorname{arc} \tfrac{1}{4}'' \left(\frac{\operatorname{tg} Z \sin P'}{\cos (d'' - H)} \right)^2 [kk \sin 2H + KK \sin 2(d'' - H)] \end{aligned}$$

annehmen kann.

Jetzt werde ich die Verbesserung untersuchen, welche aus der am Anfange dieses §'s erwähnten Ursache herrorgeht. Dabei werde ich den Ausdruck der scheinbaren Entfernung des Sterns von dem Punkte des Mondrandes, welcher in der durch den Stern, den Mittelpunkt des Mondes und den Beobachtungsort gehenden Ebene liegt,

$$D = d' \mp \varrho' - r \cos p' - R \cos P'$$

annehmen, indem der an sich sehr kleine Theil der zweiten Ordnung, hier, wo nur ein sehr kleiner Unterschied bestimmt werden soll, ohne merklichen Einfluss ist; auch werde ich nur die erste Potenz von ϱ' in die Rechnung aufnehmen.

Betrachtet man statt des in der Richtung vom Mittelpunkte des Mondes nach dem Sterne liegenden, einen anderen Punkt des Mondrandes, dessen Radius mit dieser Richtung einen Winkel u macht, und bezeichnet man die für jenen durch D, $d'' = d' \mp \varrho'$, r, p', P' bezeichneten Grössen, für diesen durch (D), (d''), (r), (p'), (P'), so hat man die scheinbare Entfernung dieses Punktes vom Sterne:

$$(D) = (d'') - (r) \cos (p') - R \cos (P').$$

Setzt man den in Beziehung auf u genommenen Differentialquotienten dieses Ausdrucks $= 0$, so erhält man die Gleichung, durch welche der Werth von u bestimmt wird, welcher dem Minimo oder Maximo von (D) entspricht; eliminirt man u aus ihr und dem Ausdrucke von (D), so erhält man das Minimum oder Maximum selbst. Man hat nun:

$$\begin{aligned} (d'') &= d'' \pm \varrho' (1 - \cos u) \\ (z) &= z \mp \varrho' [\cos (p' - u) - \cos p'] \\ (p') &= p' \mp \varrho' \left[\frac{\sin p' - \sin (p' - u)}{\operatorname{tg} z} - \frac{\sin u}{\operatorname{tg} d''} \right] \\ (P') &= P' \pm \varrho' \frac{\sin u}{\sin d''} \end{aligned}$$

und aus dem Ausdrucke von (z):

$$(r) = r \mp \varrho' \frac{dr}{dz} [\cos (p' - u) - \cos p'].$$

Substituirt man dieses in dem Ausdrucke von (D), so erhält man:

$$(D) = D \pm \varrho'(1-\cos u)\left[1 - \frac{r \sin p'^2}{\operatorname{tg} z} - \frac{dr}{dz}\cos p'^2\right]$$
$$\mp \varrho' \sin u \left[r \sin p' \left(\frac{\cos p'}{\operatorname{tg} z} - \frac{1}{\operatorname{tg} d''}\right) - R\frac{\sin P'}{\sin d''} - \frac{dr}{dz}\sin p' \cos p'\right]$$

oder kürzer bezeichnet:

$$(D) = D \pm \varrho'(1-\cos u)\, a \mp \varrho' \sin u . b$$

welcher Ausdruck, mit der das Minimum oder Maximum bestimmenden Gleichung:

$$0 = a \sin u - b \cos u$$

verbunden,

$$(D) = D \mp \frac{\varrho' b b}{a + \sqrt{aa + bb}}$$

ergibt.

Setzt man, um diesen Einfluss der Strahlenbrechung völlig zu entwickeln, in dem Ausdrucke von r, nämlich:

$$r = k \operatorname{tg} z,$$

k als unveränderlich voraus, was sehr nahe richtig ist, so erhält man:

$$\frac{dr}{dz} = k + k \operatorname{tg} z^2$$

und ferner die durch a und b bezeichneten Quantitäten:

$$a = 1 - k - k \operatorname{tg} z^2 \cos p'^2$$
$$b = -\frac{\operatorname{tg} z \sin p'}{\sin d''}\left[k\frac{\cos Z}{\cos z} - K\frac{\cos z}{\cos Z}\right]$$

Wenn man für $\cos z$ und $\cos Z$ die Ausdrücke:

$$\cos z = \cos Z \cos d'' + \sin Z \sin d'' \cos P'$$
$$\cos Z = \cos z \cos d'' + \sin z \sin d'' \cos p'$$

schreibt, so verwandelt der Ausdruck von b sich in:

$$-\operatorname{tg} z \sin p' \left[k \operatorname{tg} z \cos p' - K \operatorname{tg} Z \cos P' + \frac{k-K}{\operatorname{tg} d''}\right]$$

wovon man das letzte Glied als unbedeutend vernachlässigen kann. Drückt man endlich z und p' durch Z, P' und den oben schon eingeführten Winkel H aus, so erhält man:

$$a = 1 - k \sec(d'' - H)^2$$
$$b = \frac{\operatorname{tg} Z \sin P' \cos H}{\cos(d'' - H)}[k \operatorname{tg}(d'' - H) - K \operatorname{tg} H]$$

und wenn man k für K setzt, was hier nur unerhebliche Fehler verursacht:

$$b = k \operatorname{tg} Z \sin P' \frac{\sin(d'' - 2H)}{\cos(d'' - H)^2}.$$

Da dieser Einfluss für $P' = 0$ und für $d'' = 2H$, der für die Fälle, dass beide Gestirne ein gleiches Azimuth oder eine gleiche Höhe haben, verschwindet, so muss er ein Maximum haben. Der Werth des Winkels p', für welchen dieses stattfindet, ergibt sich durch Differentiirung des Ausdruckes von b aus der Gleichung des vierten Grades:

$$0 = \cos p'^4 + \cos p'^3 \frac{5}{2 \operatorname{tg} z \operatorname{tg} d''} - \cos p'^2\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\operatorname{tg} z^2 \operatorname{tg} d''^2}\right)$$
$$- \cos p' \frac{2 \operatorname{tg} z^2 + 1}{\operatorname{tg} z^3 \operatorname{tg} d''} - \frac{2 + \operatorname{tg} d''^2}{\operatorname{tg} z^2 \operatorname{tg} d''^2}.$$

Aber da der Einfluss nur erheblich werden kann, wenn $\operatorname{tg} z$ sehr gross ist, so kann man alle durch $\operatorname{tg} z$ dividirte Glieder der Gleichung ohne merklichen Fehler weglassen, wodurch sie sich auf

$$0 = \cos p'^4 - \tfrac{1}{2}\cos p'^2$$

reducirt. Ihre Wurzeln $\cos p' = 0$ und $\cos p' = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ ergeben die Ausdrücke von b:

die erste .... $b = \pm k \operatorname{tg} z \operatorname{tg} d''$

die zweite ... $b = \pm \frac{k}{2} \operatorname{tg} z^2 \left[1 + \frac{1 \mp \operatorname{cotg} z \operatorname{tg} d'' \sqrt{2}}{1 \pm \frac{\operatorname{tg} z \operatorname{tg} d''}{\sqrt{2}}}\right]$

Im ersten Falle, in welchem $p' = \pm 90^0$ ist, ist z kleiner als Z und

$$\cos z = \frac{\cos Z}{\cos d''},$$

also: $b = \pm k \sin d'' \sqrt{\operatorname{tg} Z^2 - \operatorname{tg} d''^2}$,

welcher Ausdruck seinen grössten Werth erlangt, wenn $\cos d''^2 = \cos Z$ angenommen wird, nämlich den Werth

$$b = \pm k \frac{1 - \cos Z}{\cos Z}.$$

Im zweiten Falle kann z als die grösste der beiden Zenithdistanzen angenommen werden, wodurch das obere Zeichen von $\cos p'$ bedingt und der zwischen den Klammern befindliche Factor von b für einen grossen Werth von $\operatorname{tg} z$ näherungsweise $= 1$, also b näherungsweise $= \pm \frac{k}{2} \operatorname{tg} z^2$ wird. — Im ersten Falle beträgt

$$D - (D) = \pm \frac{\varrho' b b}{a + \sqrt{aa + bb}}$$

selbst für $Z = 85^0$ noch kein Hundertel einer Secunde; im zweiten für $z = 80^0$ gleichfalls kein Hundertel und für $z = 85^0$ kein Achtel einer Secunde. Diese Verbesserung kann daher vernachlässigt und die Formel (3a) als vollständig betrachtet werden.

5.

Nachdem durch die Angaben der Ephemeride und durch die Berechnung der Formeln (1), (2), (3) die scheinbare Entfernung des beobachteten Mondrandes von dem Sterne gefunden ist, bleibt nur noch die im 1. § durch n' bezeichnete, zu einer Aenderung des Mittagsunterschiedes (m) von einer Zeitsecunde gehörige Veränderung der scheinbaren Entfernung D aufzusuchen übrig.

Wenn man diese Veränderung geradezu der Veränderung der wahren Entfernung gleichsetzen will, so lässt man dadurch nur den Fehler unverbessert, welcher daraus entstanden ist, dass die Einwirkungen der Parallaxe und Refraction für den Ort des Monds berechnet worden sind, welcher der mit dem vorausgesetzten Mittagsunterschiede auf den Meridian der Ephemeride reducirten Beobachtungszeit zugehört, während diese Einwirkungen für den Mondort hätten berechnet werden sollen, welcher der Beobachtungszeit und dem durch die Beobachtung selbst berichtigten Mittagsunterschiede entspricht. Dieser Fehler beträgt immer nur einen kleinen Theil der gesuchten Verbesserung des Mittagsunterschiedes. Die folgende Differentiirung der scheinbaren Entfernung wird das Mittel, ihn zu vermeiden ergeben; denn die Bewegung des Mondes ist so langsam, dass selbst, wenn der vorausgesetzte Mittagsunterschied 10 oder 20 Zeitminuten fehlerhaft sein sollte, die von dem Quadrate der Bewegung abhängige Verbesserung noch nicht erheblich werden kann.

Indem die einer kleinen Aenderung des Mondorts entsprechenden Aenderungen des immer sehr kleinen Einflusses des Quadrats der Refraction, sowie auch der Grösse k unbedeutend sind, ist der Ausdruck der scheinbaren Entfernung:

$$D = d'' - k \operatorname{tg}(d'' - H) - K \operatorname{tg} H$$

nur in Beziehung auf d'' und H zu differentiiren. Man erhält dadurch:

$$\frac{dD}{dm} = \frac{dd''}{dm}[1 - k \sec(d'' - H)^2] + \frac{dH}{dm}[k \sec(d'' - H)^2 - K \sec H^2]$$

und da

$$\operatorname{tg} H = \operatorname{tg} Z \cos P',$$

also H nur mit P' veränderlich ist,

$$\frac{dD}{dm} = \frac{dd''}{dm}[1 - k \sec(d'' - H)^2] - \frac{dP'}{dm} \operatorname{tg} Z \sin P' \left[\frac{k \cos H^2}{\cos(d'' - H)^2} - K\right]$$

Um die Ausdrücke der Differentialquotienten von d'' und P' zu erhalten, muss man die Formeln (2) differentiiren; es ist dabei zu bemerken, dass diese Formeln, wenn man $d, \mp \varrho,$ statt $d,$ setzt, fast genau d'' statt d' ergeben, so dass man durch diese Aenderung auch die Veränderlichkeit des scheinbaren Mondhalbmessers berücksichtigt. Diese Differentiation ergibt (d statt $d, \mp \varrho,$ geschrieben):

$$r' \frac{dd''}{dm} = [\sin d \sin d'' + \cos d \cos d'' \cos(P' - P_{,})] \frac{dd}{dm} + \sin d \cos d'' \sin(P' - P_{,}) \frac{dQ_{,}}{dm}$$

$$r' \sin d'' \frac{dP'}{dm} = -\cos d \sin(P' - P_{,}) \frac{dd}{dm} + \sin d \cos(P' - P_{,}) \frac{dQ_{,}}{dm}.$$

Will man aber im Ausdrucke von n' Alles weglassen, was in das Quadrat der Mondsparallaxe und in ihr Product in die Strahlenbrechung multiplicirt ist, so hat man, statt der eben gegebenen richtigen Ausdrücke die genäherten:

$$r' \frac{dd''}{dm} = \frac{dd}{dm} + \frac{dQ_{,}}{dm} \sin\pi, \sin Z \sin P' \cos d$$

$$\frac{dP'}{dm} = \frac{dQ_{,}}{dm}$$

und die Anwendung der letzteren statt der ersten wird eben so wenig einen erheblichen Fehler erzeugen als die Verwechselung von k mit K. Auf diese Art erhält man:

$$n' = \frac{n}{r'}\left[1 + \frac{dQ_{,}}{dd} \alpha \cos d - \frac{k \text{ Arc. } 1'' . (1+\beta)}{\cos(d'' - H)^2}\right] \ldots$$

wo α und β, um abzukürzen, für

$$\sin\pi, \sin Z \sin P,$$

$$\frac{dQ_{,}}{dd} \operatorname{tg} Z \sin P, \sin d'' \sin(d'' - 2H)$$

geschrieben sind. — In den meisten Fällen wird sich der Ausdruck

$$n' = \frac{n}{r'}\left(1 - \frac{k \text{ Arc. } 1''}{\cos(d'' - H)^2}\right)$$

eine hinreichende Annäherung gewähren, denn die ausweggelassenen, der Veränderung des Positionswinkels proportionalen Glieder sind immer beträchtlich kleiner als die beibehaltenen und werden dieses desto mehr, je vortheilhafter die Sterne ausgewählt sind, d. h. je näher sie in der Richtung der Bewegung des Mondes liegen.

Bei dieser Gelegenheit erwähne ich des besonderen Falles, welchen die Methode der Mondsentfernungen darbieten kann, nämlich dass die scheinbare Entfernung bis zu einem Maximo wächst und dann wieder abnimmt, also während einiger Zeit ohne merkliche Aenderung bleibt. Dieses kann sich sich ereignen, wenn das Gestirn, dessen Entfernung vom Monde gemessen wird, dem Untergange zugeht, der Mond aber sehr hoch steht. einen vorgekommenen Fall dieser Art hat Herr Rümker (Astr. Nachr. Nr. 5) angeführt. — Der eben entwickelte Ausdruck von n' lässt keinen Zweifel darüber, dass der Mittagsunterschied in diesem Falle eben so gut bestimmt wird als in jedem anderen; da dieses aber auch ohne Rechnung klar wird, so erwähne ich des Falles nicht sowohl um ihn aufzuklären, als um zu bemerken, dass die Beobachtung eines solchen Maximums allein, ohne Zuziehung der Zeitbestimmung, den

littagsunterschied ergibt. In Fällen, wo die Zeitestimmung nicht sicher ist, wird ihr Fehler desto eniger nachtheilig, je langsamer die scheinbare Entrnung sich ändert.

6.

Nachdem ich den einfacheren Fall der Aufgabe ollständig abgehandelt habe, muss ich noch den zuammengesetzteren betrachten, den Fall nämlich, in elchem auch das Gestirn, mit welchem der Mond verlichen wird, eine Parallaxe und einen Halbmesser igt. Ich werde dieses Gestirn hier die Sonne nenn, wenn auch das Meiste von dem, was ich darüber sagen habe, ebensowohl für die Planeten gilt.

Von welchem Punkte des Raumes man auch die onne und den Mond sehen möge, so liegen die Oerter rselben und der von dem Monde gesehene Ort der onne in einem grössten Kreise der Himmelskugel. en die Richtung vom Monde nach der Sonne bezeichnden Punkt der Himmelskugel kann man offenbar s den Fixstern ansehen, auf welchen alles Vorige sich zieht; man kann also die durch die Parallaxe verderten Entfernungen beider Gestirne von diesem nkte nach der gegebenen Vorschrift berechnen und rch den Unterschied derselben die Entfernung des nen von dem andern ausdrücken. — Auf diese Art ird der zusammengesetztere Fall auf den einfacheren ducirt; der Punkt der Himmelskugel aber, durch welen dieses erlangt wird, ist derselbe, dessen Einführg in die Betrachtung, wie ich (Abhandl. X [Abh. 169]) zeigt habe, auch die Theorie der Finsternisse auf re einfachste Gestalt zurückführt. Ich werde ihn, e dort, den Punkt Z nennen.

Ich werde die Rectascension, Declination und Entnung des Mondes α, δ, r, der Sonne A, Δ, R beichnen; die Entfernungen an der Himmelskugel zwihen dem Punkte Z und dem Monde und der Sonne $+e$ und e. Diese Zeichen gelten für den Mittelpunkt r Erde; sie werden mit einem Komma versehen (z. B. $+e_{,}$, $e_{,}$) wenn sie sich auf den Punkt O (§ 2), mit iem Accente (z. B. $d'+e'$, e') wenn sie sich auf den obachtungsort beziehen. Die Rectascension und Denation des Punkts Z bezeichne ich durch A^0 und Δ^0, Entfernung des Mondes von der Sonne durch R^0.

Nach diesen Bezeichnungen werden, in den Forln (1) des 3. §, für t und Δ die sich auf den Punkt beziehenden Werthe, nämlich der der Rectascension zugehörige Stundenwinkel und die Declination Δ^0 setzt. Die Formeln (2a), welche man nun ebensohl für den Mond als für die Sonne anzuwenden hat, rden für den Mond:

$$r'\cos(d'+e') = \cos(d_{,}+e_{,}) - \sin\pi_{,}\cos Z$$
$$r'\sin(d'+e')\cos(P'-P_{,}) = \sin(d_{,}+e_{,}) - \sin\pi_{,}\sin Z\cos P_{,}$$
$$r'\sin(d'+e')\sin(P'-P_{,}) = \sin\pi_{,}\sin Z\sin P_{,}$$

und für die Sonne:

$$R'\cos e' = \cos e_{,} - \sin\pi'_{,}\cos Z$$
$$R'\sin e'\cos(P'-P_{,}) = \sin e_{,} - \sin\pi'_{,}\sin Z\cos P_{,}$$
$$R'\sin e'\sin(P'-P_{,}) = \sin\pi'_{,}\sin Z\sin P_{,}$$

Allein es ist nicht nöthig, die letzteren wirklich unter dieser Form zu berechnen, indem man durch Division derselben durch die ersteren:

$$\frac{R'\sin e'}{r'\sin(d'+e')} = \frac{\sin\pi'_{,}}{\sin\pi_{,}} = \frac{\sin e_{,} - \sin\pi'_{,}\sin Z\cos P_{,}}{\sin(d_{,}+e_{,}) - \sin\pi'\sin Z\cos P_{,}}$$

hat, woraus die Gleichungen:

$$\sin e_{,}\sin\pi_{,} = \sin(d_{,}+e_{,})\sin\pi'_{,}$$
$$R'\sin e'\sin\pi_{,} = r'\sin(d'+e')\sin\pi'_{,}$$

hervorgehen, welche, verglichen mit der ersten Formel für beide Gestirne,

$$R'\cos e' = \frac{\sin d_{,} + r'\cos(d'+e')\sin e_{,}}{\sin(d_{,}+e_{,})}$$
$$R'\sin e' = \frac{r'\sin(d'+e')\sin e_{,}}{\sin(d_{,}+e_{,})}$$

ergeben. Eine zweite, gleichfalls einfache Formel zur Bestimmung von e', nämlich:

$$R'\sin e' = \frac{\sin P_{,}}{\sin P'}\sin e_{,}$$

erhält man, wenn man den aus der Verbindung der beiden letzten Gleichungen folgenden Ausdruck:

$$\sin e_{,}\sin(P'-P_{,}) = \sin\pi'_{,}\sin Z\sin P'$$

mit der letzten Gleichung vergleicht.

Nachdem hierdurch die Vorschrift zur Erfindung der scheinbaren Entfernung d' gegeben ist, kommt es noch darauf an, die Werthe von A^0, Δ^0 und $e_{,}$, welche dieselbe voraussetzt, zu bestimmen. Diese Bestimmung gründet sich auf die Gleichungen:

$$R^0\cos\Delta^0\cos A^0 = R\cos\Delta\cos A - r\cos\delta\cos\alpha$$
$$R^0\cos\Delta^0\sin A^0 = R\cos\Delta\sin A - r\cos\delta\sin\alpha$$
$$R^0\sin\Delta^0 = R\sin\Delta - r\sin\delta$$

oder, wenn man R zur Einheit annimmt:

$$R^0\cos\Delta^0\cos A^0 = \cos\Delta\cos A - m\cos\delta\cos\alpha$$
$$R^0\cos\Delta^0\sin A^0 = \cos\Delta\sin A - m\cos\delta\sin\alpha$$
$$R^0\sin\Delta^0 = \sin\Delta - m\sin\delta$$

wo m für

$$\frac{\sin\pi'}{\sin\pi}$$

geschrieben ist. Wenn man die hieraus hervorgehenden Werthe von Δ^0 und A^0 statt Δ und A in die For-

meln setzt, durch welche im 2. § d und Q ausgedrückt sind, so ergeben dieselben Formeln nun $d+e$ und Q, und die oben gefundene Gleichung zwischen e, und $d,+e,$, oder vielmehr die ähnliche, auf den Mittelpunkt der Erde bezogene, gibt:

$$\sin e = m \sin(d+e).$$

Hierdurch ist alles Erforderliche geleistet. Allein da es einerseits ein Interesse hat, die Kleinheit von m zur Ableitung bequemerer Rechnungsvorschriften zu benutzen, andererseits aber gewünscht werden muss, die Entfernung d, wegen ihres unmittelbaren Einflusses auf das Resultat, in möglichst grosser Schärfe aus der Rechnung hervorgehen zu sehen, so ist es zweckmässiger, zuerst d und den Positionswinkel des Mondes am Mittelpunkte der Sonne, welchen ich durch ψ bezeichnen werde, durch die trigonometrischen Formeln zu berechnen, und dann e, Q, A^0, Δ^0 nach den Näherungsformeln. Man rechnet also zuerst nach den Formeln:

$$\cos d = \sin \Delta \sin \delta + \cos \Delta \cos \delta \cos(\alpha - A)$$
$$\sin d \cos \psi = \cos \Delta \sin \delta - \sin \Delta \cos \delta \cos(\alpha - A)$$
$$\sin d \sin \psi = \cos \delta \sin(\alpha - A)$$

und wendet dann die Näherungen:

$$e = \frac{\pi'}{\sin \pi} \sin d$$
$$Q = \psi - e \sin \psi \operatorname{tg} \Delta$$
$$A^0 = A - e \sin \psi \sec \Delta$$
$$\Delta^0 = \Delta - e \cos \psi$$

an.

Die Reduction von $d+e$ und Q auf den Punkt O, und den Werth von $\log \frac{r}{r,}$ findet man wie im 2. §, indem man nämlich:

$$\frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - ee \sin \varphi^2}}$$

resp. in:

$$-\omega . \varepsilon\varepsilon \sin \pi [\sin \Delta^0 \sin(d+e) - \cos \Delta^0 \cos(d+e) \cos Q]$$
$$-\omega . \varepsilon\varepsilon \sin \pi \frac{\cos \Delta^0 \sin Q}{\sin(d+e)}$$
$$-43429 . \varepsilon\varepsilon \sin \pi \sin \delta$$

multiplicirt. Der Vollständigkeit wegen bemerke ich, dass der Factor für die ähnliche Reduction von e sich in

$$\omega . \varepsilon\varepsilon \sin \pi' \cos \Delta \cos \psi$$

zusammenzieht und der von $\log \frac{R}{R,}$

$$-43429 . \varepsilon\varepsilon \sin \pi' \sin \Delta$$

wird. Die aus dem ersten entstehende Reduction beträgt aber nie mehr als einige Hundertel einer Secunde, der Einfluss des letzten ist noch kleiner, weshalb ich von beiden keinen Gebrauch machen werde.

Die Ephemeride muss für die Entfer Mondes von der Sonne eine Columne mehr b für die Entfernungen von Fixsternen, nämli lumne für den Ergänzungsbogen e. Die E der wahren Zeit, oder $A - A^0$, beträgt l weniger als eine Zeitminute.

[Beispiel einer Ephemeride für diesen Fall.]

Wenn man eine Ephemeride von dieser E besitzt, so unterscheiden sich die Berechn durch die Parallaxe veränderten Entfernung d' Fixstern und für die Sonne, nur darin, da letzteren Falle die aus der Ephemeride genom fernung, vor ihrer Anwendung, um den E bogen vergrössert, und von dem dadurch i der Vorschriften des § 3 erlangten Werthe v e' abgezogen wird, welches man aus einer gegebenen Formeln:

$$e' = \frac{r' \sin(d'+e')}{\sin(d,+e,)}, \quad e, = \frac{\sin P,}{\sin P'} e,$$

findet. Wenn man die Vergrösserung des So messers nicht berücksichtigen will, ist die A von R' unnöthig.

Die Berechnung der Einwirkung der brechung erleidet in dem hier betrachteten F eine kleine Aenderung. Es wird nämlich Entfernung der nächsten Ränder des Mondes Sonne gemessen, deren Entfernungen von de Z resp. $d'+e'-\varrho'$ und $h+e'$ sind (h = Ha der Sonne): die Formel (3a) wäre daher beiden Entfernungen anzuwenden. Allein im 4. § über den Einfluss der Mondsscheibe Strahlenbrechung Gesagten geht hervor, da Einfluss auf die Entfernung der nächsten Ra Mondes und der Sonne, von dem Unterschiede flüsse auf beide Entfernungen $d'+e'-\varrho'$ un nicht merklich verschieden, dass also dieser Un geradezu das Gesuchte ist. Bezeichnet man dem beobachteten Punkte des Sonnenrandes g Werth von K durch K', und $d'-\varrho'-h$ durch erhält man, wie im 4. §:

$$D = d'' - k \operatorname{tg}(d''+e'+h-H) - K' \operatorname{tg}(H-e'-h$$
$$- \text{Arc.}\,\tfrac{1}{4}'' \left[\frac{\operatorname{tg} Z \sin P' \cos H}{\cos(d''+e'+h-H) \cos(H-e'-h} \right],$$
$$\times [kk \sin 2(H-e'-h) + K'K' \sin 2(d''+e'+h-H$$

Der hier vorkommende Werth von K' gehört wahren Zenithdistanz des beobachteten Punkts nenrande, deren Cosinus den Ausdruck

$$\cos Z \cos(h+e') + \sin Z \sin(h+e') \cos P$$

…it, oder welche mit hinreichender Annäherung

$$Z - (h + e') \cos P'$$

7.

Die Berechnung beobachteter Entfernungen des …ondes von den Planeten ist der im vorigen § auf …e Sonne bezogenen ganz gleich und darf daher nicht …esonders abgehandelt werden. Jedoch erfordert die …eilweise Erleuchtung der Planeten, dass die sich auf …enus und Mars beziehenden Ephemeriden nicht für …re Mittelpunkte berechnet werden. Die Fernröhre …r Reflexions-Instrumente sind nämlich meistens zu …hwach, um die theilweise erleuchtete Figur so deutlich …t zeigen, dass ein bestimmter Theil, namentlich der …leuchtete Rand derselben, gehörig unterschieden und …it dem erleuchteten Mondrande durch Reflexion in …erührung gebracht werden könnte. Vielmehr zeigen …ese Fernröhre nur ein unförmliches Licht, und man …ann mit ihnen nichts anderes beobachten, als die Ent…rnung eines Punktes, dessen man sich nicht deutlich …ewusst ist, von dem Mondrande. Es entsteht daher …e Frage, welcher Punkt der Planetenscheibe, statt …s Mittelpunkts derselben, der Berechnung der Ephe…eride zum Grunde gelegt werden müsse? —

Meiner Meinung nach sollte dieses der Schwer…unkt des erleuchteten Theils der Planetenscheibe sein; …enn wenn dieser durch Reflexion auf den Mondrand …ebracht ist, scheint das Licht innerhalb und ausserhalb …er Mondscheibe einen gleich starken Eindruck auf das …uge machen zu müssen. Ich werde daher hier die …ormeln angeben, durch welche die Rectascension …nd Declination dieses Schwerpunkts berechnet werden …können.

Die Rectascension und Declination des Planeten …ezeichne ich durch A und Δ, des gesuchten Schwer…unkts seines erleuchteten Theils durch A' und Δ', der …onne durch a und d; ferner den Winkel am Planeten …urch u, an der Erde durch v; die Entfernungen des …laneten von der Sonne und Erde durch r und r', der …rde von der Sonne durch R; den Positionswinkel der …onne am Planeten durch p; den Winkel, unter wel…hem der Halbmesser des Planeten in der Entfernung …= 1 erscheint, durch h. Nach diesen Bezeichnungen …at man ($\pi = 3{,}141\ldots$):

$$A' = A - \frac{8h}{3\pi r} \sin \tfrac{1}{2} u^2 \sin p \sec \Delta$$

$$\Delta' = \Delta + \frac{8h}{3\pi r} \sin \tfrac{1}{2} u^2 \cos p$$

Die hier vorkommenden u und p werden aus den Formeln

$$\cos v = \sin d \sin \Delta + \cos d \cos \Delta \cos(A - a)$$

$$\sin v \cos p = \sin d \cos \Delta - \cos d \sin \Delta \cos(A - a)$$

$$\sin v \sin p = \cos d \sin(A - a)$$

und

$$r \cos u = r' - R \cos v$$

$$r \sin u = R \sin v$$

gefunden.

Uebrigens glaube ich, dass der Aufnahme der Venus unter die Gestirne, deren Entfernung vom Monde in den Ephemeriden vorausberechnet wird, die auf zahlreiche Beobachtungen mit gewöhnlichen, zum deutlichen Sehen der erleuchteten Figur unzureichenden See-Instrumenten gegründete Untersuchung hätte vorangehen sollen, inwiefern die unvollständige Beleuchtung dieses Planeten die Genauigkeit des verlangten Resultats beeinträchtigt. So wie unsere Planetentafeln jetzt beschaffen sind, verheissen indessen, auch abgesehen von dem eben erwähnten Umstande, die Vergleichungen des Mondes mit den aus ihnen berechneten Oertern weniger genaue Resultate, als seine Vergleichungen mit Fixsternen und der Sonne.

8.

Ich kehre nun zu der Berechnungsart der gemessenen Entfernungen des Mondes von anderen Gestirnen zurück. In dem Vorhergehenden habe ich sie so entwickelt, dass sie zum Ziele führt, d. h. den einer Beobachtung wirklich entsprechenden Mittagsunterschied ergibt. Um dieses zu erlangen, habe ich auch Umstände berücksichtigt, welche, wenn nicht sowohl eine vollständige Theorie der Erscheinung, als das Mittel gesucht wird, aus gemachten Beobachtungen Nutzen zu ziehen, unberücksichtigt bleiben können, indem ihr Einfluss auf das Resultat weit kleiner ist, als der unvermeidliche Fehler jeder Messungsreihe von Entfernungen; so dass beide zusammen die dem letzteren allein entsprechende Wahrscheinlichkeit eines Fehlers nur unbedeutend vergrössern. — Dahin gehören die Reductionen des Positionswinkels, der Horizontalparallaxe und des Horizontalhalbmessers auf den Punkt O, zu deren Erlangung die (§ 2 und 6) mitgetheilten Proben einer Ephemeride besondere Columnen enthalten. Unterlässt man diese Reductionen, so begeht man Fehler, welche aber wegen der ersten, die scheinbare Entfernung (für $\pi = 57' 30''$) stets um weniger als

$$0''{,}38 \sin \varphi \frac{\sin z \sin p'}{\operatorname{tg} d}$$

und wegen der letzten die Horizontalparallaxe und den Halbmesser um weniger als

$$0''{,}18 \sin \varphi \quad \text{und} \quad 0''{,}05 \sin \varphi$$

ändern. Man erspart dadurch die zweite und dritte der dieser Reductionen wegen der Ephemeride hinzugefügten Columnen, und die Berücksichtigung der Abplattung der Erde zieht sich auf die Anwendung der ersten dieser Columnen und die Addition des aus der Tafel zu entnehmenden Logarithmen zu $\log \sin \pi$ zusammen. — Ferner gehört hieher das Glied zweiter Ordnung der für den Einfluss der Strahlenbrechung entwickelten Formel (3): dieses Glied verschwindet, wenn beide Gestirne gleiches Azimuth, und wird am grössten, wenn sie gleiche Zenithdistanz haben, in welchem Falle sein Ausdruck:

$$-\frac{kk}{\omega} \operatorname{tg} Z^2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} d'' + \frac{kk}{\omega} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} d''^3$$

und sein Werth für verschiedene Zenithdistanzen:

60^0 ...	$-0''{,}048 \operatorname{tg} \frac{1}{2} d''$	$+0''{,}016 \operatorname{tg} \frac{1}{2} d''^3$
65 ...	$-0{,}073$	$+0{,}016$
70 ...	$-0{,}119$	$+0{,}016$
75 ...	$-0{,}216$	$+0{,}016$
80 ...	$-0{,}477$	$+0{,}015$
85 ...	$-1{,}584$	$+0{,}012$

wird. Man sieht hieraus, dass dieses Glied erst in Zenithdistanzen einigermaassen merklich werden kann, in welchen der Mondrand, wegen seiner Nähe am Horizonte, schon seine scharfe Begrenzung verloren hat; es ist auch stets kleiner als die durch die meteorologischen Instrumente nicht erkennbaren Aenderungen der Strahlenbrechung, welche den grössten Einfluss auf die Entfernung erhalten, wenn dieses Glied verschwindet. — Endlich bemerke ich, dass die Zahl n', zu deren Berechnung der 5. § die Anweisung ertheilt, mit desto geringerer Genauigkeit gesucht werden darf, je näher die berechnete scheinbare Entfernung der beobachteten kömmt, oder je kleiner der Fehler des vorausgesetzten Mittagsunterschiedes ist: nimmt man geradezu n, die Veränderung der wahren Entfernung, dafür an, so wird der daraus entstehende Fehler selten den sechszigsten, nie den dreissigsten Theil der aus der Beobachtung hervorgehenden Verbesserung des Mittagsunterschiedes betragen. Die Abkürzung des Ausdruckes, nämlich:

$$n' = \frac{n}{r'} \left[1 - \frac{k \text{ Arc. } 1''}{\cos (d'' - H)^2}\right]$$

oder auch

$$n' = n \left[1 + \sin \pi, \cos z - \frac{k \text{ Arc. } 1''}{\cos (d'' - H)^2}\right]$$

führt der Wahrheit in allen Fällen weit näher, und ich glaube nicht, dass es ein Interesse haben kann, über diesen Ausdruck hinauszugehen. Indem die älteren Methoden nicht vorschreiben, den Ort des Mondes der der Berechnung seiner Zenithdistanz zum Grunde liegt, und der Berichtigung des angenommenen Mittagsunterschiedes noch einmal zu suchen und damit die Rechnung zu wiederholen, begehen sie genau denselben Fehler, welchen die Voraussetzung $n' = n$ verursachen würde.

9.

Die Rechnung kann noch durch eine Aenderung der Ephemeride etwas abgekürzt werden. Es ist erklärbar fast gleichgültig, ob die durch die Parallaxe veränderte Entfernung des Mondmittelpunkts von einem anderen Gestirne aus der wahren berechnet und dann um die Entfernung des Randes zu erhalten, um den scheinbaren Halbmesser des Mondes vermindert oder vermehrt wird, oder ob der Halbmesser des Mondes im Anfange berücksichtigt, also die der wahren, um den wahren Halbmesser des Mondes verminderten oder vermehrten Entfernung entsprechende scheinbare Entfernung aufgesucht wird. Richtig ist das letztere nur weil der Punkt der Mondsoberfläche, welcher vom Mittelpunkte der Erde gesehen in dem grössten Kreis nach dem Sterne und am Rande des Mondes liegt, vom dem Beobachtungsorte gesehen weder in der Richtung nach dem Sterne, noch am Rande erscheint. Allein die Entfernung dieses Punktes von dem am Beobachtungsorte in der Richtung nach dem Sterne am Rande erscheinenden, ist im Sinne der Entfernung stets kleiner als

$$0''{,}15 \frac{\sin z^2}{\sin d^2}$$

und in der darauf senkrechten Richtung etwa

$$= 15''{,}7 \frac{\sin z \sin p'}{\operatorname{tg} d}$$

und diese letzte Entfernung erhält nur dadurch Einfluss, dass die Strahlenbrechung für den Mond für einen Punkt in Rechnung gebracht wird, welcher von den Punkte, für welchen sie in Rechnung gebracht werden sollte, diese kleine Entfernung besitzt. Da bei den Anwendungen der Mondsmethode Entfernungen von weniger als 30^0 meistens vermieden werden und gewöhnlich weit grössere vorkommen, so ist der durch die Verwechselung der beiden Punkte verursachte Verlust an Genauigkeit nie beträchtlich und meistens ganz unbedeutend.

Dieser Aenderung zufolge bedeutet nun in den Formeln des 3. §'s d, die schon um den Halbmesser verminderte oder vermehrte Entfernung für den Punkt O, und d' die scheinbare Entfernung des Mondrandes von dem Sterne. Man kann die erstere unmittelbar in der Ephemeride angeben, nämlich durch Columnen für

$$d \mp \varrho$$

und

$$-\omega' . \varepsilon\varepsilon \sin\pi \,[\sin\Delta \sin(d \mp \varrho) - \cos\Delta \cos(d \mp \varrho) \cos Q]$$

wodurch denn sowohl die Angabe des Mondhalbmessers als seine Berücksichtigung in der Rechnung gänzlich wegfällt.

Die auf diese Art abgeänderte Probe der Ephemeride (§ 2) lasse ich hier folgen. Der Columne für die Entfernung habe ich noch den Logarithmen ihrer Veränderung in einer Secunde (n) beigesetzt. Dieser wird nicht allein am Ende der Rechnung gebraucht, sondern er kann auch am Anfange derselben zur möglichst leichten Erfindung der Entfernung für die auf den Meridian der Ephemeride reducirte Beobachtungszeit benutzt werden: man sucht ihn nämlich für diese Zeit und fügt die halbe Summe desselben und des in der Ephemeride enthaltenen unmittelbar vorhergehenden, ähnlichen Logarithmen, zu dem Logarithmen der Zeit, von der vorhergehenden Zeit der Ephemeride an gerechnet, wodurch man den Logarithmen der Veränderung der Entfernung, mit Rücksicht auf die zweite Differenz, erhält.

[Folgt die abgeänderte Ephemeride.]

Für die Entfernungen des Mondes von der Sonne (oder einem Planeten) kann der Ephemeride dieselbe Einrichtung gegeben werden, so dass sie unmittelbar die geocentrische Entfernung der Ränder enthält. Dadurch wird nöthig, dass der Punkt Z (§ 6.) nicht auf den Mittelpunkt der Sonne, sondern auf den Punkt ihres Randes bezogen werde, welcher in der Richtung von diesem Mittelpunkte nach dem Monde liegt; oder dass man, nachdem d und ψ den Formeln des 6. §'s gemäss berechnet worden sind, zur Erfindung von e, Q, A^0, Δ^0 diese Näherungsformeln:

$$e = \frac{\pi'}{\sin\pi} \sin(d - h)$$

$$Q = \psi + (h - e) \sin\psi \operatorname{tg}\Delta$$

$$A^0 = A + (h - e) \sin\psi \sec\Delta$$

$$\Delta^0 = \Delta + (h - e) \cos\psi$$

anwende. Die Columnen für die Entfernung und ihre Reduction auf den Punkt O enthalten:

$$d - \varrho - h$$

und

$$-\omega . \varepsilon\varepsilon \sin\pi \,[\sin\Delta^0 \sin(d - \varrho - h + e) - \cos\Delta^0 \cos(d - \varrho - h + e) \cos Q]$$

bei welcher Einrichtung dem Rechner die Kenntniss beider Halbmesser unnöthig wird. — Die auf diese Art abgeänderte Ephemeride des 6. § setze ich gleichfalls hierher. Der dazu angewandte Halbmesser der Sonne ist aus der XII. Taf. der Tabb. Regiom. genommen. Den Ergänzungsbogen e habe ich nur in ganzen Secunden angegeben, indem nur seine Veränderung durch die Parallaxe Einfluss auf das Resultat erhält, welcher durch die Brüche der Secunde nicht merklich geändert werden kann.

[Folgt die Ephemeride.]

Eine andere Abkürzung kann man in der Berechnung der Refraction anbringen. Dass von der im 4. § vorausgesetzten Tafel (dieses Werkes Band I. S. 198—201) eine Decimalstelle weggelassen werden kann, sieht man sogleich, und ebenso bemerkt man leicht, dass der Factor A', welcher in den Logarithmen von β zu multipliciren ist, in der gegenwärtigen Anwendung der Tafel nicht berücksichtigt zu werden braucht; denn bei der Zenithdistanz von 80° kann er die Strahlenbrechung, in den Grenzen der Barometerstände, nicht mehr als 0″,05, und bis 85° nur um 0″,4 ändern. Der Factor λ' des von dem Thermometerstande abhängigen Logarithmen von γ erlangt aber grösseren Einfluss, der, wenn der Thermometerstand 40° Fahr. von dem Stande verschieden ist, für welchen die Tafel gilt, in den Zenithdistanzen 70°, 75°, 80°, 85° etwa 0″,1, 0″,3, 0″,8, 4″,0 beträgt.

Eine nicht ganz unbeträchtliche Erleichterung der Rechnung würde man erlangen, wenn man k ohne Rücksicht auf die Zenithdistanz des Mondes, etwa so wie es für die Zenithdistanz von 45° ist, annehmen könnte. Dann würde die Aufsuchung jener Zenithdistanz ganz erspart und man gebrauchte nur den Winkel H. Wenn der Mond hoch steht, so kömmt man hierdurch wirklich der Wahrheit sehr nahe; auch noch für die Zenithdistanzen 55°, 60°, 65°, 70° beträgt der aus der Annahme der Unveränderlichkeit von k entstehende Fehler der Strahlenbrechung nur 0″,1, 0″,3, 0″,6, 1″,5. Man könnte daher diese Annäherung für Fälle in welchen der Mond 25° über dem Horizonte oder höher ist, anzuwenden vorschlagen, allein da sie für geringere Höhen beträchtliche Fehler erzeugen würde, und die Berechnung der Zenithdistanz, wozu man alles Erforderliche schon besitzt, nur sehr geringe Mühe verursacht, so ist es vielleicht vortheilhafter, es bei einer, in allen Fällen anzuwendenden Vorschrift bewenden zu lassen. Uebrigens ist, wegen der Kleinheit der Aenderung, welche k durch eine Aenderung der Zenithdistanz erfährt, eine ohngefähre Berechnung der letzteren hinreichend.

Ueber die Einwirkung der Strahlenbrechung auf Entfernungen des Mondes von der Sonne bemerke ich noch, dass nach der oben vorgeschlagenen unmittelbaren Beziehung derselben auf den Sonnenrand, der Halbmesser der Sonne aus der Formel (3b) (§ 6.) weg-

gelassen und ihre ersten, allein in Betracht zu ziehenden Glieder

$$D = d'' - k \operatorname{tg}(d'' + e' - H) - K' \operatorname{tg}(H - e')$$

gelesen werden müssen. K' wird mit desto grösserem Rechte mit dem für die Zenithdistanz Z geltenden K verwechselt werden können, je kleiner der Unterschied dieser Zenithdistanz und

$$Z - e' \cos P'$$

für welche K genommen werden sollte, durch die Beziehung des Punktes Z auf den Rand der Sonne, geworden ist.

10.

Ich werde nun alle Operationen, welche man machen muss um das Resultat einer beobachteten Entfernung des Mondes von einem Fixsterne und von der Sonne oder einem Planeten zu erhalten, zusammenstellen und vollständige Rechnungsbeispiele für beide Fälle hinzusetzen. Ich richte beides den Formeln (2a) § 3 gemäss ein, weil nichtlogarithmische Sinustafeln allgemeiner verbreitet sind als ähnliche Tafeln für die Tangenten.

A. Entfernung des Mondes von einem Fixsterne.

Nachdem man aus der Ephemeride (§ 9) für die Greenwicher W. Z. $= T + m$ die Zahlen ihrer 7 Columgenommen und daraus $d_{,}$, $\log n$, Q, $\log \sin \pi$, und den Stundenwinkel des Sterns abgeleitet hat, berechnet man

I. den parallactischen Winkel und die Zenithdistanz des Sterns:

$$a = \cos\varphi \sin t$$
$$f \sin F = \cos\varphi \cos t \qquad \operatorname{tg} Z \cos q = \operatorname{cotg}(F + \Delta)$$
$$f \cos F = \sin\varphi \qquad \operatorname{tg} Z \sin q = \frac{a}{f} \operatorname{cosec}(F + \Delta)$$

II. die von der Parallaxe geänderte Entfernung des Mondrandes von dem Sterne d'' und den Winkel am Sterne P':

$$P_{,} = Q - q$$
$$r' \cos d'' = \cos d' - \sin\pi, \cos Z$$
$$r' \sin d'' \cos(P' - P_{,}) = \sin d' - \sin\pi, \sin Z \cos P_{,}$$
$$r' \sin d'' \sin(P' - P_{,}) = \sin\pi, \sin Z \sin P_{,}$$

III. die scheinbare Entfernung D:

$$\operatorname{tg} H = \operatorname{tg} Z \cos P'$$
$$\cos z = \frac{\cos Z}{\cos H} \cos(d'' - H)$$

k und K aus z und Z und den Angaben der meteorologischen Instrumente

$$D = d'' - k \operatorname{tg}(d'' - H) - K \operatorname{tg} H$$

IV. den wahren Mittagsunterschied:

$$m + x = m + \frac{D' - D}{n'}$$

wobei, wenn x nicht etwa sehr gross ist, n' mit dessen Logarithmen die Ephemeride angibt, vertauscht werden kann.

B. Entfernung des Mondes von der Sonne oder einem Planeten.

Die Ephemeride (§ 9) ergibt für die Zeit $T + m$

$$d_{,}, \quad \log n, \quad Q, \quad \log \sin \pi_{,}, \quad e;$$

die Rechnung ist

I. wie vorher, nur wird sie mit der in der Ephemeride enthaltenen verbesserten Declination geführt.

II. statt $d_{,}$ wird $d_{,} + e$ angewandt, wodurch d' statt d'' gefunden wird; das hiervon abzuziehende e' ist

$$= e \frac{r' \sin(d'' + e')}{\sin(d_{,} + e)}$$

III. die scheinbare Entfernung D:

$$\operatorname{tg} H = \operatorname{tg} Z \cos P'$$
$$\cos z = \frac{\cos Z}{\cos H} \cos(d'' + e' - H)$$
$$D = d'' - k \operatorname{tg}(d'' + e' - H) - K \operatorname{tg}(H - e')$$

IV. wie vorher.

Die beiden Beispiele, welche ich hier folgen lasse, sind fingirt:

A. 1831 Juni 2. $14^h\,24^m\,10^s$ W. Z. ist die Entfernung α Arietis vom nächsten Mondrande $= 61°\,19'$ gemessen. Das Barometer zeigte 30,3 Engl. Zolle, das daran befindliche Thermometer 68° F.; die Wärme der Luft war 65° F. Die Breite des Beobachtungsorts ist $54°\,42'\,50''$; sein geschätzter Mittagsunterschied $1^h\,22^m$ Ost von Greenwich.

Ephemeride.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
12^h	61°46′ 14,″4	9,71401	1,085 n	243° 5′ 14″	8,21754	2°42′ 42,″0	+ 22°39′ 25″
$1^h\,2^m\,10^s$	— 32 11,4	+ 31	+ 3	— 11 0	+ 26	+ 10,6	—
	61 14 3,0	9,71432	1,088 n	242 54 14	8,21780	2 42 52,6	+ 22 39 25
	— 10,0	9,71417	9,912		+ 37	14 24 10,0	
$d_{,} =$	61 13 53,0	3,57171	1,000 n	$\log \sin \pi_{,} =$	8,21877	17 7 2,6	
		3,28588			$t =$	256 45 39	

q und *Z*.

l cos φ	9,76167	comp. l *f*	0,08253
l sin *t*	9,98830 *n*	l *a*	9,74997 *n*
l cos *t*	9,35987 *n*	l cosec (*F*+*Δ*)	0,63336
l *f* sin *F*	9,12154 *n*	l tg *Z* sin *q*	0,46586 *n*
l *f* cos *F*	9,91184	l tg *Z* cos *q*	0,62128
l tg *F*	9,20970 *n*	l tg *q*	9,84458 *n*
F	− 9°12′ 21″	*q*	− 34°57′ 36″
Δ	+ 22 39 25	l cos *q*	9,91358
F+*Δ*	13 27 4	l tg *Z*	0,70770
l cos *F*	9,99437	*Z*	78 54 34

II. *d″* und *P′*. $P_{,} = 277^{\circ}\,51'\,50''$.

l sin *π*,	8,21877	sin *d*,	0,876572
l cos *Z*	9,28412	2)	+ 0,002222
l sin *Z*	9,99181	*r′* sin *d″* cos (*P′*−*P*,)	0,874350
1)	7,50289	log	9,941685
l sin *π*, sin *Z*	8,21058	3)	8,20648 *n*
l cos *P*,	9,13615	l tg (*P′*−*P*,)	8,26480 *n*
l sin *P*,	9,99590 *n*	*P′*−*P*,	− 1° 3′ 15″
2)	7,34673	*P′*	276 48 35
3)	8,20648 *n*	l cos (*P′*−*P*,)	9,999926
cos *d*,	0,481274	l *r′* sin *d″*	9,941759
1)	+ 0,003183	l *r′* cos *d″*	9,679511
r′ cos *d″*	0,478091	l tg *d″*	0,262248
		d″	61°20′ 3″,9

I. *D*.

l tg *Z*	0,70770
l cos *P′*	9,07398
l tg *H*	0,78168
H	31°10′ 8″
d″−*H*	30 9 56
l cos *Z*	9,28412
l sec *H*	0,06771
cos (*d″*−*H*)	9,93680
l cos *z*	9,28863
z	78 47 29

l *β* = + 0,0088; l *γ* = − 0,0136.

l *α*	1,7463		1,7460
l (*β* & *γ*)	− 52		− 52
l *k*	1,7411	l *K*	1,7408
l tg (*d″*−*H*)	9,7643	l tg *H*	9,7817
	1,5054		1,5225
	32″,0		33″,3

Refraction .	− 1′ 5″,3
d″	61 20 3,9
D	61 18 58,6

IV. *m*+*x*.

D′−*D* = + 31″,4, log	1,4969
l *n*	9,7143 *n*
	1,7826 *n*

m =	− 1h 22m 0s
x =	− 1 0,6
m+*x* =	− 1 23 0,6

B. 1831 Juni 2. 23h 8m 45s W. Z. ist die Entfernung der nächsten Ränder des Mondes und der Sonne = 96° 47′ 10″ gemessen. Das Barometer zeigte 29,6 Zoll Engl., das daran befestigte Thermometer 88° F.; die Wärme der Luft war 90° F. Die Breite des Beobachtungsorts ist 19° 31′ N.; der geschätzte Mittagsunterschied 8h 50m Ost von Greenwich.

Ephemeride.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
12h	97°11′ 45″,9	9,69782	0,907 *n*	261°19′ 54″	8,21754	+ 31″,3	+ 22°10′ 43″	8′ 28″
2h 18m 45s	− 1 9 17,4	+ 124	+ 5	− 4 11	+ 58	− 0,1	+ 44	0
	96 2 28,5	9,69906	0,912 *n*	261 15 43	8,21812	+ 31,2	+ 22 11 27	8 28
	− 2,7	9,69844	9,524		+ 16	23 8 45,0		
d,	96 2 25,8	3,92038	0,436 *n*	l sin *π*,	8,21828	23 9 16,2		
e,	8 28,0	3,61882		*t* =	347°19′ 3″			
d, + *e*,	96 10 53,8							

I. *q* und *Z*.

l cos φ	9,97430	comp. l *f*	0,00951
l sin *t*	9,34153 *n*	l *a*	9,31583 *n*
l cos *t*	9,98927	l cosec (*F*+*Δ*°)	0,00033
l *f* sin *F*	9,96357	l tg *Z* sin *q*	9,32567 *n*
l *f* cos *F*	9,52385	l tg *Z* cos *q*	8,58926 *n*
l tg *F*	0,43972	l tg *q*	0,73641
F	70° 2′ 0″	*q*	259°36′ 11″
Δ°	22 11 27	l sin *q*	9,99281 *n*
F+*Δ*°	92 13 27	l tg *Z*	9,33286
l sin *F*	9,97308	*Z*	12 8 43

II. d'', e' und P'. $P_{,} = 1^{0}\,39'\,32''$.

$1 \sin \pi_{,}$	8,21828
$1 \cos Z$	9,99017
$1 \sin Z$	9,32303
1)	8,30845
$1 \sin \pi_{,} \sin Z$	7,54131
$1 \cos P_{,}$	9,99982
$1 \sin P_{,}$	8,46163
2)	7,54113
3)	6,00294
$\cos (d_{,} + e_{,})$	− 0,107680
1)	+ 0,016160
$r' \cos (d'' + e')$	− 0,123840

$\sin (d_{,} + e_{,})$	0,994185
2)	+ 0,003476
$r' \sin (d'' + e') \cos (P' - P_{,})$	0,990709
log	9,995946
3)	6,00294
$1 \operatorname{tg} (P' - P_{,})$	6,00699
$P' - P_{,}$	0° 0′ 21″
P'	1 39 53
$1 \cos (P' - P_{,})$	0,000000
$1 r' \sin (d'' + e')$	9,995946
$1 r' \cos (d'' + e')$	9,092861 n
$1 \operatorname{tg} (d'' + e')$	0,903085 n
$d'' + e'$	97° 7′ 30,″4
d''	96 59 4,2

$1 e_{,}$	2,7059
. . . . .	9,9959
$1 \operatorname{cosec} (d_{,} + e_{,})$	0,0025
$1 e'$	2,7043
e'	8′ 26,″2

III. D.

$1 \operatorname{tg} Z$	9,33286
$1 \cos P'$	9,99982
$1 \operatorname{tg} H$	9,33268
H	12° 8′ 26″
$d'' + e' - H$	84 59 4
$H - e'$	12 0 0
$1 \cos Z$	9,99017
$1 \sec H$	0,00982
$1 \cos (d'' + e' - H)$	8,94164
$1 \cos z$	8,94163
z	84°59′ 5″

$1\beta = -0{,}0021$, $1\gamma = -0{,}0337$

1α	1,6993	. . . . .	1,7614
$1 (\beta \,\&\, \gamma)$	− 386	. . . . .	− 358
$1 k$	1,6607	$1 K$	1,7256
$1 \operatorname{tg} (d'' + e' - H)$	1,0567	$1 \operatorname{tg} (H - e')$	9,3275
	2,7174		1,0531
	8′ 41,″7		0′ 11,″3

Refraction	− 8′ 53,″0
d'' . . .	96 59 4,2
D . . .	96 50 11,2

IV. $m + x$.

$D' - D = -3'\,1{,}''2$. Wegen der Grösse der hieraus hervorgehenden Verbesserung des Mittagsunterschiedes wende ich die Formel § 9 an.

$1 \sin \pi_{,}$	8,2183
$1 \cos z$	8,9416
	7,1599
	+ 0,0014

$1 k$ Arc. 1″	6,3463
$1 \sec (d'' + e' - H)^{2}$	2,1167
	8,4630
	− 0,0290
x	+ 6^{m} 12,^{s}6
m	− 8^{h} 50^{m} 0,^{s}0
$m + x$	− 8 43 47,4

1 0,9724	9,9878
$1 n$	9,6991 n
$1 n'$	9,6869 n
$1 (D' - D)$	2,2582 n
. . . . .	2,5713

11.

Indem ich meine Methode durch zwei Beispiele verfolgt habe, habe ich die Absicht gehabt, nicht allein den Gang der Rechnung, sondern auch die Arbeit welche sie fordert anschaulich zu machen. In der letzteren Beziehung bemerke ich, dass ich alle vorkommenden Zahlen hingeschrieben habe, selbst solche, welche ein einigermassen geübter Rechner nicht schreiben wird. Vergleicht man diese Arbeit mit der, welche die Anwendung der bekannten trigonometrischen Methode — der von DUNTHORNE — mit Einschluss der Berechnung beider Höhen verursacht, so wird man einigen Vortheil auf der Seite der letzteren finden. Dieses ist zum Theil den Hülfstafeln zuzuschreiben, welche, mit den Argumenten der scheinbaren Höhe und der Horizontalparallaxe des Mondes, sowohl den Unterschied der Höhenparallaxe und Strahlenbrechung, als auch den Logarithmen des Verhältnisses der Producte der Cosinusse der scheinbaren und der wahren Höhen beider Gestirne angeben; welche Tafeln allerdings die Mühe der Rechnung bedeutend vermindern, dagegen aber auch die Berichtigung der Strahlenbrechung durch die Angaben des Barometers und Thermometers ausschliessen, deren Vernachlässigung oft, vorzüglich wenn die Gestirne niedrig stehen,

oder eines von ihnen niedrig steht, einen beträchtlichen Fehler erzeugt. Dieser Ursache ist z. B. der grösste Theil des Fehlers des Resultats zuzuschreiben, welches man erhält, indem man das Beispiel B nach der Anleitung zur Anwendung der Dunthorne'schen Methode und den Tafeln berechnet, welche in NORIE Epitome of pract. navigation (Ausgabe von 1828) gegeben sind: man findet nämlich dadurch den Mittagsunterschied $= -8^h 46^m 43^s$, also $-2^m 56^s$ fehlerhaft. Fälle, in welchen der Fehler eine Zeitminute beträgt, sind nicht ungewöhnlich. — Zum Theil ist aber auch die etwas grössere Arbeit, welche die Anwendung meiner Methode verursacht, eine Folge der Berücksichtigung in der älteren ganz vernachlässigter Umstände.

Wo das Resultat, welches man erhält, ohne die Veränderlichkeit der Strahlenbrechung mit den Ständen der meteorologischen Instrumente, ohne ihre Verschiedenheit an den Mittelpunkten der Gestirne und an den beobachteten Punkten ihrer Ränder, ohne die Abplattung der Erde u. s. w. zu berücksichtigen, dem Zwecke einer Anwendung der Methode nicht minder entspricht, als das dieses Alles berücksichtigende Resultat, da wird offenbar jede, durch die Erlangung des letzteren verursachte Vermehrung der Arbeit unnütz verwandt. Da die Ausführung der von mir gegebenen Vorschrift nicht kleinere, sondern etwas grössere Arbeit fordert als die Ausführung der früheren, so ist also ihr Vorzug, zum wahren Resultate der Beobachtungen zu führen, nur geltend, wenn dieses einen grösseren Werth besitzt als das unvollkommene. Ich habe schon oben gesagt, warum ich erwarte, den grösseren Werth eines genauen Resultats, falls er auch nicht als jetzt vorhanden betrachtet werden könnte, in der Folge anerkannt zu sehen. In dieser Erwartung werde ich noch einiger Abänderungen erwähnen, welche man meiner Rechnungsmethode geben kann.

Statt der in der Zusammenstellung § 10 und den Beispielen angewandten Formeln (2a) würde ich die Formeln (2b) (§ 3) gewählt haben, wenn ich den Besitz nicht-logarithmischer Tangenten-Tafeln von 10 zu 10″ gehend und 6 richtige Decimalstellen enthaltend, hätte voraussetzen wollen. Wenn solche Tafeln vorhanden sind, so wird dadurch die Berechnung des Einflusses der Parallaxe, meiner Meinung nach, so leicht als möglich gemacht. Alle anzuwendenden Logarithmen dürfen dann höchstens 5 Decimalstellen besitzen. — Man braucht aber die erwähnten Tangententafeln nicht vorauszusetzen und kann dennoch mit 5 Decimalstellen der Logarithmen ausreichen, wenn man P' und d' durch aufeinanderfolgende Näherungen berechnen will. Die dazu nöthigen Formeln findet man aus den im 3. § gegebenen; zuerst:

$$0 = \sin d_, \sin (P' - P_,) - \sin \pi, \sin Z \sin P'$$

oder

$$\sin (P' - P_,) = \frac{\sin \pi, \sin Z \sin P'}{\sin d_,}$$

wodurch man, indem man, rechts von dem Gleichheitszeichen, das gegebene $P_,$ statt P' setzt, eine Näherung an $P' - P_,$ also auch an P' findet, deren Anwendung eine grössere Näherung ergibt. Diese ist, da die Methode nie auf sehr kleine (die Convergenz vermindernde) Entfernungen des Mondes von anderen Gestirnen angewandt wird, in allen vorkommenden Fällen der Wahrheit schon hinreichend nahe. Ferner kann auch d' auf ähnliche Art berechnet werden; die zweite der Formeln (2b) ergibt:

$$\sin (d' - d_,) = g \sin \pi, (d' - G),$$

worin man Anfangs, rechts von dem Gleichheitszeichen, $d_,$ statt d' anwendet und die dadurch gefundene Näherung an $d' - d_,$ also auch an d', zu einer ferneren Näherung benutzt u. s. w. Auch kann man die Rechnung so einrichten, dass sie denselben Hülfswinkel H benutzt, welcher auch bei der Berechnung des Einflusses der Strahlenbrechung angewandt wird, wodurch dann die Aufsuchung von g und G unnöthig wird. Aus den Formeln (2a) des 3. § erhält man:

$$r' \cos d' = \cos d_, \qquad - \sin \pi, \cos Z$$
$$r' \sin d' = \sin d_, \cos (P' - P_,) - \sin \pi, \sin Z \cos P'$$

oder wenn man

$$c \cos (d_,) = \cos d_, \qquad h \cos H = \cos Z$$
$$c \sin (d_,) = \sin d_, \cos (P' - P_,) \qquad h \sin H = \sin Z \cos P'$$

setzt:

$$r' \cos d' = c \cos (d_,) - \sin \pi, h \cos H$$
$$r' \sin d' = c \sin (d_,) - \sin \pi, h \sin H$$

woraus durch Elimination von r':

$$\sin [d' - (d_,)] = \frac{h \sin \pi,}{c} \sin (d' - H)$$

folgt. Diese Formel ist der früher gegebenen ganz analog und kann daher in gleicher Art zur Erfindung von d' angewandt werden. Indessen ist

$$c = \sqrt{1 - \sin d_,^2 \sin (P' - P_,)^2}$$

oder, wenn man für $\sin d_, \sin (P' - P_,)$ seinen Ausdruck schreibt:

$$c = \sqrt{1 - \frac{1}{r_,^2} \sin \pi_,^2 \sin Z^2 \sin P'^2}$$

nicht kleiner als $\cos \pi$, und nicht grösser als 1, weshalb es, da es nur als Divisor von $\sin \pi$, vorkommt,

ohne erheblichen Nachtheil mit 1 verwechselt werden, oder unberücksichtigt bleiben kann. Die Grösse $(d_{,})$ kann durch Reihenentwickelung berechnet werden; man hat nämlich:

$$\operatorname{tg}(d_{,}) = \operatorname{tg} d_{,} \cos(P' - P_{,})$$

woraus bekanntlich folgt:

$$(d_{,}) = d_{,} - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(P' - P_{,})^2 \sin 2d_{,} + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(P' - P_{,})^4 \sin 4d_{,} - \text{etc.}$$

in welcher Reihe aber schon das in $\sin 4d_{,}$ multiplicirte Glied unerheblich wird. Auch kann $(d_{,}) - d_{,}$ in eine Tafel gebracht werden, deren Argumente $P' - P_{,}$ und $d_{,}$ sind. Eine solche Tafel hat SCHUMACHER unter die Hülfstafeln aufgenommen, welche er zur Erleichterung der Anwendungen der gegenwärtigen Methode hat drucken lassen*). Indessen fordern die jetzt betrachteten Arten d' zu berechnen, nicht die Aufsuchung von r', wodurch nothwendig wird, auch seine Anwendung zur Berechnung von e' zu vermeiden. Dieses geschieht indem man den Ausdruck

$$e' = e_{,} \frac{r' \sin(d' + e')}{\sin(d_{,} + e_{,})}$$

in (§ 3)

$$e_{,}\left[1 - \frac{\sin\pi, \sin Z \cos\tfrac{1}{2}(P' + P_{,})}{\sin(d_{,} + e_{,}) \cos\tfrac{1}{2}(P' - P_{,})}\right]$$

oder, ohne erheblichen Fehler, in

$$e_{,}\left[1 - \frac{\sin\pi, \sin Z \cos P'}{\sin(d_{,} + e_{,})}\right] = e_{,}\left[1 - \frac{\sin\pi, h \sin H}{\sin(d_{,} + e_{,})}\right]$$

umformt, also nach der Formel

$$e' = e - e \frac{\sin\pi, h \sin H}{\sin(d_{,} + e)}$$

*) Auxiliary Tables for Mr. BESSEL's method of clearing the Distances.

rechnet, in welcher e statt des unerheblich davon verschiedenen $e_{,}$ geschrieben ist.

Zum Schlusse bemerke ich noch, dass man dasselbe Resultat, welches die in dieser Abhandlung erläuterte Methode durch ihre Beziehung auf den Rand des Mondes ergibt, auch durch Befolgung der bisher gewöhnlichen Berechnungsart erlangen kann, wenn man zur Berechnung der Zenithdistanz des Mondes die Rectascension und Declination nicht seines Mittelpunkts, sondern des in der Richtung nach dem verglichenen Gestirne liegenden Punktes seines Randes anwendet; auch, falls das verglichene Gestirn die Sonne ist, ihren Ort gleichfalls auf ihren Rand bezieht. Die Rechnung wird aber, falls man nicht auf die Verbesserung der Strahlenbrechung durch den Barometer- und Thermometerstand Verzicht leisten will, weniger kurz als die vorgetragene; auch wird die Ephemeride weniger kurz und ihre Anwendung weniger bequem.

Verbesserung des Logarithmen des Sinus der Horizontal-Parallaxe.

Argument .... Polhöhe.*)

Arg.		Arg.		Arg.	
0°	0,00000	30°	0,00036	60°	0,00109
5	00001	35	00048	65	00119
10	00004	40	00060	70	00128
15	00010	45	00072	75	00135
20	00017	50	00085	80	00141
25	00026	55	00097	85	00144
30	00036	60	00109	90	00145

*) [Im Original von Grad zu Grad fortschreitend.]

173. Ueber die Wahrscheinlichkeit des Auffindens eines Cometen.*)

(Briefwechsel mit OLBERS I, p. 35.)

OLBERS an BESSEL.

. . . . . 1806.

Wie verhält sich die Wahrscheinlichkeit einen Cometen in verschiedenem, scheinbaren Abstande von der Sonne zu finden?

Mit Recht glaubt man, Cometen mit der grössten Hoffnung sie zu finden in der Nähe der Sonne, oder am Abendhorizont nach ihrem Untergange, oder am Morgenhorizont vor ihrem Aufgange suchen zu müssen. Allein mit Unrecht vernachlässigt man die übrigen Gegenden des Himmels zu sehr. Wir wollen dies etwas näher untersuchen.

Es ist klar, dass an sich jeder Punkt im Raume unsers Planetensystems gleich wahrscheinlich einen Cometen in einem gegebenen Augenblicke enthalten könne. Aber damit dieser Comet uns in unserm Fernrohre sichtbar werde, muss er eine gewisse Lichtstärke haben. Ist sein Abstand von der Erde $= x$, von der Sonne $= y$, so ist diese Lichtstärke im Verhältniss von $\frac{1}{x^2 y^2}$.

Setzt man nun, welches im Mittel der Wahrheit nahe kommen wird, obgleich grössere Cometen oft Ausnahmen machen, bei der ersten Entdeckung eines Cometen dürfte $x^2 y^2$ nicht grösser als 1 sein; und setzt also $x^2 y^2 = 1$,

so ist, wenn wir φ den scheinbaren Abstand des Cometen im Bogen von der Sonne und ihren wahren Abstand von der Erde $= r$ setzen,

*) [Von OLBERS und BESSEL.]

$$y^2 = r^2 + x^2 - 2rx \cdot \cos\varphi,$$

folglich haben wir die Gleichung:

$$r^2x^2 + x^4 - 2rx^3 \cdot \cos\varphi - 1 = 0.$$

Nehmen wir $r = 1$, so wird die Gleichung:

$$x^4 + x^2 - 2x^2 \cdot \cos\varphi - 1 = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer krummen Linie der vierten Ordnung, die zu einer Art höherer Ellipse gehört. Erde und Sonne liegen in Punkten, die man mit den Brennpunkten der gewöhnlichen Ellipse vergleichen kann.

Lässt man diese krumme Linie sich um ihre durch Sonne und Erde gehende Axe drehen, so schliesst der so entstehende Körper den Raum ein, in dem der Comet sein muss, wenn er von der Erde gesehen werden soll.

Für jedes φ gibt es also ein x, und je grösser x ist, je grösser ist die Wahrscheinlichkeit, einen Cometen zu finden.

Für $\varphi = 0$ ist $\cos\varphi = 1$,

mithin heisst die Formel:

$$x^4 + x^2 - 2x^2 - 1 = 0,$$

welches sich offenbar in die beiden Factoren

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$x^2 - x + 1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

zerlegen lässt. Aus (1) findet sich:

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{1\tfrac{1}{4}}$$

welches die beiden möglichen Werthe der Gleichung gibt, nämlich:

$$x = +1{,}618034$$

$$x = -0{,}618034.$$

Ersterer gehört zu $\varphi = 0^0$, letzterer zu $\varphi = 180^0$. Der negative Werth zeigt an, dass x an der entgegengesetzten Seite von der Sonne liegt.

Da nun überhaupt

$$\cos\varphi = \frac{x^4 + x^2 - 1}{2x^2}$$

ist, so dürfen wir nur für x nach und nach alle Werthe von 1,61803 bis 0,61803 setzen, um φ zu finden.

Da, wenn x', x'' die Werthe sind, die zu φ', φ'' gehören, die Wahrscheinlichkeit einen Cometen in den Elongationen φ', φ'' zu finden, sich wie $x' : x''$ verhält, so ist, wenn man $\frac{x''}{x'} = y$ setzt, $x'' = yx'$. Nun ist der kleinste Werth von $y = \frac{0{,}61803}{1{,}61803}$

$$\log 0{,}618034 = 9{,}7910124$$
$$\log 1{,}618034 = 0{,}2089872$$
$$\log y = 9{,}5820252 \quad y = 0{,}38197.$$

Also die Wahrscheinlichkeit einen Cometen in der Conjunction und Opposition zu sehen, wie 1 : 0,38197.

Aber in der Conjunction kann man den Cometen nicht sehen, er muss 25 bis 30° von der Sonne entfernt sein, indessen wollen wir doch diesen grossen Werth von $y = 1$ beibehalten und nun y nach und nach vermindern bis 0,38197 und das zugehörige φ suchen.

Es ist demnach

$$x = y \times 1{,}618034$$

und

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^3} \cdots$$

Es ergibt sich folgende Tafel:

φ	y
0° 0′	1,0
24 33	0,9
36 35	0,8
48 25	0,7
63 2	0,6
85 30	0,5
138 28	0,4
180 0	0,38197

Man sieht also, dass von 90° an diese Wahrscheinlichkeit nur sehr wenig abnimmt.

Olbers an Bessel.

Nienburg, 31. Mai 1806.

Ich danke Ihnen recht sehr, mein theuerster Freund! für Ihren interessanten Brief vom 28. Mai*) und für die mir mitgetheilten Rechnungen und Beobachtungen. Auch ich habe jene Curve**) bei der Musse, die mir hier zu Theil wird, noch näher betrachtet. Nimmt man die Abscissen q aus dem Mittelpunkt der Curve, und nennt die Ordinaten z, so ist sehr einfach

$$z^2 = -\frac{1}{4} - q^2 + \sqrt{1+q^2}$$

also der körperliche Inhalt des Sphäroids:

$$A = \int \pi z^2 dq = \left[-\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}q^2\right)q + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}q\sqrt{1+q^2} + \frac{1}{2}\log\left(q + \sqrt{1+q^2}\right)\right]\pi$$

wo keine Constante addirt zu werden braucht, wenn man für $q = 0$ auch $A = 0$ sein lässt. Diese Formel scheint mir zur Rechnung viel bequemer, als die nach x entwickelte. So ist der ganze Inhalt, wenn wir $q = \frac{\sqrt{5}}{2}$ nehmen:

$$A = \pi\left[\frac{\sqrt{5}}{12} + \log\left(\sqrt{\frac{5}{4}} + \frac{3}{2}\right)\right] = 3{,}608946,$$

welches mit Ihrer Rechnung nahe zutrifft.

Für $\varphi = 30^0$ geben Sie mir $A = 0{,}63506$ (natürlich den Kegel mit eingeschlossen), ich habe $A = 0{,}93473$. — Vielleicht ist die 6 ein Schreibfehler bei Ihnen, und die übrigen Zahlen ein Rechnungsfehler bei mir, welches ich nachsehen werde. . . .

. . . Von unserer Curve bemerke ich noch, dass, wenn man eine Ellipse nimmt, deren grosse und kleine Axe denen der Curve gleich sind, für die Ellipse sein wird:

$$z^2 = \frac{3}{4} - \frac{3}{5}q^2;$$

für die Curve aber:

$$z^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{8}q^4 + \frac{1}{16}q^6 \ldots.$$

wodurch das Verhältniss beider Curven zu einander noch mehr aufgeklärt wird.

Verzeihen Sie diesen sehr eilfertig geschriebenen Brief. Morgen gehe ich von hier und denke übermorgen bei unserm Gauss zu sein.

---

*) Dieser Brief vom 28. Mai ist nicht vorhanden. Erman.

**) Vergl. den vorhergehenden Brief von Olbers, auf welchem kein Datum angegeben ist. Erman.

Bessel an Olbers.

Lilienthal, 6. Juni 1806.

Ich eile, die verschiedenen Fragen zu beantworten, die der Brief enthält, wodurch Sie, hochgeehrtester Herr Doctor, mich so sehr erfreut haben.

Die Rechnung nach der neuen Entwickelung, die Sie mir mittheilen, ist viel leichter als die nach dem Ausdrucke

$$A = \left[\frac{1}{24}(x^6 - a^6) - \frac{1}{8}(x^4 - a^4) - \log\frac{x}{a} + \frac{1}{8}(x^{-4} - a^{-4}) - \frac{1}{24}(x^{-6} - a^{-6})\right]\pi$$

geführte; allein dieser Ausdruck leidet starke Reductionen, die denn auf eine auch sehr bequeme Formel führen.

Es ist nämlich:

$$\text{Const.} = \left(-\frac{1}{24}a^6 + \frac{1}{8}a^4 + \log a - \frac{1}{8}a^{-4} + \frac{1}{24}a^{-6}\right)\pi$$

a ist $= \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, also $a^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, wodurch sich diese Constante in $\left(\frac{1}{24}\sqrt{5} + \log a\right)\pi$ verwandelt. Der Kegel, den man addiren muss, ist

$$= \frac{1}{3}\pi x^3 \sin\varphi^2 \cos\varphi$$

$$= \left(-\frac{1}{24}x^6 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24} - \frac{1}{8}x^{-4} + \frac{1}{24}x^{-6}\right)\pi,$$

also der ganze Körper:

$$A = \left(-\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^2 - \log x + \frac{1}{24} + C\right)\pi$$

$$= -\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^2 - \log x + \frac{1}{12}a + \log a.$$

Für $\varphi = 180^0$ ist A natürlich $= 2C\pi$;

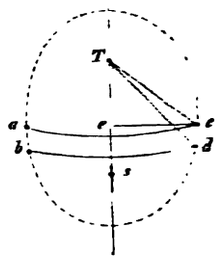
für 60^0 ist es $= \left(\frac{1}{8} + C\right)\pi$,

für $90^0 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{8} - \frac{1}{24} - \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{5}-1}{2} + C\right)\pi$;

denn für 90^0 ist $x = \frac{1}{\sqrt{a}}$, oder $x^2 = \frac{1}{a}$. Bei dem Werthe für 30^0 hatte ich mich um eine 1 in der ersten Decimalstelle verschrieben; der Fehler war also $0{,}1\,\pi$, und der richtige Inhalt dieses körperlichen Stücks $= 0{,}94923\ldots$.

(Beilage von Bessel.)

$cdab$ bedeute einen Durchschnitt des Körpers, so ist $cTs = \varphi$, $cT = x$. ec ist $= x\sin\varphi$, und die Fläche eines mit diesem Halbmesser beschriebenen Kreises $= x^2\sin\varphi^2 . \pi$, also das Differential des Körpers:



$$dA = \pi . x^2 \sin\varphi^2 \times -d(x\cos\varphi)$$

$$= -\pi x^2 \sin\varphi^2 . d(x\cos\varphi);$$

allein $x\cos\varphi = \frac{x^4 + x^2 - 1}{2x^2}$

also

$$d(x\cos\varphi) = \left(\frac{4x^3 + 2x}{2x^2} - \frac{2(x^4 + x^2 - 1)}{2x^3}\right)dx = \frac{x^4 + 1}{x^3}dx$$

$$\sin\varphi^2 = 1 - \cos\varphi^2 = \frac{-x^8 + 2x^6 + x^4 + 2x^2 - 1}{4x^6}$$

also $$dA = \frac{+x^{12} - 2x^{10} - 4x^6 - 2x^2 + 1}{4x^7} \cdot \pi\, dx$$

und integrirt:

$$A = \left(+\frac{1}{24}x^6 - \frac{1}{8}x^4 - 1x + \frac{1}{8}x^{-4} - \frac{1}{24}x^{-6}\right)\pi$$

und wenn dieses Integral von $x = a$ an gerechnet wird:

$$A = \pi\left(\frac{x^6 - a^6}{24} - \frac{x^4 - a^4}{8} - 1\frac{x}{a} + \frac{x^{-4} - a^{-4}}{8} - \frac{x^{-6} - a^{-6}}{24}\right)$$

Setzt man nun $\varphi =$	30^0 ...	90^0 ...	180^0
so wird .... $x =$	1,386106	0,786152	0,61834
und ..... $A =$	0,33092	2,91486	3,60883

Anmerkung von Olbers.

„Der Conus macht $\frac{0{,}603794}{0{,}93471}$

Es sei die Zahl der Cometen . =	1,000000
so sind im Hemisph. der Sonne	0,807702
in dem entgegengesetzten	0,192298
Unsichtbar unter den Sonnenstr.	0,259006
Sichtbar im Hemisph. der Sonne	0,548696.“

174. Ueber die Parallaxen einiger Fundamentalsterne.*)

(Briefwechsel mit Olbers I, p. 197.)

... Die Untersuchung über die Parallaxe des Sirius und des α Lyrae ist nun beendigt; sie hat das unerwartete Resultat gegeben, dass beide Sterne keine merkliche Parallaxe haben, wie Sie dieses aus vier Finalgleichungen sehen werden, die ich Ihnen hier hersetze.

*) [Brief an Olbers vom 15. Dec. 1808. — Vgl. Abh. 77 u. 78.]

Mittlere Differenz der AR. 1755

$= 11^h\,54^m\,17^s{,}694 - 0^s{,}861\,(\pi\sec\delta + \pi'\sec\delta')$	53	Beobb.
$= 17{,}793 + 0{,}322\,(\pi\sec\delta + \pi'\sec\delta')$	54	„
$= 17{,}759 + 0{,}862\,(\pi\sec\delta + \pi'\sec\delta')$	50	„
$= 17{,}699 + 0{,}984\,(\pi\sec\delta + \pi'\sec\delta')$	50	„

Da $\pi\sec\delta + \pi'\sec\delta'$, oder die Summe der mit

den Secanten der Declination multiplicirten Parallaxen, nicht negativ werden kann, so ist ihr wahrscheinlichster Werth = 0 oder eigentlich so klein, dass die Beobachtungen ihn nicht verrathen. Die Fehler der einzelnen Gleichungen werden schwerlich über 0^s,05 kommen, und man hätte die Parallaxe sicher entdecken müssen, wenn $\pi \sec\delta + \pi' \sec\delta'$ nur 0^s,1 betrüge; ich glaube daher fest behaupten zu können, dass die Summe der Parallaxen beider Sterne nicht $1\frac{1}{3}''$ beträgt. Die Belege zu diesem Resultate muss ich Ihnen schuldig bleiben, da es mir an Zeit mangelt sie heute abzuschreiben.

Procyon und α Aquilae, die ich jetzt untersuche, haben wahrscheinlich eine merklichere Parallaxe, wovon ich Ihnen das Eigentliche vielleicht schon am Montage anzeigen oder selbst bringen kann.

Diese Methode, die Parallaxe durch die Rectascensionen zu bestimmen, hat grosse Vorzüge vor allen andern, weil jede einzelne Beobachtung von der andern völlig unabhängig ist, und sich keine constante Fehler einschleichen können. Wenn Procyon und Athair eine Parallaxe haben, werde ich noch Arcturus mit dem als stillstehend zu betrachtenden α Lyrae vergleichen, auch den Polarstern untersuchen, weil dieser sich am ganzen Himmel am genauesten beobachten lässt.

Beilage.

Parallaxe des Procyon und des α Aquilae.

50 Beobachtungen, die das negative Maximum des Coefficienten von $(\pi \sec\delta + \pi' \sec\delta')$ einschliessen, und wo dieser $> -0{,}733$.

Sonnenlänge zwischen (339° 30′ und 61° 40′) geben den Unterschied der Rectascensionen für Januar 1,1755
$12^h\,12^m\,21^s{,}9588 - 0{,}918\,a$

50 Beobb.; Coefficienten zwischen $-0{,}722$ und $+0{,}782$
$\odot \left\{ \begin{matrix} 64^\circ 28' \text{ bis } 163^\circ 49' \\ 249\ 53 \ \text{„}\ 338\ 13 \end{matrix} \right\}\ 12^h\,12^m\,21^s{,}9018 + 0{,}220\,a$

50 Beobb.; Coefficienten zwischen $+0{,}733$ und $+0{,}937$
$\odot \left\{ \begin{matrix} 163^\circ 54' \text{ bis } 183^\circ\ 7' \\ 222\ 40 \ \text{„}\ 237\ 17 \end{matrix} \right\}\ 12^h\,12^m\,21^s{,}8774 + 0{,}874\,a$

50 Beobb.; Coefficienten im positiven Maximo und nicht unter 0,940
$\odot \{183^\circ 33' \text{ bis } 217^\circ 39'\}\ 12^h\,12^m\,21^s{,}8836 + 0{,}969\,a$

Die regelmässige Abnahme dieser Zahlen macht einen positiven Werth von a oder $\pi \sec\delta + \pi' \sec\delta'$ sehr wahrscheinlich. Ich finde nach den moindres quarrés

Unterschied der AR. 1755 . . $12^h\,12^m\,21^s{,}91745$
$\pi \sec\delta + \pi' \sec\delta' \ldots\ldots = 0^s{,}04210 = 0''{,}6315$

Diese Werthe, in die Finalgleichungen gesetzt, geben:

			Fehler.
Berechneter Unterschied der AR	$12^h\,12^m\,21^s{,}95610$;	beob. 21,9588;	$-0^s{,}00270$
	„ „ 21,90819;	„ 21,9018;	$+0{,}00639$
	„ „ 21,88066;	„ 21,8774;	$+0{,}00326$
	„ „ 21,87666;	„ 21,8836;	$-0{,}00694$

Dieser Unterschied ist nach meinem Fundamentalcataloge für

1. Januar 1755 . . . $12^h\,12^m\,21^s{,}824$
nach Bradley . . . „ „ 21,365
„ Hornsby . . . „ „ 21,753.

---

175. Zur Verbesserung einer Cometenbahn nach Olbers' Methode.*)

(Briefwechsel mit Olbers I, p. 427.)

. . . Die Verbesserung einer Cometenbahn durch Ihre Methode gewinne ich immer lieber, und bin überzeugt, dass sie die leichteste von allen ist, wenn man nämlich die sehr bedeutende Rechnungsabkürzung benutzt, die uns Gauss gegeben hat. Eben so bequem ist es fast, nach dieser Veränderung, wenn man für ϱ'' die Form

$$\varrho'' = M\varrho + x$$

annimmt, oder

$$\varrho'' = \varrho \cdot y \cdot \frac{\operatorname{tg}\beta \sin(\odot' - \alpha') - \operatorname{tg}\beta' \sin(\odot' - \alpha)}{\operatorname{tg}\beta' \sin(\odot' - \alpha'') - \operatorname{tg}\beta'' \sin(\odot' - \alpha')} + y \cdot \frac{R \sin(\odot' - \odot) - R'' \sin(\odot'' - \odot')}{\operatorname{tg}\beta' \sin(\odot' - \alpha'') - \operatorname{tg}\beta'' \sin(\odot' - \alpha')} \operatorname{tg}\beta'$$

wo $$y = \frac{r''}{r} \cdot \frac{\sin(\varphi'' - \varphi')}{\sin(\varphi' - \varphi)}$$

Man hat dadurch, wenn man die Bezeichnungen von Gauss beibehält:

$$R''\cos(\odot'' - \odot) - R - x\cos(\alpha'' - \odot) = g\cos\varepsilon\cos(G - \odot)$$
$$R''\sin(\odot'' - \odot) \qquad - x\sin(\alpha'' - \odot) = g\cos\varepsilon\sin(G - \odot)$$
$$- x\operatorname{tg} C'' \qquad = g\sin\varepsilon$$

*) [Aus einem Briefe an Olbers vom 25. Mai 1815. — Vgl. Abhh. 4, 5, 6.]

$$M - \cos(\alpha'' - \alpha) = h \cos\zeta \cos(H - \alpha'')$$
$$\sin(\alpha'' - \alpha) = h \cos\zeta \sin(H - \alpha'')$$
$$M \operatorname{tg} C'' - \operatorname{tg} C = h \sin\zeta$$
$$\cos\zeta \cos\varepsilon \cos(G - H) + \sin\zeta \sin\varepsilon = \cos\varphi$$
$$g \sin\varphi = A$$
$$\cos C \cos(\alpha - \odot) = \cos\psi;\ R \sin\psi = B$$
$$\cos C'' \cos(\alpha'' - \odot'') = \cos\psi'';\ R'' \sin\psi'' = B''$$
$$h \cos C = b$$
$$\frac{h}{M} \cos C'' = b''$$
$$g \cos\varphi - bR \cos\psi = c$$
$$g \cos\varphi - b'' R'' \cos\psi'' + \frac{h}{M} x = c''$$

Auf diese Weise schreitet die Bahnbestimmung ganz regelrecht bis zur vollkommenen Harmonie (wo nämlich der berechnete mittlere Ort auf dem vom beobachteten zur Sonne gezogenen grössten Kreise liegen muss) fort. Doch wird es bei etwas langen Zwischenzeiten kürzer sein, über M zwei Hypothesen zu machen, und x ganz wegzulassen. Auch lässt sich dieses Verfahren leicht auf sehr excentrische Ellipsen anwenden. In diesem Falle würde es aber noch vortheilhafter sein, sich nur an die mittlere Länge zu halten und durch die Uebereinstimmung der Breite die Ellipticität zu beurtheilen. Wollte man dann über M keine Hypothese machen, so würde man ϱ'' mit fortschreitender Annäherung aus der Formel:

$$\varrho'' = \varrho \cdot y \cdot \frac{\sin(\alpha' - \alpha)}{\sin(\alpha'' - \alpha')} + yR \frac{\sin(\alpha' - \odot)}{\sin(\alpha'' - \alpha')} - y' R' \frac{\sin(\alpha' - \odot')}{\sin(\alpha'' - \alpha')} + R'' \frac{\sin(\alpha' - \odot'')}{\sin(\alpha'' - \alpha')}$$

bestimmen können. . . .*)

176. Correction wegen Fadenneigung beim Meridiankreis.**)

(Astron. Nachr. **29**, p. 65.)

. . . Bevor ich die Beobachtungen [des Polarsterns] selbst mittheile ist es nöthig, noch einige Zahlenwerthe anzuführen, welche zu ihrer Reduction benutzt worden sind. Da die Beobachtungen im Quecksilberhorizonte oft bis 30 Minuten vor und nach der Culmination gemacht worden sind, so ist es nothwendig, um die beobachteten Zenithdistanzen auf den Meridian reduciren zu können, vorher die Abweichung der horizontalen Fäden vom Parallellismus mit dem Aequator auszumitteln. Die Bestimmungsart, welche BESSEL für die Aufsuchung dieser hieraus folgenden Correctionen gegeben und auch von mir angewandt worden ist, ist folgende.

Sind die Beobachtungszeiten des Polarsterns vor der Culmination $t_{,}$, $t'_{,}$, $t''_{,}$, nach derselben t'', t', t u. die Zenithdistanzen $z_{,}$, $z'_{,}$, $z''_{,}$, „ „ z'', z', z so ist, wenn T die Zeit der Culmination bezeichnet:

*) [OLBERS bemerkt dazu (am 9. Juni 1815): „Die Verbesserungsmethode, die Sie mir gütigst communiciren, ist sehr bequem und durch den regelmässigen Gang der Annäherung auch sehr elegant. Wenn indessen der Comet, wie in unserm jetzigen Fall, lange schon beobachtet, und die Bahn schon nahe bekannt ist, so wird es doch wohl am bequemsten sein, für zwei ausgesuchte hinlänglich von einander entfernte Beohachtungen die beiden curtirten Distanzen von der Sonne, Δ', Δ'' zu berechnen und dann vier Hypothesen zu formiren:

			Wahre Bahn.
Curt. Abst. 1	$\Delta' \,.\, \Delta' + m$	Δ'	$\Delta' \,.\, \Delta' + x$
Curt. Abst. 2	$\Delta'' \,.\, \Delta''$	$\Delta'' + n$	$\Delta'' \,.\, \Delta'' - y$
Excentr. . .	$1 \,.\, 1$	1	$1 - \varepsilon \quad 1 - z$

und so vier Bahnen für den Cometen zu bestimmen, welches sehr leicht ist, da für mehrere Hypothesen ein grosser Theil der Rechnungen nur einmal gemacht werden darf. Dann kann man mit diesen vier Bahnen so viele von den zwischenliegenden und auch von den nachher gemachten Beobachtungen vergleichen, als man will, und für jede Länge und jede Breite eine Bedingungsgleichung von der Form

$$\frac{p}{m} x + \frac{q}{n} y + \frac{r}{\varepsilon} z = a$$

erhalten. Ist nun der Werth von Δ' und Δ'' der Wahrheit schon hinreichend nahe, und z klein genug, oder die Bahn nicht zu sehr von der Parabel verschieden, so wird man so die Elemente mit aller erforderlichen Genauigkeit bestimmen können, ohne wieder eine Rechnung von vorne anfangen zu müssen. Man sollte, meine ich, immer diese vierte Hypothese den drei übrigen hinzufügen, da eine Cometenbahn doch oft merklich von der Parabel abweichen kann."]

**) [393 d. a. Verz. — Von BUSCH mitgetheilt in seinem Aufsatze: Beobachtungen des Polarsterns mit dem auf der Königsberger Sternwarte befindlichen Repsold'schen Meridiankreise.]

$$Z = z_, + \alpha(t_, - T) + \beta(t_, - T)^2 \text{ und eben so } Z = z'' + \alpha(t'' - T) + \beta(t'' - T)^2$$
$$= z'_, + \alpha(t'_, - T) + \beta(t'_, - T)^2 \qquad = z' + \alpha(t' - T) + \beta(t' - T)^2$$
$$= z''_, + \alpha(t''_, - T) + \beta(t''_, - T)^2 \qquad = z + \alpha(t - T) + \beta(t - T)^2$$

und $\beta = \frac{225}{4} \sin 1''. \sin 2\delta.$

Setzt man

$$\tfrac{1}{3}\{z_, + \beta(t_, - T)^2 + z'_, + \beta(t'_, - T)^2 + z''_, + \beta(t''_, - T)^2\} = m$$
$$\tfrac{1}{3}\{z'' + \beta(t'' - T)^2 + z' + \beta(t' - T)^2 + z + \beta(t - T)^2\} = m'$$

ferner

$$\tfrac{1}{3}(t_, + t'_, + t''_,) = \tau$$
$$\tfrac{1}{3}(t'' + t' + t) = \tau'$$

so folgt:

$$m + \alpha\tau = m' + \alpha\tau' \quad \text{oder} \quad \alpha = \frac{m - m'}{\tau' - \tau},$$

mithin, wenn $(t - T) + \frac{\alpha}{2\beta} = T'$ gesetzt wird:

$$Z = \beta \cdot T'^2 - \frac{\alpha^2}{2\beta}.$$

---

177. Reduction von Heliometerbeobachtungen, bei Aenderung der relativen Lage beider Gestirne.*)

(Königsberger Beobachtungen Abth. 29, p. 61.)

Der Zweck der Beobachtungen ist, die wahren Unterschiede der AR. und Decl. des Cometen und Sterns für die Zeit, auf welche alle Einstellungen reducirt werden sollen (wozu man am passendsten das Mittel für die Zeiten der Einstellungen der Entfernungen nimmt), zu bestimmen. Bezeichnet man diese Zeit durch T, die scheinbare AR. und Decl. des Cometen durch α' und δ', die scheinbare AR. und Decl. des Sterns durch α, δ, und setzt man für die Zeit T:

$$\alpha' - \alpha = a + \Delta a$$
$$\delta' - \delta = d + \Delta d$$

wo a und d Näherungswerthe bedeuten, welche man sich am besten durch eine vorläufige genäherte Reduction der Beobachtung verschafft, so müssen die denselben hinzuzufügenden Correctionen $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ aus der Beobachtung selbst abgeleitet werden.

Bezeichnet man die Entfernung des Cometen vom Stern durch s, den Positionswinkel am letztern durch $p - \Delta p$, am Cometen durch $p + \Delta p$, so ist:

$$\sin\tfrac{1}{2}s\cos p = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}s\sin p = \sin\tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha)\cos\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}s\cos\Delta p = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha)\cos\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}s\sin\Delta p = \sin\tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta)$$

aus der zweiten und vierten Formel folgt:

$$\sin\Delta p = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}s\sin p\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta).$$

Bezeichnet man ferner

$$\frac{2\omega\sin\frac{1}{2}u}{u} \text{ durch } \varphi(u) \qquad \text{wo } \omega = 206264''{,}8$$
$$\cos\tfrac{1}{2}u \text{ durch } \psi(u)$$

so folgt:

$$s\varphi(s)\cos p = \psi(\alpha' - \alpha)\varphi(\delta' - \delta)(\delta' - \delta)$$
$$s\varphi(s)\sin p = \varphi(\alpha' - \alpha)(\alpha' - \alpha)\cos\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta)$$
$$\psi(s)\cos\Delta p = \psi(\alpha' - \alpha)\psi(\delta' - \delta)$$
$$\omega\psi(s)\sin\Delta p = \varphi(\alpha' - \alpha)\tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta)$$

Statt der letztern beiden Formeln kann man wegen der Kleinheit von Δp die folgende nehmen:

$$\Delta p = \tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta).$$

Die durch φ und ψ bezeichneten Grössen sind eingeführt, um dadurch die lästige Rechnung mit sin und cos kleiner Bögen in die leichtere mit den Bögen selbst zu verwandeln. Diese Grössen sind für die kleinen

*) [394 d. a. Verz. — Busch und Wichmann, welche diese Methode Bessel's mittheilen, bemerken einleitend dazu: „In Beziehung auf die Reduction solcher Heliometerbeobachtungen, wo die beiden verglichenen Gestirne ihre relative Lage während der Beobachtung merklich ändern, wird es für diejenigen Astronomen, welche mit ähnlichen Instrumenten beobachten oder später mit dem Königsberger Heliometer Beobachtungen anstellen werden, angenehm sein, eine Methode zu kennen, welche sich Bessel zur Reduction seiner Beobachtungen des Halley'schen Cometen entworfen. Es ist dies dieselbe, welche Westphalen in seiner Arbeit Astron. Nachr. Nr. 573 p. 341 erwähnt, da er nach dieser Methode die von Bessel bereits begonnene Reduction nochmals nachgerechnet und vollendet hat. Das von Bessel geschriebene und unter Westphalen's Papieren befindliche Manuscript ist zwar nicht so, dass es unverändert hier aufgenommen werden kann, doch ist der Inhalt so viel wie möglich wörtlich wiedergegeben."]

bei Heliometerbeobachtungen vorkommenden Bögen sehr wenig von 1 verschieden und daher ihre Logarithmen sehr klein. Die folgenden Täfelchen geben diese Logarithmen für 6 Decimalen und sind so eingerichtet, dass gar nicht interpolirt werden darf; sie enthalten nämlich Grenzwerthe von u, zwischen welchen immer die angegebene Zahl genommen wird.

u	$\log\varphi(u)$	u	$\log\psi(u)$
0″ = 0′ 0″	0,000000	0″ = 0′ 0″	— 0,000000
1084 18 4	— 0,000001	626 10 26	— 000001
1878 31 18	— 0,000002	1084 18 4	— 000002
2425 40 25	— 0,000003	1400 23 20	— 000003
2869 47 49		1656 27 36	— 000004
		1878 31 18	— 000005
		2076 34 36	— 000006
		2257 37 37	— 000007
		2425 40 25	— 000008
		2581 43 1	

Die vorhin aufgestellten Formeln geben die Mittel, aus bekannten Werthen von $(\alpha'-\alpha)$ und $(\delta'-\delta)$ die zugehörigen Werthe von s, p und Δp zu finden.

Setzt man für die Zeit $T+\Delta T$

$$\left.\begin{aligned}\alpha'-\alpha &= a+a't+a''t^2\\ \delta'-\delta &= d+d't+d''t^2\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

so folgt für die Zeit $T+\Delta T$:

$$\varphi(s)s\sin p = (a+a't+a''t^2)\,\varphi(a+a't)\cos(D+\tfrac{1}{2}td')$$
$$\varphi(s)s\cos p = (d+d't+d''t^2)\,\varphi(d+d't)\,\psi(a+a't)$$

wo $D=\delta+\frac{1}{2}d$ gesetzt, und der ganz unmerkliche Einfluss von a'' und d'' auf die Functionen φ, ψ und cos vernachlässigt ist.

Schreibt man diese Ausdrücke in der Form:

$$\begin{aligned}\varphi(s)s\sin p &= a\cos(D+\tfrac{1}{2}td')\,\varphi(a+a't)\\ &\quad + t(a'+a''t)\cos(D+\tfrac{1}{2}td')\,\varphi(a+a't)\\ \varphi(s)s\cos p &= d\,\varphi(d+td')\,\psi(a+a't)\\ &\quad + t(d'+d''t)\,\varphi(d+d't)\,\psi(a+a't)\end{aligned}$$

und setzt

$$\left.\begin{aligned}a\cos(D+\tfrac{1}{2}td')\,\varphi(a+a't) &= m\sin M\\ d\,\varphi(d+d't)\,\psi(a+a't) &= m\cos M\\ (a'+a''t)\cos(D+\tfrac{1}{2}td')\,\varphi(a+a't) &= n\sin N\\ (d'+d''t)\,\varphi(d+d't)\,\psi(a+a't) &= n\cos N\\ \tfrac{1}{2}(a+a't)\sin(D+\tfrac{1}{2}td') &= \Delta p\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

so folgt:

$$\varphi(s)s\sin p = m\sin M + tn\sin N$$
$$\varphi(s)s\cos p = m\cos M + tn\cos N$$

also, wenn man

$$m\sin(M-N) = G \quad \text{und} \quad \frac{m}{n}\cos(M-N) = F \ldots (3)$$

setzt, so folgt:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(s)s\sin(p-N) &= G\\ \varphi(s)s\cos(p-N) &= n(F+t)\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (4)$$

Die Werthe n, F, G und Δp sind nahe constant so dass, wenn man sie für drei gleich weit auseinander liegende, die ganze Dauer der Beobachtung umfassende Zeiten, deren mittelste T ist, berechnet, man daraus leicht die Werthe von s und p für alle zwischenliegenden Zeiten der einzelnen Einstellungen ableiten kann. Bei dieser Berechnung werden für a und d die oben erwähnten Näherungswerthe angewendet; die Werthe von a', a'', d', d'' müssen aber aus einer Ephemeride entlehnt werden, die wenigstens so nahe richtig sein muss, dass die daraus folgende Bewegung des Cometen für die Dauer der Beobachtung als richtig angesehen werden kann. Die Bestimmung dieser Werthe geschieht nun auf folgende Weise:

Die für die Interpolation bei Ephemeriden bequemste Formel (s. [Ahh. 169, p. 392] Astr. Unters. II. p. 151:

$$\left.\begin{aligned}f(x) = a+bx+\tfrac{1}{2}c(x^2-\tfrac{1}{4})+\tfrac{1}{6}d(x^2-\tfrac{1}{4})x\\ +\tfrac{1}{24}e(x^2-\tfrac{1}{4})(x^2-\tfrac{9}{4})+\ldots\end{aligned}\right\} \ldots (5)$$

gibt, nach Potenzen von x geordnet:

$$\left.\begin{aligned}f(x) = (a-\tfrac{1}{8}c+\tfrac{3}{128}e)+(b-\tfrac{1}{24}d)x\\ +(\tfrac{1}{2}c-\tfrac{5}{48}e)x^2+\tfrac{1}{6}dx^3+\ldots\end{aligned}\right\} \ldots (6)$$

x bedeutet hier die Zeit, gezählt von der Mitte des Intervalls der Ephemeride und ausgedrückt in Theilen dieses Intervalls. Schreibt man für die vorhergehende Formel:

$$f(x) = A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots = A'\ldots (7)$$

und bezeichnet $x+t$ eine wenig von x verschiedene, auf gleiche Weise ausgedrückte Zeit, so wird

$$f(x+t) = A'+B't+C't^2+D't^3+\ldots$$

wo

$$\left.\begin{aligned}B' &= B+2Cx+3Dx^2+\ldots\\ C' &= C+3Dx+\ldots\\ D' &= D+\ldots\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (8)$$

Sind also E und E' die beiden Zeiten der Ephemeride, zwischen welchen die Beobachtungszeit T liegt, und bezeichnet man

$$\frac{T-\frac{1}{2}(E+E')}{E'-E} \text{ durch } x,$$

ferner für die nahe bei T liegende Zeit $T+\Delta T$

$$\frac{\Delta T}{E'-E} \text{ durch } t,$$

so ist der Werth der Function zur Zeit $T+\Delta T$

$$= A'+B't+C't^2+\ldots$$

Es sind also B', C' die oben durch a', a'', d', d'' bezeichneten Grössen. Man hat also aus der Ephemeride für AR. zu berechnen:

$$a' = B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots$$
$$a'' = C + 3Dx + \ldots$$

wo die Bedeutung von B, C, D aus der Formel (6) ersichtlich ist; desgleichen auch aus der Ephemeride für die Declination die ähnlichen Ausdrücke für d', d''. Man darf hierbei nicht übersehen, dass die Zeit ΔT und das Intervall $E' - E$ gleichartig ausgedrückt werden müssen; ist z. B. die Beobachtung nach Sternzeit angestellt, so muss bei der Berechnung der Werthe für t, das Intervall $E' - E$ ebenfalls in Sternzeit ausgedrückt angewandt werden.

Die im Vorhergehenden entwickelten Vorschriften geben die Mittel, aus den angenommenen Näherungswerthen a und d und der durch die Ephemeride bekannten Bewegung des Cometen für alle einzelnen Einstellungen die Werthe von s und p zu finden. Dieselben Werthe müssen nun auch aus der Beobachtung selbst abgeleitet werden.

Bezeichnet man die Angabe der Schraube II durch S, den Nullpunkt ihrer Scale durch O, so ist die gemessene Entfernung, ausgedrückt in Revolutionen der Schraube:

Entfernung $= S - O$, wenn $S > 60$,
und „ $= O - S$, wenn $S < 60$,

woraus man leicht nach den im I. Bd. der Astr. Unters. gegebenen Tafeln die Entfernung, in Secunden ausgedrückt, ableitet. Der Werth von O ändert sich nur unbedeutend und sehr langsam, und wird immer sehr nahe durch Heliometerbeobachtungen von Fixsternpaaren bekannt sein, wo nicht, so würde man 60,000 dafür annehmen müssen. Die Angaben des Positionskreises werden zunächst von den Fehlern des Instruments befreit, indem ihnen die Correction hinzugefügt wird:

Correct. $= \varepsilon \pm 90^0$*) $\pm J + k' + \lambda$ (s. Astr. Unters. Bd. I. [Abh. 71 Bd. II p. 141]). Aus den so corrigirten Angaben des Positionskreises erhält man die zugehörigen Werthe von p

durch Hinzufügung von $+\Delta p$ wenn die Hälfte I den Stern,
„ „ „ $-\Delta p$ „ „ „ „ Cometen liefert.

*) Anmerkung. Bezeichnet man das Vorgehen der Declinationsaxe durch $-$, ihr Folgen durch $+$, und setzt man, wenn die Objectivhälfte, welche den Stern liefert, die grössere Schraubenangabe hat, das Zeichen $-$, dagegen $+$, wenn sie die kleinere Angabe hat, so erhält man den Positionswinkel der Richtung vom Stern nach dem Cometen

durch Hinzufügung von $+ 90^0$ wenn bei der Beobachtung gleiche,
„ „ „ $- 90^0$ „ „ „ „ ungleiche Zeichen vorkommen.

Endlich müssen die gefundenen Werthe von s und p noch nach den im I. Bd. der Astr. Unters. [Abh. 167] gegebenen Vorschriften von dem Einflusse der Refraction befreit werden. Man kann denselben ebenfalls für die drei Zeiten berechnen, für welche oben M, N, m, n berechnet wurden, und daraus interpoliren. Ist jedoch die Beobachtung in geringer Höhe gemacht und gleichzeitig die Aenderung von p bei beträchtlicher Grösse von s sehr bedeutend, so wird es genauer sein, die Refraction für jede Einstellung besonders zu berechnen.

Die so gefundenen beobachteten Werthe von p und s, welche durch (p) und (s) bezeichnet werden sollen, müssen nun mit den oben hypothetisch berechneten verglichen werden. Die Entfernungen (s) sind unter der Annahme berechnet, dass O wirklich der Nullpunkt der Scale für II war; ist dagegen der wahre Nullpunkt $= O + \Delta O$, und ΔO in Secunden ausgedrückt $= c$, so ist

die wahre beobachtete Entfernung $= (s) - c$ wenn $S > 60$
„ „ „ „ $= (s) + c$ „ $S < 60$

Sind ferner Δa und Δd die den Näherungswerthen a und d hinzuzufügenden Correctionen, so ist ihr Einfluss auf die berechneten Entfernungen

$$= \sin p \cos D \Delta a + \cos p \Delta d,$$

auf die Positionswinkel

$$= \cos p \cos D \Delta a - \sin p \Delta d.$$

Man erhält also aus jeder Einstellung der Entfernung eine Gleichung von der Form:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= s - (s) + \sin p \cos D \Delta a + \cos p \Delta d - c \text{ wenn } S < 60 \\ 0 &= s - (s) + \sin p \cos D \Delta a + \cos p \Delta d + c \text{ „ } S > 60 \end{aligned}\right\} (9)$$

Auf ähnliche Weise vergleicht man die Positionswinkel. Die Beobachtungen derselben sind unter der Annahme berechnet, dass die Axen beider Objectivhälften bei ihrem Vorübergehen genau zusammenfallen, oder dass das eine Bild des Sterns das andere genau decken kann. Dies ist im Allgemeinen aber fast nie der Fall; vielmehr muss vorausgesetzt werden, dass die Bewegungslinien der Objectivhälften nicht zusammenfallen, und die Beobachtungen müssen so gemacht werden, dass eine Annahme hierüber aus dem Resultate verschwindet, was dadurch geschieht, dass die Beobachtungen in beiden Stellungen der Objectivhälfte II (nämlich II > 60 und < 60) gemacht werden.

Bezeichnet man wieder die aus der Beobachtung abgeleiteten Werthe durch (p), die oben hypothetisch berechneten durch p, so erhält man ihren Unterschied $p - (p)$ in Theilen des grössten Kreises in Secunden ausgedrückt durch Multiplication mit

$s\sin(1'\text{Minute}) = s.0{,}000291$; $\log\sin(1\,\text{Minute}) = 6{,}4637$. Man erhält dann aus jeder Einstellung des Positionswinkels ebenso eine Gleichung:

$$0 = (p-(p))\, s\sin(1\,\text{Min.}) + \cos p \cos D\,\Delta a - \sin p\,\Delta d \pm \gamma$$
$$\text{jenachdem } \text{II} > 60 \text{ oder } < 60 \ldots . (10)$$

wo γ den unbekannten, durch die nicht centrale Deckung erzeugten Fehler bezeichnet.

Sind in beiden Stellungen der Hälfte II gleichviel Einstellungen gemacht, so verschwindet c aus der Summe der von den Entfernungen herrührenden Gleichungen, sowie γ aus denen der Positionswinkel, und man erhält durch diese Summation zwei Gleichungen, welche nur Δa und Δd als unbekannte Grössen enthalten und also ohne Schwierigkeiten diese Correctionen selbst finden lassen, wodurch die Aufgabe

$$\alpha' - \alpha = a + \Delta a \quad \text{und} \quad \delta' - \delta = d + \Delta d$$

zu finden vollständig gelöst ist.

---

178. Ueber eine Kritik der Greenwicher Beobachtungen im Philosophical Magazine.*)

(Astron. Nachr. **4**, p. 209.)

When I had the pleasure of being with you in Altona, you shewed me those numbers of the Philosophical Magazine, which contain a severe critique on the Greenwich Observations for the year 1821. This censure surprized me, as I have always been accustomed to consider the collection of Observations made at the Greenwich Observatory as peculiarly valuable, and as a rich store of Astronomical truths: you likewise were of the same opinion, and after reading both papers (vol. 64 page 367 and 451) our views, respecting the small importance of the errors found fault with, agreed so completely, that they were in truth one and the same.

You now call on me for an elucidation of the subject of this controversy for the readers of the „Astronomischen Nachrichten". Tho those who know the Greenwich Observations, and have seen the attack made on them, every explanation will be superfluous; but as it may be presumed that the latter will come into the hands of other readers — also into the hands of some who are not astronomical readers — I willingly comply with your request, and shall endeavour to state the view, which we in common entertain, of this subject. With you, I feel that a call is made to secure as far as possible, that this censure of an Institution to which astronomy is indebted for much in its progress, may not be regarded as more important than it is. That it cannot be very important, appears already from the fact, that Mr. OLUFSEN has found no difficulty, to calculate, from the Greenwich Observations for 1822, the declinations of the Fundamental stars; an account of which is contained in the „Astronomischen Nachrichten" [Nr. 73].

The greater number of the errors animadverted on by the writer in the Philosophical Magazine are accidental errors in writing down the observations. Errors of this nature are certainly not pleasant, and it would be desirable if they could be entirely avoided, but, as every collection of observations which we have hitherto contains such errors, it would appear that they are unavoidable; and nothing remains, but either to correct them before they are sent to the press and while they are being printed, or to leave the correction to the person who afterwards calculates the observations. I have preferred the first method in my observations; that is, errors in writing of whole minutes in time or degrees, and in general all such as admit of being corrected in an unquestionable way, I have rectified when they occurred without farther remark. Still some may prefer an exact impression of the original observations as they are made in the Observatory, in as much as the reader thereby receives all precisely as it is put down, and can judge for himself, how far a conjecture, to be made on account of any error, is admissible or not. Mr. POND has preferred this last method; for it is not to be supposed that he did not perceive part of the errors, as he is himself accustomed to calculate the most of his observations, and to furnish the catalogues of the stars founded on the calculations, for the same volumes which contain the observations themselves.

The first class of errors mentioned in the Philosophical Magazine, contains those instances in which the Mean taken from the indications of the two Microscopes A and B does not coincide with the column

) [204 und 204 d. a. Verz. — Schreiben an SCHUMACHER vom 1. August 1825.]

in which this Mean is given. As in all these instances there is an obvious oversight, it may sometimes be difficult to decide where this exists, whether in the columns A and B, or in that of the Mean; still the comparison of the immediately preceding or subsequent observations of the same star, will in most cases instantly show which of the three numbers is given incorrectly; this is the case in most of the nine examples produced in the Philosophical Magazine.

The second class contains differences between statements which are repeated of the same Observation. These are slips of the pen which have crept into the copy of the observations sent to the press, but not errors in reading off from the Microscope itself. In most cases these errors may be corrected by comparing both instruments, as happens in several of the instances cited in the Philosophical Magazine; sometimes they occur in whole degrees, or in decades of minutes and are then, as to what is essential, of no consequence; for example, in the observation of Procyon on the 23^{d} Febr. 1821 and in β Cephei of the 8th Decbr. where the polar distances are incorrectly written to the amount of 30^{0} and 5^{0}.

Of a different nature are the discrepancies which the writer in the Philosophical Magazine ranks under the other classes. The sixth class contains the intervals of the wires of the Transit as they are derived from different observations of the same star. Frequently the differences here arise from errors of the pen; for example, in Capella on the 7th February, where the fourth wire is incorrectly written to the amount of 5^{s}; in Sirius on the 5th Febr. where the last wire is incorrectly written to the amount of 40^{s}; frequently they are the consequence of accidental errors in observing. In the former case they are of no sort of importance, since the truth presents itself at the first glance; in the other the observation is certainly not accurate, but this lies in the nature of all observations, and it were ridiculous should one require an astronomer to perform what cannot be performed. All collections of observations furnish inaccuracies of this sort, and should one be made known which was exempt from them, the falsification of the statements contained in it, might be maintained with confidence. The accuracy of the astronomer is discovered not in the full agreement of the tenth parts of the seconds but in the magnitude of their mean or probable error. That this far exceeds the limit assigned by the means possessed at Greenwich, it might be difficult for the reviewer to prove.

The errors of the fifth class, which contains the differences of the polar distances observed with 2 and 6 Microscopes, appear to me to be censured quite without reason; they are either unimportant errors of the pen (as in γ Draconis 28th Jan.) or accidental and small errors in observing, mixed with the variations in the position of the stars, and with those of refraction; or lastly variations in the polar point of the instrument. For the last of these the observer cannot be responsible; had the reviewer pointed out a new method of erecting the instruments, to that they might undergo no variation, he would have deserved the thanks of astronomers; but all experience hitherto shews, that every precaution in securing the pillars does not protect absolutely but only to a certain degree. The Erection of the instruments at Greenwich, has often, and through a long period shewn itself to be excellent, at other times it has not been free from variation, as may be seen from the Table in Nr. 73 of the „Astronomischen Nachrichten", which contains the polar points of the instrument. The differences between the last days of July and the first of August 1821 proceed from a cause of this sort, and cannot possibly be considered as accidental errors in observing; and, let me add, they are not to any extent injurious when they can be determined by a series of observations of the polar star, so complete as that at Greenwich. The accidental irregularities of the polar distances which remain after the necessary regard to the variations of the polar point, cannot, any more than those of the intervals of the wires, be alleged as any proof against the accuracy of the Greenwich observer; as appears from the inquiry in Nr. 73 of the „Astronomischen Nachrichten".

The fourth class contains the differences between the times of transits observed with the Transit instrument, and with the circle. But as the last instrument from its construction neither is used nor can be used as a Transit, so it would have possessed no interest, although such observations, as might serve to the accurate ascertainment of its position to the meridian, had been made with the utmost completeness. That here and there the time of a Transit has been given, is to be thankfully acknowledged, as we are thereby assured, that the plane of the instrument never differs from the meridian, so far, that on that account an error of the polar distances could arise; but these specifications have no farther aim. Neither BRADLEY nor MASKELYNE ever mention the times of transits observed with the Mural Quadrant, although this instrument, for

the preservation of its plane, gives less security than the meridian circle. No intelligent astronomer can find fault, that the axis of the latter is not constantly rectified, to bring its plane still nearer to the Meridian; and it would certainly be no improvement of the Greenwich observations, were they, in this respect, arranged conformably to the opinion of the reviewer.

Other errors which are noticed, such as that here and there the name of a star, the hour or minute of its transit etc. are incorrectly written, are of no essential importance; besides how difficult it is entirely to avoid such errors will appear from the fact that I have remarked 1400 of them in BRADLEY'S observations. The remark that the observations in the Greenwich observatory are usually concluded about midnight, will then only have any weight when it has been shewn that something essential was thereby neglected, which, as far as I can judge, is not the case. The observations in the Greenwich observatory relate chiefly to the sun, the fundamental stars, the moon and oppositions of the planets; it is easy to convince ones self that these possess an unusual completeness. Had the writer in the Philosophical Magazine pointed out other observations, which, without injuring those now mentioned, might be united with them, he would undoubtedly have made an agreable communication to the Astronomer Royal. Every observation cannot be made in one observatory, and if our wishes are fulfilled in one respect, they necessarily remain unsatisfied in others; nor can observations without a plan have any interest, and I think the reviewer himself will not wish for them when he attends more closely to the consequences of such a method. He who is not yet content with the great copiousness of the Greenwich observations, would do well himself to try to conduct others more numerous; he will then at least acknowledge that the pains und perseverance which are required to perform as much as is done at present, is all, and more than may be fairly expected from a single observatory.

The third class of errors, which relate to the indications of the Meteorological Instruments, I have as yet not mentioned; because I am likewise of opinion that it is here essential to observe the same accuracy, which is attempted to be attained in the statements of the astronomical instruments. But not only the accurate reading off from the Barometer and Thermometer is required, but it is as necessary, and even more necessary, to determine accurately the errors of these instruments; the truth of this remark may be perceived from this, that several Thermometers which were represented as good and accurate, exhibited errors of $1^{0}5$: when they were examined according to the method which I have given in the VIII. division of my observations [s. Abh. 141]. Errors of this magnitude would be sufficient to remove the very small difference, which still exists between the declinations of the fundamental stars, as observed in Greenwich and Königsberg (Astr. Nachr. Nr. 73). Should I therefore have any thing farther to desire from the Greenwich observations, it would be, satisfactory information respecting the meteorological instruments, and the place where the exterior Thermometer is suspended.

---

179. Letter to Professor Airy at Cambridge.*)

(Astron. Nachr. **11**, p. 181).

Dear Sir,

I am very glad to see by your kind letter of Aug. the 6th, that you are ready to undertake the solution of what I consider as the principal problem of practical Astronomy of the present time, viz. to construct most concise Catalogues of places of Planets, observed since BRADLEY'S time. I do not doubt but this undertaking, duly executed, will grant to you the thanks of present and future Astronomers; in what measure it appears important to me, you may judge yourself, by remembering, that it was this very problem, which gave rise to my Tabulae Regiomontanae. One half of the labour being made by these Tables, I thought proper, to propose publicly the accomplishment of the remaining half; I am particularly obliged to you, for having entered upon my proposal, and I shall readily comply with your desire, to explain my views about this subject. It would be useless, to enter here into the particularities of the computations; but I avail myself of the present opportunity to state my opinion respecting a

*) [272 d. a. Verz. — Ueber die Grundlagen von Planetencatalogen.]

matter of influence on the reduction of astronomical observations in general.

These Reductions depend upon Elements, the numerical values of which are derived from observations, and accordingly always are liable to some incertainity. Such values have a particular claim to the attention of Astronomers. Every new inquiry, increasing the weight of the result, issueing from the combination of this and former inquiries, the remaining error probably will diminish continually; but this error, never vanishing entirely, it will (generally speaking) be necessary, to exhibit the result of a computation, depending upon assumed values of certain Elements in a form open to further corrections. The true values of the Elements being designed by x, y, $z\ldots$, the assumed values by α, β, $\gamma\ldots$, the general form of a reduced observation, accordingly, should be:

$$O + a(x-\alpha) + b(y-\beta) + c(z-\gamma) + \ldots$$

where O is the computed result and a, b, $c\ldots$ are Coefficients also computed.

In many cases, results exhibited in this form, will be complicated with a great number of undetermined quantities. The Rightascension of a Planet, for instance, would depend upon twice as many such quantities, as Fundamental-stars have been compared (viz. the corrections of the assumed Rightascension for two Epochs) and upon two more for the Constants of Aberration and Nutation. Such a complication undoubtedly would not be convenient for use, and nothing will remain, but either to diminish the number of undetermined quantities by a supposition, or else to leave to the future the care to compute the Observations a-new.

Taking the utility of the present reduction of the Observations of the Planets, made between BRADLEY'S time and ours, for granted, the latter alternative will be rejected; the former requires to suppose equal the corrections of the different Rightascensions, contained in every one of the two Fundamental-catalogues, whereby only one undetermined quantity will be left for each of them. The number of undetermined quantities, entering into the exhibition of the results, accordingly, will be reduced to four. But I am of opinion, that even this diminished complication would be without real advantage.

If indeed general Corrections of the two Fundamental-catalogues for 1755 and 1820 will be indicated by future inquiries, their influence on every result may then be computed exactly as easily as by the present exhibition of Conditions; with respect to the Constants of Aberration and Nutation, their possible errors will scarcely be of any moment, if the Result is presented in the most suitable form. If the observations are made at an Observatory, furnished with large and well established instruments, the Planets will commonly be compared with stars, culminating at every hour of the day, from the morning, till after midnight: the Aberration and Rightascension being negative if a star culminates between 18^h and 6^h, positive, if it culminates between 6^h and 18^h, the Correction of the clock, derived from all the observed stars, will be affected in contrary directions by an error of the Constant of Aberration; whereby the influence, remaining in the mean of all stars, will be so much diminished, that it will not be of any consequence in a computation, founded already on a supposition, viz. that of the egality of Errors of the different stars in every-one of the Fundamental-catalogues. I am accordingly of opinion, that the correction, which may perhaps be applied, in a future time, to the Constant of Aberration, deserves no notice in the present Reduction: but if thus reduced Observations are to be compared with the Tables, it is yet once necessary, to know the Constant of Aberration, viz. for reducing the apparent place to the true, or vice versa. Here the influence of an error may not be omitted, because it generally acts in one direction. It accordingly will be proper, to present the mean result of every group of Observations, without subducing from it a supposed value of the Aberration; for the sake of convenience two Logarithms may be exhibited, which, being added to the Log. of the Constant of Aberration, will give the required corrections for Longitude and Latitude.

The Influence of the Constant of Nutation on the Rightascension, viz.:

$$-15''.39537 \sin \Omega$$
$$+ [6''.68299 \sin\alpha \sin\Omega - 8''.97707 \cos\alpha \cos\Omega] \operatorname{tg}\delta$$

is composed of two parts, the first of which is common to all the heavenly objects; the second, depending upon the place of the star or planet, vanishes in the Aequator, and is of small amount, if the object is near the Aequator. The future correction of this part may be omitted for reasons, similar to those aledged for the omission of the correction of Aberration. The first part will be nearly without influence, if the Longitude, resulting from every group of Observations, is reckoned, not from the apparent, but from the mean aequinoctial-point.

The reduction of an observed Declination supposes as known, not only the Constants of Aberration and

Nutation, but also the quantity of Refraction, which, though it is undoubtedly an Element of considerable difficulty, appears nevertheless to be settled at present with an approximation sufficient for the reduction of Observations made between BRADLEY'S time and ours. Two Tables, one scarcely different from the other, have been the result of two highly complete sets of observations, made expressly for the purpose; one about the middle of the last century, the other 70 years later; one with a Mural-quadrant, the other with a Meridian-circle; both affording every desirable control; both founded on a theory, which leaves no doubt respecting the laws of the phaenomenon and of the influence of barometrical und thermometrical variations. It is not likely, that the remaining error should be so great, as to be really prejudicious to the reduction of the afforesaid Observations. Should it nevertheless appear desirable, to represent a Result as not depending upon a certain Table of Refractions, it ought not to be overlooked, that two undetermined quantities have an equal claim to our attention, viz. the Constant for the Normal-temperature, for which the Table has been constructed, and the expansion of the air produced by heat. The absolute height of the mercurial column of the Barometer may also be considered as dubious within the limits of nearly the same extent.

You know, dear Sir, that I have derived from BRADLEY'S Observations all the Elements, necessary for their reduction, and that every-one of these Elements is in such a connexion with the other, that it would be wrong to vary one of them without varying the other, even in case the first variation should be a decided correction. The same being the case with my own Observations, both series, in my opinion, would be prejudiced by the application of Refractions different from mine. Dr. MASKELYNE'S Observations require too, to be reduced by the same Table; not only because they are made at the same place and with the same instrument as BRADLEY'S, but especially because this Table has been applied by Mr. OLUFSEN, by whose elaborate inquiry into the errors of the Greenwich Quadrant, the observations have regained what they lost by the wearing out of the Instrument. — With respect to the introduction of Conditions relative to the Constants of Aberration und Nutation, in the Reduction of Declinations, I only remark, that both will entirely disappear out of the final results, exhibited in the form recommended above.

You will perceive, dear Sir, by what I have said, that, were I to superintend the business, I would prefer to exhibit the Results, without complicating them by the introduction of a single undetermined quantity. But permit me, to add a few words about the method by which a continually increasing approximation to the true values of the Elements of Reduction will be obtained. Some of these Elements have been the subject of repeated inquiries, every-one of which has afforded a new determination, somewhat different from other extant. Proceeding in this manner, and rightly combining the results of earlier inquiries with those of a later date, we shall undoubtedly arrive, in some future time, at every desirable degree of approximation. This combination of different results must always be preceded by an impartial and cautious discussion of the weight of each of them; which discussion, accordingly, should be considered as an essential part of the inquiry. The want, or rather the insufficiency of it, may probably have effected, that the result of a later inquiry has sometimes been looked upon as excluding that of earlier ones, while the same, rightly combined, only would have produced a slight variation. — In the present state of our knowledge of the Elements of Reduction, their yet admissible errors are so narrowly limited, that further corrections can only be expected from long continued observations, made expressly for the purpose. The nearer the approximation is, the more difficult will be a further correction, and the less probable will be the supposition, that the Result of every new inquiry will approximate yet more to the truth; — continual oscillations within the limits of unavoidable imperfections, are, in the contrary, agreeing with the very nature of Results derived from observations. On the other hand convenience and uniformity of the astronomical calculations are lost by continual changes, while no real advantage indemnifies for this loss. — My opinion of this matter is accordingly, that, as soon as an Element is known with an approximation, sufficient for the Reduction of Observations then extant, its value should be considered as fixed for practical use, as long as either the observations will have acquired a degree of accuracy, high enough to represent as desirable a further Correction of the Element, or as subsequent inquiries will have increased so much the weight of its determination, that a correction appears indubitable.

I shall now proceed to the second part of the business. A group of observations having been reduced, it is required, to deduce from the same one mean place of the observed Planet. This will be done by the help of the Tables of the Planet and of the Sun:

an Ephemeris for every day, within the limits of the time, filled by the observations, being computed by these Tables, the apparent Rightascensions and Declinations, contained in the same, compared to the observed place of the Planet, will give the error of the Tables, deduced from every single observation. The mean of all, considered as the error of the Tables for the mean Epoch, and applied with a contrary sign to the place computed for the nearest day, will give the required mean place, representing the whole group of Observations. The Tables, by the help of which this mean place has been obtained, disappearing entirely out of the ultimate result, the choice of these Tables is quite arbitrary; previous corrections of one or the other of their Elements will neither be necessary nor convenient. — The observed mean place of the Planet may be reduced to geocentric Longitude and Latitude, and the former related to the mean aequinoctial-point, by the subtraction of the Nutation, taken always from the same Table, which constantly has been employed in the whole computation.

In this manner the business will be brought to its genuine end. By the exhibition of the mean result of every group of observations, these will be reduced to their concisest form, which, afterwards, will completely replace the Observations themselves, and afford easy and sure means, continually to correct our knowledge of the motions of the Planets.

Some trouble will be spared to those, who will undertake this correction by the exhibition of the heliocentric places of the Planet and of the Earth, corresponding exactly to the geocentric place of the former, computed for the time, to which every group of Observations has been reduced. In case of an Opposition of a superior Planet, the addition of one step more will also be convenient, viz. the exhibition of the time and place of the Opposition, together with the dependency of both upon the assumed place of the Earth.

I have nothing more to add, respecting the arduous task you are ready to undertake. Believe me

dear Sir

Königsberg Novb. the 9th 1833.

your

F. W. Bessel.

---

180. Erinnerungen an F. W. Flemming (Astronomen der naturforschenden Gesellschaft in Danzig).*)

(Danziger Dampfboot, 1846, Nr. 141, Nov. 24.)

Wenige von unseren Mitbürgern, die nicht in näherer Beziehung zu der naturforschenden Gesellschaft stehen, mögen von dem Astronomen Flemming Kenntniss genommen haben, der während des Jahres 1840 in einsamer Wohnung auf dem Bischofsberge seiner Wissenschaft lebte; gleichwohl wird der früh Geschiedene auf dem Gebiete, auf welchem sich in jüngster

*) [Zu 342 d. a. Verz. — Br. m. O. I. 187 (O.). II. 238. 250. 254 (O.). 407 (O.). 437. — Wegen der Vorarbeiten Flemming's zur Untersuchung der Uranusbewegung ist dieser einigermaassen schwer zugängliche Aufsatz hier vollständig mitgetheilt; das Resultat der Arbeit selbst findet sich, mit einleitenden Bemerkungen Schumacher's, Astr. Nachr. **30**, p. 129 fl. unter dem Titel: Reductionen der in Greenwich, Paris und Königsberg gemachten Beobachtungen des Uranus, von 1781—1837. — In seinen „Populären Vorlesungen" äussert sich Bessel über diesen Gegenstand folgendermaassen (p. 447 fl.): „....In dem Falle eines Planeten, des Uranus, hat sich eine Erscheinung gezeigt, welche ich zu den merkwürdigsten zähle, welche die Astronomie dargeboten hat. Bouvard hat nicht minder für diesen Planeten, als für die beiden anderen eine besondere Theorie finden können, welche seinen Beobachtungen von 1781 bis 1821 in dem schon bezeichneten Maasse entspricht; womit man also, wenn auch nicht unbedingt, doch bis zu der Vollendung der besprochenen neuen Bearbeitung der Planetenbeobachtungen, zufrieden sein könnte, wenn ausser diesen 40jährigen Beobachtungen keine vorhanden wären. Allein der Planet ist vor der Epoche seiner Entdeckung, von 1690 an, von Flamsteed, Tobias Mayer, Bradley und Lemonnier volle 20 Mal für einen Fixstern angesehen und als solcher beobachtet worden; und auch jedes der 18 Jahre von 1821 bis jetzt hat seinen Beitrag zu den Beobachtungen geliefert. Bouvard kannte schon den grössten Theil der älteren Beobachtungen und unterliess nicht, seine Theorie auch damit zu vergleichen, fand aber unerwartet grosse Unterschiede. Nach meiner Meinung nahm er diese viel zu leicht, indem er, nachdem es ihm nicht gelungen war, die Theorie zugleich an sie und die späteren 40jährigen Beobachtungen anzuschliessen, sich mit der Aeusserung beruhigte, die älteren Beobachtungen seien nicht so genau als die neueren. — Ich habe sie einer schärferen Kritik und einer neuen Berechnung unterworfen, und dadurch die volle Ueberzeugung erlangt, dass die vorhandenen Unterschiede, welche einigemale bis über eine ganze Minute steigen, keinesweges den Beobachtungen zuzuschreiben sind. Auch haben sich seit 1821 wieder neue Unterschiede gefunden und von Jahr zu Jahr vergrössert, so dass sie gegenwärtig wieder mehr als eine Minute betragen und bald, indem sie im schnellen Wachsen sind, noch beträchtlich höher gestiegen sein werden. Ein Versuch, die Theorie des Planeten durch Verbesserung der Werthe ihrer Elemente sämmtlichen Beobachtungen anzuschlies-

Zeit Leverrier unsterblichen Ruhm erworben hat, mit Auszeichnung genannt werden müssen, da er zu Bessel's Untersuchungen über den Planeten Uranus bedeutende Vorarbeiten geliefert hat. Dies näher zu erörtern ist der Zweck der folgenden Zeilen, welchen wir einige Momente aus Flemming's äusserem Leben voranschicken.

Friedrich Wilhelm Flemming wurde den 26. Juli 1812 in Danzig geboren, besuchte das hiesige Gymnasium und bezog im Jahr 1835 die Königsberger Universität, um unter dem berühmten Bessel Astronomie zu studiren. Im Mai 1840 wurde er auf Bessel's Empfehlung zum Astronomen der hiesigen naturforschenden Gesellschaft gewählt und beschloss seine kurze irdische Laufbahn am 28. December 1840.

In einem Schreiben Bessel's, welches Flemming's Anstellung voranging, heisst es von ihm:

„Ich übertrug Herrn Flemming zwei ganz verschiedene Arbeiten. Eine davon bestand in der in Zwischenzeiten von zwei bis drei Wochen zu wiederholenden Anstellung der Beobachtungen, welche zur Erfindung des Indexfehlers des hiesigen Heliometers erforderlich sind. — Die andere Arbeit ist von grösserem Umfange: sie fordert die vollständige Reduction aller seit der Herschel'schen Entdeckung des Uranus gemachten zuverlässigen Beobachtungen dieses Planeten, ihre Vergleichung mit den Tafeln und endlich die Ableitung der Zeiten und Oerter seiner Gegenscheine. Diese Beobachtungen fangen also mit dem Jahr 1781 an und wurden durch Maskelyne bis 1840 auf der Greenwicher Sternwarte fortgesetzt; dann kommen einige Jahrgänge Pariser Beobachtungen in Betracht: von 1812 an sind die Beobachtungen von Pond in Greenwich, von 1814 an die hiesigen vorhanden. Es waren daher fast 60 Jahrgänge dieser Beobachtungen zu berechnen, deren letzte 25 alle wünschenswerthe Vollständigkeit besitzen. Die Arbeit bestand in der Ausmittelung des jedesmaligen Zustandes der zu den Beobachtungen angewandten Instrumente und des Standes der Uhren, dann in der Berechnung der Oerter des Planeten selbst, ferner in der Construction der Ephemeriden dieser Oerter, so wie sie aus den Tafeln folgen, für die Zeiten, innerhalb welcher die Beobachtungen der Gegenscheine in jedem Jahre liegen, endlich in der Ausmittelung der daraus hervorgehenden Fehler der Tafeln und der hieraus hervorgehenden Zeiten und Oerter der Gegenscheine.

„Wer in astronomischen Geschäften bewandert ist, muss wissen, dass dieses eine Arbeit von beträchtlichem Umfange ist. Ihre genügende Ausführung gibt wirklich einen Anspruch auf den Ehrentitel eines Astronomen. Diese Arbeit liegt neben dem Blatte, auf welchem ich gegenwärtig schreibe. Ich finde sie bis auf Kleinigkeiten ausgeführt, welche vergleichungsweise mit ihrem schon fertigen Theile kaum der Erwähnung werth sind, an deren Beseitigung in einigen Wochen ich auch nicht

---

sen, ist ohne Erfolg durchgeführt worden; eine neue Entwickelung seiner allgemeinen Theorie, durch welche eine etwanige Unvollständigkeit, oder ein zufälliger Irrthum in der Laplaceschen entdeckt werden sollte, hat gleichfalls keinen Aufschluss gegeben. Aus allen diesen Untersuchungen ist nur die volle Ueberzeugung hervorgegangen, dass wir in dem Uranus einen Fall besitzen, auf welchen der Laplace'sche Ausspruch sicher nicht anwendbar ist: hier handelt es sich nicht um kleine, sich unter den Unvollkommenheiten der Beobachtungen fast verbergende Unterschiede, sondern um sehr grosse, diese Unvollkommenheiten sehr weit überschreitende; auch nicht um solche, welche durch Vervollständigung der Entwickelung der Anziehungen der bekannten übrigen Planeten beseitigt werden könnten. Es handelt sich also um Unterschiede, welche nur in einer neuen physischen Entdeckung ihre Erklärung finden können.

Man muss nicht etwa glauben, dass dieser merkwürdige Fall gegen die Anziehungslehre selbst stritte; vielmehr wird jeder Zweifel dagegen unstatthaft sein, d. h. sich in Widerspruch mit Thatsachen setzen lassen; wenigstens ist die letzte der bis jetzt aufgefundenen mathematischen Möglichkeiten einer Abweichung dieser Lehre von der Wahrheit, gerade durch die Veranlassung, von welcher ich jetzt rede, zur Erörterung gelangt, hat aber nicht minder abgewiesen werden müssen, als alle schon früher zur Sprache gebrachten. Wahrscheinlich wird gerade die Lehre von der Anziehung den hier berührten Fall endlich erklären, indem sie zugleich eine Entdeckung im Sonnensysteme ergeben wird. Fernere Versuche der Erklärung werden nämlich die Absicht verfolgen, einem unbekannten Planeten jenseits des Uranus, der vielleicht wegen zu grosser Lichtschwäche nicht sichtbar ist, eine Bahn und eine Masse anzuweisen, welche so beschaffen sind, dass daraus Störungen des Uranus hervorgehen, welche die jetzt nicht vorhandene Uebereinstimmung seiner Beobachtungen herstellen. Kann man die Bewegung des Uranus wirklich auf diese Art erklären, so wird der Verlauf der Zeit diese Erklärung auch zur Evidenz erheben, in demselben Maasse, in welchem er die Einflüsse der neuen Ursache zu Tage legen wird; auch muss dieselbe Ursache Einflüsse auf die Bewegung des Nachbarplaneten des Uranus, nämlich des Saturn, äussern, welche zwar viel kleiner sind, jedoch sich einer besonders auf sie gerichteten Untersuchung wahrscheinlich nicht entziehen, und dann eine von dem Entdeckungsmittel unabhängige Bestätigung des Daseins des neuen Planeten ergeben werden. —..."

„...Es sind jetzt [1840] 10 Jahre verstrichen, seitdem alle Mittel geliefert worden sind, wodurch die Arbeit so leicht wie möglich, und ihr Erfolg sicher gemacht wird. Das „Sprengen und Hämmern" fing auch gleich an und erklang an mehreren Orten zugleich; aber die Bergleute verloren die Geduld, obgleich ihnen in England ein beträchtliches Tagelohn verheissen wurde. Nur einer hat sich durchgearbeitet, und dieses ist einer meiner hiesigen jungen Freunde, Flemming, dem ich, falls er hier gegenwärtig ist, ein Glückauf! zurufe. Die Beobachtungen des Uranus sind die, welche er bearbeitet hat. Ihre Resultate müssen nun bald zeigen, ob sie schon eine hinreichend feste Grundlage weiterer Aufklärungen sind, oder ob noch ein Jahrhundert sie durch seine Beobachtungen verstärken muss...."]

zweifle. — Der Nutzen, den ich aus dieser Arbeit zu ziehen gedenke, wird später hervortreten; ich hoffe auch darin auf Herrn Flemming's Hülfe.

Königsberger Sternwarte, den 9. November 1840.

F. W. Bessel."

Was Bessel mit den zuletzt erwähnten Worten gemeint habe, geht mit Bestimmtheit aus einer im Archive der hiesigen naturforschenden Gesellschaft befindlichen Abhandlung hervor, welche Flemming nach seiner Anstellung als Astronom in der Versammlung am 12. August 1840 gelesen hat. Aus dieser Abhandlung, welche sich über den Zustand der Astronomie des Planetensystems verbreitet, heben wir folgende Stelle heraus:

„Gegenwärtig aber bietet der Lauf eines Planeten, nämlich der des Uranus, eine Ausnahme von der schönen Uebereineinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung dar. Der Uranus ist bekanntlich im Jahre 1781 von Herschel entdeckt, und seitdem, wie die übrigen Planeten, ein Gegenstand fortgesetzter Beobachtung für die Sternwarten geworden, so dass wir uns jetzt im Besitze einer ununterbrochenen Beobachtungsreihe vom Jahre der Entdeckung bis jetzt befinden. Ausserdem aber hat man gefunden, dass dieser Planet schon vor seiner Entdeckung hin und wieder als Fixstern beobachtet ist. Die Anzahl der bekannten Beobachtungen dieser Art beläuft sich auf 17, die in den Zeitraum von 1690—1771 fallen.

„Als nun Bouvard es unternahm, seine auf Laplace's Theorie beruhenden Tafeln, die im Jahre 1821 erschienen, zu construiren, legte er seinen Rechnungen alle damals vorhandenen Beobachtungen, ältere wie neuere, zum Grunde. Die Tafeln, die er auf diese Weise erhielt, zeigten sich aber als gänzlich ungenügend. Konnte man auch mit der Art, wie sie die älteren, meistens an Zuverlässigkeit den neueren nachstehenden Beobachtungen darstellten, allenfalls zufrieden sein, so zeigte sich doch so wenig Uebereinstimmung mit der ganzen Reihe der neueren Beobachtungen, dass die Tafeln als ein misslungener Versuch verworfen werden mussten.

„Bouvard suchte die Ursache der geringen Uebereinstimmung allein in der Fehlerhaftigkeit der älteren Beobachtungen, verwarf diese daher, und gründete seine neuen Tafeln blos auf die Beobachtungen von 1781 bis 1821. Diese letztern Beobachtungen werden denn auch durch seine Tafeln genügend dargestellt; allein abgesehen davon, dass jetzt die alten Beobachtungen Abweichungen übrig lassen, die viel grösser sind, als die möglichen Fehler, so zeigt auch die immer grössere Abnahme dieser Abweichungen, je näher die Beobachtungszeiten dem Jahre 1781 kommen, dass die Schwierigkeit vorläufig nur umgangen, nicht aber aufgehoben ist. Dazu kommt, dass auch die von 1821 bis jetzt gemachten Beobachtungen sich allmälig immer mehr von den Tafeln entfernen, und dass die Beobachtungen der letzten Jahre eben so grosse Abweichungen zeigen, als die früheren von Bouvard unterdrückten. Hiermit ist denn die Mangelhaftigkeit der Theorie ausser allem Zweifel, und wir können der Beantwortung dieser wichtigsten Frage, die gegenwärtig das Planetensystem vorlegt, mit um so grösserer Erwartung entgegensehen, als Bessel, von der Zeit an, wo die Schwierigkeit hervortrat, seine Untersuchungen diesem Gegenstande zuwendet.

„Die früher erwähnte Hypothese von einer nach der verschiedenen chemischen Beschaffenheit verschiedenen gegenseitigen Anziehung der Planeten ist versucht worden, hat aber nicht zu dem gewünschten Resultate geführt. Es ist daher wahrscheinlich, dass auch hier das Newton'sche Princip unverändert wird beibehalten werden können. Soll dies aber geschehen, so muss der Uranus durch einen uns noch unbekannten Planeten Störungen erleiden und es kommt also darauf an, für diesen eine solche Bahn und Masse zu finden, dass die jetzt zwischen Bouvard's Tafeln und den Beobachtungen stattfindenden Unterschiede als solche Störungen angesehen werden können. Auch dann, wenn dieser Planet nicht aufgefunden werden sollte, würde sich doch die Richtigkeit einer Annahme desselben herausstellen. Es müssten sich nämlich seine Störungen auch im Laufe des benachbarten Saturn nachweisen lassen."

Am Schlusse der erwähnten Abhandlung sagt Flemming, er habe für denselben Zweck die Reduction der Beobachtungen des Saturn und Jupiter begonnen und hoffe, in einiger Zeit zunächst die Resultate der von Bradley gemachten Saturnsbeobachtungen der Gesellschaft vorlegen zu können.

Mit solcher Sicherheit also hatte sich der grosse Meister (was uns Flemming schon vor mehr als sechs Jahren berichtete) den Weg vorgezeichnet, der zur theoretischen Entdeckung des den Uranus störenden Planeten führen musste; wie er von einer andern Seite her durch den Entwurf zur Herausgabe specieller Himmelskarten die wirkliche Auffindung neuer Planeten in sichere Aussicht stellte. Unserm Flemming war bei jenen Untersuchungen eine ehrenvolle Theilnahme zugedacht. Wer nach Flemming's Tode seine Arbeiten fortgesetzt, wie weit Bessel selbst seine Untersuchungen geführt, ob vielleicht bis zur Berechnung der Elemente der Bahn und der Masse des fraglichen Planeten, das wird sich aus Bessel's literarischem Nachlasse ergeben. Und würde dadurch Leverrier's Ruhm geschmälert? nicht im mindesten. Leverrier wusste gewiss eben so wenig, dass der grosse Bessel mit ihm desselben Weges gehe, desselben Ziels gewiss, als ihm bekannt sein mochte, dass um dieselbe Zeit ein anderer Gelehrter in ganz entgegengesetzter Weise es wahrscheinlich zu machen suchte, dass jenseits des Uranus kein Planet mehr existire.

Flemming hielt noch einen zweiten Vortrag am 12. December 1840 von nicht so allgemeinem Interesse, über das Verhältniss der Sternwarten zur Astronomie; schon vierzehn Tage darnach wurde uns der eben so kenntnissreiche als bescheidene Naturforscher für immer entrissen.

Indem wir zuletzt der mannigfachen Belehrung und Bildung gedenken, welche nach und nach durch die von der naturforschenden Gesellschaft angestellten Astronomen der Stadt zu Gute gekommen ist, können wir den Wunsch nicht unterdrücken, dass auch fernerhin diese Quelle nicht versiegen und dass es der naturforschenden Gesellschaft wegen ihrer Beziehungen zu dem Wolf'schen Legate gefallen möge, recht bald einen jungen strebsamen Mann als Astronomen anzustellen. Manchem wäre vielleicht gerade damit gedient, wenn seine Thätigkeit sich mehr der Theorie als den Beobachtungen zuwenden müsste, wie es bei dieser Stelle durch die beschränkte Ausstattung an Instrumenten geboten wird; indessen sind die vorhandenen Hülfsmittel doch nicht so ganz geringfügig und jedenfalls viel bedeutender als diejenigen, welche der verewigte Olbers in Bremen, der Entdecker zweier Planeten, benutzen konnte.

Danzig, den 20. November 1846.

Dr. F. Strehlke.

181. Sir William Herschel.*)

(Königsberger Allgemeine Zeitung, 1. Jahrgang 1843, Nr. 37 ff.)

Von WILLIAM HERSCHEL will ich Sie heute unterhalten, von dem Manne, der ein Gebiet der Himmelskunde durchforschte, welches bis auf ihn fast unbekannt geblieben war, der sich darin bis zu grossartigen Ansichten erhob, dessen Name tausendmal mit Bewunderung ausgesprochen worden ist, und dessen Leistungen man nur zu kennen braucht, um in diese Bewunderung einzustimmen. — Ich hoffe, dass die Wahl meines Themas Ihnen angenehm ist, da sich Niemand unter Ihnen befindet, dessen Verehrung nicht HERSCHEL schon erregt hätte; das Verdienst dieser Wahl gebührt aber nicht mir, sondern ARAGO, da seine neulich gegebene Nachricht von HERSCHEL's Forschungen und Entdeckungen mich erinnert, dass auch hier von ihm gesprochen werden muss. ARAGO's Analyse der Herschel'schen Entdeckungen hat mir die Zeit wieder vergegenwärtigt, in welcher sie sich entwickelten, in welcher sie das Staunen des Knaben erregten; eine Zeit, zwischen der und der gegenwärtigen viele Jahre liegen, in welchen Urtheil an die Stelle des Staunens getreten ist; in welchen auch Bestrebungen Anderer, HERSCHEL's kühnen, aber nie den Boden verlierenden Schritten zu folgen, sich gezeigt haben. Aber Urtheil und Vergleichung haben nicht den Glanz geschwächt, in welchem mir HERSCHEL von dem Anfange meiner Erinnerungen an erschienen ist. Ein bestimmtes Bild von ihm hat sich in mir erzeugt, und seine Züge sind es, die ich Ihnen zu beschreiben versuchen werde. Es ist insofern dem Bilde ähnlich, welches ARAGO von ihm besitzt, als nicht verkannt werden kann, dass Ein Mann beiden Bildern gesessen hat; aber dennoch mag beider Bilder Auffassung etwas verschieden sein, etwa wie verschiedene Maler ein Gesicht verschieden auffassen und auffassen müssen.

Die eine Stunde Ihrer Gegenwart schreibt mir vor, dass ich nicht den Versuch ARAGO's wiederhole, jede einzelne Arbeit HERSCHEL's zu verfolgen; einen Versuch, der viertehalbhundert Seiten des „Annuaire für 1842" zu seiner Ausführung forderte, jedoch nicht allein zur Kenntniss HERSCHEL's, sondern auch zur Kenntniss eines zweiten merkwürdigen Mannes — ARAGO's selbst — gleich erfreuliche Beiträge liefert. Ebensowenig darf ich Ihre Theilnahme für HERSCHEL's in mir gegenwärtiges Bild in Anspruch nehmen, ohne nachzuweisen, warum es so und nicht anders ist; denn dieses Bild musste sich aus HERSCHEL's Leistungen entwickeln und hat sich daraus entwickelt, und es hat nur Werth, wenn es den Mann darstellt, der zu diesen Leistungen passt. — Sie haben also nicht eine Verfolgung HERSCHEL's von seiner Wiege bis an sein Grab zu erwarten; nicht Jugendgeschichten, welche mit jedem späteren Erfolge in gleich nothwendiger Verbindung stehen, deren Hervorhebung also nicht beweiset und die mir oft nur als eine Uebung des Witzes erschienen sind, der sich in der Zusammenstellung von Dingen versucht, zwischen welchen keine Verbindung ist. Was ich in der Geschichte grosser Männer noch am deutlichsten zu erkennen glaube und auch hier nicht vermisse, ist der anregende Einfluss des Bewusstseins eigener Kraft; eines Bewusstseins, welches meistens durch die zwar wohl gesuchte, aber in ihrem Erfolge überraschende Ueberwindung einer Schwierigkeit ins Leben gerufen wird. Die Ursache dieses Bewusstseins ist angeboren, aber der erste Tag der Geschichte des Mannes ist der, der es zum Hervortreten bringt.

HERSCHEL wurde 1738 in Hannover geboren und starb 1822, über 83 Jahre alt, in England. Seines deutschen Vaterlandes Andenken habe ich mit grossem Vergnügen noch im vorigen Jahre erhalten gesehen, in einer Schaar schöner Enkel, die mir die Herrlichkeiten des reizenden Landsitzes ihres Vaters, des zweiten grossen Eigenthümers des Namens, in deutscher Sprache erklärten. — HERSCHEL ging, der Musik kundig, 1759 nach England, wo er Anfangs sparsamen Unterhalt fand, allein 1766, 28 Jahre alt, zu der Stelle des Organisten in Bath gelangte. Da fiel ihm ein zweifüssiges Spiegelteleskop in die Hände, welches, gegen den Himmel gerichtet, ihm Vieles zeigte, wovon das blosse Auge keine Ahndung gegeben hatte. Schwach und unbedeutend wie ein solches Instrument ist, zeigt es ihm den Raum mit kleinen Sternen gefüllt; es lässt ihn die Scheiben der Planeten, die Figuren einiger Nebelflecken unterscheiden. Es erregt den Wunsch, alles dieses deutlicher zu sehen; aber ein grösseres Instrument, welches er von einem Künstler in London verlangt, überschreitet die Mittel des Organisten von Bath. Jetzt ist sein Loos geworfen, ein glückliches Loos! — seine Kraft erwacht; er schmilzt Spiegelmetall, schleift Spiegel und vollendet

*) [358 d. a. Verz. — Eine am 10. Februar 1843 in der Physikalischen Gesellschaft gehaltene Vorlesung.]

1774 ein selbstgemachtes Teleskop von 5 Fuss Länge. Dieser Erfolg und das was er nun am Himmel sieht, nähren seinen Eifer und vermehren seine Kräfte. Er unternimmt die Verfertigung grösserer Teleskope, und sowie ein grösseres gelungen ist und seine Kenntniss des Himmels erweitert hat, ahnt er den grösseren Erfolg eines noch grösseren. Er ruhet nicht Tag und Nacht, er bringt Teleskope von 7, 8, 10, 20 Fuss Länge zu Stande, und die Ueberzeugung, dadurch mehr sehen zu können als man vorher gesehen hat, veranlasst ihn, die helleren Fixsterne aufmerksam zu betrachten. Die Entdeckung vieler unbekannten Doppelsterne ist die Frucht davon, und am 13. März 1781 sieht er an einem Sterne im Stier die Scheibe eines Planeten. Jetzt hat er den Planeten Uranus entdeckt und nun ist Herschel auch der Mann der Welt. Der edle Georg der Dritte gibt ihm eine Wohnung in Slough, in der Nähe von Windsor, auch einen Jahresunterhalt, damit sein erfolgreicher Eifer für die Erforschung des Himmels nicht mehr durch Beschäftigungen unterbrochen werden möge, die wahrscheinlich nothwendig gewesen waren, seine Energie zu wecken, die aber nun seiner unwürdig wurden. — Von dieser Zeit an sind 69 Abhandlungen von Herschel in den Philosophical Transactions erschienen. Aus diesen muss man die Züge zu seinem Bilde herauslesen.

Diese Abhandlungen zeigen, dass Herschel seine Kräfte und sein Nachdenken, mit sehr wenigen Ausnahmen, einem Gebiete der Himmelskunde widmete; dem Gebiete, in welchem das Fernrohr der Führer ist. Seine Beständigkeit in der Verfolgung eines Zweckes liegt schon in dem was wir gesehen haben offen vor uns; es ist in der Ordnung, dass wir seinen ferneren Weg stets einer Richtung folgend finden. Aber wenn er auch mit den Doppelsternen angefangen und sie bis an seinen Tod nicht verlassen hat, so ist es nicht das Bestreben die Doppelsterne kennen zu lernen, was ihn treibt, es ist das Bestreben den Himmel zu erforschen, an dem die Doppelsterne nicht das Einzigmerkwürdige sind. Den Umfang von Herschel's Forschungen werden wir erkennen, wenn wir seine Abhandlungen durchgehen.

Mehrere dieser Abhandlungen betreffen die Verfertigung der Teleskope. Wie ernstlich Herschel es damit meinte, sieht man unter anderen aus seiner Gewohnheit, für jedes neue Instrument viele Spiegel zugleich zu giessen und zu schleifen. Wenn sie vollendet waren, versuchte er ihre Wirkung am Himmel und wählte den von ihnen aus, der die grösste Wirkung hervorbrachte; die übrigen schliff er aufs Neue und untersuchte dann wieder, ob einer dadurch besser geworden war als der beste früher herausgebrachte, in welchem Falle auch dieser umgearbeitet wurde. So schritt er vorwärts, bis er das erreichbare Maximum der Vollendung seines Teleskops erreicht hatte. Arago erzählt, dass er während seines Aufenthaltes in Bath etwa 200 Spiegel von 7 Fuss Brennweite verfertigt habe, 150 von 10 Fuss, 80 von 20 Fuss. — Erkennen Sie hierein einen Zug zu Herschel's Bilde? — ich sollte denken, dass nicht viele Bilder diesen Zug so bestimmt ausdrücken dürfen als Herschel's Bild.

Die Erfolge, welche Herschel schon durch grosse Teleskope erhalten hatte, erregten den Wunsch ein grösstes zu versuchen. Sein königlicher Gönner trug die beträchtlichen Kosten davon, und von 1785 bis 1789 wurde das weltberühmte Teleskop von 40 Fuss, welches mehr als 4 Fuss Durchmesser hatte und dessen Spiegel 2000 Pfund wog, vollendet. Der Mechanismus zur Bewegung einer so schweren Masse wie der Spiegel und sein kolossales Rohr von Eisen war, erforderte neue Anstrengungen des unerschöpflichen Herschel, und ihr Erfolg zeigt ihn eben so fähig die Schwierigkeiten der Mechanik zu beseitigen, als er fähig gewesen war, die der Verfertigung der Spiegel zu überwinden. Herschel entbehrt nie Kenntnisse, die die Erlangung seines Ziels fordert; dieses Ziel zieht ihn an, es muss erreicht werden. Er scheint Kraft und Zeit nicht verwandt zu haben, um Studien in das Unbestimmte zu verfolgen, während Aufgaben vor ihm lagen, deren Auflösung die Erwerbung bestimmter Kenntnisse forderte. — Ich weiss, dass Viele die entgegengesetzte Richtung empfehlen; aber wo Erfolge vorhanden sind wie die Herschel'schen, laden sie ein, den Weg aufmerksam zu betrachten der zu ihnen geführt hat.

Die Abhandlungen über die Instrumente selbst zeigen, durch zahlreiche Bemerkungen über ihre Anwendung, durch die Angabe der Mittel wodurch Herschel ihre Wirkung so hoch wie möglich steigerte, dass nicht ihre Vervollkommnung, sondern das was er damit ausrichten wollte, sein Ziel war. Vorzüglich bemüht finden wir ihn, die Grenze des Sehens kennen zu lernen; sinnreiche und feine Versuche bringen ihn zu einem Urtheile über das was die Teleskope, vergleichungsweise mit dem unverstärkten Auge, in dieser Beziehung leisten. Dieses erkennt, unter gewöhnlichen Umständen, die Sterne bis zur 6. Grösse; kleinere wirken nicht stark genug auf seine Nerven, um durch diese die Vorstellung von ihrem Dasein zu erregen. Ein geringes Fernrohr dringt schon bis zu kleineren und, im Allgemeinen, ohne Zweifel entfernteren Sternen. Ein stärkeres Fernrohr dringt in noch tiefere Himmelsräume ein, und so

wie es sich verstärkt, wachsen die Grenzen der sichtbaren Welt und es vermehrt sich das Gedränge der Millionen von Sternen. — Das würde Jeder bemerkt haben, der die Reihenfolge der Herschel'schen Teleskope vor sich gehabt hätte; HERSCHEL aber blieb nicht bei der blossen Bemerkung stehen, sondern sie wurde ihm Veranlassung zu der Untersuchung der Tiefe, bis zu welcher ein Teleskop von gegebener Art und Grösse in den Himmelsraum eindringt, wenn diese Tiefe für das blosse Auge als Einheit angenommen wird. Und es war nicht Neugier nach der Wirkung seiner Teleskope, welche diese Untersuchung veranlasste; es war die Vertheilung der Sterne im Himmelsraume, über welche er dadurch ein Urtheil gewinnen wollte. — In dieser Art sehen wir HERSCHEL immer: alles was er am Himmel sieht, verfolgt er aufmerksam mit seinen Augen und aufmerksamer mit seinem noch weiter dringenden Geiste; was Anderen vielleicht blosse Thatsache geblieben wäre, wird ihm der Anfang sich kühn erhebenden Gedankenfluges. Und nicht unbedachtsam vertraut er sich den Flügeln an: nicht mit Wachs, welches die Sonne schmilzt, befestigt er sie, sondern mit Bändern, deren Festigkeit durch oft weitläufige und schwierige Untersuchung erprobt wird.

HERSCHEL'S Instrumente sollten das Sehen am Himmel so weit als möglich schärfen; als Hülfsmittel zum Messen leisteten sie wenig; weit weniger als die Heliometer und mittelst eines Uhrwerks die Bewegung der Sterne verfolgenden Mikrometer gegenwärtig leisten. HERSCHEL'S Streben war nicht auf die Erforschung der Bewegungen, sondern auf die Erforschung der Beschaffenheit des Weltgebäudes und seiner einzelnen Theile gerichtet. Hätte er jene Richtung genommen, so würde er Hülfsmittel anderer Art gesucht haben. — Warum er sie nicht genommen hat? — vermuthlich weil die andere seinen Neigungen und Eigenschaften entsprach. Eine andere Antwort auf jede ähnliche Frage weiss ich nicht zu finden.

Wir verlassen die Instrumente HERSCHEL'S, um uns zu dem zu wenden, was er damit geleistet hat, zu seinen Forschungen am Himmel, denen die Instrumente ihre Entstehung verdanken. Ich werde ARAGO'S Anordnung folgen, der mit den Arbeiten anfängt, die den Fixsternenhimmel betreffen. Der Gegenstände sind aber zu viele, um jeden einzelnen hier mehr als flüchtig berühren zu dürfen. — Die Lichtstärke der Sterne ist der Gegenstand einer schönen Beobachtungsreihe. Aeltere Nachrichten darüber lassen nicht bezweifeln, dass viele Sterne im Laufe der Zeit ihr Licht vermehrt oder vermindert haben; andere sehen wir periodisch zu- und abnehmen; wieder andere, z. B. der berühmte Stern, der 1572 in der Cassiopeja erschien, bald selbst den Sirius überglänzte, dann aber spurlos verschwand, sind nur während kurzer Zeit sichtbar gewesen. HERSCHEL hat die Sterne nach ihrer Helligkeit geordnet; er hat angegeben, welcher von den Sternen einer Gruppe von nicht zu grosser Ausdehnung der hellste war und in welcher Ordnung die übrigen auf ihn folgten. Durch Verzeichnisse dieser Art, zu deren Entwerfung nicht grosse Teleskope, sondern nur die blossen Augen gebraucht wurden, hat er für die Erkenntniss einer späteren Zeit gesorgt. — In der Mitte des 17. Jahrhunderts gab JOHANN BAYER in Augsburg gute Himmelskarten heraus, in welchen er die Sterne jedes Sternbildes, in der Ordnung ihrer Helligkeit, durch die Buchstaben des griechischen Alphabets bezeichnete. Diese Karten, mit HERSCHEL'S Verzeichnissen verglichen, zeigen häufige Aenderungen der Reihefolge; aber unser vortrefflicher Landsmann ARGELANDER, der auch diesem Zweige der Himmelskenntniss grossen Fleiss gewidmet hat, hat neuerlich erwiesen, dass BAYER'S Buchstabenordnung nicht das Zutrauen verdient, welches ihr bisher zu Theil geworden ist. HERSCHEL'S Verzeichnisse werden daher die früheste Grundlage von einiger Sicherheit sein, auf welche vollständigere Kenntniss der Bewegungen der Helligkeit der Fixsterne wird gebauet werden können. — Indem ich Züge zu HERSCHEL'S Bilde zusammenlese, darf ich Sie auf das auch hier bemerkbare Hervortreten eines schon erkannten Zuges aufmerksam machen: auch hier spricht sich der Ernst und die Kraft aus, womit er Vollendung seiner Leistungen erstrebte. Seine erwähnten Verzeichnisse sollten sich über die Sterne des Flamsteed'schen Katalogs, nahe an 2000, erstrecken; dieser Katalog enthält aber mehrere Sterne, die nie am Himmel gestanden haben, und nur aus Schreib- und Rechnungsfehlern entstanden sind. HERSCHEL hätte sie unberücksichtigt lassen können und sein Verzeichniss wäre dadurch nur etwas weniger zahlreich geworden; damit es aber vollständig werde, unternahmen er und seine noch lebende Schwester, Miss CAROLINE HERSCHEL, eine mühsame Untersuchung des Originaltagebuches FLAMSTEED'S, setzten jeden Stern, den er beobachtet hatte, an seinen wahren Ort und lieferten ein allgemeines Register des Tagebuches, welches jede einzelne darin enthaltene Beobachtung nachweist und den grossen Werth des Flamsteed'schen Nachlasses beträchtlich vermehrt.

HERSCHEL'S Bemühungen die Entfernung der Fixsterne zu entdecken, habe ich Ihnen schon bei einer frühern Gelegenheit dargestellt. Jetzt muss ich ihrer

wieder gedenken, weil ihr Fehlschlagen auf einer Seite auf der anderen einen der schönsten Erfolge Herschel's hervorgerufen hat. Dieser Erfolg und jenes Fehlschlagen sind wesentlich mit einander verbunden, sodass, wenn der Erfolg früher erschienen wäre, er den fehlgeschlagenen Versuch ausgeschlossen haben würde. Ich habe schon beiläufig erwähnt, dass Herschel viele Doppelsterne entdeckt hatte: diese Gestirne bestehen aus zwei oft sehr ungleichhellen Sternen, einem helleren, oft dem blossen Auge sichtbaren, und einem dunkleren, der sich in dem Lichte des ersteren fast verbirgt, und, selbst wenn dieses nicht wäre, nur mit Fernröhren würde gesehen werden können. In anderen weniger häufigen Fällen bestehen die Doppelsterne aus zwei fast oder ganz gleichen, mehr oder weniger hellen Sternen. Aber die ungleichen erregen die Vorstellung, dass der dunklere Stern unermesslich weit von dem helleren entfernt sein und nur durch zufällige Stellung der Erde in der Nähe der beide verbindenden geraden Linie als sein Gefährte erscheinen möge; eine Vorstellung, welcher auch die Zusammensetzung eines Doppelsterns aus zwei gleichhellen Sternen offenbar nicht widerspricht, indem nicht nothwendig ist, dass die Helligkeit eines Sterns allein durch seine Entfernung von uns bedingt wird. — Diese Vorstellung hatte Herschel, und ihr folgerecht erwartete er, dass die der jährlichen Bewegung der Erde um die Sonne entsprechenden verschiedenen Ortsveränderungen der verschieden entfernten Sterne des Doppelsterns ihre gegenseitige Stellung verändern werden; wovon denn eine erhebliche Aenderung der gegenseitigen Richtung der beiden Sterne die Folge sein würde, wenn die relative Bewegung an sich sehr klein, nur nicht ein unerheblicher Theil des gleichfalls sehr kleinen Abstandes von einander, in welchem die beiden Sterne erscheinen, wäre. Dieses begründete Herschel's Hoffnung, in jährlich wiederkehrenden Veränderungen der Richtung des einen Sterns eines Doppelsterns gegen den anderen eine Bewegung an den Tag treten zu sehen, welche sich, allein ihrer Kleinheit wegen, früheren Beobachtungen entzogen hatte. Demzufolge suchte er die Doppelsterne auf; aber er entdeckte deren so viele, dass sein immer über das Gesehene weit hinausgehender Geist in ihrer Menge eine gewichtige Einwendung gegen seine Vorstellung von der Natur der Doppelsterne erkennen musste. Ich werde versuchen, die Beschaffenheit dieser Einwendung näher zu erläutern, indem ich einen am Himmel vorkommenden Fall verfolge. Der Stern Castor ist ein Doppelstern, zusammengesetzt aus einem Stern der zweiten und einem der vierten Grösse, welche so nahe beisammen stehen, dass man ein gutes Fernrohr anwenden muss, wenn man beide als getrennt erkennen will; ihren Abstand von einander habe ich im Jahre 1831 zwischen 4 und 5 Secunden, genauer $4\frac{7}{10}\frac{3}{0}$ Secunden, gefunden. Die Anzahl der am ganzen Himmel vorhandenen Sterne von der Art des helleren von beiden, der zweiten Grösse, kann man auf etwa 50 schätzen, während etwa 400 von der Art des kleineren, der vierten Grösse, vorhanden sind. Wenn man die Sterne der einen und der anderen Art als zufällig am ganzen Himmel vertheilt annimmt, so dass der Ort wo einer von ihnen erscheint, in gar keiner nothwendigen Verbindung mit dem Orte eines anderen ist, so wird man offenbar desto weniger Grund haben zu erwarten, dass der blosse Zufall einen in die nächste Nähe des anderen bringe, je kleiner die Zahl der vertheilten Sterne, je weniger dicht also der Raum der Himmelskugel mit ihnen besäet ist. Die Nähe der beiden Sterne des Castor ist aber so gross, dass es sehr wenig wahrscheinlich sein würde, einen der 400 vorhandenen Sterne der zweiten Art in solcher Nähe eines der 50 der ersten erscheinen zu sehen, wenn die Stellung des einen nicht die des anderen bedingte; eine diese Betrachtung verfolgende Rechnung zeigt, dass man etwa 400000 gegen 1 wetten kann, dass diese Nähe nicht durch die bloss zufällige Vertheilung der 50 und 400 Sterne hervorgebracht, dass sie also die Folge des wirklichen Zusammengehörens des Sternenpaares ist. Aber Herschel fand viele Doppelsterne, und damit ein häufiges Zusammentreffen von Fällen, deren jeder sehr laut für das Zusammengehören sprach; er konnte vernünftigerweise nicht mehr daran zweifeln und musste also die frühere Vorstellung verlassen. Hiermit fiel nun offenbar auch die frühere Absicht, durch eine relative, der jährlichen Bewegung der Erde entsprechende Bewegung der beiden Sterne eines Doppelsterns ihre Entfernung von uns zu enthüllen, gänzlich zusammen. Aber Herschel hatte die verlorene Hoffnung auf die Entdeckung der Entfernung der Fixsterne durch einen seiner schönsten Erfolge ersetzt: er hatte die wahre Natur der Doppelsterne erkannt und zeigte uns nun das Heer der Sterne, theils aus einzelnen, theils aus doppelten Sonnen, in einigen seltenen Fällen sogar aus dreifachen bestehend! — Als er die wahre Natur der Doppelsterne erkannt hatte, verbargen sich ihm nicht die nothwendigen Folgen dieser Erkenntniss: er konnte nicht übersehen, dass zwei Sonnen neben einander sich gegenseitig anziehen müssen und dass sie längst zusammengefallen sein würden, wenn nicht eine Umlaufsbewegung um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt sie davor geschützt hätte. Diese nothwendige Umlaufsbewegung, deren nähere Bestimmung für

die einzelnen Doppelsterne der fortschreitenden Zeit überlassen werden musste, bewog HERSCHEL, ihre gegenseitige Stellung wiederholt zu beobachten. In einigen Fällen fand er die Bewegung so schnell, dass sie schon in der Zwischenzeit zwischen seinen früheren und späteren Beobachtungen eine beträchtliche Grösse erlangte und dadurch, unabhängig von jeder anderen Beobachtung, bewies, dass die einzelnen Sterne der Doppelsterne sich ähnlich zu einander verhalten wie Sonne und Planeten — mit dem Unterschiede jedoch, dass ihre beiden Theile selbstleuchtend sind. — Durch diese Bewegung und Anderes, was die fortschreitende Zeit, grossentheils durch STRUVE'S Anstrengungen, entwickelt hat, haben wir fernere Kenntnisse von den Doppelsternen erlangt; ich würde Ihnen gern noch Vieles davon sagen, aber ich darf die Siegesbahn unseres Helden nicht verlassen; ich darf mich nicht begnügen, ihn allein hier hoch über dem Beobachter stehend gezeigt zu haben, der sein höchstes Ziel erreicht zu haben meint, wenn er Alles gesehen und beschrieben hat.

Wir haben den Astronomen von Slough bisher nur von seinen Beobachtungen ausgehen gesehen und werden auch ferner diesen Anfang seiner Forschungen wiederfinden: jetzt wollen wir ihm aber in eine Untersuchung folgen, die nicht durch eigene Wahrnehmungen herbeigeführt werden konnte — in die Untersuchung der Bewegung unserer Sonne im Weltraume. Die Astronomen haben Bewegungen unter den Fixsternen beobachtet, unter denselben Sternen, die früher als ihre gegenseitige Stellung unveränderlich bewahrend betrachtet wurden. Diese Bewegungen, verschieden von den sich in jährlicher Periode erneuernden, schreiten sehr langsam, aber stetig, mit der Zeit fort; sie wurden erst im vorigen Jahrhundert bemerkt, weil frühere Beobachtungen nicht genau genug waren, um so langsame Aenderungen der Sternörter zu verrathen. Ihre Nothwendigkeit kann nachgewiesen werden: das Band der Anziehung verbindet jeden Körper des Weltsystems mit allen übrigen; sollten die Fixsterne ohne Bewegung sein, so müsste die Anziehung, die jeder von ihnen von einem Theile der übrigen nach einer Seite erfährt, durch die Anziehung des anderen Theils nach der entgegengesetzten Seite genau aufgewogen werden, was jedoch an den Grenzen des Systems nicht sein kann, weil hier nur anziehende Kräfte nach Innen wirken und die ihnen entgegengesetzten fehlen. Die Bewegung eines Fixsterns bedingt die der übrigen; die grössere seiner näheren Nachbarn, die kleinere der entfernteren. Indem wir Bewegungen unter den Fixsternen wahrnehmen, können wir also nicht bezweifeln, dass auch unsere Sonne, die einer von ihnen ist, eine Bewegung besitzt. Ob diese so gross, oder ob sie grösser ist als die Bewegung des einen oder des anderen der Fixsterne, wissen wir aber nicht und können es auch nicht durch unmittelbare Beobachtung erfahren, da nirgends ein fester Punkt vorhanden ist, auf den die Bewegungen bezogen werden könnten. — Wenn die Sonne allein eine Bewegung besässe, die Fixsterne keine, so würde die offenbare Folge davon sein, dass diese, von unserem fortschreitenden Standpunkte gesehen, sich sämmtlich von demjenigen Punkt der Himmelskugel, wohin unser Fortschreiten gerichtet ist, entfernten; die näheren schneller, die entfernteren langsamer. Wenn dieses die Beobachtungen ergäben, so würden wir ein Recht haben, davon auf die alleinige Bewegung der Sonne zu schliessen; aber die Beobachtungen zeigen, dass es anders ist, dass die uns sichtbar werdenden Bewegungen der Fixsterne in allen Richtungen vor sich gehen, oft in einander entgegengesetzten; sie beweisen dadurch, dass auch die Fixsterne eigenthümliche Bewegungen besitzen. — Je grösser indessen die Bewegung der Sonne, verglichen mit den Bewegungen der Fixsterne ist, desto deutlicher wird ihre Richtung, in den wahrgenommenen Ortsveränderungen der Fixsterne an der Himmelskugel, dadurch hervortreten, dass sie ihnen, unbeschadet häufiger Ausnahmen, im Allgemeinen die Richtung gibt, welche sie durch die alleinige Bewegung der Sonne erhalten würden. — Dieser Idee folgte HERSCHEL, indem er die Richtung der Sonnenbewegung zu bestimmen versuchte: er suchte den Punkt der Himmelskugel auf, von welchem abwärts die beobachteten Ortsveränderungen der Fixsterne im Ganzen am grössten sind; er fand ihn im Sternbilde des Herkules und zeigte dadurch, dass mehr Grund zur Annahme der Sonnenbewegung nach dieser Richtung als nach jeder anderen vorhanden ist. — Später hat ARGELANDER eine denkwürdige Arbeit vollendet — die neue Beobachtung derjenigen Fixsterne, welche sich durch grössere eigene Bewegungen auszeichnen; die durch diese Arbeit gegebene vollständigere und festere Grundlage einer der Herschel'schen ähnlichen Untersuchung hat ihn veranlasst, diese zu wiederholen. Die stärkere Grundlage und die in der Zwischenzeit vermehrte Kunst der Rechnung haben aber die von HERSCHEL gefundene Richtung bis auf wenige Grade bestätigt. — Sie sehen aus den Untersuchungen über die Richtung der Sonnenbewegung, die ich jetzt verlassen werde, dass HERSCHEL nicht der Anregung seiner eigenen Beobachtungen bedurfte, um im Weltgebäude zu forschen; der Forscher ist es, der hier auch ohne das rühmliche Kleid des Beobachters erscheint.

Bewunderungswürdig sind Herschel's Bemühungen um die Nebelflecken. Das blosse Auge entdeckt am Himmel verschiedene Stellen, die heller sind als der Grund worauf sie sich befinden, und die, mit einem Fernrohre gesehen, sich in viele Sterne auflösen, deren jeder zu klein ist um einzeln gesehen werden zu können, oder welche zu nahe beisammen stehen, um ihr Licht nicht mit einander zu vermischen. Weitsichtige Augen erkennen die grösseren Sterne der Plejaden einzeln, während sie kurzsichtigen in eine Nebelmasse zusammenfliessend erscheinen; einen ähnlichen Sternhaufen im Krebs kann auch das schärfste Auge nicht auflösen, aber schon ein sehr schwaches Fernrohr zerlegt ihn in einzelne Sterne. In der Reihenfolge, deren Anfang ich eben anführe, fehlt keine Abstufung, von den Plejaden bis zu dem kaum mit dem stärksten Teleskope, und auch mit diesem nur als ein feines Wölkchen sichtbarer Nebelflecken hin. Andere Nebel sind sehr hell, sodass das blosse Auge sie ohne Mühe entdeckt, sind aber dennoch bisher durch kein Teleskop aufgelöst worden; zu ihnen gehört z. B. der bekannte Nebelfleck in der Andromeda. — Vor Herschel hatten der unermüdliche Kometenentdecker Messier und einige andere Astronomen die Zahl der bekannten Nebelflecken bis auf ungefähr 100 gebracht: 1786 gab Herschel ein Verzeichniss von tausend, 1789 wieder eins von tausend, 1802 eins von fünfhundert. — Niemand, der Herschel's Natur schon kennen gelernt hat, wird erwarten, dass er bei dem Entdecken der Nebelflecken — bewunderungswürdig wie es ist — stehen bleibe: ich werde versuchen, seine weiteren Schritte kurz anzudeuten.

Die Figuren der Nebelflecken zeigen jede denkbare Verschiedenheit: viele sind ganz regelmässig geformt; andere sind dieses weniger, erscheinen in den Fernröhren aber doch ziemlich begrenzt; wieder andere sind unbegrenzte Massen, solche, deren allmälig abnehmendes Licht man bis zu sehr grosser Ausdehnung verfolgen kann. Die regelmässig geformten Nebelflecken erscheinen zum Theil kreisförmig, zum Theil elliptisch, und es kommen nicht selten welche von dieser Art vor, die sich als sehr langgestreckte Ellipsen, fast wie eine gerade Linie, zeigen. Sowohl die regelmässig gestalteten Nebelflecken, als auch die sich der Regelmässigkeit nähernden zeigen eine Zunahme der Helligkeit nach ihrer Mitte hin, oft eine so starke, dass der Mittelpunkt einem Sterne ähnlich erscheint; einige zeigen sogar einen Stern in ihrer Mitte, den Nebel dann regelmässig von ihm aus abnehmend. Offenbar sind die sich kreisförmig darstellenden Nebelflecken in der Wirklichkeit kugelförmig, wenigstens im Allgemeinen; die sich elliptisch darstellenden sind in mehr oder weniger abgeplattete, linsenförmige Grenzen eingeschlossen, so dass die sich weniger oder mehr von der Kugel entfernende ellipsoidische Gestalt die vorherrschende ist. Wenn die fast oder ganz regelmässig erscheinenden Nebelflecken durch das Teleskop in Sterne aufgelöst werden, so fällt es auf, alle die tausende von kleinen Sternchen, woraus sie bestehen, von näherungsweise gleicher Helligkeit zu finden. — Ihr Anblick zeigt unmittelbar, dass sie abgesonderte, zahlreiche Sternsysteme sind, wenigstens in einigen Beziehungen dem Sternsysteme ähnlich, von dem unsere Sonne ein Theilchen ist. Stellt man sie sich als solche Systeme in unermesslicher Entfernung vor, und kann man keinen Grund finden, zu bezweifeln, dass auch die bis jetzt unaufgelöst gebliebenen Nebelflecken den aufgelösten ähnlich sind, so wird man begreifen, wie Herschel durch seine Entdeckung von tausenden derselben und ihr Studium zu einer Vorstellung vom Weltgebäude begeistert wurde, welche keine Einbildungskraft in ihrer wahren Grösse zu erfassen vermag.

Die Verdichtung der Nebelflecken nach der Mitte hin, deren Vorkommen in allen Abstufungen, von einer kaum sichtbaren Spur bis zu einem ausgebildeten Sterne, Herschel nachweiset, scheint auf eine fortschreitende Zusammenziehung der in dem unermesslichen Raume dieser Systeme vertheilten Masse zu deuten und veranlasst Herschel, an ältere und neuere Nebelflecken zu denken, obgleich wohl nicht an Altersunterschiede, in denen tausend Menschenalter als ein erheblicher Zeitraum erschienen. Von der vereinigenden Wirkung dieser Systeme findet er auch die Andeutung in einer Erscheinung, welche die Beobachtungen oft wiederholt zeigten, nämlich in dem Fehlen aller kleinen Sterne in der nächsten Umgebung der Nebelflecken — in einer Erscheinung, von welcher ich hier beiläufig bemerken will, dass sie auf die Wahl einer Ansicht vom Ganzen des Weltgebäudes vielleicht grösseren Einfluss haben sollte, als ihr eingeräumt worden ist. — Einiger sehr besonderer Bildungen von Nebelflecken darf ich hier nur erwähnen: eines ringförmigen Nebelflecks; eines gewissermassen doppelt-ringförmigen; mehrerer den Doppelsternen analoger Doppelnebel; solcher die sich von einem helleren Punkte fächerartig ausbreiten; endlich besonders hellleuchtender, wegen der Gleichmässigkeit ihres Lichtes und ihrer scharfen Begrenzung an eine Planetenscheibe erinnernden und deshalb von Herschel planetarische genannter Nebelflecken. Solche von der allgemeinen Regel abweichende Bildungen waren dem Forscher vorzüglich willkommen, weil sie die Zahl

der annehmbaren Erklärungen zu beschränken geeignet sind. Es ist übrigens nur zu erwarten, dass die ferne Welt der Nebelgebilde, welche sich selbst dem verstärktesten Sehen in unverständlicher Verkleinerung zeigt, in welcher sogar in Zahlen angegebenes Maass alle Anschaulichkeit verlieren würde — dass diese Welt weiten Spielraum der Erklärung übrig lässt. Die Erklärung, die nie etwas Anderes ist, als die Verknüpfung mehrer Wahrnehmungen durch wenigere Regeln, bleibt desto entfernter von der Grenze, wo ihre Richtigkeit überzeugend wird, je weniger vollständig die Wahrnehmungen sind, die sie zu verknüpfen hat.

Anfangs sah HERSCHEL alle Nebelflecken, die dem stärksten Teleskope trotzenden sowie die wirklich aufgelösten, als aus Sternen zusammengesetzt an, aber die schon erwähnten unförmlichen Nebelmassen, deren mehrere am Himmel vorhanden sind, die sich in einigen Fällen mehrere Grade weit erstrecken, in denen lebhaftere und dunklere Stellen abwechseln, die, wenn mit anderen Erscheinungen, nur mit abentheuerlich verzerrtem Gewölke verglichen werden können — diese Nebelmassen, in deren einer HERSCHEL sogar Veränderungen zu bemerken glaubte, veranlassten ihn später, eine besondere Nebelmaterie, eine Materie die der Stoff späterer Bildungen ist, anzunehmen. — Eine Analogie dafür ist vorhanden: sowohl in dem Zodiakallichte, welches wirklich eine unsere Sonne umgebende und sich bis an die Erdbahn erstreckende Nebelmaterie ist, als auch in dem Nebel der Cometen; auch erhalten verschiedene Erscheinungen, welche die Nebelflecken darbieten, durch die Annahme einer solchen Materie anschauliche Erklärungen. — Sollten die Beobachtungen einmal unzweideutige Veränderungen eines der formreichen Nebelgebilde am Himmel zeigen, so würden sie wohl nur durch die Annahme einer Nebelmaterie gedeutet werden können. In dieser Beziehung führe ich an, dass das Studium dieser Gebilde nicht mit HERSCHEL zu Grabe gebracht ist: zwar hat nur Einer diese Erbschaft übernommen, aber Einer der wie Viele ist, weil er tiefe Kenntnisse vom grössten Umfange mit einer Kraft und einem Eifer in der Verfolgung von Naturerscheinungen vereinigte, welche selten in einer gleichen Stärke mit ihnen zusammen gefunden werden. Ich rede von Sir JOHN HERSCHEL dem Sohne. Schon in Slough hat er mehrere hundert Nebelflecken den Verzeichnissen seines Vaters hinzugesetzt und viele besonders merkwürdige beschrieben und meisterhaft abgebildet; aber seinen späteren Aufenthalt am Vorgebirge der guten Hoffnung hat er grossentheils auf das Studium der prachtvollen Nebel des südlichen Himmels verwandt; er hat mir Abbildungen davon gezeigt, deren Genauigkeit und Schönheit alles Frühere der Art weit hinter sich lässt, und die in der bestimmten Absicht entworfen sind, späteren Beobachtern einen festen Halt für eine Untersuchung über Unveränderlichkeit oder Veränderlichkeit der grossen Nebelmassen zu gewähren. — Einer Thatsache, einer sehr merkwürdigen, die durch HERSCHEL'S reiche Verzeichnisse der Nebelflecken klar wurde, muss ich zum Schlusse erwähnen: ihres vorzugsweisen Vorkommens in einem Kreise des Himmels, der ihn wie die Milchstrasse umgibt.

Wir sind jetzt an die grossartigste Leistung HERSCHEL'S gelangt — an die Bestimmung der Form des Sternensystems, in welchem unsere Sonne sich befindet. Hier bleibt nichts unentschieden; hier ist nicht von einer Ansicht die Rede, welche mit den Wahrnehmungen vereinbar, jedoch dadurch nicht erwiesen ist, sondern von einer Art von Ausmessung, deren Richtigkeit im Ganzen nicht bezweifelt werden kann. HERSCHEL'S Teleskop dringt bis zu den Grenzen der Milchstrasse, und einer glücklichen Idee folgend bestimmt er die Figur dieser Grenzen; der Grenzen eines Raumes, der viele Millionen Fixsterne enthält, dessen grössten Durchmesser das Licht vielleicht in zehntausend Jahren nicht durchwandert! — Doch wir müssen HERSCHEL folgen. So wie seine Teleskope grösser werden, dringen sie tiefer in die Milchstrasse ein; das grössere Teleskop löst einen Theil des nebligen Grundes, den das kleinere zwischen den Sternen die es zeigt übrig lässt, in neue Sternchen auf; aber es trifft auf noch entfernteren Nebelgrund, dringt also noch nicht bis an die Grenze der Sterne. Diese Grenze erreicht endlich ein Teleskop von 20 Fuss Brennweite und etwa 19 Zoll Oeffnung; es zeigt keinen Nebelgrund mehr, es zeigt also alle Sterne unseres Systems. — Jetzt hat HERSCHEL was er gebraucht: er zählt die Sterne, die sich in jeder Richtung auf einer Fläche der Himmelskugel von bestimmter Grösse zeigen, und da diese Zählung vollständig ist, kann er, mittelst der Annahme ihrer gleichmässigen Vertheilung im Raume, von ihrer Zahl auf die Entfernung der Grenze in jeder Richtung schliessen. — Einige Erläuterungen werden die Art, wie HERSCHEL seine Resultate erhalten hat, deutlicher hervortreten lassen. Denkt man sich eine Fläche an der Himmelskugel, welche von einem Kreise von einem Grad Durchmesser eingeschlossen ist, so sieht man auf dieser Fläche offenbar alle Sterne, welche sich in dem Innern eines Kegels befinden, dessen Spitze am Auge und der einen Grad geöffnet ist. Die Zahl dieser Sterne ist dem Raume verhältnissmässig den der Kegel einschliesst, also desto grösser je weiter

der Kegel verlängert werden muss, um bis zu der Grenze der Sterne zu reichen, und zwar wächst sie wie der Cubus der dazu erforderlichen Länge des Kegels oder wie der Cubus der Entfernung der Grenze. Wenn man daher die Sterne zählt, welche an verschiedenen Stellen der Himmelskugel in einem Kreise von einem Grad Durchmesser stehen, so wird man die Grenze an der Stelle, wo man die wenigsten gezählt hat, am nächsten erachten; an der wo sich die mehrsten finden am entferntesten, und man wird durch das angeführte Verhältniss zwischen dem Zunehmen der Entfernung und dem Zunehmen der Zahl der Sterne beurtheilen, wie viel mal weiter sie hier entfernt ist. Indem die Zahl der Sterne an jeder Stelle der Himmelskugel in gleicher Art die Beurtheilung der daselbst stattfindenden Entfernung der Grenze herbeiführt, kann man zu einer Vorstellung von der Figur des Raumes gelangen, in dessen Innerem alle Sterne enthalten sind. Spannt man, von einem beliebigen Mittelpunkte aus, Fäden in jeder der Richtungen, in welchen die Zählungen gemacht sind, und bezeichnet man auf jedem dieser Fäden die Entfernung der Grenze, nach einem beliebigen Maassstabe gemessen, so liegen die so bezeichneten Punkte offenbar in der Oberfläche eines Raumes, der dem von den Grenzen des Sternsystems eingeschlossenen Raume ähnlich ist. Es hat dann keine Schwierigkeit mehr einen Körper zu formen, in dessen Oberfläche alle diese Punkte liegen; den Körper, der das Modell unseres Sternsystems ist.

Auch ohne Erinnerung wird Jeder bemerken, dass die jetzt erlangte Kenntniss der Figur unseres Sternsystems auf der Annahme der gleichmässigen Vertheilung der Sterne beruht. Diese Annahme kann nur näherungsweise wahr sein; aber eine nur im Ganzen richtige Vorstellung scheint kein geringeres Interesse zu haben, als die unerreichbare vollkommene. Ich lasse übrigens nicht unerwähnt, dass die von Herschel gemachten Abzählungen der Sterne sich nicht über alle Theile der Himmelskugel ausdehnen: in den Gegenden beider Pole, wovon die südliche in Europa unsichtbar ist, entbehren wir sie noch.

Herschel fand, wie nicht anders zu erwarten war, an einigen Stellen des Himmels sehr wenige Sterne, in den gedrängtesten Stellen der Milchstrasse aber so viele, dass er die Menge derselben, welche ihm einmal in einer Viertelstunde durch das Fernrohr gingen, auf nicht weniger als 116000 schätzt. Auf einer Fläche von gewisser Grösse, auf welcher sich an der ärmsten Stelle des Himmels ein Stern fand, fanden sich an der reichsten nahe an 800, woraus er schloss, dass hier die Grenze mehr als neunmal so weit entfernt ist als dort. Am ärmsten findet sich der Himmel in zwei Gegenden, welche einander entgegengesetzt liegen; woraus unmittelbar hervorgeht, dass die kürzeste der den Sternraum durchschneidenden, durch unsern Standpunkt gelegten geraden Linien, die diese Gegenden miteinander verbindende ist. Ohngefähr senkrecht auf dieser Richtung finden sich die grössten Entfernungen der Grenze, welche ringsherum viel grösser sind als die kleinste. Im Ganzen ist der die Sterne enthaltende Raum eine Schichte von grosser Ausdehnung und beträchtlich geringerer Dicke; ziemlich nahe an der Mitte dieser Schichte vereinigt sich mit ihr eine andere, wenig gegen sie geneigte von etwas geringerer Dicke, aber etwa gleicher Ausdehnung. Unser Standpunkt findet sich nicht sehr entfernt von der Mitte des Ganzen. Eine nähere Beschreibung des unregelmässig gestalteten Raumes kann nur durch Zeichnungen oder ein Modell deutlich werden; ohne solche Unterstützung darf ich sie nicht versuchen. Aber ich kann mich von dieser Leistung Herschel's nicht trennen, ohne die Bezeichnung der „grossartigsten", die ich ihr vorher gegeben habe, zu rechtfertigen. Nicht soll diese Bezeichnung dadurch gerechtfertigt werden, dass die Grenzen, von deren Gestalt Herschel uns die Vorstellung gibt, sich in unermessliche Fernen erstrecken; noch weniger soll die Auffassung der Ansicht, dass die Gesichtslinie in der Milchstrasse einen weit ausgedehnteren, mit Sternen gefüllten Raum durchschneidet als in anderen Richtungen, dadurch ausgezeichnet werden; denn nach der Erfindung der Fernröhre, deren schwächstes schon keinen Zweifel über die Ursache des weissen Schimmers der Milchstrasse lässt, liegt sie wirklich zu nahe, als dass man in ihrer Aeusserung ein beträchtliches Verdienst sehen könnte. Das Grossartige der Leistung sehe ich in der Entdeckung einer Begrenzung des Sternenraumes; in dem Durchdringen bis zu seinen Grenzen; in dem Vorsatze diese Grenzen zu umwandern und in seiner Ausführung.

Wir verlassen jetzt die grosse Welt, um zu sehen wie Herschel sich in der kleinen benimmt — in dem Gebiete unserer Sonne. Auch hier ist sein Name in schönen Entdeckungen verherrlicht: nicht allein in der Entdeckung des Uranus und später seiner Satelliten, sondern auch in der Entdeckung eines sechsten und eines siebenten Satelliten des Saturn. Aber sein Streben ist auf die Erforschung der Beschaffenheit der Körper des Sonnensystems gerichtet; es wird von ihrer Nähe unterstützt, welche selbst Einzelnheiten ihrer Oberflächen in den Wirkungskreis des Fernrohrs bringt und dadurch zu Versuchen auffordert, von ihren Naturverhältnissen Einiges zu errathen. —

Auch auf diesem Gebiete finden wir HERSCHEL in angestrengter Nachforschung des der unmittelbaren Beobachtung Zugänglichen, in fortwährender Sorgfalt, sich gegen Täuschung zu sichern. Was er als gesehen zu haben angibt, erscheint daher als eine Beobachtung von unzweideutigem Werthe, als ein wichtiger Beitrag zur Kenntniss des beobachteten Körpers. — Nicht minder finden wir ihn bemüht, alles Beobachtete zu einem Resultate zu vereinigen, welches Resultat jedoch in keinem Falle eine so weit gehende Kenntniss der physischen Beschaffenheit des beobachteten Körpers sein kann, dass ihre Vollständigkeit mit der Vollständigkeit unserer Kenntniss der Erde auch nur entfernt vergleichbar würde.

Ich werde von den Beiträgen HERSCHEL's zur Kenntniss der Körper des Sonnensystems nur so viel sagen, als zur Bezeichnung seines Weges erforderlich ist. Näher zu folgen verbieten die Grenzen unserer Zeit; auch würde ich Ihnen Bekanntes wiederholen. Früher habe ich, veranlasst durch BEER und MÄDLER's Mondkarte, diese hochgeehrte Gesellschaft vom Monde unterhalten; ein andermal habe ich das Wenige mitgetheilt, was wir von den Naturverhältnissen der Planeten und der Sonne wissen; auch von Cometen habe ich gesprochen — aber abgesehen von meinen Mittheilungen ist Niemand unter Ihnen, der nicht Vieles über die Körper des Sonnensystems gelesen hätte, ich fürchte mehr als HERSCHEL zu verantworten geneigt sein würde.

Von der Sonne hat HERSCHEL die schon vorhandene Ansicht durch seine Beobachtungen bestätigt, dass nicht ihr fester Körper, sondern eine sie umgebende atmosphärische Hülle die Lichtquelle ist; er hat hinzugesetzt, dass man, um alle Erscheinungen zu erklären, welche die Flecken und Fackeln der Sonne zeigen, zwischen dem Körper und der Lichthülle noch eine Atmosphäre anderer Art annehmen muss, die entweder gar nicht oder doch weit weniger leuchtend ist. ARAGO hat aus der Polarisation des Lichtes Mittel gezogen, die gasförmige Beschaffenheit der leuchtenden Sonne zu beweisen, was, wenn sie auch aus anderen Gründen sehr wahrscheinlich ist, nichts weniger als gleichgültig aufgenommen werden kann. Er hat mir Hoffnung gemacht, dass er alle seine hierauf bezüglichen Arbeiten bald öffentlich mittheilen werde.

Von HERSCHEL's Beschäftigungen mit dem Monde, deren Ausdehnung weit geringer ist als die der Arbeiten von SCHRÖTER und BEER und MÄDLER, führe ich nur an, dass sie ihn berechtigten, der Annahme einer Atmosphäre dieses Körpers entgegen zu treten; und ferner dass er verschiedene Male helle Punkte in dem nicht von der Sonne erleuchteten Theile des Mondes gesehen und sie für brennende Vulkane gehalten hat. Diese Erscheinung ist aber später als eine Reflexion des Erdlichtes angesehen worden; welches Licht immer viele Punkte der dunkeln Mondseite sichtbar macht und einen oder den andern davon, unter besonders günstigen Umständen selbst spiegelnd und dann so hell erscheinen lassen kann, als HERSCHEL seine Vulkane gesehen hat.

Den Merkur hat HERSCHEL während seines Durchganges durch die Sonnenscheibe vollkommen rund gesehen, ohne die geringste Spur einer Abplattung; auch hat er bei seinem Eintritte in die Sonne und seinem Austritte aus ihr nichts bemerkt, was eine Strahlenbrechung auf dem Planeten, also eine Atmosphäre, andeuten könnte. Alles dieses hat sich bei einem andern Durchgange, dessen hiesiger Beobachtung durch selten günstige Umstände ungewöhnlich grosses Gewicht beigelegt wurde, vollkommen bestätigt [s. Abh. 171]. Was von Bergen, einer Atmosphäre und sichtbaren Flecken auf dem Planeten gesagt wird, rührt nicht von HERSCHEL her. — Auf der Venus hat er zwar Flecken bemerkt, aber nicht so deutliche, dass er eine Bestimmung der Axendrehungszeit darauf hätte gründen mögen. Solche Flecken sind unter dem reineren Himmel Italiens schon im Anfange des vorigen Jahrhunderts, und neuerlich wieder deutlicher gesehen; auch haben SCHRÖTER's Beobachtungen der Venus grössere Vollständigkeit als die Herschel'schen. Ein Anfangs entstandener Streit zwischen den Beobachtern von Slough und von Lilienthal scheint dem Ersteren die anhaltende Beschäftigung mit der Venus verleidet zu haben — ein Streit, der übrigens leichter zu erklären als zu rechtfertigen ist. — Auf dem Planeten Mars sind sehr deutliche Flecken, sowohl dunkle wie helle. HERSCHEL hat sie sehr fleissig beobachtet und nicht allein die Axendrehungszeit des Planeten, sondern auch die Lage seiner Axe bestimmt. Die dunkeln Flecken erkannte er als Ungleichheiten der festen Oberfläche des Planeten; die hellen, sich nur an den Polen zeigenden, mit den Jahreszeiten des Mars veränderlichen, erschienen den irdischen Polarregionen ähnlich; auch erinnerten andere sichtbare Veränderungen auf der Oberfläche an ähnliche Wirkungen unserer Atmosphäre, so dass, Alles zusammengenommen, die Analogie des Mars und der Erde insoweit vollständig erschien, als das Fernrohr allein dafür zu zeugen vermag. — Die äusserste Kleinheit der vier neuen Planeten Ceres, Pallas, Juno, Vesta ist Ursache, dass das Fernrohr sie, ausser in ihrem etwas ruhigeren Lichte, nicht von Fixsternen unterscheidet. Gleich nach ihrer Entdeckung glaubten einige

Astronomen verschiedene Eigenthümlichkeiten an ihnen wahrzunehmen, sowie auch ihre Scheiben mehrere Secunden gross zu finden. Herschel, der hier wie allenthalben sich vor Täuschungen zu bewahren bemüht ist, bemerkte nichts von den Eigenthümlichkeiten, wenigstens nichts mit einiger Sicherheit; die Durchmesser fand er nur wenige Zehntelsecunden gross. Was man später gelegentlich, ohne die methodische Untersuchung wieder aufzunehmen, gesehen hat, hat keinen Anlass gegeben, die Richtigkeit der Herschel'schen Beschreibung zu bezweifeln. — Unter den dunkeln, bekanntlich veränderlichen Flecken in den sogenannten Streifen des Jupiter bemerkte Herschel auch bewegliche, etwa wie ziehende Wolken. Aber ein sehr interessantes Resultat erhielt er durch eine anhaltende Verfolgung der Satelliten dieses Planeten, welche zeigte, dass sie die Eigenschaft mit unserm Monde gemein haben, in gleichen Zeiten um ihre Axen zu drehen und um den Hauptplaneten zu laufen; eine Eigenschaft, welche unter den Saturnmonden wenigstens der äusserste besitzt, und welche daher die allgemeine aller Monde zu sein scheint. — Am Saturn fand er eine Seltsamkeit, nämlich nicht einen grössten Durchmesser in der Ebene des Aequators, sondern statt dessen zwei grösste Durchmesser, etwa dem 46. Grade der Breite entsprechend; er betrachtet diese ganz ungewöhnliche Bildung als eine Wirkung der Anziehung, welche die Ringe auf den Anfangs flüssigen Planeten äusserten. Aber ich habe in der theoretischen Verfolgung dieser Anziehung die Rechtfertigung dieser Meinung nicht gefunden [s. Abh. 153]; ebensowenig als in Messungen aller Durchmesser des Planeten, welche ich durch das Heliometer erhalten habe, die Bestätigung der Wahrnehmung selbst [s. Abh. 21]. Sie muss daher die Folge einer Täuschung sein, deren Ursache man auch wohl errathen kann; Herschel würde ihr ausgewichen sein, wenn, wie ich vorher schon bemerkt habe, seine Mittel zum Messen nicht weit geringer gewesen wären als die zum Sehen. — Auf dem Körper des Saturn hat Herschel fünf Streifen gesehen, ähnlich denen, die man auf dem Jupiter findet. Sie erschienen ihm veränderlich, eine Atmosphäre des Saturn andeutend. — Am Ringe des Saturn hat er sehr interessante Wahrnehmungen gemacht. Schon der ältere Cassini hatte eine dunkle Linie auf dem Ringe gesehen, die ihn in zwei ungleiche Hälften, in zwei Ringe, deren äusserer schmaler ist als der innere, zu theilen schien; diese Wahrnehmung bestätigt Herschel, auch vervollständigt er sie wesentlich, indem er die Cassini'sche Linie auf beiden Seitenflächen des Ringes durch ihre Beobachtung vor und nach einem Durchgange der Erde durch die Ringebene nachweist. Er zeigt dadurch unzweifelhaft, dass Saturn zwei Ringe in einer Ebene besitzt. Auch noch mehrere Trennungen dieser Ringe deuten sowohl Herschel's Beobachtungen an, als auch frühere von Short und spätere von Kater und von Encke; diese verrathen sich durch viel feinere Linien als die Cassini'sche, durch auch unter günstigen Umständen nicht immer sichtbare; was übrigens nichts gegen die Wirklichkeit der Trennungen beweisen kann, da Laplace schon bemerkt hat, dass verschiedene Ringe nicht vollkommen in einer Ebene zu liegen, ihre Trennungslinien also nicht immer sichtbar zu sein brauchen. — Wenn die Erde durch die Ebene der Ringe geht, diese uns also ihre Schärfe zuwenden, hat man sie immer gänzlich aus dem Gesichte verloren und eben dadurch erkannt, dass sie eine sehr geringe Dicke besitzen. Das grosse Teleskop Herschel's war aber kräftig genug, die äusserst feine Linie zu zeigen, in welcher die Ringe sich unter diesem Verhältnisse im Jahre 1789 darstellten; es zeigte ferner hervorragende Punkte auf den Ringen, welche ihrer Axendrehung folgten und dadurch die Bestimmung derselben möglich machten; endlich fanden sich die beiden nächsten Satelliten des Saturn, deren Lichtschwäche, vorzüglich die des einen von ihnen, nur durch das gewaltige Instrument überwunden werden konnte. — An dem weitentfernten Uranus wurde keine Eigenthümlichkeit be[er]kannt, obgleich Herschel einigemal zwei von ihm ausgehende, sich rechtwinklig durchschneidende, sehr feine Strahlen wahrnahm, welche er, wenn sie beständig sichtbar gewesen wären, als die Spuren zweier Ringe betrachtet haben würde. — Die Satelliten dieses Planeten gehören zu den allerfeinsten Gegenständen: Herschel entdeckte deren zwei mit Sicherheit, sah aber zuweilen noch andere kleine Lichtpünktchen, welche auf noch vier Satelliten gedeutet werden können. Der erste nach Herschel, der wieder bis zu den Satelliten des Uranus vordrang, war sein Sohn, der sie vor etwa zehn Jahren beobachtete; später hat auch der verdienstvolle Director der Münchener Sternwarte Lamont sie wieder gesehen und beobachtet, wozu ihm das dort vorhandene achromatische Fernrohr von $10\frac{1}{2}$ Zoll Oeffnung die Mittel verlieh. Diese Satelliten haben das Eigenthümliche, dass ihre Bahnen die Bahn des Uranus beinahe senkrecht durchschneiden, während in allen anderen ähnlichen Fällen der Durchschnittswinkel viel kleiner, gewöhnlich sehr klein ist.

Indem ich die Gegenstände grosser Arbeiten Herschel's im Sonnensysteme fast nur aufgezählt habe,

habe ich nur eine Andeutung ihrer Vielfältigkeit beabsichtigen können. Wenn keiner der Planeten sich seinen Forschungen entzog, so ist nicht zu bezweifeln, dass die räthselhafte Beschaffenheit der Cometen seine Forschbegierde noch höher spannte. Während der Dauer seines wissenschaftlichen Lebens erschienen mehrere kleine Cometen, ein grösserer (1807) und einer der grössten (1811); aber der Halley'sche Comet war nicht unter ihnen — der Comet, der nicht allein das Rathen von Räthseln fordert, sondern es auch durch Andeutungen möglich macht, oder wenigstens möglich erscheinen lässt. Hiermit soll nicht gesagt werden, dass die von HERSCHEL beobachteten Cometen sich als ein unfruchtbarer Boden seiner Forschungen erwiesen hätten; aber ausser dem Resultate, dass keiner von ihnen einen festen Kern besass, liessen sie keins so deutlich hervortreten, dass sie mehr als Beiträge zu später zu vervollständigender Einsicht geliefert hätten. Näher darauf einzugehen verbieten dieselben Gründe, welche mir das flüchtige Hinwegeilen über die Sonne und die Körper des Planetensystems zur Pflicht gemacht haben: nehmen Sie daher die blosse Erwähnung der Cometen nur als die Vervollständigung der Nachweisung an, dass HERSCHEL's Forschungen sich über alle zu seiner Zeit und an seinem Orte sichtbaren Erscheinungen am Himmel erstreckten.

Was ich Ihnen aber lieber anschaulich machen möchte als diese Vollständigkeit von HERSCHEL's Untersuchungen, ist die Art wie er sie führte. Ihre Grundlage ist immer sein Tagebuch; von diesem aus erheben sich seine Gedanken, aber nie verkennt er die Fessel, welche die Beobachtung ihnen anlegt: wo er nicht durch Beobachtungen Nothwendiggemachtes sagen kann, da schweigt er entweder oder fordert, dass man möglicherweise richtige Erklärungen nicht als Resultate ansehe. Oft erkennt man die Spur seiner Gedanken in der Richtung, die er seinen Beobachtungen anweist — aber nicht, dass Gedanken sich kühn bewegen, sondern dass sie sich mässigen, ist des Preises werth.

Indem ich HERSCHEL's Forschungen geschildert habe, hoffe ich eine deutliche Vorstellung von seiner eigenen Natur hervorgerufen zu haben. — Müssig und erfolglos erscheint mir das Bemühen seiner Biographen, ihn auch im Besitze solcher Eigenschaften oder Kenntnisse erscheinen zu lassen, die sich nicht in seinen Erfolgen offenbaren. Wer, dessen Augen ein Kunstwerk von Bronze entzückt, frägt nach dem Formsande, in dem es gegossen wurde? — Der Sand war nothwendig zu seiner Bildung; aber während ganze Berge davon nicht Veranlassung der Entstehung eines Kunstwerks werden, findet der Künstler allenthalben Sand, um das Gebilde seiner schaffenden Kraft darin abzudrucken. — Ausser den angeführten Erfolgen hat HERSCHEL das Verdienst einer der schönsten und fruchtbarsten Entdeckungen der allgemeinen Naturlehre — die Entdeckung eines besonderen Wärmespectrums, welches das Newton'sche Farbenspectrum zwar begleitet, aber nicht mit ihm zusammenfällt. Auch ein mathematischer Erfolg — eine Abhandlung über die Schwingung von Saiten, die mit kleinen Körpern belastet sind — wird von ihm angeführt; ich habe sie aber nie gesehen, kann Ihnen also auch nicht sagen, inwiefern mathematische Gelehrsamkeit daraus hervorgeht. Diese mag indessen grösser oder kleiner erscheinen, — das eine kann HERSCHEL nicht höher, das andere nicht niedriger stellen; denn die Stellung, die er einnimmt, wird ihm durch seine Forschungen am Himmel angewiesen, nicht durch Anderes, was keinen Einfluss darauf erlangt hat. Das Gebiet der Himmelskunde, welches er zu dem seinigen machte, hat mit der Mathematik nur in ihren Anfangsgründen nothwendige Berührung; dass er besondere Neigung gehabt hätte, sich mathematischen Untersuchungen hinzugeben, geht aus seinen Arbeiten nicht hervor; eher das Gegentheil, da er Veranlassungen dazu, die einige seiner Forschungen hätten geben können, nicht verfolgt. — HERSCHEL, der Erforscher der Beschaffenheit des Weltgebäudes und seiner Theile, bedarf keines Schmuckes, den ihm seine Resultate nicht verliehen. Diese allein will er erlangen und erlangt er; Begeisterung dafür reisst ihn vorwärts; Schwierigkeit und Weite der Wege, die zu ihnen führen, beachtet er nicht; er kennt seine Beharrlichkeit, und sein Muth stützt sich auf die Kraft jedes Hinderniss zu übersteigen. So ist der Mann dessen Bild ich Ihnen habe vorhalten wollen.

182. Ueber Olbers.*)

(Astron. Nachr. 22, p. 265.)

Ich darf nicht versuchen, in einer kurzen Erinnerung an den grossen Astronomen, der der Stolz Bremens bleiben wird, die Höhe der Stellung überzeugend nachzuweisen, die er in der Wissenschaft einnimmt. So reich an Erfolgen er ist, so geht die allseitige Verehrung, die ihm zu Theil wird, weniger aus diesen hervor als aus der Gabe, die er im höchsten Maasse besass, nie den Weg zu verfehlen, der zu ihnen führt. Die Gefahr auf einen Abweg zu gerathen, ist für ihn nicht vorhanden, denn er thut keinen Schritt ohne zu wissen, dass er in der beabsichtigten Richtung ist. Nicht von dem Glanze überraschender Gedanken lässt er sich verlocken. Nicht in weitgedehnte Arbeiten vertieft er sich, in denen weder die Hoffnung auf gelegentliches Finden ungesuchter Resultate ihn reizte, noch das massenhafte Zusammentragen von Früchten ihm so werthvoll erscheint, als die planmässige Zucht derer, die er zu haben wünscht. Die Nachweisung der Folgerechtigkeit der einzelnen Schritte, die Olbers zu seinen Resultaten führten, sollte meiner Ansicht nach das Bestreben Dessen sein, der an ihn zu erinnern unternimmt. Aber ohne genaue Verfolgung der Bereicherungen die die Astronomie ihm verdankt, würde diese Nachweisung nicht überzeugen. Statt ihrer theile ich daher eine Aeusserung mit, durch welche Olbers mir mehr als einmal sein Gefallen an dem Streben Lambert's, Bradley's, Tobias Mayer's ausgedrückt hat: „Was sie geleistet haben, erkenne ich als reines Gold!" Diese Männer sprachen ihn vor Andern an. Wer ihn von Ihnen sprechen hörte, konnte die Aehnlichkeit des Sprechenden mit Ihnen nicht verkennen.

Merkwürdig ist schon Olbers' erster Eintritt in das Gebiet der Astronomie. Die Theorie der Bewegung der Cometen hatte Newton vollkommen aufgeklärt; er hatte die Gesetze entwickelt, nach welchen sie um die Sonne laufen; er hatte gezeigt, dass die Bewegung jedes Cometen sechs ihm eigenthümliche Bestimmungsstücke oder Elemente hat, deren Kenntniss erforderlich und hinreichend ist, von seiner Erscheinung am Himmel vollkommen Rechenschaft zu geben. Aber der Uebergang von der Beobachtung dieser Erscheinung zu den Elementen seiner Bewegung ist eine der schwierigsten mathematischen Aufgaben. Newton selbst hatte eine Auflösung derselben gegeben, an die Voraussetzung gebunden, dass die mittlere dreier vollständigen Beobachtungen der Oerter des Cometen an der Himmelskugel, der Zeit nach genau in der Mitte der beiden äusseren liege. Spätere Geometer vom höchsten Range hatten sich vielfältig mit dieser Aufgabe beschäftigt. Olbers fand, als er noch in Göttingen studirte, eine Eigenschaft der scheinbaren Bewegung, durch deren Benutzung die Aufgabe von ihrer eigentlichen Schwierigkeit befreit und ohne die der Newton'schen Auflösung nothwendige Voraussetzung, sowie auch viel leichter aufgelöst werden konnte. Als Olbers die hierauf gegründete Methode zum ersten Male anwandte, wachte er an dem Krankenbette eines Universitäts-Freundes. Später im Jahre 1797 liess er eine Abhandlung darüber erscheinen, welche diese Methode in allgemeine Anwendung gebracht hat. Wirklich kann ihr nichts Wesentliches mehr hinzugefügt werden; Abweichungen von der Form der Rechnung können einige Theile derselben wohl erleichtern, aber sie verändern weder das Wesen der Methode, noch ihr Resultat. Nicht minder ausgezeichnet als durch die vollständige Erreichung ihres Zieles ist die Olbers'sche Abhandlung durch gründliche Bearbeitung vorangegangener Bemühungen um dasselbe Problem. — Erfolge wie diese sind geeignet Vorliebe für ihren Gegenstand zu erzeugen. Olbers beschäftigte sich während seines ganzen Lebens vorzugsweise mit den Cometen. Er brachte ein eben so einfaches, als ohne grosse Vorbereitungen anwendbares Mittel, Oerter an der Himmelskugel durch Beobachtung zu bestimmen, aus der Verachtung, in welcher es sich bis dahin befunden hatte, zu verdientem Ansehen; er erwarb dadurch der Wissenschaft ausser seinen eigenen Beobachtungen der Cometen viele fremde. Seine Büchersammlung enthielt, in seltener Vollständigkeit, Werke, in welchen sich Nachrichten über Cometen finden, deren Benutzung ihn in den Stand setzte, unserer Kenntniss dieser Himmelskörper oft wichtige Beiträge zu retten, welche bisher ganz unbeachtet geblieben waren und ohne ihn vielleicht nie aus ihrer Verborgenheit hervorgegangen wären. Heitere Nächte wandte Olbers vorzüglich auf das Aufsuchen der Cometen an, welches ihn bekanntlich oft durch eine glückliche Entdeckung

*) [374 d. a. Verz. — S. auch Briefwechsel zwischen Olbers und Bessel I, p. XXXI ff.]

belohnte, deren wichtigste die des Cometen von 1815 ist, dessen Beobachtungen zeigten, dass er sich in etwa 74 Jahren um die Sonne bewegt und zunächst 1887 wiederkehren wird. Diesem Cometen gebührte der Name des Entdeckers, er wird ihn unsern Nachkommen von Zeit zu Zeit zurückrufen und mit derselben Pietät werden sie von dem Olbers'schen Cometen reden, wie wir von dem Halley'schen. Endlich zeigt sich die Vorliebe für die Cometen-Astronomie in vielen schönen Abhandlungen, welche über verschiedenartige, damit in näherem oder entfernterem Zusammenhange befindliche Gegenstände aufklären. OLBERS' späterer Biograph wird in seinen unausgesetzten Beschäftigungen mit den Cometen häufige Gelegenheit finden, die natürliche, von keinem Vorurtheile verdunkelte Ansicht gebührend zu würdigen, die er ihm vorliegenden Fragen abzugewinnen wusste.

Wenn aber auch OLBERS seine Arbeiten vorzugsweise den Cometen zuwandte, so verfolgte deshalb sein Nachdenken alle übrigen Theile der Astronomie nicht weniger vollständig. In jede erhebliche Leistung die die Zeit brachte, drang er so tief ein, dass sich ein eigenes Urtheil über das Genügen ihrer einzelnen, wenn auch ganz ausser dem Kreise seiner Beschäftigungen liegenden, Theile gestaltete; gleich belehrend für mich habe ich ihn in Einer Stunde über einen neuen Band der „Mécanique céleste" und über einen neuen Band der Greenwicher Beobachtungen sprechen gehört. Unbeantwortete Fragen, durch Naturereignisse hervorgerufen, regten seine Wissbegierde lebhaft an. So war er der Erste, der die Möglichkeit und Wahrscheinlichkeit des lunarischen Ursprungs der Meteorsteine mathematisch untersuchte, der eine Methode zur Berechnung der von BENZENBERG und BRANDES gemachten Beobachtungen der Sternschnuppen entwickelte u. s. w. Die wenigen Mussestunden, die OLBERS auf die Astronomie verwenden konnte, verstatteten ihm trotz sie ganz umfassender Theilnahme nicht, in allen ihren Theilen Spuren eigener Arbeiten zu hinterlassen; mit Recht begränzt er daher den Umkreis, den er durch diese bereichert. Nie tritt er hervor, wenn er nicht zum Vorhandenen Wesentliches hinzuzusetzen hat; ohne das Zeugniss Derer, die das Glück seiner persönlichen Bekanntschaft genossen, würde vielleicht zweifelhaft bleiben, dass OLBERS sich auf einem das ganze Gebiet der Astronomie beherrschenden Standpunkte befand.

Als PIAZZI am 1. Januar 1801 die Ceres entdeckt hatte, sie aber bald nachher in den Sonnenstrahlen unsichtbar wurde, zeigt sich OLBERS eifrig und erfolgreich in ihrer Wiederaufsuchung. Unausgesetzt verfolgt er dann ihre Bewegungen durch seine Beobachtungen. Indem er sich mit den kleinen Fixsternen in einer Gegend des Himmels bekannt macht, durch die Ceres ihren Weg nehmen wird, findet er ein Sternchen, welches er früher nicht daselbst bemerkt hatte. So entdeckte er kurz nach der Wiederauffindung der Ceres, am 28. März 1802, einen zweiten neuen Planeten, Pallas. Die damalige Zeit ist die schöne der Astronomie! — Freudige Regsamkeit häuft in schneller Folge denkwürdige Resultate aufeinander. GAUSS begnügt sich nicht, in seltener Verbindung unübertroffener mathematischer Kraft mit vollkommener Kenntniss der Gegenstände worauf sie angewendet werden soll, seine Methoden zur Bestimmung der Bahnen der neuen Planeten zu suchen: unermüdlich auch in ihrer Anwendung, verfolgt er die Leistungen der Astronomen von Tage zu Tage; seine scharfen Vergleichungen fordern diese auf, die höchste ihnen erreichbare Genauigkeit herbeizuführen, während sie sie zugleich von dem Nutzen ihrer Bemühungen überzeugen. Schnell vervollkommnet sich die Kenntniss der Bahnen der Ceres und Pallas. Specielle Sternkarten sind kaum als nothwendig erkannt, um folgende Beobachtungen des neuen Planeten zu erleichtern, so ist auch schon HARDING mit ihrer Entwerfung beschäftigt. Am 1. September 1804 entdeckt er in Folge davon den dritten neuen Planeten Juno. OLBERS ist der Mittelpunkt dieses fördernden Treibens der Astronomen. Selbst der Eifrigste, vereint er mit der Fähigkeit es richtig zu leiten persönliche Eigenschaften, welche ihm unbedingtes Zutrauen erwerben.

Sind die Entdeckungen der neuen Planeten glücklichen Zufällen zuzuschreiben, welche übrigens nur eifrigen Forschern am Himmel begegnen konnten, so krönte die Entdeckung eines vierten, der Vesta am 29. März 1807, OLBERS' lange fortgesetzte planmässige Bemühungen durch verdienten Erfolg. Die Bahnen der schon bekannt gewordenen nähern sich einander an Einer Stelle und brachten dadurch OLBERS auf die Vermuthung, dass sie einst einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt gehabt haben möchten, dessen Spur man in dieser Annäherung, trotz der durch die Störungen der grösseren Planeten hervorgebrachten Aenderungen der Bahnen, noch erkenne; er liess nicht unbemerkt, dass ein gemeinschaftlicher Punkt der Bahnen der drei Planeten vorhanden gewesen sein muss, wenn sie Bruchstücke eines grösseren durch eine innere oder äussere Ursache zersprengten sind. OLBERS in richtiger Würdigung der Unwahrscheinkeit, dass glücklicher Zufall der in kurzer Zeit drei einander ähnliche Planeten zu unserer Kenntniss gebracht hatte, ihre Zahl erschöpft

haben sollte, beschloss noch mehrere zu suchen. Seine Aufmerksamkeit wandte er der Gegend des Himmels zu, wo die Bahnen der Ceres, Pallas und Juno sich einander nähern; die in dieser Gegend stehenden kleinen Fixsterne durchmusterte er während mehrerer Jahre von Monat zu Monat. So musste er Alles entdecken, was seinen Weg durch diese Gegend nahm und so entdeckte er die Vesta. — Olbers, der die Ehre die Kenntniss des Sonnensystems durch zwei Planeten bereichert zu haben, ohne Nebenbuhler geniesst, hat sie nicht glücklichem Zufalle zu verdanken, sondern seinem thätigen Geiste und der Ausdauer seiner Anstrengungen.

Ich habe mich beschränken müssen die Gegenstände anzudeuten, die „dauernder als Erz" Olbers' Namen auf die Nachwelt bringen werden. Jeder weiss mehr davon, als ich hier habe sagen können, doch habe ich das Wenige nicht unterdrückt, um einen Kreis, in dessen Mitte Olbers geglänzt haben würde, wenn er noch lebte, nicht ohne Erinnerung von dem Astronomen zu lassen. Die, die ihm angehörten, werden in der Schilderung seiner medicinischen und menschlichen Bedeutsamkeit reichen Stoff für die Aeusserung ihrer Verehrung finden. Aber auch ich habe ihn verehrt. Er war mir der edelste Freund; mit klugem und väterlichem Rathe leitete er meine Jugend; hundert und einundsiebzig Briefe die ich von ihm besitze, sind schriftliche Beweise meines Rechts, meine Verehrung über die Grenzen der Wissenschaft auszudehnen. Hunderte von Stunden sind mir in seiner Gegenwart unvergesslich geworden; an jede knüpft sich die Erinnerung einer edlen Aeusserung, eines lichtvollen Urtheils über Gegenstände, eines nachsichtigen über Menschen. Gross und sich immer gleich steht er vor meinen Augen — in der Zeit voller Kraft im Jahre 1804 und im hohen Alter im Jahre 1837.

Möchte es einer geschicktern Hand gelingen, den Nachkommen das Bild zu überliefern, welches er in mir hervorgerufen und unterhalten hat*).

---

183. Erman's Reise in Sibirien und Kamtschatka.**)

(Preussische Ostsee-Blätter 1832. Nr. 31, Febr. 6.)

In Nr. 26 der Ostsee-Blätter hat Herr Professor v. Baer ein reiches Geschenk angezeigt, welches ihm Herr Dr. Erman für das hiesige zoologische Museum von seiner Reise mitgebracht hat. Erman hat, wie man daraus sieht, seine Thätigkeit nicht gespart, denn das Sammeln naturgeschichtlicher Gegenstände hat er nur nebenher, zur Erholung, betrieben, und doch so werthvolle Früchte davon erhalten, dass Baer das Geschenk derselben „sehr ansehnlich" nennt. Viele unter uns hören gern etwas über Erman; und Baer's Anzeige erinnert mich an das mir auf dem Ankündigungsblatte dieser Zeitung zugestandene Recht, den Lesern derselben hin und wieder ein Paar Worte mittheilen zu dürfen.

Die Veranlassung des Entschlusses zur Reise nach Sibirien ist durch Hansteen gegeben, der die Richtung und die Stärke der magnetischen Kraft dort zu beobachten beabsichtigte, um dadurch Thatsachen zu erhalten, welche er bei seinen Untersuchungen über den Magnetismus der Erde gebrauchte. Erman schloss sich an ihn an, versehen mit den nöthigen Instrumenten, sowohl für die magnetischen Zwecke, als auch für die geographische Bestimmung der Punkte, welche er berühren würde. Dass der Eine sich nicht von dem Apparate des Andern abhängig machte, war vortrefflich: jeder konnte nun einen andern Weg einschlagen, und eine doppelte Ernte konnte gemacht werden.

Die erste Anwendung seines magnetischen Apparats machte Erman hier in Königsberg, in der Nähe des Punktes, wo Alexander v. Humboldt kurz vorher auch seine Instrumente aufgestellt hatte. Dann wurde der Weg, über Petersburg nach dem Ural, durch häufige magnetische Bestimmungen bezeichnet, in Tobolsk aber ein längerer Aufenthalt gemacht. Hier gewann Erman Zeit, eine auf die genaue Bestimmung der geographischen Lage dieser Stadt gerichtete Beobachtungsreihe den Freunden in Preussen zuzusenden. Begierig, den Werth dieser Beobachtungen näher kennen zu lernen, säumte man nicht mit ihrer Berechnung, wodurch man schon sehr früh die Ueberzeugung erhielt, dass die

*) Aus den „Biographischen Skizzen verstorbener Bremischer Aerzte und Naturforscher" genommen, die der ärztliche Verein zu Bremen als Festgabe für die 22. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in diesem Jahre [1844] herausgab. Schumacher.

**) [261 d. a. Verz. — Br. m. O. II. 332.]

weitere Reise auch für die Geographie des unbekannten Landes sehr nützlich werden müsse.

Während wir uns hier an den wohlgelungenen Beobachtungen ERMAN's erfreueten, genoss er selbst andere Freuden — die des sibirischen Winters; er wandte ihn an, um von Tobolsk nach Obdorsk und dem Ausflusse des Obi in das Eismeer zu reisen. Das Eis des Flusses gab die erwünschte Bahn; etwa 90 Meilen weit, bis Beresow, waren die Schlitten mit Pferden, von da ab aber mit Rennthieren bespannt. Die Nächte wurden auf dem Eise, unter einem Zelte von Rennthierhäuten, bei einer Kälte von 28° Réaumur, zugebracht. Doch ERMAN scheint keine Kälte und kein Ungemach empfunden zu haben: nie wird er müde, seine magnetischen Beobachtungen zu machen, und die geographischen Längen und Breiten seiner Stationen festzusetzen. — Die Briefe, in welchen er diese Expedition schildert, zeigen nur Wärme für die Zwecke der Reise, dabei aber zugleich eine solche Lebendigkeit der Auffassung aller, auch ausser der engern Grenze des Zwecks liegender Verhältnisse des Landes und der Menschen, dass wirklich anschaulich wird, wie der Reisende von den Schwierigkeiten nichts gefühlt hat.

Ende December (1828) kam ERMAN nach Tobolsk zurück, und nachdem er dort so lange verweilt hatte, als die anzustellenden Beobachtungen und die zu machenden Einrichtungen zur weitern Reise erforderten, wurde diese noch im tiefsten Winter nach Irkuzk fortgesetzt. Hier traf er mit HANSTEEN, den er vor der Schlittenfahrt auf dem Obi verlassen hatte, wieder zusammen, und beide besuchten gemeinschaftlich die chinesische Grenzstadt Maimatschin (neben Kiachta) und den Wohnsitz des Chamba-Lama der Buräten. ERMAN's Schilderung dieses Besuchs ist ein Cabinetsstück — das Leben der Chinesen und Mongolen wird anschaulich; man glaubt die bunten Fähnchen flattern, und die bemalten Laternen leuchten zu sehen. — Von Irkuzk ging es nach Jakuzk, von hier nach Ochozk. Der Winter war nun beendigt und das Schlittenfahren wurde gegen das Reiten auf Rennthieren vertauscht, deren Gang ERMAN weit sanfter fand, als den Gang des Pferdes. Die Tage wurden dem Reisen, die Nächte dem Beobachten gewidmet; die Kunde des „Sternjägers" — wie die Tungusen ERMAN nannten — ging ihm voran, und der freundliche Empfang, den er allenthalben erfuhr, zeigt, dass er unter Christen und Heiden den rechten Ton zu treffen und mit denen, welche er kennen lernen wollte, gute Kameradschaft zu machen gewusst hat. — In Ochozk ist das Land zu Ende; das Meer brachte ERMAN an die Westküste von Kamtschatka, wo er in Tigil landete, die Halbinsel und ihre Vulcane bereisete und endlich den Peterpaulshafen besuchte. — Von hier ging er mit der Kaiserlichen Corvette Krotkoi nach Sitcha, Kalifornien, Otaheiti, um das Vorgebirge Hoorn nach Rio Janeiro und langte 1830 wieder bei uns an.

ERMAN ist im Begriffe alle Früchte, welche die Reise gebracht hat, in einem Werke der Welt mitzutheilen. Bis jetzt sind einige Briefe bekannt geworden, welche auf der Reise selbst, oft im Bivouak, da Tisch und Stuhl fehlten, knieend, aus einem Dintenfasse geschrieben wurden, welches zum Aufthauen in die warme Suppe der Samojeden oder Tungusen gestellt wurde. Diese Briefe können keine andern als die allerfrischesten Schilderungen enthalten; — sie sind wirklich lehrreich und erfreulich zugleich, und gewähren dem Leser nebenbei den Vortheil der genauen Bekanntschaft ihres Verfassers. Denn seine ganze Eigenthümlichkeit, das unerschöpfliche Leben in ihm, welches nie erlaubt, dass ein folgender Eindruck durch einen vorangegangenen geschwächt werde; die Lust, womit er die freundschaftliche Unterhaltung mit den Tungusen unterbricht, um seine Instrumente aufzustellen — alles dieses, und damit ERMAN selbst, wie er leibt und lebt, lernt man aus den Briefen kennen. ERMAN's berühmter Vater hat diese Briefe in den Berghaus'schen Annalen der Erdkunde u. s. w. abdrucken lassen; wer eine interessante Bekanntschaft machen will, muss sie lesen!

Ausser den Briefen sind noch einige Abhandlungen bekannt geworden, welche auf die Reise Bezug haben. Dreimal durchschritten HANSTEEN und ERMAN die Linien auf der Erde, auf welchen die Magnetnadel genau nach Norden zeigt; zuerst bei Nischne-Nowogrod, dann südlich von Irkuzk, endlich zwischen Irkuzk und Jakuzk. An sehr vielen Punkten sind vollständige astronomische und magnetische Beobachtungen gemacht; theils eigene, theils fremde meteorologische Register sind gesammelt und die wahren klimatischen Verhältnisse der durchreisten Länder sind eben so bekannt geworden, als ihre sonstigen Verhältnisse; ein grosser Kenner, LEOPOLD VON BUCH, hat über den Werth der geologischen Leistungen sehr günstig geurtheilt. HUMBOLDT, HANSTEEN und ERMAN treffen jetzt zusammen, um uns erwünschte Kenntnisse über das nördliche Asien zu geben.

Auf der Rückreise über Königsberg zeigte mir ERMAN sein, die Zahlenbeobachtungen enthaltendes Tagebuch. Es enthält eine unermessliche Menge derselben, und muss grosse Nachwehen verursachen, denn eine Beobachtung wird weit schneller gemacht, als zum Resultate verarbeitet. Indessen kann auch der Schatz

nicht ungenützt liegen bleiben, sondern muss gehoben werden. Eine Probe, welche die Berichtigung des Laufes des Obi enthält, ist bekannt gemacht worden, um die Form zu zeigen, in welcher das Werk selbst erscheinen wird. Die in dieser Probe enthaltenen Zahlen sind aber nur aus vorläufigen Rechnungen hervorgegangen, welche einer nochmaligen scharfen Revision unterworfen werden, wozu der rühmlichst bekannte Oberlehrer Härter seine Hand freundschaftlich bietet. Auch von dieser Revision habe ich Proben in Händen gehabt, und mit grossem Vergnügen daraus gesehen, dass die Beobachtungen selbst, auf der Reise wie früher in Tobolsk, allen billigen Forderungen entsprechen. — Das ganze Geschäft geht also erwünscht vorwärts, und wenn nicht etwa die Schwierigkeit eintritt, dass sich kein Buchhändler zur Uebernahme des Werkes bereit findet, wird es uns bald erfreuen*).

Bessel.

---

184. Uebervölkerung.**)

(Königsberger Allgemeine Zeitung 1845. Nr. 40, Febr. 17.)

Möchte der so überschriebene Aufsatz des Herrn v. Fahrenheid***) Viele anregen, seinen Gegenstand mit der grössten Aufmerksamkeit zu verfolgen! — Fragen, deren Beantwortung dem Verständnisse wichtiger — ja der wichtigsten! — Interessen eines Landes vorangehen muss, werden in jenem Aufsatze vorgelegt. Aber die Schwierigkeit der Beantwortung der letzten derselben, nämlich wie die Intelligenz im Volke vermehrt werden könne? — hat den Verfasser bewogen, keine Ansicht darüber mitzutheilen, vielmehr Alles was voran gehen muss, ehe die Ergreifung von Maassregeln gerechtfertigt erscheinen kann, dem Zusammenwirken der Einsichten Mehrerer zu überlassen. Als Ziel des Fahrenheid'schen Aufsatzes erscheint uns die Nachweisung, dass die Bevölkerungsfähigkeit eines Landes weder beurtheilt werden darf, nach seinem Flächenraume — auf dessen einer Quadratmeile etwa so viele Menschen Platz haben, als in ganz Europa leben —; noch nach der Vermehrungsfähigkeit des Menschengeschlechts — welche in 100 Jahren bis zur Versechzehnfachung gehen kann —; sondern dass sie ein Maximum hat, dessen Grösse von Verhältnissen verschiedener Art abhängt, unter denen die Intelligenz der Bevölkerung wenigstens das ist, welches durch menschliche Einwirkung Aenderungen erfahren kann. Während Klima, ursprüngliche Ertragsfähigkeit des Bodens, geographische Lage... genommen werden müssen wie sie sind, bleibt der Versuch übrig, durch Steigerung der Intelligenz der Bewohner eines Landes, diesen sowohl ihr Dasein erfreulicher zu machen, als auch die Grenzen ihrer Vermehrung zu erweitern; so dass eine Vermehrung, welche das der geringeren Intelligenz angemessene Maximum überschreitet, und daher sich durch Verarmung und dieser fortschreitende Zerstörung des Ueberschusses äussern muss, sich noch innerhalb des, der gesteigerten Intelligenz entsprechenden Maximums befinden, und daher aufhören kann, mit der Wohlfahrt Aller unvereinbar zu sein. Wir halten dieses für unzweideutige Wahrheit; wir erkennen auch an, dass die Vermehrung der Intelligenz der Bewohner eines Landes der einzige Erfolg verheissende Schritt zur Vermehrung ihrer Wohlfahrt ist. Aber zwischen hier und der wirklichen Hervorbringung dieses Erfolges liegen die grossen Schwierigkeiten, an deren Beseitigung wir uns eben so wenig wagen können, als der hochverehrte Verfasser des angeführten Aufsatzes. Wir wollen dagegen Einige weiter auszuführen und die Schwierigkeiten näher zu bezeichnen versuchen.

In den Nordamerikanischen vereinigten Staaten finden sich grosse Verschiedenheiten der Intelligenz der Bewohner noch so scharf getrennt, dass ihr Einfluss auf die Grenze zwischen Bevölkerung und Uebervölkerung dort auffallender wird, als vielleicht irgendwo in Europa. Die Quadratmeile grosser Länder jenseits des Missisippi erlangt das Maximum ihrer Bevölkerung durch vielleicht ein halbes Dutzend jagender Indianer, weil häufigere Nachstellung, als der Unterhalt dieser Wenigen erfordert, die Thiere des Waldes verscheuchen würde. Die Hütten der Indianer sind zwar weniger durch Kinder gefüllt als die Häuser der Europäer, aber dennoch übersteigt die Zahl der Geborenen die der Sterbenden; fortwährend entsteht Uebervölkerung, und

*) [Erman, A., Reise um die Erde. Berlin, 1833—1841. 5 Bände.]

**) [378 d. a. Verz. — S. die Bemerkung zum folgenden Aufsatz.]

***) Gedruckt in der hiesigen Kriegs- und Friedenszeitung Nr. 28 und 29.

mit ihr Noth, die in der Vertreibung der Nachbaren von ihren Jagdgründen Hülfe suchen muss, also mordende, die Uebervölkerung auf das Maximum der Bevölkerung zurückführende Kriege zur unausbleiblichen Folge hat. Wenn später ein ackerbauendes Volk an die Stelle des Jägervolks tritt, so vergrössert sich das Maximum der Bevölkerung. Dieselbe Quadratmeile die nur wenige Jäger ernähren konnte, bietet die Mittel des Unterhalts eben so vielen Tausenden, welche die Intelligenz besitzen, sie aus dem Boden hervorzurufen. Jede Vermehrung der Kunst des Ackerbaues vergrössert das mit der Wohlfahrt der Bevölkerung vereinbare Maximum; und wenn verschiedene Gewerbe sich vermischen und der mächtige Handel Städte gründet, so wird ein noch grösseres erreichbar. Viele Tausende finden dann da, wo nur ein halbes Dutzend Jäger bestehen konnte, nicht allein ihren Unterhalt, sondern auch Mittel, höheren Anforderungen — denen des Geistes — zu genügen.

Europäische Zustände unterscheiden sich von den eben geschilderten dadurch, dass der Uebergang von der niedrigsten Stufe der zur Erhaltung erforderlichen Intelligenz, zu einer höheren, durch den Verlauf einer langen Zeit bewirkt, und in verschiedenen Klassen der Bevölkerung verschieden fortgeschritten ist. Wir wollen den Zustand betrachten, der die nähere Veranlassung des Fahrenheid'schen Aufsatzes ist — den Zustand der östlichen der Länder, die seit Jahrhunderten gewohnt sind, zu dem über ihnen schwebenden preussischen Adler vertrauensvoll und freudig emporzuschauen. Hier herrscht der Ackerbau vor anderen Gewerben, ohne diese jedoch zu unterdrücken, ohne sich auf die Ernährung der Bevölkerung zu beschränken; der Handel benutzt jede Gelegenheit, seinen wohlthätigen Einfluss geltend zu machen; Künste und Wissenschaften zeugen rühmlich von geistiger Thätigkeit. Hiermit ist nicht im Widerspruche, dass diese Länder zahlreiche Bewohner enthalten, deren Zustand grosse Verbesserung erfahren muss, ehe er aufhören wird abschreckend zu sein. Wirklich können die grössten Verschiedenheiten zwischen den Zuständen verschiedener Theile jeder Bevölkerung nur im thörichten Hirngespinste, nirgends in der Wirklichkeit, verschwinden. Aber der Fahrenheid'sche Aufsatz zeigt, dass die beiden äussersten Grade der Wohlfahrt der Bewohner des östlichen Preussens, wie anderer europäischer Länder, sich jetzt häufiger finden als früher; dass Reichthum sich öfter anhäuft, dass abschreckende Armuth fortschreitend um sich greift.

Durch diese Wahrnehmung, deren ausgedehnte Gültigkeit durch Zeugnisse aus fast allen Ländern Europas behauptet wird, wird die Forderung offenbar, durch deren Erfüllung das Uebel allein dauernd vermindert werden kann: entweder muss die Ursache des Umsichgreifens der Armuth in ihrem Fortgange gehemmt werden, oder eine ihr entgegenwirkende Kraft muss entdeckt und in Wirksamkeit gesetzt werden können. — Suchen wir die Ursache zuerst da, wo Einige jetzt die Ursachen aller Uebel finden wollen, nämlich in politischen Einrichtungen, so finden wir in Preussen allerdings eine wesentliche Aenderung des früheren Verhältnisses der verschiedenen Klassen der Bevölkerung — die 1809 eingetretene, wodurch jeder Preusse gleiche Rechte und Verpflichtungen erhielt, mit Ausnahme der Juden (deren baldige, völlige Gleichstellung mit allen übrigen Staatsbürgern wir hoffen!). Auch die Provinzial-Landtage gehören der Zeit an, in welcher das Umsichgreifen der Armuth stattgefunden hat. In anderen Ländern von Europa fallen in diese Zeit auch Aenderungen, wovon aber, so viel wir wissen keine aus der Absicht hervorgegangen ist, das Verhältniss der Klassen der Bevölkerung [zu] der niedrigsten Klasse nachtheiliger zu gestalten. Wir glauben nicht, dass ein Versuch glücken wird, diese Aenderungen als Ursache des Umsichgreifens der Armuth geltend zu machen; die Aufhebung der Zünfte — in ungünstiger Zeit und ohne Zweifel zu plötzlich erfolgt — mag eher etwas davon, schwerlich das Ganze erklären können.

Indem H. v. F. nachweiset, dass die Zahl Derer, die nicht immer Arbeit finden, sich vergrössert, und dass diese Klasse der Bevölkerung tiefer in das Elend versinkt, liegt allerdings am Tage, dass die Vermehrung der Bevölkerung schneller vor sich gegangen ist als die Vermehrung der Arbeit. Die Intelligenz der Ackerbauer ist unläugbar gestiegen; andere Gewerbe, welche früher hier nicht betrieben wurden, beschäftigen jetzt Viele; das Betriebskapital ist beträchtlich grösser als früher; — dagegen haben Schiffbau, Seefahrt und Handel zwar verloren, aber dennoch scheint nicht bezweifelt werden zu können, dass jetzt mehr Arbeit verlangt wird als früher. Während die Bevölkerung und die Arbeit beide gestiegen sind, ist es jene in einem stärkeren Verhältnisse als diese.

Was ferneres Steigen der Bevölkerung hemmen kann, ist eben dieselbe Noth, gegen deren Umsichgreifen alle Kräfte aufzubieten die Absicht des Fahrenheid'schen Aufsatzes ist. Aber dieses Steigen würde zum Stehen und zum Rückgange gelangen, wenn vermehrte Intelligenz — oder fehlt noch Anderes? — mehr vorhandene Arbeitskräfte nützlich zu machen vermöchte. — Es ist

denkbar, dass die Vermehrung der Bevölkerung so gross werden kann, dass sie jedes Mittels spottet. Aber dieser Zustand steht noch in weiter Ferne; auch zeigt das Beispiel Englands, dass grosse Länder bestehen können, deren eigener Boden unzureichend ist, die Nahrung seiner Bewohner hervorzubringen; die Uebervölkerung Irlands mag auch nur beziehungsweise zu dem Zustande der dortigen Intelligenz stattfinden. Indem wir Mittel zu entdecken suchen, geeignet die Nachfrage nach Arbeitskräften zu vermehren, greifen wir zuerst nach solchen, welche die Intelligenz zu steigern vermögen. Hier verlässt uns der Fahrenheid'sche Aufsatz. — Soll die Schule das Verlangte leisten? — In Preussen fehlte und fehlt es nicht an Anstrengungen nach dieser Seite, und wenn man wieder Hülfe zu erlangen wüsste, die eben so grosse Hoffnung erregte, als die früher auf PESTALOZZI gegründete, so würde die Meinung „schon genug gethan zu haben" sich sicher nicht äussern, oder wenigstens nicht durchdringen. Jedenfalls braucht die Schule Lehrer, viele Tausende derselben; und man kann wohl verständige, die Auffassungs- und Beurtheilungskraft der Schüler ausbildende Lehrer suchen, aber nicht zu vielen Tausenden finden. Die Schule wirkt auch langsam und das vorhandene Uebel fordert schnelle Hülfe; in Beziehung auf dieses wird sie das Ihrige leisten, wenn sie die heranwachsende Generation nach Kräften vor dem gänzlichen Untergange ihrer eigenen Spannkraft bewahrt, vor einem Zustande, dem ähnlich, dessen Schilderung durch den Bischof DOYLE Hr. v. F. anführt; vor einem Zustande, dessen Vorhandensein jeder Hülfe fast unübersteigliche Hindernisse in den Weg legen würde.

Für die, die grossen Gewerben angehören, kann durch diesen besonders gewidmete Anstalten viel geschehen; z. B. für die Ackerbauer durch Musterwirthschaften, welche auch der Vorsorge unseres Königs nicht entgangen sind. Wahrhaft patriotische, des Landes und des Gewerbes kundige, praktische Männer mögen sich vereinigen, um Einrichtung und Aufsicht solcher Anstalten ihrer wohlthätigen Absicht angemessen zu gestalten. — Aber wir wünschen noch mehr! wir wünschen den Versuch, die Intelligenz ohne Beziehung zu besondern Gewerben zu vermehren; die Umsicht Derer auszudehnen, die den engern Ideenkreis ihrer gewohnten Beschäftigungsart nicht zu überschreiten pflegen; ihnen die zu den Zielen Anderer führenden Wege anzudeuten, obgleich jeden derselben nur Der betreten kann, der sich gehörig dazu vorbereitet hat. Wir glauben, dass Jeder nur mit Ueberzeugung zum Wohle des Ganzen beizutragen vermag, wenn er ein Bild desselben sich angeeignet hat, und wenn er den Platz deutlich erkennt, den er selbst darin einnimmt. —

Vor einer Reihe von Jahren, als die öffentlichen Vorlesungen der Königsberger physikalischen Gesellschaft anfingen und grosses Interesse im Publikum erregten, erzeugte sich der Plan, ein grosses Haus zu erwerben und dort wöchentlich einen Vortrag zu veranstalten, dessen Inhalt und Form geeignet sein sollten, den eben ausgesprochenen Wunsch seiner Erfüllung zu nähern; dieser Plan war seiner Ausführung schon nahe, als eine Zufälligkeit, sowie auch die Rücksicht auf damals dem Handel sehr ungünstige Verhältnisse, von seiner Verfolgung ablenkten; endlich entstand die Furcht, dass der Eifer der Vortragenden mit der Zeit erkalten, und dann die Anstalt aufhören möchte, ihrem Zwecke zu entsprechen. — Wir fürchten, dass dieser Plan zu früh aufgegeben ist. Wäre es einerseits gelungen, die Grenzen der Urtheilsfähigkeit der Einzelnen zu erweitern, andererseits Jeden zu der Einsicht zu führen, wo seine Erfahrungen und Kenntnisse ihn zu einem Urtheile befähigen, wo nicht — so würde der Gewinn so gross gewesen sein, dass die Hoffnung, ihn zu erlangen, sich gegen die Gefahr des Misslingens so lange als irgend möglich hätte behaupten sollen. —

Jedenfalls setzt jedoch die Durchführung eines ähnlichen Plans ein Zusammentreffen von Erfordernissen voraus, welches nur in wenigen grossen Städten vorhanden sein kann: so werthvoll sie sein würde, so könnte sie daher doch nicht die Ausdehnung erlangen, in welcher dem vorhandenen Uebel entgegengewirkt werden muss. Mit der Zeit freilich könnte der Segen sich von den einzelnen Städten aus verbreiten — aber wir brauchen schnellere Hülfe! —

Wir glauben, durch diese Betrachtungen auf ein einziges Mittel reducirt zu werden, auf das Mittel, welches Lord BROUGHAM gegen das gleiche Uebel ergriff, auf ein Pfennigsmagazin! — Wo ist aber der BROUGHAM, der diesem Magazine vorzustehen vermag? — Suchen kann man ihn nicht, finden mag sich Einer, auch im Preussischen Staate. Es werden sich Einige finden, die das Wohl des Ganzen zu fördern zur einzigen Aufgabe ihres Lebens zu machen bereit sind, unter diesen vielleicht Einer der die Umsicht und Vielseitigkeit besitzt, seinen edlen Willen in wirksame Kraft zu verwandeln; ein Mann, in gewissen Eigenschaften AUGUST HERRMANN FRANKE gleich, in Umsicht und Vielseitigkeit ihm überlegen. Findet er sich, so werden Erfolg und Nachruhm ihn lohnen. Die Regierung wird ihn unterstützen, das Volk wird ihn als Retter preisen!

Aber dieser Mann ist noch nicht gefunden und das Uebel greift täglich weiter. Herr v. F. führt Beispiele von Hülfe an: Unternehmungen, deren Kosten die Königlichen Cassen bestreiten, und deren Wirkung ist, die Uebervölkerung, so lange diese Unternehmungen dauern, in die Grenze der Bevölkerung zurückzuführen. Diese künstliche Hülfe wird aber ihr Ende erreichen, und dann muss das Uebel verstärkt hervortreten, da während ihrer Dauer die Bevölkerung sich vermehrt; jede Hülfe wird erst radical, wenn die Zeit ihrer Dauer zur Erweiterung der Bevölkerungsgrenze angewandt wird. — Im östlichen Preussen fängt die Industrie erst an unternehmend zu werden, und Capitalien können noch so leicht anderweitig fruchtbar gemacht werden, dass sie sich noch nicht zum Gewerbe drängen.

Wenn auch die Vermehrung der sich den Gewerben zuwendenden Intelligenz, dereinst Nachfrage nach jeder vorhandenen Arbeitskraft schaffen, und der sie Verwendende Gewinn aus ihr ziehen wird, so ist dieser Zustand doch noch nicht vorhanden, und wird wahrscheinlich auch nur durch kurze und langsame Schritte erreicht werden. Wo sollen sich Unternehmer finden, welche sich durch die Kleinheit und Unsicherheit des von jedem anfangenden Gewerbe zu erwartenden Gewinns nicht abschrecken lassen? — Unternehmer, welche dem allgemeinen Wohle Opfer zu bringen bereit sind, und welche sie in der erforderlichen, die Kräfte des Privatmannes übersteigenden Ausdehnung zu bringen vermögen? — Wir hoffen auf die vielbeschuldigte Seehandlung! — Nach einer Reihe von Jahren, wenn segensreicher Friede das Land ferner beglückt, wird auch unser östliches Preussen zur Erkenntniss der Hülfsquellen gelangt sein, wodurch wachsende Intelligenz die Grenze seiner Bevölkerung so auszudehnen vermag, dass sie die jetzige Uebervölkerung und entstehende Vermehrung umschliesst. Der Beistand, von dem wir hoffen, dass er diese Erkenntniss herbeiführe, wird dann seinen Zweck erreicht haben; und der Verleiher desselben wird ihn, befriedigt, zurückziehen können. X.

---

185. Schreiben an die Redaction (der Königsberger Allgemeinen Zeitung).*)

(Königsberger Allgemeine Zeitung 1. Jahrg. 1843, Nr. 81, April 5.)

Herr Redacteur!

Die in Nr. 78 der Königsb. Allg. Zeitung an die Leser gerichteten Worte haben mich, der ich einer derselben bin, veranlasst, mir die Schwierigkeiten zu vergegenwärtigen, welche ein entstehendes Zeitblatt zu überwinden hat. Ich bin gleich zu der Bemerkung gelangt, dass, abgesehen von der Schwierigkeit jedes Anfanges, sich Ihnen viele Gefahren zeigen müssen. Königsbergs Grösse und Bedeutung macht aber das Bestehen einer zweiten Zeitung nothwendig, und der Wunsch, diese durch die ihr drohenden Gefahren glücklich hindurchgesteuert zu sehen, treibt mich, Ihnen meine Pilotendienste anzubieten. Ich will Ihnen den Weg zu bezeichnen suchen, den ich für den richtigen halte. Wenn Sie geneigt sind, sich durch diese Bezeichnung durchzuarbeiten, die etwas weitläufig zu werden droht, so werden Sie bemerken, dass mein Weg mit dem, den Sie selbst gewählt haben, wenigstens im Ganzen zusammentrifft.

Wenn entgegengesetzte politische Parteien vorhanden sind, so ist in der Ordnung, dass jede ein Zeitblatt sucht, worin sie sich geltend machen kann, welches für sie wirbt. Jede vertritt ausschliesslich ihre Theorie; auf die entgegengesetzte nimmt sie nur Rücksicht um sie zu bekämpfen; als Partei kann sie nicht unparteiisch sein. Um sich Eingang zu verschaffen darf sie jedoch nie eingestehen, dass sie eine Partei ist, also dass ein höheres Urtheil nothwendig ist, um ihre Aeusserungen als Recht und Wahrheit zu stempeln. Es ist mir daher vorgekommen, als ob das Bekenntniss zu einer Partei einer Zeitung nur gegen das Interesse derselben in einem unbewachten Augenblicke entschlüpfen könnte. Meiner Ansicht gemäss würden Sie also nicht in Ihrem Interesse handeln, wenn Sie — um das Kunstwort zu gebrauchen — eine Farbe Ihres Blattes selbst anerkennen wollten. Ich lobe, dass Sie dieses nicht thun, finde auch den Inhalt Ihrer bisherigen Nummern nicht so, dass er Sie dazu zwingen könnte.

Ich bin der Meinung, dass das Vorhandensein einer politischen Partei, wenn nicht aus ihrem eigenen Bekenntnisse, nur aus entschiedener Einseitigkeit ihrer Aeusserungen, aus dem Halten an widerlegten Irr-

*) [362 d. a. Verz. — In dem auf der Königsberger Sternwarte befindlichen Expl. der Königsb. Allgem. Zeitung hat Bessel mit eigener Hand bemerkt: „Das Schreiben an die Redaction Nr. 81 und über Bevölkerung Nr. 40, X. unterzeichnet, sind von F. W. Bessel“ (s. Busch, Königsb. Beobb. Abth. XXIV p. XXII).]

thümern, gefolgert werden kann. Wenn mir eine Zeitung als Parteiorgan klar geworden ist, so habe ich Zutrauen zu ihren Behauptungen nicht mehr zu rechtfertigen gewusst; ich habe dann auch eine der entgegengesetzten Partei dienende aufgesucht, und wenn die gefundene mir weniger thätig oder geschickt erschienen ist, habe ich die Aussicht aufgegeben, aus ungleichem Kampfe das Recht als Sieger hervorgehen zu sehen. Ich habe dann ein drittes Blatt vorgezogen, welches Einseitigkeit seiner Betrachtungen, oder gar Mittheilungen, nicht entweder selbst behauptet, oder durch seinen Inhalt beweist. Ich habe nicht einsehen können, wie man, ohne auf die Ehre der Unparteilichkeit zu verzichten, in der alleinigen Kenntniss der Darstellungen Einer Partei Befriedigung finden kann.

Dass in Zeitungen bestimmter Farbe lebhaft gekämpft zu werden pflegt, ist mir auch nicht so anziehend erschienen, dass es mir grosse Theilnahme für sie eingeflösst hätte. Mir ist vorgekommen, als ob oft nur gegen Extreme gefochten würde, die Niemand beabsichtigt. So können die Vertreter der Censur darunter wohl kein Mittel verstanden haben, das Bekanntwerden eines werthvollen Gedankens zu beschränken; während die Vertreter der freien Presse wohl nicht gemeint haben, dass es nicht wünschenswerth wäre, wenn das Publikum vor dem Drucke entschieden werthloser Schriften geschützt werden hönnte, z. B. vor einem Romane, der keine Spur von Erfindung oder Poesie, aber die Fülle moralischen Schmutzes enthielte, oder vor einem Werke, welches beweisen wollte, dass zwei mal zwei fünf ist. Was beide streitenden Parteien eigentlich wollen, scheint oft gar nicht so weit auseinander zu liegen, als man der Heftigkeit ihres Streites nach vermuthen sollte. Doch eine Frage beantworten beide entgegengesetzt, eine Frage, die mir wie eine Wasserscheide erscheint, von wo die Strömung in entgegengesetzten Richtungen geht: die Frage, ob gegen jede mögliche Gefahr, gleichviel ob sie im wirklichen Laufe der Dinge eintreten wird oder nicht, Bürgschaften erforderlich sind? — Ich verlange keine Bürgschaften, wo ich keine Gefahr sehe, ebensowenig wie ich eine Erhöhung der Dämme verlange, um uns gegen höheres Ueberfluten des Pregels als je vorgekommen, dessen Möglichkeit aber vorhanden ist, zu sichern. Ich will solche Bürgschaften nicht, weil das Mittel schlimmer sein würde als das Uebel. Um mir das Bürgschaftssystem zu versinnlichen, habe ich mir die Verhältnisse einer Familie danach gestaltet gedacht; das Bild davon, welches sich Jeder leicht selbst entwerfen wird, ist abschreckend! von Liebe enthält es keine Spur mehr, und doch würde diese die allerstärkste Bürgschaft gewähren.

Ich erwarte von Kämpfen, die die Zeitungen ausfechten wollen, keinen Erfolg. Ich habe viel zu oft gesehen, dass verborgene Wahrheit nur mit grosser Anstrengung, nur in Folge geduldiger unbefangener Forschung, an das Licht gezogen worden ist, als dass ich der Hoffnung Raum geben könnte, sie aus dem entgegengesetzten Verfahren hervorleuchten zu sehen. Ich muss sogar — auf die Gefahr hin für politisch unmündig erklärt zu werden — gestehen, dass ich nicht glaube, dass eine politische Theorie je ergründet werden wird. Von der Ueberzeugung durchdrungen, dass es dem menschlichen Geiste nur in sehr wenigen, nur in den allereinfachsten Fällen gelungen ist, die in den Erscheinungen verborgene Theorie zu entdecken, sehe ich nicht die geringste Wahrscheinlichkeit der Annahme, dass es in dem verwickeltsten aller Fälle, in dem Falle, in welchem menschliche Interessen, Leidenschaften und Irrthümer wesentlich eingreifen, gelingen werde, die Theorie zu erkennen, welche von einer zu ergreifenden Maassregel bis zu ihrem letzten Erfolge führte. Ich erspare Ihnen die Anführung einiger der unzähligen Erfahrungen, die diese Ansicht bestätigen. Aber wenn sie richtig ist, so kann man sich dem Schlusse nicht entziehen, dass politische Maassregeln nur in Fällen ergriffen werden dürfen, in welchen Nothwendigkeit gebietet, die Unsicherheit ihres Erfolges nicht zu beachten. Ich bekenne mich unbedenklich zu diesem Schlusse.

Ich will nicht, dass man jeden kleinen Uebelstand, der mit den Fortschritten der Zeit sichtbar wird, ohne Abhülfe lasse; ich will nur, dass man nicht glaube, jene Fortschritte plötzlich befördern zu können. — In der allgemeinen Regel der Natur findet man keine plötzlichen Veränderungen. In der physischen Welt zeigen sie sich entweder nicht, oder sie zeigen sich von Zerstörung begleitet. Wo hier plötzliche Veränderungen des Zustandes der Ruhe oder Bewegung eintreten, sind sie jedesmal mit Kraftverlust verbunden.

Sie sehen hieraus, dass wenigstens Einer Ihrer Leser wohl zufrieden ist, dass Sie sich fern von politischen Theorien halten. — Den Fortschritt des Wohls des Menschengeschlechts wünsche ich eben so warm wie die, die ihn beschleunigen zu können glauben. Ich erkenne als unwandelbar das Streben des Menschen nach Vervollkommnung seines inneren und äusseren Zustandes; ich bin überzeugt, dass Nichts die Wirkung dieses Strebens umzukehren vermag. Ich glaube daher, dass nicht leicht Einer sein eigenes Interesse so ver-

kennen wird, um sich ihm widersetzen zu wollen; ich weiss gewiss, dass Keiner die Kraft besitzt, sich ihm mehr als augenblicklich widersetzen zu können. Ich träume also nicht von vorhandener Gefahr des Rückganges, ich verlange keine Bürgschaft dagegen. Und wenn die Furcht vor Gefahr mich beunruhigte und wenn ich Bürgschaft wünschte, würde ich nicht glauben, dass diese oder jene Anordnung sich zuverlässiger erweisen würde, als das Gesetz der Natur.

Das praktischste Volk der Erde, das englische, ist seit langer Zeit dem Wege gefolgt, der mir als der einzig richtige erscheint. Zwar sind dort zwei Parteien im forterbenden Kampfe mit einander, und wenn die Zeit ein Interesse zu Tage fördert, welches sich von keiner derselben vertreten glaubt, so erscheint eine neue Partei, welche auch, wenn der Grund des Hervortretens stark genug ist und bleibt, die mächtigere werden wird; aber diese Parteien führen abwechselnd das Ruder des Staats, und das müssen sie, wenn sie einmal vorhanden sind, weil das stetige Fortschreiten sich nicht durch ihre Theorien stören lässt. Die Torys nehmen das Ruder, wenn das Volk die Whigs nicht mehr unterstützt; sie geniessen Anfangs, verlieren aber nach einiger Zeit diese Unterstützung und räumen den Whigs ihren Platz, deren Stunde aber auch wieder schlägt. Dasselbe Volk unterstützt abwechselnd die einen und die anderen; es folgt selbst dem Strome der Zeit und vermittelt sein stetiges Fortschreiten, indem es keine Störung desselben ertragen kann, weder durch ungebührliches Anhalten, noch durch ungebührliches Befördern. Werden die Torys des ersteren, die Whigs des letzteren schuldig, so erfahren sie, dass die stärkere Kraft des Gesetzes der Stetigkeit ihrer schwächeren spottet. — Alle Völker der Erde folgen diesem Gesetze und alle haben das Streben nach Vervollkommnung mit einander gemein. Aber sie leben unter den verschiedensten äusseren Verhältnissen. Die vollständigere Entwickelung der Thätigkeit in gemässigten, die unvollständigere in heissen Gegenden der Erde; die physische Beschaffenheit des Bodens; die Lage am Meere oder im Innern; die Beschaffenheit der Nachbarländer — dieses Alles wirkt mit dem stetigen Streben zusammen und der letzte Erfolg davon ist nothwendig ein höchst verschiedener: es ist schnelleres oder langsameres Wachsen des allgemeinen Wohls, Stillstand desselben, gar Rückgang.

Meiner Meinung nach soll der ein Conservativer genannt werden, der jede plötzliche Störung des Fortschreitens für unangemessen hält, gleichviel in welcher Richtung sie erscheint. Diese Bedeutung der Benennung angenommen, bin nicht nur ich ein Conservativer, sondern ich zweifle auch nicht, dass wir Preussen im Allgemeinen Conservative sind. — Kleine Oscillationen um den im Ganzen stattfindenden Zustand zeigt die Natur uns überall; in dem politischen Gange England habe ich sie nachgewiesen. Niemand kann an die Möglichkeit glauben, sie zum Aufhören zu bringen, aber auch Niemand kann sich davon beunruhigen lassen. Niemand kann sie mit plötzlichen Eingriffen in das Getriebe der Maschine verwechseln. Andere als solche Entfernungen von dem stetigen Fortschreiten zeigt die Preussische Geschichte nicht: sie zeigt nirgends das Erhalten des Unangemessenwerdenden lange über seine Zeit hinaus, sie zeigt aber wohl frühzeitiges Erkennen desselben; das Jahr 1808 und seine Folgen hat Niemand vergessen, am wenigsten wir Ostpreussen. Daher hat sich seit langer Zeit das zuverlässigste Band, das Band des Freundes an den Freund, um den König von Preussen und das Preussische Volk geschlungen: ein Band nicht aus Papier gemacht, sondern aus Stoffen, welche nur allgemeine Vernichtung zerreissen kann. — Ich habe schon gesagt, dass das Verlangen nach Bürgschaften für die Festigkeit des Bandes der Liebe an der Liebe nagt. Dieses darf Niemand auch nur augenblicklich vergessen! — ich vermuthe, dass Einige nur nicht daran gedacht haben.

Ich habe fast keine Neigung, zu Ihrer Zeitung zurückzukehren, Herr Redacteur. Aber sie ist die Veranlassung meines Schreibens gewesen, und ich darf sie nicht aus den Augen verlieren, wenngleich ich Ihnen den Weg, der mir als der rechte erscheint und auf dem ich wirklich Ihre Zeitung finde, deutlich genug bezeichnet haben werde. Ich will Ihnen nicht verschweigen, dass ich Ihre Blätter auch tadele. Ich tadele, dass sie für die ausserdeutschen Ereignisse zu unvollständig, oder, wenn Sie lieber wollen, zu wenig ausführlich sind, obgleich ich damit nicht leugne, dass sie auch Berichte über solche Ereignisse enthalten, welche mich befriedigen, z. B. die Auszüge über Bingham's Buche über den Krieg in China, die Peel'sche Rede im Parlament und Anderes. Das sollte aber nicht Ausnahme, sondern tägliche Regel sein. Ferner tadele ich, dass Sie Einiges aus der Literatur, welches sich fast zur Aufnahme drängt, zurückweisen; z. B. die Schilderung Eylert's von dem Betragen der Grafschaft Mark während der französischen Herrschaft. Endlich würde ich gern vollständigere Nachrichten von wissenschaftlichen und Naturereignissen in Ihren Blättern finden; nicht vollständige, sondern vollständigere. — Ich sehe zwar wohl, dass Sie, wenn Sie meine Wünsche befriedigen wollen, Ihren

Raum erweitern müssen; aber wenn diese Erweiterung Bedingung des Beifalls wird, von dem Ihr Unternehmen abhängt, so wird sie nothwendig.

Thun Sie Alles was Sie können, um Königsberg die zweite Zeitung zu erhalten. Hiermit nimmt Abschied von Ihnen

Ihr Leser X. (BESSEL.)

[Literatur der Astron. Nachrichten. (Zu Abh. 153); OLBERS, Formeln für die Lichtstärke der Himmelskörper (Bd. 12). — (Zu Abh. 155 und 171). Ueber den Sonnendurchmesser von: BÜRG, POSSELT, WURM (1); WURM (ENCKE), STRUVE (3); GAUSS (7); SCHUMACHER (⊙-Durchm. durch Spiegelsext. 8); BIANCHI, HENDERSON (9); CHEVALLIER (27); WICHMANN (32, 33); LITTROW (42); SPÖRER (über Aenderungen des ⊙-Rad., 80); FULG (85). Ueber den Monddurchmesser von: BÜRG (3); DE FERRER (11); WICHMANN, PETERS (Rad. bei tot. ☾-Finsterniss, 34); WICHMANN (zu Abh. 171, 29, 33); OUDEMANS (51); ERMAN (71). — (Zu Abh. 158). BRINKLEY, Säcularänderung der Schiefe (4). — (Zu Abh. 161). Ueber persönliche Gleichung: MÄDLER-NEHUS (17); PASCHEN-PETERSEN (30); PETERS (GUSSEW, PAPE, WINNECKE) (49); HARTMANN, SCHULZ (65); LITTROW (68); KAYSER (70); C. WOLF (75, 76). — (Zu Abh. 164) WICHMANN, physische Libration des ☾ (26, 27, 38). — (Zu Abh. 165) ERMAN, über die August-Sternschnuppen und ihre Bahnen, MÄDLER, Bemerkungen dazu (17); ERMAN, über Neapolit. Beobb. St.-Schn. betreffend (23); BOGUSLAWSKI, period. St.-Schn. eines Jahres (35); R. WOLF, durchschnittliche St.-Schn.-Zahl in ¼ Stunde (39); GALLE, über den St.-Schn.-Fall 1872 Nov. 27, WITTSTEIN, zweckmässigste Art St.-Schn. zu beobachten (81); DREYER, Deutung des Nebenradius des Perseiden-Systems (82); GALLE, über die Bahnberechnung der Meteore (83); BRUNS, zur Berechnung der Höhe der St.-Schn. aus correspond. Beobb. (84). Zusammenhang mit Cometen s. Literatur Bd. I. p. 83. — (Zu Abh. 166) VALZ, über Projection der Himmelskarten (7). — (Zu Abh. 168) Ueber die Jupitermasse von: LAPLACE (9, 19); ENCKE (14, 19); LAGRANGE (19); LEVERRIER (30); SCHUBERT (66); H. VOGEL (Beobb. des III. und IV. Satelliten), KRÜGER (81). — (Zu Abh. 169) HANSEN, Theorie der Finsternisse (15); LEHMANN, zur Theorie der ⊙Finst. (33), RÜMKER (44); NEWCOMB, Bestimmung des ☾—⊙Abstandes während einer ⊙Finst. (76). — (Zu Abh. 170) LITTROW, Beobb. der totalen ⊙Finst. 1851 Juli 28 (33). — (Zu Abh. 171). Ueber den Merkurdurchmesser von: HARTNUP, SCHMIDT, SECCHI (56); PARPART (57); SCHMIDT (65); DUNÉR, MERINO, VENTOSA, WOLFF (72); COPELAND (73). — (Zu Abh. 172). ANGER, DALBY's Methode der Längenunterschiede; Reduction der Monddistanzen von BREMIKER (30), ECKHARDT (39). — (Zu Abh. 180) FLEMMING's Reduction der älteren Uranus-Beobb. (mitgetheilt von SCHUMACHER) (30); über die Uranus-Bewegung und Neptun, von AIRY (15, 25), ADAMS (25, 26, Erg. 29), ENCKE, LEVERRIER (25), LINDENAU (Erg. 29). — SCHUMACHER, über die verschiedenen Grössenschätzungen (8); PETERS, Ablenkungen der Lothlinie durch Anziehung von ⊙ und ☾ (22); LINDENAU, Unveränderlichkeit der ☿Masse (vgl. auch Abh. 14) (31); OUDEMANS, Durchm., Abplattung und Axenstellung des ♂ aus BESSEL's Beobb. (35); VOGEL, Brief an HUMBOLDT über Sternschwanken in Afrika (38); WINNECKE, Abplattung und Grösse des ♂ (48); KAYSER, Untersuchung des ☾ betr. ellipsoidische Gestalt (73). — Zu Abhh. 155 und 171 vgl. noch Tabb. Regiom. L (⊙Durchmesser aus Königsberger Beobb. 1820—1828).]

Literatur-Verzeichnisse.

1. Allgemeines Verzeichniss der Schriften Bessel's.

In dem folgenden, wesentlich chronologischen Verzeichniss enthält: Spalte 1) Jahr, Monat, (Tag) der Veröffentlichung des Werks, Einsendung der Abhandlung oder Datum des Briefes. 2) Die fortlaufende Nummer; die mit * bezeichneten fehlen in dem Busch'schen Verzeichnisse (Königsberger Beobb. 24. Abth. p. XXI); Nr. 387—399 sind neu hinzugetreten. 3) Titel der Werke, Abhandlungen und Aufsätze; bei den Briefen kurze Inhaltsangabe. Die **fett** gedruckten Ziffern in ( ) sind die Abhandlungsnummern der vorliegenden Ausgabe, und zwar enthält Band I die Abhh. 1—51, Band II Abhh. 52—124, Band III Abhh. 125—185. 4) Die Zeitschriften, in denen die unter 3) genannten Schriften vorkommen; die römischen Ziffern beziehen sich auf die Bände, die arabischen auf die Seiten; bei der Jenaer Liter.-Zeitung, den Jahrb. für wissensch. Kritik, den Astronom. Nachrichten, sowie den politischen Zeitungen sind noch die Nummern *cursiv* hinzugefügt; die angewandten Abkürzungen bedeuten:

M. C.	Monatliche Correspondenz von Zach.
Bode J.	Bode, Astronomisches Jahrbuch für (1808—1829).
Z. f. A.	Zeitschrift für Astronomie von v. Lindenau und Bohnenberger.
A. N.	Astronomische Nachrichten, herausgegeben von Schumacher.
Berl. A.	Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften. Math. Classe.
Berl. Ber.	Monatsberichte der Berliner Akademie d. Wiss.
Gött. Anz.	Göttingische gelehrte Anzeigen.
Pogg. Ann.	Annalen der Physik und Chemie, herausgeg. v. Poggendorff.
J. L.	Jenaer Allgemeine Literaturzeitung.*)
J. f. w. Kr.	Jahrbücher für wissenschaftliche Kritik.
K. H. Z.	Königsberger (Hartung'sche) Zeitung.
K. A. Z.	Königsberger Allgemeine Zeitung.
C. A.	Correspondance Astronomique du Baron de Zach.
C. R.	Comptes rendus.
Conn. d. t.	Connaissance des tems.
Bull. Fér.	Férussac, Bulletin des sciences mathématiques e
Bibl. un. Sc.	Bibliothèque universelle de Genève, Scienc et arts.
Bibl. un. N. S.	Bibliothèque universelle de Genève. Nouvel série. 1836 fl.
Mo. Not.	Monthly Notices of the R. Astronomical Soci
Phil. Mag.	Philosophical Magazine.
Quart. Journ.	Quarterly Journal of Science, Literature and Art

Von den 487 Nummern dieses Verzeichnisses gehören Bessel unmittelbar an 401; Mittheilungen Bessel'scher Methoden, Formeln, Beobachtungen durch Andere sind 24; Auszüge und Uebersetzungen aus seinen Schriften und Abhandlungen 62 Nummern (meist mit * versehen).

*) Die Chiffern Bessel's in der Jenaer Literatur-Zeitung sind LLAL. (1807—1810), J. W. (1810—1814), O. A. (1821—1834).

Datum.	Lauf. Nr.	Titel (Abhandlungs-Nummer).	Zeitschrift.
1804 Nov.	1	Berechnung der Harriot'schen und Torporley'schen Beobachtungen des Cometen von 1607 (1)	M. C. X. 425.
1805 März	1*	Geoc. Lauf der Ceres 1805 und 1806 von Gauss (⊙-Oerter dazu von Bessel) . . .	M. C. XI. 286.
Mai (2)	2	Berechnung der Bahn des Cometen von 1618.	Bode J. 1808. 113.
Sept.	3	Ueber die Berechnung der wahren Anomalie in einer von der Parabel nicht sehr verschiedenen Bahn (3)	M. C. XII. 197.
Dec. (23)	4	Elemente der beiden Cometen von 1805 (mitgeth. von Olbers)	Bode J. 1809. 134.
„	5	Elemente des ersten und zweiten Cometen von 1805 (mitgeth. von Olbers). . . .	M. C. XIII. 80, 88.
1806 April (26)	6	Berechnung der Bahn des zweiten Cometen von 1805	M. C. XIV. 71.
Juli (17)	7	Beobb. der Juno und Ceres. (Sichtbarkeit kleiner Planeten in versch. Fernröhren, 153)	M. C. XIV. 192.
„	8	Ueber den zweiten Cometen von 1748	Bode J. 1809. 96.
„	9	Beob. der Juno und Ceres 1806, der Sonnenfinsterniss v. 16. Januar und Bedeckung ϵ Leonis am 1. April	Bode J. 1809. 195.
Sept. (25)	10	Untersuchung der wahren elliptischen Bewegung des Cometen von 1769. (Eine Preisschrift.) (III. Abschnitt, 2)	Bode J. 1810. 88.

Datum.	Lauf. Nr.	Titel (Abhandlungs-Nummer).	Zeitschrift.
1806 Nov.	11	Berechnung der im J. 1807 bald nach dem Neumonde vorfallenden Sternbedeckungen (24)	M. C. XIV. 481.
(Dec. 23 — 1807 Juni 16)	12	Beob. und Berechnung des Cometen von 1806. Beob. der Vesta und Juno nebst beob. Sternbedeckungen	Bode J. 1810. 201.
Dec. (23)	13	Beobb., Elemente und Ephemeride des Pons'schen Cometen von 1806	M. C. XV. 85.
1807 März	14	Ueber die Figur des Saturns, mit Rücksicht auf die Attraction seiner Ringe (154) .	M. C. XV. 239.
März (12)	15	Beobb. des Pons'schen Cometen von 1806 nach seiner Wiedererscheinung; über die Reflectoren von Gepken	M. C. XV. 373.
Juni	16	Beobb. der Vesta am Kreismikrometer in Lilienthal; scheinb. Durchmesser der Vesta	M. C. XV. 592.
Juli	17	Beobb. der Vesta (mitgeth. von Olbers)	M. C. XVI. 91.
Aug.	18	Recension: „Astronom. Jahrb. für d. J. 1808 etc. von J. E. Bode. Berlin, 1805“ . .	J. L. 1807. *187, 188.* 281.
	19	Recension: „Elementar-geometrische Auflösungen des Delischen Problems, der Aufgabe vom Dreischnitt des Winkels und einiger anderer Sätze von A. W. Wlochatius, Dr. d. W. W. Königsberg, 1804“	J. L. 1807. *188.* 292.
Juni (6)	20	Reduction der Beobb. von Thulis und Elemente des Cometen von 1806	M. C. XVI. 176.
Oct.	21	Beobb. und Elemente des Cometen von 1807	M. C. XVI. 489.
Nov.	22	Sternbedeckungen; Ephemeride des Cometen von 1807	M. C. XVI. 494.
(Nov. 18 u. Dec. 10)	23	Beobb., Elemente und Ephemeride des Cometen von 1807; Bedeckung von A_1 Cancri	M. C. XVII. 80.
Dec.	24	Verbesserte Elemente des Cometen von 1807	M. C. XVI. 564.
1808 Jan.	25	Recension: „Tables astronomiques, publiées par le bureau des longitudes de France. 1. partie. Tables du soleil par M. Delambre, tables de la lune par M. Büro. Paris 1806.“	J. L. 1808. *9.* 65.
Febr. (18)	26	Ueber die Theilungsfehler der Hadley'schen Spiegel-Sextanten (52)	Bode J. Suppl. IV. 204.
Jan. (25)	27	Reduction der Mailänder Beobachtungen der Vesta (mitgeth. von Gauss)	M. C. XVII. 183.
Febr. (18)	28	Beobachtungen des Cometen von 1807	M. C. XVII. 471.
März (18)	28*	Beobb., parab. und ellipt. Elemente des Cometen von 1807	Gött. Anz. 1808. Apr. 2. Gauss Werke VI. 300.
	29	Ueber die Wirkung der Strahlenbrechung bei Mikrometer-Beobachtungen (27) . .	M. C. XVII. 209.
	29*	Beispiel zu Nr. 29 und Berichtigungen (von v. Lindenau)	M. C. XXIV. 557.
(April 21 u. 22)	30	Elliptische Elemente des Cometen v. 1807 und Vergleichung aller Beobb. mit diesen; über den Pons'schen Cometen von 1808	M. C. XVII. 551.
Juli	31	Recension: „Astronom. Jahrbuch für d. J. 1809 etc. von J. E. Bode. Berlin, 1806“ .	J. L. 1808. *166, 167.* 97.
„ (20)	32	Bemerk. über eine Cometenabh. von Asclepi (s. Nr. 33); Sternbedeckungen	M. C. XVIII. 176.
Aug. (5)	33	Nachtrag zu der Untersuchung der wahren elliptischen Bewegung des Cometen von 1769 (s. Nr. 10)	Bode J. 1811. 197.
„ „	34	Beobb. des grossen Cometen v. 1807 und Untersuchung über seine wahre elliptische Bahn	Bode J. 1811. 153.
„ „	35	Beobb. der Vesta im Juni und Juli 1807; Sternbedeckungen in den Jahren 1807 und 1808; Bemerkung (vom 13. Nov. 1807) über den Cometen	Bode J. 1811. 161.
„ (9)	36	Elliptische und parabolische (von Oriani) Elemente des Cometen v. 1807, nebst Vergleichung beider Elemente mit 117 Beobb.	M. C. XVIII. 237.
Sept. (18)	37	Elemente des Cometen II 1808	M. C. XVIII, 358.
Oct.	38	Recension: „Tabulae speciales aberrationis et nutationis in ascensionem rectam et in declinationem etc. Auctore Francisco Lib. Bar. de Zach. Vol. I. Gotha, 1806.“ . .	J. L. 1808. *241, 242.* 89.
Nov.	39	Recension: „Astron. Jahrbuch für d. J. 1810 etc. von J. E. Bode. Berlin, 1807.“ . .	J. L. 1808. *272, 273.* 337.
1809 Jan. (5)	40	Ueber die Parallaxen einiger Fixsterne aus Bradley'schen Beobachtungen (78); Ort des Polarsterns; über seine Bearbeitung der Bradley'schen Beobb. (Anm. zu 85) .	M. C. XIX. 183.
März (9)	41	Nachtrag zu den Rechnungen über den grossen Cometen von 1807 (s. Nr. 36) . .	M. C. XIX. 521.
Mai (17) Juni (15) u. Juli (12)	42	Ueber Aberrations- und Nutationstafeln (35); Bestimmung des Collimationsfehlers beim Mauerquadranten (54); Bestimmung des Sonnen- und Monddurchmessers (155)	M. C. XX. 80.
Juni (29)	43	Nachtrag zu der Abh. über den Cometen von 1807 (s. Nr. 34); astronomische Beobb. und Elemente der Bahn des Cometen von 1808	Bode J. 1812. 125.
„ „	44	Vorschläge zur Erweiterung des Gebrauchs des Mauerquadranten (55)	Bode J. 1812. 148.
	45	Recension: „Connoissance des Tems ou des mouvemens des corps célestes etc. pour l'an XV, pour 1808 et 1809. Paris“	J. L. 1809. *134, 135.* 457.
Juni	46	Recension: „Neue Untersuchungen über die Verhältnisse der Grössen und Excentricitäten der Weltkörper, durch Dr. Gotthilf Heinrich Schubert. Dresden, 1808.“	J. L. 1809. *135.* 469.

Datum.	Lauf. Nr.	Titel (Abhandlungs-Nummer).	Zeitschrift.
1809 Juli	47	Recension: „Kronographische Fragmente, zur genauern Kenntniss des Planeten Saturn, seines Ringes und seiner Trabanten, von Dr. Joh. Hieron. Schröter. 1. Theil. Göttingen, 1808.“	J. L. 1809. *159.* 57.
Aug.	48	Recension: „Sammlung astronomischer Abhh., Beobb. und Nachrichten, herausgeg. von J. E. Bode. IV. Supplementb. zu dessen astr. Jahrbüchern. Berlin, 1808.“	J. L. 1809. *191, 192.* 313.
Sept.	49	Recension: „Astronom. Jahrb. für d. J. 1811 etc. von J. E. Bode. Berlin, 1808.“	J. L. 1809. *218, 219.* 521.
Oct. (18)	50	Beobb. von Sternbedeckungen	M. C. XX. 493.
Nov.	51	Recension: „Tables Barométriques, pour faciliter le calcul des nivellements et des mésures des hauteurs par le Baromètre. Par Bern. de Lindenau. Gotha, 1809.“	J. L. 1809. *266.* 305.
Nov. (9)	52	Beobb. einiger Sternbedeckungen	Bode J. 1813. 186.
1810 Jan. (3)	53	Reduction einiger Beobb. des Cometen von 1807 und ihre Vergleichung mit seinen elliptischen Elementen	M. C. XXI. 189.
Febr.	54	Recension: „Exposition du système du monde, par Laplace. Troisième Edition, révue et augmentée. Paris 1808.“	J. L. 1810. *31, 32, 33.* 241.
Juli (14)	55	Elemente der wahren Bahn des Cometen von 1807	Bode J. 1813. 187.
	56	Recension: „Connoissance des Tems etc. pour l'an 1810. Paris 1808.“	J. L. 1810. *161.* 81.
Sept.	57	Ueber die wahre und scheinbare Bahn des Cometen von 1807. (Auszug aus Nr. 60)	M. C. XXII. 205.
Aug. (26)	58	Ueber das Integral $\int \frac{dx}{\log x}$ (**106**)	M. C. XXII. 395.
Dec. (9)	58*	Bemerkungen zu Nr. 58 von Soldner (**106** Anm.)	M. C. XXIII. 182.
Nov.	59	Recension: „Astron. Jahrbuch für d. J. 1812 etc. von J. E. Bode. Berlin, 1809.“	J. L. 1810. *259, 260.* 265.
	60	Untersuchungen über die scheinbare und wahre Bahn des im Jahre 1807 erschienenen grossen Cometen. Königsberg, Nicolovius, 1810. (Störungsmethode, **9**).	
	60*	Auszug aus Nr. 60 (von v. Lindenau)	M. C. XXIII. 387.
1811 Jan. (11)	61	Ueber projectirte Störungstafeln (**15**); Bemerkung über die Greenwicher Quadranten (**56**); Vertheidigung gegen die Soldner'schen Bemerkungen (**107**)	M. C. XXIII. 189.
Febr.	61*	Referat über Nr. 60 von Gauss	Gött. Anz. 1811. Febr. / Gauss Werke VI. 53.
Mai (8)	62	Bahnbestimmung des Cometen von 1810; Wunsch bez. eines Cometenbahnverzeichnisses; Bedeckung von α Tauri am 25. April	M. C. XXIV. 71.
	63	Recension: „Astron. Jahrbuch für d. J. 1813 etc. von J. E. Bode. Berlin, 1810.“	J. L. 1811. *109, 110.* 29.
Juni (30)	64	Resultate einer Untersuchung über die Lage der Ebene des Saturnringes, die Theorie des 4. Satelliten, die Massen des Planeten und des Ringes (vgl. **17**). Sternbedeckungen	Bode J. 1814. 173.
„ „	65	Berechnung der Bahn des Cometen von 1810	Bode J. 1814. 178.
„ „	66	Bemerkungen über die unmittelbare Berechnung der Störungen der Cometen-Oerter (**11**); zur Integration der Gleichung für die Fallzeit (**156**)	M. C. XXIV. 176.
Aug. (26)	67	Beobb. und Elemente des Cometen von 1811; Sternbedeckungen	Bode J. 1814. 257.
Sept.	68	Recension: „Trigonométrie rectiligne et sphérique par Antoine Cagnoli, traduite de l'Italien par N. M. Chompré. Seconde Edition considérablement augmentée. Paris. 1808.“	J. L. 1811. *206.* 465.
	69	Ueber die Theorie der Saturns-Satelliten (s. **17**)	M. C. XXIV. 197.
Aug. (26)	70	Beobb. und Elemente des grossen Cometen von 1811	M. C. XXIV. 302.
Sept. — Nov. (21)	70*	Beobb., elliptische Elemente, Beobb. (Messungen im Nebel), Beobb. und Bemerkungen über den grossen Cometen von 1811	[589. M. C. XXIV. 417, 513, 517.
(Nov. 6 u. Dec. 23)	71	Beobb. und Elemente des grossen Cometen von 1811; Sternbedeckungen	Bode J. 1815. 111.
	72	Ueber das Kreismikrometer (**58**)	M. C. XXIV. 425.
Dec. (21)	73	Vergleichung der von Bessel, v. Lindenau, v. Schubert und Olbers gemachten Beobb. des Cometen von 1811 mit seinen elliptischen Elementen	M. C. XXV. 283.
1812 März (26)	73*	Bemerkungen über 61 Cygni; über die dritte Sichtbarkeit des Cometen von 1811	Gött. Anz. 1812. Apr. 25. / Gauss Werke. VI. 350.
Juni	74	Ueber die Bewegung des Doppelsterns 61 Cygni (s. **80**)	Bode J. 1815. 209.
Juli	75	Nachträge zu der Abh. über das Kreismikrometer (im Nov.-Heft 1811 der M. C.) (**58b**)	M. C. XXVI. 67.
	76	Recension: „Astron. Jahrbuch für d. J. 1814 etc. von J. E. Bode. Berlin, 1811.“	J. L. 1812. *142.* 97.
Aug.	77	Ueber den Doppelstern 61 Cygni (**80**)	M. C. XXVI. 148.
„ (18)	78	Nachtrag zu der Abh. über 61 Cygni (**80b**)	M. C. XXVI. 295.
	79	Bemerkungen über 61 Cygni. Beobb. des grossen Cometen von 1811. Bemerkung über seine Reduction der Bradley'schen Beobb. (s. **28**). Sternbedeckungen	Bode J. 1815. 252.

Datum.	Lauf. Nr.	Titel (Abhandlungs-Nummer).	Zeitschrift.
1812 Sept.	80	Recension: 1) „Die vornehmsten Lehren der Astronomie, deutlich dargestellt in Briefen an eine Freundin von H. W. Brandes. 2 Bde. Leipzig, 1811." 2) „Epitome elementorum astronomiae sphaerico-calculatoriae. Auctore Joanne Pasquich. 2 Thle. Wien, 1811." 3) „Astronomie von J. G. F. Bohnenberger. Tübingen, 1811." . .	J. L. 1812. *182,183.* 417.
	81	Untersuch. der durch das Integral $\int \frac{dx}{\log x}$ ausgedrückten transcendenten Function (108)	Königsb. Archiv f. Naturw. u. Math. I. Stück. 1.
	82	Untersuchungen über den Planeten Saturn, seinen Ring und seinen 4. Trabanten (17)	„ „ II. „ 113.
	83	Ueber die Theorie der Zahlenfacultäten (109)	„ „ III. „ 241.
	84	Einige Resultate aus Bradley's Beobachtungen (28)	„ „ IV. „ 369.
	84*	Auszug aus Nr. 84 von Lindenau	M. C. XXVII. 328.
Oct. (30)	85	Ueber die Polhöhe von Greenwich (vgl. 28, 38, 57); Attraction eines Parallelepipedums (111)	M. C. XXVII. 80.
	85*	Neue Refractions-Tafel, aus Bradley's Beobb. hergeleitet (Auszug aus Nr. 84) . . .	Bode J. 1816. 179.
Nov. (27)	86	Ueber Refractionstafeln (s. 28)	Bode J. 1816. 256.
1813 Febr. (8)	87	Ueber die AR. von 61 Cygni (81)	M. C. XXVII. 383.
März	88	Ueber eine Aufgabe der practischen Geometrie (112)	M. C. XXVII. 222.
April (22)	89	Reduction und Vergleichung der v. Zach'schen Beobb. des Cometen v. 1811 . . .	M. C. XXVIII. 92.
Mai (6)	90	Anzeige der Vollendung der Arbeiten über Bradley's Beobb. (vgl. 85)	Bode J. 1816. 257.
Sept. (13)	91	Reduction der Beobb. von v. Zach des grossen Cometen v. 1811 und Bemerkungen über Wisniewsky's Beobb.; Aeusserung über die Königsb. Sternwarte	Bode J. 1816. 234.
Nov. (22)	92	Kurze Beschreibung der Königsberger Sternwarte (157); über die Beobb. des grossen Cometen v. 1811, von v. Zach und Wisniewsky; über neue Aberrations- und Nutationstafeln (36); Bemerkungen über die Pond'schen Declinationen (vgl. 88); Bedeckung von ψ, Aquarii	M. C. XXVIII. 475.
Dec. (30)	92^*_1	Mittheilung und Reduct. der Beobb. von Wisniewsky des Cometen von 1811 . . .	Gött. Anz. 1814 Jan. 31. Gauss Werke VI. 373.
1814 Jan.	92^*_2	Erste Königsberger Beobb. der Juno	Gött. Anz. 1814 Jan. 31. Gauss Werke VI. 375.
	92^*_3	Dieselben von Gauss mitgetheilt	M. C. XXVIII. 576.
Febr.	93	Recension: 1) „Tabulae Veneris novae et correctae etc. Gotha, 1810"; 2) „Tabulae Martis novae et correctae etc. Eisenberg 1811". „Auctore Bernhardo de Lindenau"	Ergänz.-Blätter zur J. L. 1814. *41.* 321.
April	94	Recension: „Astron. Jahrbuch für das J. 1815 und 1816 etc. von J. E. Bode. Berlin, 1812 und 1813."	J. L. 1814. *75,76,77.* 121.
März	94*	Beobb. der Vesta und Polhöhe von Königsberg	Gött. Anz. 1814 Aug. 13. Gauss Werke VI. 378.
(Sept. 14 — 1815 Juli 17)	95	Polhöhe von Königsberg (vgl. 91); Sonnenbeobb. 1814 und 1815; Veränderlichkeit des Dollond'schen Mittagsfernrohrs; Beobb. von Sternbedeckungen u. der Sonnenfinsterniss vom 16. Juli 1814; über die Schiefe der Ekliptik (158); Auffindung des Uranus unter Bradley's Beobb.	Z. f. A. I. 161.
Nov.	95*	Beobb. der Pallas	Gött. Anz. 1814 Dec. 12. Gauss Werke VI. 380.
Dec.	96	Recension der physikalischen und nautischen Abhh. in: „Reise um die Welt in den Jahren 1803. 4. 5. 6. auf Befehl S. K. M. Alexander des Ersten, auf den Schiffen Nadeshda und Newa unter dem Commando des Capitäns A. F. von Krusenstern. III. Thl. St. Petersburg (Berlin), 1812."	[J. L. 1813. *36,37.*) J. L. 1814. *231.* 409. (vgl.
1815 (März 26 — Juni 29)	97	Ueber den Cometen von 1815 etc.; Beobb. der Planeten-Oppositionen, einer Sonnenfinsterniss und einiger Sternbedeckungen des J. 1814; Polhöhe der Königsberger Sternwarte	Bode J. 1818. 181.
Juni (29)	98	Ueber den Ort des Polarsterns (vgl. 87); Bemerkung über Veränderlichkeit der Passageninstrumente (59).	Bode J. 1818. 233.
	99	Tafeln für die scheinbaren Oerter des Polarsterns	Bode J. 1817. 197.
(Juli 2 — 1816 Jan. 10)	100	Elliptische Elemente des Olbers'schen Cometen vom J. 1815; Beob. einer Sternbedeckung durch diesen Cometen	Z. f. A. I. 342.
	100*	Elliptische Elemente des Cometen von 1815	Gött. Anz. 1815 Sept. 18. Gauss Werke VI. 390.
Juli (17)	101	Beob. der Sommer-Sonnenwende 1815	Z. f. A. I. 172.
	102	Beobb. des Olbers'schen Cometen. (Mitgetheilt von Nicolai.)	Z. f. A. I. 287.

Datum.	Lauf. Nr.	Titel (Abhandlungs-Nummer).	Zeitschrift.
1815 Juli (22)	103	Beobb. des Olbers'schen Cometen. Berechnung der parabolischen und elliptischen Elemente seiner Bahn	Bode J. 1818. 204.
Aug.	104	Untersuchung der Grösse und des Einflusses des Vorrückens der Nachtgleichen. (Gekrönte Preisschrift.) Berlin 1815. (87).	
Jan.	104*/1	Referat über Nr. 104 von Gauss	Gött. Anz. 1814 Jan. 31. Gauss Werke VI. 561.
	104*/2	Auszug aus Nr. 104 von Burckhardt	Conn. d. t. 1819. 219.
(Sept. 18 — 1816 Jan. 10)	105	Ueber die Constante der Aberration (38); Sternbedeckungen; Bemerk. über 61 Cygni (vgl. 82) und seine Planeten-Beobb.; Bemerkungen zum 1. Jahrg. der Königsberger Beobb.; Beobb. d. Sonnenwende v. 1815/16; ARen des Polaris	Z. f. A. II. 123.
Sept.	106	Astronomische Beobachtungen auf der königl. Universitäts-Sternwarte in Königsberg in den Jahren 1813 und 1814. I. Abth. Königsberg, 1815. (Beschreibung der Sternw., vgl. 157; über das Dollond'sche Mittagsfernr. u. d. Cary'schen Kreis, 60).	
	106*	Inhaltsanzeige von Nr. 106, von Burckhardt	Conn. d. t. 1819. 229.
1816 Jan.	107	Untersuchungen über die Bahn des Olbers'schen Cometen (zur Berechnung der Störungen, 10)	Berl. A. 1812—13. 118.
„ (10)	108	Wahrscheinlichste Elemente des Olbers'schen Cometen	Z. f. A. I. 348.
„ (26)	109	Ankündigung einer vollständigen Bearbeitung der Bradley'schen Beobachtungen; mit Nachschrift von Lindenau (85)	Z. f. A. I. 360.
Febr. (14)	110	Beobb. zur Parallaxe von 61 Cygni (vgl. 82); Bemerk. über Bestimmung der Beob.-Fehler; über Laplace's 2/4 Masse; Sternbedeckungen	Z. f. A. II. 134.
Juli — 1817 Jan.)	111	Bemerkung über seine Venus-Beobb.; Beobb. der Sommer-Sonnenwende von 1816; Königsberger Polhöhe aus einer neuen Untersuchung (vgl. 91); Beobb. der Opposition der Vesta, des Uranus, einer Mondfinsterniss u. Nachrichten über die Beob. der Sonnenfinsterniss durch Hagen in Culm. Reduction der Beobb. des Polaris im Jahre 1816	Z. f. A. III. 88.
Juli (15)	112	Beobb. der Planetenoppositionen, einiger Sternbedeckungen und der Sonnenwenden des Jahres 1815	Bode J. 1819. 187.
Aug.	113	Beobb. der Venus während ihres synodischen Umlaufes vom Anf. 1815 bis Juli 1816	Z. f. A. III. 315.
Nov.	114	Ueber die grosse Sonnenfinsterniss am 19. November 1816	K. H. Z. 1816. *134.* 1533.
	115	Ankündigung einer vollständigen Bearbeitung der Bradley'schen Beobb. (s. 85) . .	Bode J. 1819. 243.
	116	Astron. Beobb. a. d. königl. Sternwarte in Königsberg 1815. II. Abth. Königsberg, 1816. (Königsberger Meridianzeichen, Correction der Culminationszeiten, 61; über die Parallaxe von 61 Cygni und μ Cassiop., 82.)	
1817 Juni (26)	117	Beobb. der Planetenoppositionen, einiger Sternbedeckungen etc., der Sonnenwenden und der AR. des Polarsterns im J. 1816	Bode J. 1820. 186.
Oct.	118	Mittheilung an Encke der Oppositionsbeobb. des Jupiters, des Uranus u. Beobb. der Sonne	Z. f. A. IV. 223.
Dec.	119	Trigonometrische Bestimmung einiger Punkte in Königsberg und Prüfung einiger Winkel der Textor'schen Vermessung v. Preussen. (Zur Pothenot'schen Aufg. 159)	Z. f. A. IV. 286.
	120	Vorausberechnung der Erscheinungen des VI. Saturnstrabanten für 1818 und 1819 .	Z. f. A. IV. 297.
	121	Astron. Beobb. auf der königl. Sternwarte in Königsberg 1816. III. Abth. Königsberg, 1817. (Neue Prüfung des Cary'schen Kreises, 74; zur Parallaxe v. 61 Cygni und μ Cassiop., 82b; Reduction von Circummeridianhöhen des Mondes, 169).	
1818 Febr.	122	Ueber den Einfluss der Veränderungen des Erdkörpers auf die Polhöhen (161) . .	Z. f. A. V. 25.
April	123	Ueber Bohnenberger's Erklärung der Abweichung der Borda'schen Kreise und über Pond's Polhöhe (57); Wunsch dass die Zeitschrift für Astronomie regelmässiger erscheinen möge	Z. f. A. V. 267.
Juni	124	Ueber die Entwickelung der Mittelpunktsgleichung u. des Radiusvectors in Reihen (s. 8)	Z. f. A. V. 367.
Juli	125	Analytische Auflösung der Kepler'schen Aufgabe (8)	Berl. A. 1816—17. 49.
Aug. (11)	126	Beobb. von Planetenoppositionen, Sternbedeckungen, der Sonnenwenden und der AR. des Polarsterns im J. 1817	Bode J. 1821. 172.
„ „	127	Berechnung des Orts eines Gestirns aus beobachteten Alignements mit 4 Sternen (47)	Bode J. 1821. 170.
Oct. (13)	128	Formeln zur genauen Berechnung der Nutation und Aberration (40)	Z. f. A. VI. 216.
Dec.	129	Einige Anmerkungen zu „Bemerkungen über einige (Bradley'sche) Sterne" von J. C. Burckhardt (Z. f. A. VI. 355)	Z. f. A. VI. 360.

Datum.	Fortl. Nr.	Titel (Abhandlungs-Nummer).	Zeitschrift.
	130	Fundamenta Astronomiae pro anno MDCCLV deducta ex observationibus viri incomparabilis James Bradley in Specula astronomica Grenovicensi. Per Annos 1750—62 institutis. Regiomonti (Nicolovius) 1818. (Refraction, **32**; Präcession, s. **37**; Nutation und Aberration, **39**).	
	130*	Anzeigen und Auszüge aus Nr. 130	Bullet. Soc. Philom. Paris 1818. 70. (Boston) North Amer. Review 1825. XX. 309.
	131	Astron. Beobb. a. d. königl. Sternwarte in Königsberg 1817. IV. Abth. Königsberg, 1818. (Polhöhe von Königsberg).	
1819 Jan.	132	Beobb. des von Pons am 26. Novbr. (von Bessel am 22. Decbr.) entdeckten Cometen. (Mittheilung von Lindenau)	C. A. II. 107.
Jan. (14)	132*	Beobb. und Elemente des Pons'schen Cometen	Gött. Anz. 1819 Febr. 18. Gauss Werke VI. 419.
Febr.	133	Beobb. und Elemente des Pons'schen Cometen	C. A. II. 187.
März (29)	134	Nouvelle détermination des AR de 36 étoiles de Maskelyne etc. (s. **86**)	C. A. II. 264.
Juni (17)	135	Beobb. der Planetenoppositionen, der Sonnenfinsterniss v. 4. Mai, der Sonnenwenden und der AR des Polarsterns im J. 1818	Bode J. 1822. 172.
	136	Bestimmung der geraden Aufsteigung der 36 Maskelyne'schen Fundamentalsterne für 1815, auf Königsberger Beobb. gegründet (**86**)	Berl. A. 1818—19. 19.
Dec. (24)	137	Entdeckung eines Cometen am 22. December 1818; Beobb. und Elemente desselben	Bode J. 1822. 171.
1820 Juli (31)	138	Ueber den Reichenbach'schen Meridiankreis und die Repsold'sche Uhr der Königsberger Sternwarte (s. **62**)	Bode J. 1823. 161.
	139	Astron. Beobb. a. d. königl. Sternwarte in Königsberg 1818. V. Abth. Königsberg, 1820. (Fehler des Objectivmikrometers des Dollond'schen Aequat.. **75**; ARen der Fundamentalsterne für 1815, s. **86**; Polhöhe von Königsberg, vgl. **91**; Verzeichniss von 67 [meist Circumpolar-]Sternen).	
1821 März	140	Recension: „Determinatio attractionis, quam in punctum quodvis positionis datae exerceret Planeta, etc. Auctore C. F. Gauss. Göttingen, 1818.“	J. L. 1821. *58*. 457.
	141	Recension: „Versuch einer Bestimmung der wahrscheinlichsten Bahn des Cometen von 1680, mit Rücksicht auf die planetarischen Störungen, während der Dauer seiner Sichtbarkeit von J. F. Encke. Tübingen, 1818.“	J. L. 1821. *58*, *59*. 462.
	142	Recension: „Effemeridi astronomiche di Milano, calcolate de Franscesco Carlini ed Enr. Brambilla. 1817, 18, 19, 20.“	J. L. 1821. *59*, *60*. 471.
Juni	143	Ueber die Entwickelung der Functionen zweier Winkel u und u' in Reihen, welche nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen von u und u' fortgehen (**117**).	Berl. A. 1820—21. 55.
Juli	144	Recension: „Hülfstafeln zu Zeit- und Breitenbestimmungen, und: Astron. Hülfstafeln für 1821, herausgegeben von H. C. Schumacher. Kopenhagen, 1820, 1821.“. . .	J. L. 1821, *129*. 65.
Aug. (23)	145	Prüfung des Reichenbach'schen Meridiankreises (**87**); Sternbedeckungen; Beobb. (von Argelander) und Elemente des Cometen von 1821	Bode J. 1824. 232.
Oct.	146	Vorschlag einer schicklichen Reductionsart der Histoire Céleste (**92**)	A. N. I. *2*. 22.
Nov.	147	Recension: „Himmelsatlas von Harding. 1.—6. Lieferung. Göttingen“ (s. Nr. 187)	J. L. 1821. *206*. 201.
Dec.	148	Ueber Berechnung geodätischer Vermessungen (**125**)	A. N. I. *3*. 33.
	149	Tafeln zur Reduction der Oerter der Fixsterne	A. N. I. *4*. 49.
	150	Astron. Beobb. a. d. königl. Sternwarte in Königsberg 1819 und 1820. VI. Abth. Königsberg, 1821. (Untersuchung des Reichenbach'schen Meridiankreises, **62**).	
	150*	Auszug aus Nr. 150 (Descript. du cercle de Reichenbach)	Bibl. un. Sc. XXVII. 173.
1822 Jan.	151	Berechnung eines Dreiecks, dessen Seiten geodätische Linien sind (**126**)	A. N. I. *6*. 85.
Febr.	152	Recension: „Astron. Jahrbuch für d. J. 1822 und 1823 etc. von J. E. Bode. Berlin.“	J. L. 1822. *37*, *38*. 289.
Juli	153	Beobb. von Oppositionen in Königsberg	A. N. I. *16*. 241.
	154	Ueber die Polhöhe von Königsberg (vgl. **91**)	A. N. I. *16*. 247.
	155	Nachricht von einer auf der Königsberger Sternwarte angefangenen allgemeinen Beobachtung des Himmels (**94**)	A. N. I. *17*. 257.
(1827 Febr.)	155*	Ueber B's. Zonenbeobb. und Himmelskarten	Mo. Not. I. 1, 131.
	156	Ueber die Berechnung von Zonenbeobachtungen (**93**)	A. N. I. *18*. 273.
Aug. (29)	157	Ueber die Abweichungen der Fixsterne (**88**)	Bode J. 1825. 207.
	158	Recension: „Untersuchungen über die Bahn des grossen Cometen im Jahre 1811 von Dr. F. W. Aug. Argelander. Königsberg 1822.“	J. L. 1822. *149*. 209.

Datum.	Fortl. Nr.	Titel (Abhandlungs-Nummer).	Zeitschrift.
1822 Sept.(15)	159	Détermination des declinaisons de 36 étoiles fondamentales avec son nouveau cercle-méridien de Reichenbach (vgl. 88)	C. A. VII. 274.
Oct.	160	Declination verschiedener Fixsterne (vgl. 88)	A. N. I. *22.* 355.
	161	Beitrag zur Cometen-Theorie (6)	Astr. Abh. v. Schum. 2. H. 1.
Oct. (24)	162	Elemente des Cometen v. 1821 (von Rosenberger); Vergleichung der Declinationen verschiedener Fixsterne mit Littrow's Bestimmungen; Beobb. des Cometen II. 1822 (auch von Argelander)	A. N. I. *24.* 425.
	163	Astron. Beobb. a. d. königl. Sternwarte in Königsberg 1821. VII. Abth. Königsberg 1822. (Untersuchung der Declinationen des Reichenbach'schen Mer.-Kr., vgl. 88).	
1823 Jan.	164	Recension: „Logarithmische Tafeln von Westphal. Königsberg, 1821."	J. L. 1823. *16.* 121.
Jan. (27)	165	Beobb. von Sternbedeckungen; über Zeitbestimmungen aus Sonnen- u. Stern-Beobb.; mittlerer Barometer- u. Thermometerstand für Königsberg (aus Sommer's Beobb.); über Bekanntmachung der Ephemeriden der neuen Planeten	A. N. II. *26.* 23.
März	166	Ueber den Einfluss der Dichtigkeit der Luft auf den Gang der Uhren (186); Vergleichung der Bessel'schen Declinationen mit Pond (vgl. 88)	A. N. II. *28.* 49.
April	167	Ueber die Refractionen und Declinationen von Bessel, Brinkley und Pond (vgl. 88).	A. N. II. *32.* 133.
Mai	168	Anleitung und Tafeln die stündliche Bewegung des Mondes zu finden (25)	A. N. II. *33.* 137.
Juni	169	Hülfstafel zur Berechnung der allgemeinen jährlichen Reductionstafeln für die Fixsterne (vgl. 89).	A. N. II. *34.* 157.
	170	Tafeln für die scheinbare Schiefe der Ekliptik und die Nutation der Länge . . .	A. N. II. *34.* 163.
Sept. (1)	171	Ueber die astronomische Strahlenbrechung (29)	Bode J. 1826. 216.
	172	Bestimmung zweier Zonensterne; über Beobb. der Mondsterne; Meridiandiff. Königsberg—Paris; Sternbedeckungen (von Argelander); über Westphal's und Ursin's Logarithmen-Tafeln	A. N. II. *40.* 265.
Oct. (12)	173	Ueber Beobachtung der Mondculminationen	A. N. II. *42.* 347.
Nov. (10)	174	Ueber Refraction (30)	A. N. II. *44.* 381.
Dec.	175	Beobb. einiger Mondsterne	A. N. II. *46.* 421.
	176	Astron. Beobb. a. d. königl. Sternwarte in Königsberg 1822. VIII. Abth. Königsb., 1823. (Persönl. Gleichung 161; Strahlenbrechung am Horizont, vgl. 30, 33, 34).	
	176*1	Auszug der Vorrede von Nr. 176 (pers. Gleichung)	Phil. Mag. 1824. 230. / Bull. Fér. II. 111.
	176*2	Sternbedeckungen von B. und Argelander. (Aus Nr. 176)	Bode J. 1827. 161. [367.
1824 Jan.	177	Die Königl. Universitäts-Sternwarte in Königsberg (vgl. 157)	Beitr. z. Kunde Preuss. VI.
	178	Anzeige einiger Verbesserungen der Uranus-Tafeln des Herrn Bouvard	A. N. II. *48.* 441.
	179	Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht (16)	Berl. A. 1824. 1. [33.
	179*	Anzeige und Bemerkung zu Nr. 179	Bull. Soc. Phil. Paris 1825.
Febr. (2)	180	Ueber die Bestimmung der Polhöhenunterschiede durch das Passageninstrument (48, vgl. auch 64)	A. N. III. *49.* 9.
	181	Berechnung verschiedener Sternbedeckungen von den Herren Rosenberger, Strehlke und Klupsz	A. N. III. *50, 51.* 17, 33.
Febr. (9)	182	Vertheidigung Pasquich's	A. N. III. *53.* 71.
	182*	Sternbedeckungen, auf der königl. Sternwarte in Paris beob. von den Herren Bouvard, Arago, Mathieu und Nicollet	A. N. III. *54.* 89.
April	183	Verzeichniss der Hauptsterne in den Plejaden, aus Königsb. Beobb. bis Ende 1823 abgeleitet (s. 104)	A. N. III. *54.* 91.
	184	Beobb. der geraden Aufsteigung des Mondes und benachbarter Sterne im J. 1823 .	A. N. III. *59.* 177.
April (12)	185	Zur Meridiandifferenz Königsberg—Paris	A. N. III. *61.* 223.
Juni	186	Recension: „Astronomische Nachrichten, herausgegeben von H. C. Schumacher, I. und II. Bd., Altona 1823."	Ergänzungs-Bl. zur J. L. 1824. *30, 31, 32.* 233.
	187	Recension: „Atlas novus coelestis, XXVII Tabulis continens stellas, inter Polum boreal. et trigesim. gradum declin. austr. adhuc observat. Auctore C. L. Harding. Göttingen, 1822." (Siehe Nr. 147)	Ebendaselbst *42.* 332.
Juli	188	Recension: 1) „On the Astronomical Refraction, by John Ivory. London 1823." 2) „Recherches analytiques sur la densité des couches de l'atmosphère et la théorie des Réfractions astronomiques par M. Plana. Turin, 1823."	J. L. 1824. *129, 30, 31.* 65.
	189	Ueber eine Aufgabe der practischen Geometrie (113)	A. N. III. *60.* 193.

Datum.	Fortl. Nr.	Titel (Abhandlungs-Nummer).	Zeitschrift.
1824 Juli	190	Zusatz zum vorangehenden Aufsatze (**118**[b])	A. N. III. *61.* 221.
	191	Eine neue Methode, die Biegung der Fernröhre astronomischer Instrumente zu bestimmen (**63**)	A. N. III. *61.* 209.
	191*	Bemerkungen darüber von Poggendorff	Pogg. Ann. XXVIII. 112.
Aug. (18)	192	Gegenscheine der Planeten und Sternbedeckungen in den J. 1822 und 1823	Bode J. 1827. 194.
„ . „	193	Ueber eine specielle Karte einer Himmelsgegend; (19 Uhr der Berliner akad. Sternkarten, s. **95**)	Bode J. 1827. 226.
Nov. (26)	194	Beobb. des Cometen von 1824	A. N. III. *69.* 391.
Dec.	195	Ueber den Einfluss der Strahlenbrechung auf Mikrometerbeobachtungen (**31**)	A. N. III. *69.* 377.
	196	Astr. Beobb. a. d. königl. Sternwarte in Königsb., 1823. IX. Abth. Königsb., 1824.	
	196*	Beobb. von 12 Plejadenst. u. Sternbedeckungen von B. u. Argelander (aus Nr. 196)	Bode J. 1828. 203.
1825 März (2)	197	Berichtigung der Nutationsformel, Astr. Nachr. Nr. 34 (vgl. **89**)	A. N. IV. *83.* 185. Quart. Journ. XX. 321.
	198	Berechnung der Greenwicher Beobb. der Declinationen der Fundamentalsterne vom Jahre 1822	A. N. IV. *73.* 1.
	199	Rechnungsbeispiele (und Berichtigungen) zu dem Aufsatze über den Einfluss der Strahlenbrechung auf Mikrometerbeobb. in Nr. 69 der Astr. Nachr. (**31**)	A. N. IV. *74.* 27.
	200	Neue Untersuchungen über die geraden Aufsteigungen der 36 Fundamentalst. (**89**).	Berl. A. 1825. 23.
April	201	Beobb. der ARen des Mondes und benachbarter Sterne im J. 1824	A. N. IV. *75.* 43.
Juni	202	Neuester Fundamentalcatalog der 36 Sterne in AR. (s. **89**)	A. N. IV. *78.* 97.
Juli (13)	203	Verzeichniss von 36 Normal-Sternen nach den neuesten Beobb. für 1825 (s. **89**)	Bode J. 1828. 196.
Aug. (1)	204	Ueber eine Kritik der Greenwicher Beobb. im Philos. Magaz. (**178**)	A. N. IV. *84.* 209. Quart. Journ. XX. 108.
	205	Ueber die Berechnung der geographischen Längen und Breiten aus geodätischen Vermessungen (**127**)	A. N. IV. *86.* 241. Quart. Journ. XXI. 138.
Sept. (24)	206	Ueber eine vollständigere Darstellung des gestirnten Himmels (**95**)	Bode J. 1828. 222.
Dec.	207	Entwurf zu einer Herausgabe neuer Himmelskarten (**96**)	A. N. IV. *88.* 297.
	207^*_1	Auszug aus Nr. 207	Bibl. un. Sc. XXXI. 95.
	207^*_2	Zu Nr. 207 (Uebersetzung eines Briefes von Encke an Sir J. Herschel im Philos. Mag. 1826 Juli)	Bibl. un. Sc. XXXIII. 3.
	208	Verzeichniss von 257 auf der Königsb. Sternwarte beobachteten Doppelsternen (**100**)	A. N. IV. *88.* 301.
	208*	Auszug aus Nr. 208	Bibl. un. Sc. XXXI. 14.
	209	Astr. Beobb. a. d. königl. Sternwarte in Königsberg 1824. X. Abth. Königsberg, 1825. (Methode zur Bestimmung der Biegung (s. **63**); ARen der Fundam.-Sterne für 1825, s. **89**; über die Königsb. Zonen, s. **94**, **98**, **99**; Doppelsternverz. s. **100**).	
	209*	Inhaltsanzeige von 209	Bull. Fér. VII. 22.
1826 Febr.	210	Sur les changemens introduits dans la détermination de la précession des équinoxes par les catalogues fondamentaux de Königsberg. (Uebersetzung von Nr. 211)	C. A. XIV. 434.
	210^*_1	Dasselbe, mit einer Note von Mathieu	Conn. d. t. 1829. 310.
	210^*_2	Dasselbe (Uebersetzung eines Briefes an Schumacher)	Bull.Soc.Phil.Par.1826.33.
	210^*_3	Auszug aus Nr. 210 von Francoeur	Bull. Fér. V. 316.
März	211	Ueber die Abänderung, welche die Bestimmung der Vorrückung der Nachtgleichen durch die Königsberger Fundamental-Cataloge erhält (vgl. **37**, **41**)	A. N. IV. *92.* 401.
März (19)	212	Berichtigung einiger Zahlen in dem Aufsatze A. N. Nr. 92 (vgl. **37**, **41**)	A. N. IV. *96.* 531.
April	213	Einige Bemerkungen über die Entwerfung der vollständigen Himmelskarten (**97**).	A. N. IV. *93.* 437.
Juli	214	Beobb. der ARen des Mondes und benachbarter Sterne im J. 1825	A. N. V. *101.* 77.
Aug. (20)	215	Ueber die Neigung der Ebene des Saturnsringes (**49**)	Bode J. 1829. 175.
	216	Ueber einen Aufsatz von Ivory im Philos. Magazine (**128**)	A. N. V. *108.* 177.
	217	Methode die Thermometer zu berichtigen (**141**)	Pogg. Ann. VI. 286.
	217*	Auszug aus Nr. 217	Bull. Fér. VIII. 42.
	218	Astr. Beobb. a. d. königl. Sternwarte in Königsberg 1825. XI. Abth. Königsberg, 1826. (Persönl. Gleichung, **161** Nachtrag).	
	218*	Inhaltsanzeige von Nr. 218	Bull. Fér. IX. 26.
1827 Jan.	219	Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels. Berlin, 1828 (**137**).	
	219^*_1	Auszug aus einer der königl. Akad. der Wissenschaften zu Berlin vorgelegten Abh. über die Länge des einfachen Secundenpendels (vgl. **137**)	Pogg. Ann. XII. 337.
	219^*_2	Auszug aus 219^*_1	Bibl. un. Sc. XXXVIII. 245.

Datum.	Fortl. Nr.	Titel (Abhandlungs-Nummer).	Zeitschrift.
	219^*_3	(Sabine) an account of Mr. B's. Pendulum experiments	Quart. Journ. 1829. I. 1.
	219^*_4	Prof. B's. Pendulum experiments (Endresultat)	Phil. Mag. 1829. V. 312.
	219^*_5	Nouvelles expériences sur le pendule, par M. B. et Sabine	Quetelet, Corresp. math. V. 4. Livr. Bull. Fér. XII. 232, 234.
1827 Juli	220	Beobb. der ARen des Mondes und benachbarter Sterne im J. 1826.	A. N. V. *119.* 397.
.Oct. (13)	221	Ueber die Unrichtigkeit der bisher bei den Pendelversuchen angewandten Reduction auf den luftleeren Raum (s. **137** § 13, **138**)	A. N. VI. *128.* 149.
	221*	Auszug aus Nr. 221	Bibl. un. Sc. XXXVII. 274.
	222	Astr. Beobb. a. d. königl. Sternwarte in Königsberg 1826. XII. Abth. Königsberg, 1827. (Reduction beob. Barometerhöhen, **143**).	
	222^*_1	Inhaltsanzeige von Nr. 222	Bull. Fér. XI. 132.
1828 Jan. (6)	222^*_2	Aus einem Brief an A. L. Crelle (Facsimile)	Crelle's Journ. XXXV. Hft.
März	223	Ueber den allgemeinen Gebrauch des Passagen-Instrumentes (**64**)	A. N. VI. *131, 132.* 221.
„ (18)	224	Beob. eines Chronometers von Kessels	A. N. VI. *132.* 251.
April	225	Ueber den gegenwärtigen Zustand unserer Kenntniss der Sonnenbewegung und die Mittel zu ihrer Verbesserung (**23**)	A. N. VI. *133, 134.* 261.
	225*	Note sur les corrections que M. B. apporte aux élémens des Tables solaires . . .	Conn. d. t. 1831. 152.
	226	Sonnentafeln	A. N. VI. *134,* Beilage. 369.
Juli	226*	Verbesserung der ⊙Ephemeride für 1827 in Schumacher's Hülfstafeln nach B's. noch ungedruckten Tafeln (mitgeth. von Schumacher)	A. N. V. *120.* 437.
Mai	227	Ueber die Bestimmung des Gesetzes einer periodischen Erscheinung (**118**)	A. N. VI. *136.* 333.
	228	Ueber die von Herrn F. R. Hassler zur Vermessung der Küste der Vereinigten Staaten ergriffenen Maassregeln	A. N. VI. *137.* 349.
	228*	Uebersetzung mit Noten von Prof. Renwick von Nr. 228	Sillim. Journ. XVI. 251. Phil. Mag. 1829. VI. 40.
Sept.	229	Ueber die Vorausberechnung der Sternbedeckungen (**26**)	A. N. VII. *145.* 1. Berl. Jahrb. f. 1831. 25.
	229*	On the calculations requisite for predicting Occultations etc. (Aus Nr. 229) . . .	Phil. Mg. 1829. VI. 336, 416.
	230	Beobb. der ARen des Mondes und benachbarter Sterne im J. 1827.	A. N. VII. *149.* 85.
Nov.	231	Recension: 1) „Astron. Hülfstafeln für 1821 bis 1829 von H. C. Schumacher. 9 Hefte. Kopenhagen." 2) „Berliner Astron. Jahrbuch für 1830 von J. F. Encke. Berlin."	J. f. w. Kr. 1828. II. 86. *87, 88.* 686.
Dec.	232	Berichtigungen zu den Astr. Nachr. Nr. 131 und 132 (s. **64**)	A. N. VII. *149.* 101.
	233	Astr. Beobb. a. d. königl. Sternw. in Königsberg 1827. XIII. Abth. Königsb., 1828.	
	233*	Inhaltsanzeige von Nr. 233	Bull. Fér. XII. 232.
1829 Jan.	234	Beiträge zur Theorie der Finsternisse u. den Berechnungsmethoden ders. (vgl. **169**)	A. N. VII. *151,* 177. 321.
	234^*_1	Additions to the theory of eclipses etc. (Aus Nr. 234)	Phil. Mag. 1838. VIII. 366, 342, 417.
	234^*_2	Auszug aus Nr. 234^*_1	Bull. Fér. XVI. 14.
Aug.	235	Bemerkungen über die Königsberger Zonen-Beobachtungen (**98**).	A. N. VII. *163.* 369.
	236	Tafel zur Reduction der Abwägungen (**142**)	A. N. VII. *163.* 373.
	237	Recension: „Histoire de l'Astronomie du dix-huitième siècle par M. Delambre, publiée par M. Mathieu. Paris 1827"	J. f. w. Kr. 1829. II. 21. *23, 24, 25.* 161, 179.
Dec.	238	Beobb. des Ganges einer Kessels'schen Pendeluhr und Bemerkungen darüber (**66**) .	A. N. VIII. *169.* 1.
	238*	Bemerkungen zu einer Ephemeride von Trorger für die Sternbedd. 1830 (mitgeth. von Schumacher)	A. N. VIII. *169.* 19.
	239	Astr. Beobb. a. d. königl. Sternwarte in Königsberg 1828. XIV. Abth. Königsberg, 1829. (Fehler der Zonenbeobb.)	
	239*	Inhalt von Nr. 239	Bull. Fér. XV. 163.
1830 Jan.	240	Vergleichung der Königsberger Sonnenbeobb. im J. 1828 mit den Tafeln	A. N. VIII. *172.* 69.
	241	Beobb. der ARen des Mondes und benachbarter Sterne im J. 1828.	A. N. VIII. *171.* 55.
Febr.	242	Berichtigung der Sonnentafeln in den A. N. Nr. 133	A. N. VIII. *174.* 101.
	243	Beob. eines ausgezeichnet hohen Barometerstandes in Königsberg und Bemerkung über die Barometer	A. N. VIII. *175.* 133. Pogg. Ann. XXVI. 451.
(1831 Apr. 25)	244	Beobb. und Elemente der Bahn des Cometen von 1830	Berl. A. 1831. 15.
April	245	Sternbedeckungen im J. 1829 auf der Königsberger Sternwarte beobachtet	A. N. VIII. *178.* 189.
	246	Beobb. der ARen des Mondes und benachbarter Sterne im J. 1828 auf der Königsberger Sternwarte.	A. N. VIII. *178.* 193.

Datum.	Fortl. Nr.	Titel (Abhandlungs-Nummer).	Zeitschrift.
1830 Oct.	247	Vorläufige Nachricht von einem auf der Königsberger Sternwarte befindlichen grossen Heliometer (68)	A. N. VIII. *189.* 397.
	247*	Auszug aus Nr. 247, von A. Gautier	Bibl. un. Sc. XLVII. 1.
	248	Tabulae Regiomontanae reductionum observationum astronomicarum ab anno 1750 usque ad annum 1850 computatae. Regiomonti Pruss. 1830. (Refraction, 38; Präcession, 41; Eigenbew., 42; Nutation, 43; Aberration, 44; Reduct. der ☾ Beobb. im Meridian, 50).	
	248*	Anzeige von Nr. 248, von Encke	Berl. Jahrb. f. 1832. 311.
1831 Febr. (4)	249	Nachricht von der Vereinigung der beiden Russischen sich über acht Grade der Breite ausdehnenden Gradmessungen. (Mitgetheilt von Struve) (vgl. 185, Vorwort)	A. N. X. *236.* 325.
	250	Versuche über die Kraft, mit welcher die Erde Körper von verschiedener Beschaffenheit anzieht (vgl. 139)	Berl. A. 1830. 41.
	251	Bestimmung der Bahn des Hugenischen Saturns-Satelliten (18)	A. N. IX. *193, 194, 195.* 1.
Jan. (18)	252	Ueber Buzengeiger's Erklärung des Einflusses des Glases auf anomale Erscheinungen beim Barometer	A. N. IX. *198.* 111.
Mai	253	Beobb. und Elemente des Cometen von 1830	A. N. IX. *201.* 165.
Juni	254	Ueber den Einfluss eines widerstehenden Mittels a. d. Bewegung eines Pendels (138)	A. N. IX. *204.* 221.
Juli	255	Beobb. des Ganges des Kessels'schen Box-Chronometers Nr. 1266	A. N. IX. *207.* 269.
Oct.	256	Erste Fortsetzung der Untersuchungen über die Bewegung des Hugenischen Saturns-Satelliten (19)	A. N. IX. *214.* 381.
Nov.	257	Beobb. mit einem tragbaren Passagen-Instrumente in München und Marienbad	A. N. IX. *216.* 413.
Dec.	258	Vergleichung der Sonnentafeln mit im J. 1830 beob. Rectascensionen	A. N. X. *217.* 1.
	259	Astr. Beobb. a. d. königl. Sternwarte in Königsberg 1829. XV. Abth. Königsberg, 1831. (Heliometer, vgl. 68, 70, 71).	
1832 Jan.	260	Erscheinungen, welche 1832 zu erwarten sind	Preuss. Ostsee-Bl. *4.* 20.
Febr.	261	Erman's Reise in Sibirien und Kamtschatka (188)	„ „ *31.* 146.
	262	Neue Berechnungsart für die nautische Methode der Monds-Distanzen (s. 172).	A. N. X. *218.* 17.
März (8)	262*	Auszug aus Nr. 262 mit Bemerkungen, von Lieut. Stratford	Mo. Not. II. 167.
April	263	Recension: „Miscellaneous Works and Correspondence of the reverend James Bradley. Oxford at the University-Press 1832"	J. f. w. Kr. 1832. I. *62, 63, 64.* 494.
	264	Versuche über die Kraft, mit welcher die Erde Körper von verschiedener Beschaffenheit anzieht (139)	A. N. X. *223.* 97. Pogg. Ann. XXV. 401.
Juli	265	Durchgang des Merkurs durch die Sonne (s. 171)	A. N. X. *228.* 185.
	265†	Auszug aus Nr. 265	Bibl. un. Sc. LI. 88.
Oct. (20)	265½	Beob. des Biela'schen Cometen	A. N. X. *234.* 296. Mem. Astr. Soc. VI. 230.
Dec. (12)	266	Aufforderung, betreffend die Durchgänge der Sonne und der Erde durch die Ebene des Saturnsringes (zu beobachten)	A. N. X. *236.* 323.
1833 März	267	Vergleichung der gegenseitigen Stellungen von 37 Doppelsternen, welche sowohl in Königsberg als in Dorpat beobachtet sind (102).	A. N. X. *240.* 389.
Juni	268	Nachricht von der Vollendung bis zum 45. Grade der Declination, der allgemeinen auf der Königsberger Sternwarte unternommenen Beobachtung des Himmels (99)	A. N. XI. *241.* 13.
Juli	269	Zweite Fortsetzung der Untersuchungen über die Bewegung des Hugenischen Saturns-Satelliten (20)	A. N. XI. *242.* 17.
	270	Nachrichten über das Verschwinden des Saturnsringes	A. N. XI. *242.* 23.
Aug.	271	Beobachtung der gegenseitigen Stellungen von 38 Doppelsternen (s. 101)	Berl. A. 1833. 41.
Nov. (9)	272	Letter to Professor Airy at Cambridge (179).	A. N. XI. *251.* 181.
Dec.	273	Ueber die Theorie des Steinheil'schen Prismen-Kreises (72)	A. N. XI. *254, 255.* 229.
	274	Astr. Beobb. a. d. königl. Sternw. in Königsberg 1830. XVI. Abth. Königsb., 1833.	
1834 Jan.	275	Betrachtungen über die Methode der Vervielfältigung der Beobachtungen (163)	A. N. XI. *256.* 269.
Mai	276	Anzeige die Königsberger Astronom. Beobb. betreffend	A. N. XI. *261.* 387.
Juli	277	Bemerkungen über eine angenommene Atmosphäre des Mondes (144).	A. N. XI. *263.* 411.
Sept.	278	Recension: „Mappa Selenographica, totam Lunae hemisphaeram visibilem complectens etc. Auctoribus Guilelmo Beer et Joanne Henrico Mädler. Berolini, 1834"	J. f. w. Kr. 1834. II. *56, 57, 58.* 465.
	279	Ueber den Halley'schen Cometen. (Vorlesung vor einem Kreise von Freunden)	Schum. Jahrb. f. 1836. 48.
1835 Jan.	280	Ueber die Aberration der Planeten und Cometen (45)	A. N. XII. *272, 273.* 121.

Datum.	Fortl. Nr.	Titel (Abhandlungs-Nummer).	Zeitschrift.
1835 März	281	Bestimmung der Lage und Grösse des Saturnsringes und der Figur und Grösse des Saturns (21)	A. N. XII. *274, 275.* 153.
	281^*_1	Uebersetzung von Nr. 281 durch Plantamour	Conn. d. t. 1838. 29.
	281^*_2	Auszug aus Nr. 281 von A. Gautier	Bibl. un. Sc. LVIII. 306.
April	282	Ueber die scheinbare Figur einer unvollständig erleuchteten Planetenscheibe (s. 51)	A. N. XII. *277, 278.* 361.
Mai	283	Ueber Höhenbestimmungen durch das Barometer (145)	A. N. XII. *279.* 241. Pogg. Ann. XXXVI. 167.
	283*	Auszug aus Nr. 283	Taylor, Scient. Mem. I. 1841. 517.
Mai (3)	284	Beobb. und Elemente des Boguslawski'schen Cometen	A. N. XII. *280.* 271.
Aug. (26)	285	Beobb. des Halley'schen Cometen	A. N. XII. *283.* 315.
	286	Vergleichung der Königsberger Sonnenbeobb. in den J. 1831 u. 1832 mit den Tafeln	A. N. XII. *286.* 363.
(Sept. 11 u. 13—27)	287	Beobb. des Halley'schen Cometen. (Bemerkung über die Encke'sche Widerstandshypothese, 14 Anm.)	A. N. XIII. *289.* 3, 9.
Oct. (25)	288	Beob., Beschreibung und Vergleichung der Beobb. des Halley'schen Cometen mit den Rosenberger'schen Elementen	A. N. XIII. *293.* 65.
Dec.	289	Beobb. des Biela'schen Cometen in seiner Erscheinung im J. 1832	A. N. XIII. *294.* 81.
	290	Bestimmung der Länge des einfachen Secundenpendels für Berlin	Berl. A. 1835. 161.
	291	Astr. Beobb. a. d. königl. Sternwarte in Königsberg 1831. XVII. Abth. Königsberg, 1835 (vgl. 70, 71).	
1836 Jan. (29)	292	Von den Erscheinungen, welche der Halley'sche Comet gezeigt hat. (Vorlesung in der physik.-ökonom. Gesellschaft zu Königsberg (vgl. 13, 14)	Schum. Jahrb. f. 1837. 182.
Febr.	293	Beobachtungen über die physische Beschaffenheit des Halley'schen Cometen und dadurch veranlasste Bemerkungen (13)	A. N. XIII. *300, 301. 302.* 185.
	293^*_1	Auszug aus Nr. 293	Pogg. Ann. XXXVIII. 49.
	293^*_2	Uebersetzung von Nr. 293 durch Plantamour	Conn. d. t. 1840. 79.
	293^*_3	Auszug aus Nr. 293 von A. Gautier	Bibl. un. N. S. II. 357.
März	294	Observe un cône lumineux dans la comète de Halley. Lettre à M. Poisson (vgl. 13)	C. R. 1836. 1. Semestre. 6.
	295	Bestimmung der Bahn des Biela'schen Cometen zur Zeit seiner letzten Erscheinung durch Baranowski	A. N. XIII. *303.* 241.
Juni	296	Bemerkungen über mögliche Unzulänglichkeit der die Anziehungen allein berücksichtigenden Theorie der Cometen (14)	A. N. XIII. *310.* 345. Pogg. Ann. XXXVII. 565.
Sept.	297	Beitrag zu den Methoden die Störungen der Cometen zu berechnen (12)	A. N. XIV. *313, 314.* 315. 1.
	298	Beobb. der Sonnenfinsterniss am 15. Mai 1836	A. N. XIV. *320.* 113.
(1837 Jan. 13)	298*	Uebersetzung von Nr. 298 durch Galloway	Mo. Not. IV. 21.
Oct.	299	Ueber das Nordlicht vom 18. Octbr. 1836. (147)	A. N. XIV. *322.* 169. Pogg. Ann. XXXII. 346.
	299*	Uebersetzung von Nr. 299	Bibl. un. N. S. VI. 371.
Nov.	300	Ueber die Grundgleichung der Theorie der Finsternisse (vgl. 169)	A. N. XIV. *321.* 129.
	301	Astr. Beobb. a. d. königl. Sternwarte in Königsberg 1832. XVIII. Abth. Königsberg, 1836. (Persönliche Gleichung, 161 Nachtrag).	
1837 Jan. (6)	302	Ueber Flut und Ebbe. (Vorlesung in der physik.-ökonom. Gesellschaft zu Königsb.)	Schum. Jahrb. f. 1838. 182.
Febr.	303	Neueste Elemente des Biela'schen Cometen von H. Baranowski	A. N. XIV. *324.* 177.
Juni	304	Taufrede, gehalten am 6. Juni 1837 auf dem Decke des Briggschiffes Argo. (Mitgeth. von dem Mitrheder u. Führer des Schiffes Bannasch, einem Schüler Bessel's)	[239. K. H. Z. v. 13. Oct. 1846.
	305	Ueber den Einfluss der Unregelmässigkeiten der Figur der Erde auf geodätische Arbeiten und ihre Vergleichung mit den astronomischen Bestimmungen (180)	[269. A. N. XIV. *329, 330, 331.*
	306	Bestimmung der Axen des elliptischen Rotationssphäroids, welches den vorhandenen Messungen von Meridianbögen der Erde am meisten entspricht (181)	A. N. XIV. *333.* 333.
	306^*_1	Bestimmung der Axen des ellipt. Rotationssphäroids etc. (Auszug aus Nr. 306)	Pogg. Ann. XLII. 622.
	306^*_2	Auszug aus Nr. 306 von A. Gautier	Bibl. un. N. S. X. 170. Taylor, Scient. Mem. II. 1841. 387.
Juli	307	Neue Berechnung der Beobachtungen der Polhöhen, auf welchen die zweite in Indien ausgeführte Gradmessung beruht (182)	A. N. XIV. *334, 335.* 349.
Aug.	308	Ueber die Polhöhen, welche der englischen Gradmessung zum Grunde liegen (183).	A. N. XIV. *336.* 381.
Oct.	309	Recension: „Stellarum duplicium et multiplicium Mensurae micrometricae in Specula Dorpatensi institutae. Auctore F. G. W. Struve. Petropoli, 1837"	J. f. w. Kr. 1837. II. *78, 79, 80.* 619.

Datum.	Fortl. Nr.	Titel (Abhandlungs-Nummer).	Zeitschrift.
1837 Nov.	310	Recension: „Der Mond oder allgemeine vergleichende Selenographie, von Wilh. Beer und Dr. J. H. Mädler. Berlin 1837".	J. f. w. Kr. 1837. II. *84*, [*85, 86, 87.* 670.
	311	Vorwort zu dem Beitrage zur Theorie der astron. Strahlenbrechung von F. W. Barfuss	A. N. XV. *344*, Beil. 137.
Dec.	312	Beobachtungen des Doppelsterns *p* Ophiuchi (s. **108**)	A. N. XV. *343.* 105.
1838 Jan.	313	Eine Bemerkung über die Aufstellungsart beweglicher Instrumente (**73**)	A. N. XV. *344.* 121.
März	314	Erklärung rücksichtlich des Aufsatzes des Herrn Prof. Encke	A. N. XV. *349.* 231.
Mai	315	Anzeige, betreffend die Beobb. auf der Königsberger Sternwarte	A. N. XV. *352.* 279.
	315*	Gibt es Irrlichter? (**148**)	Pogg. Ann. XLIV. 366.
Sept.	316	Bemerkungen über barometrisches Höhenmessen (**146**)	A. N. XV. *356, 357.* 329.
Oct.	317	Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler (**119**)	A. N. XV. *358, 359.* 369.
	318	Ueber die Summation der Progressionen (**120**)	A. N. XVI. *361.* 1.
Oct. (23)	318*	On the Parallax of 61 Cygni (Letter to Sir J. Herschel)	Mo. Not. IV. 152. Phil. Mag. 1839. XIV. 68. Sillim. Journ. XXXVI. 200.
Nov. (2)	319	Messung der Entfernung des 61. Sterns im Sternbilde des Schwans. (Vorlesung in der physik.-ökonom. Gesellschaft zu Königsberg) (vgl. **83**, **84**)	Schum. Jahrb. f. 1839. 1.
	320	Observations pour déterminer la parallaxe annuelle de l'étoile 61 du Cygne. (Extrait d'une lettre à M. de Humboldt.)	C. R. 1838. 2. Semest. 785. Sillim. Journ. XXXVI. 1839. 200.
	320^*_1	Nach Nr. 320 zusammengestellt von A. Gautier	Bibl. un. N. S. XVIII. 182.
Nov. (4)	320^*_2	On the size of the revolutions of the Heliometer; Observations on the tail of Halley's Comet; on the improvement of Reflectors. (From a Letter to Sir J. Herschel)	Mo. Not. IV. 163. Phil. Mag. 1839. XIV. 226.
Dec.	321	Bestimmung der Entfernung des 61. Sterns des Schwans (**83**)	A. N. XVI. *365, 366.* 65.
Oct. (10)	321*	Auszug aus Nr. 321 (Brief an L. v. Buch)	Berl. Ber. 1838. 157.
	322	Gradmessung in Ostpreussen und ihre Verbindung mit preussischen und russischen Dreiecksketten, ausgeführt von Bessel und Baeyer. Berlin 1838. (**135**).	
Dec.	323	Astr. Beobb. a. d. königl. Sternw. in Königsberg 1833. XIX. Abth. Königsb., 1838.	
1839 Jan.	324	Einrichtung zur Erleichterung der Beobb. der Sternbedeckungen (s. **170**)	A. N. XVI. *371.* 161.
	324*	Auszug aus Nr. 324, von A. Gautier	Bibl. un. N. S. XIX. 194.
	325	Anfangspunkte und Endpunkte der in der Nacht vom 13. zum 14. Novbr. [1838] auf der Königsb. Sternwarte beob. Bahnen der Sternschnuppen	A. N. XVI. *371.* 171.
März	326	Ueber den Ausdruck einer Function φx durch Cosinusse und Sinusse der Vielfachen von x (**121**)	A. N. XVI. *374.* 229.
April	327	Ueber die Bestimmung der Libration des Mondes durch Beobachtungen (**164**)	A. N. XVI. *376, 377.* 257.
Juni (26)	327*	Vorläufige Nachricht über eine die Berechnung der Sternschnuppen betr. Arbeit (Brief an Poggendorff.) (vgl. **165**)	Pogg. Ann. XLVII. 525.
Juli	328	Ueber Sternschnuppen (**165**)	A. N. XVI. *380, 381.* 321.
Aug. (22)	329	Mittheilung der corresp. Sternschnuppen-Beobb. von Prof. Feldt in Braunsberg und Altona	A. N. XVI. *384.* 385.
Oct.	330	Beobb. der Sternschnuppen auf der Königsberger Sternwarte (10. u. 11. Aug. 1839)	A. N. XVII. *385.* 1.
Nov. (8)	330*	On his Catalogue of 27 Stars of the Plejades; continuation of the obss. on the parallax of 61 Cygni. (From a Letter to M. Baily)	Mo. Not. V. 7. [150. Phil. Mag. 1840. XVI.
Dec.	331	Verzeichniss von 27 Sternen der Plejaden aus Königsberger Meridianbeobb. abgeleitet (vgl. **104**)	A. N. XVII. *387.* 33.
	332	Beobb. von Sternschnuppen am 13. Nov. 1839 auf der Königsb. Sternwarte	A. N. XVII. *387.* 45.
	333	Anzeige die Fundamenta Astronomiae und die Königsberger Astr. Beobb. betreffend	A. N. XVII. *387.* 47.
	334	Darstellung der Untersuchungen und Maassregeln, welche in den Jahren 1835 bis 1838 durch die Einheit des Preussischen Längenmaasses veranlasst worden sind. Berlin, 1839. (Beilage I, **151**).	
1840 April	335	Ueber das preussische Längenmaass und die zu seiner Verbreitung durch Copien ergriffenen Maassregeln (**150**)	A. N. XVII. *397.* 193.
Mai	336	Ein Hülfsmittel zur Erleichterung der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate (**122**)	A. N. XVII. *399.* 225.
	337	Fernere Nachricht von der Bestimmung der Entfernung des 61. Sterns des Schwans (**84**)	A. N. XVII. *401, 402.* 257.
	337*	Auszug aus Nr. 337, von A. Gautier	Bibl. un. N. S. XXVIII. 399.

Datum.	Fortl. Nr.	Titel (Abhandlungs-Nummer).	Zeitschrift.
1840 Mai	338	Nouvelles observations sur la parallaxe annuelle de la 61. étoile du Cygne. (Lettre à M. Arago) (s. **84**)	C. R. 1840. 1. Semest. 70
Mai (8)	338*	On the Parallax of 61 Cygni. (From a Letter to Sir J. Herschel)	Mo. Not. V. 55.
Juni	339	Beobb. von Sternbedeckungen in den Jahren 1834 bis 39 (und der Sonnenfinsterniss vom 15. Mai 1836)	A. N. XVII. *402.* 265.
	340	Ueber ein Mittel z. Bestimmung d. Brennweite d. Objectivglases eines Fernrohrs (**69**)	A. N. XVII. *403.* 289.
Juli	341	Neue Formeln von Jacobi, für einen Fall der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate (**123**)	A. N. XVII. *404.* 305.
Nov.	342	Brief an die naturforschende Gesellschaft in Danzig in Betreff der an Flemming übertragenen Arbeiten. (Mitgeth. von Prof. Strehlke) (s. **180**)	Danziger Dampfboot 1840. *141.* 561.
Dec.	343	Ueber die Grundformeln der Dioptrik (**152**)	A. N. XVIII. *415.* 97.
	344	Ueber Maass und Gewicht im Allgemeinen und das preussische Längenmaass insbesondere (vgl. **150**)	Schum. Jahrb. f. 1840. 1.
	345	Astr. Beobb. a. d. königl. Sternwarte in Königsb. 1834. XX. Abth. Königsb., 1840.	
1841 April	346	Neue Untersuchung der Reductionselemente der Declinationen und Bestimmung der Declinationen der Fundamentalsterne (**90**)	A. N. XVIII. *422.* 217.
Aug.	347	Verzeichniss von 53 Sternen der Plejaden, aus Beobb. mit dem Königsberger Heliometer abgeleitet (s. **104**)	A. N. XVIII. *430.* 353.
	348	Recherches sur les satellites et sur la masse de Jupiter. (Lettre à M. de Humboldt) (vgl. **168**)	C. R. 1841. 2. Semestre. 58
Dec.	349	Ueber einen Fehler in der Berechnung der französischen Gradmessung und seinen Einfluss auf die Bestimmung der Figur der Erde (**134**)	A. N. XIX. *438.* 97.
	349*	Ueber die Gestalt der Erde (Auszug aus Nr. 349)	Pogg. Ann. LV. 529.
	350	Astronomische Untersuchungen. I. Band. Königsberg, 1841. (I. Theorie eines mit einem Heliometer versehenen Aequatorealinstruments, **70**; II. Besondere Untersuchung des Heliometers der Königsberger Sternwarte, Auszug **71**; III. Einfluss der Strahlenbrechung auf Mikrometerbeobb., Auszug **167**; IV. Einfluss der Präcession, Nutation und Aberration auf die Resultate mikrometrischer Messungen, **46**; V. Beobb. verschiedener Sterne der Plejaden, **104**; VI. Ueber die scheinb. Figur einer unvollständig erleuchteten Planetenscheibe, **51**; VII. Beobb. der gegenseitigen Stellungen von 38 Doppelsternen, Auszug **101**; VIII. Ueber den Doppelstern *p* Ophiuchi, **103**).	
	350*	Anzeige von Nr. 350, von Schumacher	A. N. XIX. *434.* 17.
1842 Jan.	351	Ueber eine bei einer Feuersbrunst beobachtete Lufterscheinung (**149**)	K. H. Z. 1842. *1.* 5. Pogg. Ann. LIV. 662.
März (20)	352	Aeusserung über Claussen's Preisschrift über den Cometen von 1770	A. N. XIX. *451.* 336.
	353	Ueber den Magnetismus der Erde	Schum. Jahrb. f. 1843. 1.
Juni (28)	354	On the astronomical clock. (In dem Meeting der British Association zu Manchester gelesen)	Brit. Assoc. Report 1842. Notices 1. Sillim. Journ. XLIV. 169.
	354*	On a very curious fact connected with photography, discovered by M. Möser of Königsberg (Mittheilung an Brewster)	Brit. Assoc. Report 1842. Notices p. 14. Sillim. Journ. XLIV. 159.
Aug. (1)	355	Sur la réfraction astronomique. (**84**)	C. R. 1842. 2. Semest. 181.
Oct.	356	Astronomische Untersuchungen. II. Band. Königsberg, 1842. (IX. Bestimmung der Masse des Jupiter, Auszug **168**; X. Analyse der Finsternisse, **169**; XI. Ein Hülfsmittel zur Erleichterung der Beobb. der Sonnenfinsternisse und Sternbedeckungen, **170**; XII. Beob. des Durchgangs des Mercur durch die Sonne, am 4/5. Mai 1832, Auszug **171**; XIII. Beob. der Sonnenfinsterniss vom 15. Mai 1836; XIV. Neue Berechnungsart für die Methode der Entfernungen des Mondes von anderen Himmelskörpern, **172**.)	
Nov. (14)	356*	Beginning of the obss. relating to the parallax of 1830 Groombr.; on the division of his Repsold Mer.-Circle. (From a Letter to M. Henderson)	Mo. Not. V. 265.
1843 Jan.	357	Bemerkungen und Untersuchungen über Pendeluhren (**67**)	A. N. XX. *465.* 137.
Febr. (10)	358	Ueber Sir William Herschel. (Vortrag in der physik.-ökonom. Gesellschaft) (**181**) .	K. A. Z. 1843. *37*, 38, *39.* 147.
März	359	Ueber den Cometen im März 1843	K. A. Z. 1843. *69.* 273.

Datum.	Fortl. Nr.	Titel (Abhandlungs-Nummer).	Zeitschrift.
1843 März	360	Oerter des Cometen im März 1843	K. A. Z. 1843. *75.* 300.
März (28)	361	Beobb. (von Schlüter) des grossen Cometen von 1843	A. N. XX. *474.* 297.
April (4)	362	Schreiben an die Redaction der Königsberger Allgemeinen Zeitung (**185**)	K. A. Z. 1843. *81.* 323.
April (13)	363	Elemente und Ephemeride des grossen Cometen von 1843	A. N. XX. *477.* 337.
Mai (21)	364	Beobb. (von Schlüter) des Mauvais'schen Cometen von 1843	A. N. XX. *480.* 395.
	365	Ort des von Herrn Mauvais am 3. Mai entdeckten Cometen	K. A. Z. 1843. *118.* 492.
	366	Ueber Schwinck's neue Himmelskarten (vgl. **166**)	K. A. Z. 1843. *142.* 599. Allg. Pr. Ztg. 1843. *14.* 87.
Juni (17)	367	Ueber die neuen Himmelskarten von Hauptmann Schwinck (**166**)	A. N. XXI. *482.* 29.
Juli (14)	368	Beobb. und Elemente des Mauvais'schen Cometen (von Schlüter)	A. N. XXI. *484.* 49.
	369	Erste Leistungen eines auf der Königsberger Sternwarte befindlichen Repsold'schen Meridiankreises (mit Nachträgen von Wichmann und Luther, vgl. 396) (**65**). . .	A. N. XXI. *481, 482.* 1.
1844 Jan. (22)	370	On the influence of gravity upon the figure of a vertical Circle (from a Letter to Sir J. Herschel) (vgl. **76**)	Mo. Not. VI. 62. [227. Phil. Mag. 1844. XXV.
Aug.	371	Ueber die Veränderlichkeit der eigenen Bewegungen der Fixsterne (**105**)	A. N. XXII. *514, 15, 16.* 145.
Aug. (10)	371*	Auszug aus Nr. 371 (Brief an Humboldt)	Berl. Ber. 1844. 314.
„ „	372	On the variations of the proper motion of Procyon and Sirius. (From a Letter to Sir J. Herschel) (vgl. **105**)	Mo. No. VI. 136. [256. Phil. Mag. 1845. XXVI.
Sept.	373	Ueber die Berechnung der wahren parabolischen Anomalie aus der Zeit, für Fälle in welchen sie sich 180° nähert (**7**)	A. N. XXII. *520.* 253.
	374	Ueber Olbers. (**182**)	A. N. XXII. *521.* 265.
	375	Astr. Beobb. a. d. königl. Sternw. in Königsberg 1835. XXI. Abth. Königsb., 1844	
1845 Jan. (23)	376	Ueber neue Logarithmentafeln von Shortrede (**124**)	A. N. XXIII. *529.* 1.
Jan. (29)	377	Beobb. des d'Arrest'schen Cometen (von Wichmann)	A. N. XXIII. *529.* 5.
Febr.	378	Uebervölkerung. Aufsatz darüber (**184**)	K. A. Z. 1845. *40.* 187.
März (12)	379	Beobb. des d'Arrest'schen Cometen (von Wichmann)	A. N. XXIII. *531.* 41.
Juni (20)	380	Beobb. des grossen Cometen im Juni 1845 (von Busch und Wichmann)	A. N. XXIII. *542.* 219.
	380*	Berichtigung einer Beob. des d'Arrest'schen Cometen (von Wichmann mitgetheilt) .	A. N. XXIII. *548.* 320.
1846 (Jan. 15 u. 24)	381	Beobb. der Astraea	A. N. XXIV. *553.* 1.
Febr. (5)	382	Beobb. der Astraea und Verzeichniss ihrer Vergleichsterne	A. N. XXIV. *554.* 17.
Febr. (22)	383	Ueber Westphalen's Arbeit über den Halley'schen Cometen. (Letzter Brief an Schumacher)	A. N. XXIV. *573.* 333.
	384	Ueber die aus der Schwere hervorgehenden Veränderungen, die der Kreis eines astronomischen Instruments in der lothrechten Lage seiner Ebene erfährt. (**76**). . .	A. N. XXV. *577, 578, 579.* 1.
(1848)	385	Populäre Vorlesungen über wissenschaftliche Gegenstände von F. W. Bessel. Nach dem Tode des Verfassers herausgegeben von H. C. Schumacher. Hamburg, 1848. (Bemerkungen über die Uranusbewegung, s. **180** Anm.)	
	385*1	Auszug aus Nr. 385 von Wolfers	Grunert's Archiv f. Math. XIII. 143.
	385*2	Anzeige von Nr. 385 von Jahn	Jahn's wöch. Unterhalt. II. 38.
(1848)	386	Theorie des Saturnssystems (**22**)	A. N. XXVIII. *649* u. fl. 1.
(1849)	387	Construction eines symmetrisch geformten Pendels mit reciproken Axen (**140**). . .	A. N. XXX. *697.* 1.
(1809)	388	Formeln für die jährliche Parallaxe in Rectascension (mitgeth. von Lindenau) (**79**)	M. C. XIX. 245.
(1827)	389	Methode der Berechnung geodätischer Vermessungen (mitgeth. von Rosenberger) (**129**)	A. N. VI. *121.* 1.
(1847)	390	Heliometerbeobb. des Saturn und der ♄ Satelliten 1836 und 37, des III. und IV. Jupiter-Satelliten, des Mars 1830—37 (mitgeth. von Busch)	Königsb. Beobb. XXIII. 85.
(1848)	391	Heliometerbeobb. von Doppelsternen, zur Parallaxe 61 Cygni, Vergleichung von α Boot. mit einem südlichen Stern 7^m, Encke'scher Comet 1838; Spectrum von α Pisc. austr. (vgl. **84**) (mitgeth. von Busch)	Königsb. Beobb. XXIV. 69.
(1848)	392	Doppelsternbeobb. mit dem Königsb. Heliom. 1833—47 von Bessel, Schlüter u. A. (mitgeth. von Wichmann) (vgl. **102**)	A. N. (XXIX.) Erg.-Heft. [99.
(1849)	393	Correctionsformel wegen Fadenneigung beim Meridiankreis (mitgetheilt von Busch) (**176**)	A. N. XXIX. *677.* 65.
(1849)	394	Reduction von Heliometerbeobb. bei Aenderung der relativen Lage beider Gestirne (mitgeth. von Busch und Wichmann) (**177**)	Königsb. Beobb. XXIX. 61.
(1854)	395	Beobb. zweier Algolsminima, 1805 Sept. 17 und Oct. 30 (mitgeth. von Argelander)	A. N. XXXIX. *931.* 291.

Datum.	Fortl. Nr.	Titel (Abhandlungs-Nummer).	Zeitschrift.
(1856)	396	Rectificirung und Theilfehlerbestimmung des Repsold'schen Meridiankreises (mitgeth. von Wichmann und Luther) (**65**, Anhang)	Königsb. Beobb. XXVI. p. XIV und XXIV.
(1856)	397	Beobb. mit dem Repsold'schen Meridiankreise April 1842 bis Dec. 1844 (mitgeth. von Luther und Wichmann)	Königsb. Beobb. XXVII.
(1856)	398	Beobb. der Plejadensterne 1829—41 (mitgeth. von Luther) (vgl. **104**)	Königsb. Beobb. XXVIII.
(1857)	399	Declinat. d. Fundamentalsterne aus Bessel's letzten Beobb. (berechnet von Luther) (**91**)	A. N. XLV. *1076*. 305. (Königsb. Beobb. XXXIII. 115.)
		Briefwechsel zwischen W. Olbers und F. W. Bessel. Herausgegeben von Adolph Erman. Zwei Bände. Leipzig, 1852. („Kurze Erinnerungen an Momente meines Lebens" (**Lebensabriss**); zur Bestimmung der Excentricität der Cometenbahnen (**4**); zur Bestimmung des Olbers'schen *M* (**5**); Methode der Collimationsfehler-Bestimmung beim Mauerquadranten (**53**); Bemerkung über die Veränderlichkeit des Collimationsfehlers beim Dollond'schen Mittagsfernrohr (**60**, Anm. p. 31); über die Parallaxe von α Herculis (**77**); Beweis des Moivre'schen Satzes (**110**); über einen Satz aus der Lehre von den Kegelschnitten (**114**); über eine geometrische Aufgabe (**115**); über K. L. Struve's Parallellinien-Theorie (**116**); über die Figur des Saturnsschattens (**154**^{b}); über die Wahrscheinlichkeit einen Cometen zu finden (von Olbers u. Bessel) (**178**); über die Parallaxen einiger Fundamentalsterne (**174**); zur Verbesserung einer Cometenbahn nach Olbers' Methode (**175**).)	

2. Literatur über Bessel.

Olbers (Zach), Bemerkungen über Bessel und seine erste Arbeit: Mon. Corr. X. 425. (s. Abh. 1, Anm.)

Anzeigen von Bessel's Tod: Astr. Nachr. XXIV, 49; Phil. Mag. 1846. XXVIII, 343; Mo. Not. VII, 81, 89; Athenaeum 1846. (Nr. 962) 351; Sillim. Journ. Sec. Ser. II, 145; C. R. XXII, 559.

Anger, Erinnerung an Bessel's Leben und Wirken. Danzig (1846).

Kosch, Bessel's letzte Krankheit, beschrieben und erläutert. Königsberg, 1846.

Encke, Gedächtnissrede auf Bessel. Abhh. der Berl. Akad. für 1846. (Berlin, 1848.)

Rosenkranz, Rede zur Gedächtnissfeier Bessel's. Königsberg, 1846.

Scherk, Gedächtnissrede für Bessel (1846).

Bessel's Geburtstagsfeier am 22. Juli 1847. Königsberg, 1847.

Herschel, A brief notice of F. W. Bessel. London, 1847. (In: Mem. Astr. Soc. XVI, 512; Mo. Not. VII, 199; Astr. Nachr. XXV ad 340; Sillim. Journ. Sec. Ser. IV, 305; Auszug in: Phil. Mag. 1847. XXX, 201).

Jahn, Erinnerung an F. W. Bessel (Jahn's Wöchentliche Unterhaltungen I, 27. Leipzig, 1847).

Peters, Uebersicht der Leistungen Bessel's in der Stellar-Astronomie und in der Theorie der astron. Instrumente (Vortrag am 12. Nov. 1849 in der physik.-ökon. Gesellschaft zu Königsberg). Königsb. naturwiss. Unterhaltungen II. Königsberg, 1852.

Busch, Ueber Bessel's letzte Arbeiten und Lebensjahre (Königsberger Beobb. [1855] XXVII, p. V).

Wichmann, Beiträge zur Biographie von F. W. Bessel (Peters, Zeitschrift für popul. Mittheilungen I, 168. Altona, 1860).

Durège, Bessel's Leben und Wirken (Vortrag am 24. Jan. 1[8] in Zürich). Zürich, 1861.

Mädler, F. W. Bessel, in Westermann's Monatsheften, Braunschweig, Sept. 1867.

Bruhns, Artikel „Bessel" in der allgem. deutschen Biographie 9. Lief. Leipzig, 1875.

Bessel's Portrait, gemalt von Wolf 1834, gestochen von Mayer 1852: Königsb. Beobb. XXVII.

Busch, über dasselbe: Astr. Nachr. XXXIV, 51.

Schumacher, über Bessel's Bild, gemalt von Jensen 183[8]: Astr. Nachr. XXIV, 331.

Ueber Bessel's Büste von Siemering: Astr. Nachr. LIV, 15.

Auswärtiges Mitglied der Berliner Akademie der Wissenschaften (Juli 1812): Abhh. der Berl. Akad. 1812—13.

Associé étranger der Pariser Académie des sciences (Mai 18[1]: C. R. X, 751.

Herschel, Adress delivered to Prof. Bessel on presenting [t]: honorary medal of the Astronom. Society:
13. Febr. 1829 for his Zone-Observations, Mem. Astr. Soc. IV, 217 (Mo. Not. I. 110);
12. Febr. 1841 for his researches on 61 Cygni, Mem. Astr. Soc. XII, 442 (Mo. Not. V. 89).

Busch, Verzeichniss der Werke, Abhandlungen, Aufsätze und Bemerkungen von F. W. Bessel: Königsb. Beobb. XXIV, p. XXII.

Verzeichniss der Bessel'schen Schriften in: Catalogue of scientific papers (1800—1863), compiled and publ. by the Royal Society of London. — Struve, Libror. in Bibliotheca Spec. Pulcov. Catalogus. Petropoli, 1860.

Königsberg 12 Octbr. 1828

Das was ich im vorigen Jahre in München gesehen habe, giebt mir gar keinen Grund, der Versicherung Utzschneiders, daß das große Objectiv des damals in der Arbeit begriffenen Fernrohrs noch von Fraunhofer sei, zu mistrauen. Vielmehr glaube ich, daß man die Verfertigung eines solchen Objectivs, kurz nach Fraunhofers Tode nicht unternommen haben würde: Fraunhofer hat vermuthlich mehrere zugleich arbeiten lassen um darunter wählen zu können. Dieses wird die Veranlassung gewesen sein, ein so großes Instrument, ohne daß es bestellt worden ist, zu vollenden. – Auch darüber habe ich keinen Zweifel; daß die Aufstellung des ~~Ganzen~~ Fernrohrs und die Einrichtung des Ganzen, genau nach dem Fraunhoferschen Modelle sein wird; – theils ist mir dieses gesagt worden und ich habe die gewaltigen Axen &c... selbst in Arbeit gesehen, theils habe ich dafür einen ähnlichen Grund wie oben: es ist nämlich, bei dem Zustande des Instituts wie er ist, wahrscheinlich daß man sich genau an ein Modell hält, als daß man davon abweicht. – Ich kann noch hinzusetzen, daß der Vorsteher der mechanischen Arbeiten des Instituts, Mahler, mir ein tüchtiger Mann zu sein schien, so daß ich wirklich glaube, daß er Fraunhofers Direction, wenn er sie entbehren muß, wirklich entbehren kann.

Mein Rath ist also "nach dem fertigen Instrumente, mit beiden Händen zu greifen"! – Wird dieses Instrument erworben, so ist damit zugleich eine Sternwarte in Berlin gewonnen. – Ich sehe sehr deutlich ein, daß die in Königsberg sich, trotz allen Schwierigkeiten und öfteren Sorgen um ihr nöthigstes tägliches Brod, lebende Sternwarte, mit Einschluß ihres Vorstehers, nun Stiefkinder werden. Aber dem Rechte und der Wahrheit die Ehre! – Das Fernrohr muß, wenn es irgend möglich ist, nach Berlin; es könnte vielleicht kein drittes zu haben sein.

Dieses in aller Kürze um die Post nicht zu versäumen, da Sie Eile wünschen. Ihrem versprochenen Briefe sehe ich mit Verlangen entgegen und nehme Sie deshalb beim Worte.

Die Ephemeride der 36 Sterne erhalten Sie nun sehr bald. Meine allgemeinen Tafeln schreiten auch vor, aber sie sind außerordentlich mühsam und ermüdend. Wenn ich sie nicht für eine unerläßliche Bedingung des Fortschreitens der Astronomie des Sonnensystems ansähe, so mögte ein Anderer sich damit plagen. – Am Ende wird es mir schwer werden, für ein solches Tafelnwerk (40 Bögen) einen Verleger zu finden. – Doch über Alles sollen Sie mehr hören, bei Gelegenheit der Antwort auf Ihren erwarteten Brief.

Der Ihrige

F W Bessel

Am 3ten d. war Ihr Komet im Fernrohre des M. Kr. ansichtbar, obgleich der Himmel sehr hieher war. Auch gestern habe ich ihn noch nicht sehen können, bin aber nicht sicher ob nicht Dünste im Himmel waren.

3 2044 051 138 717

WIDENER
WIDENER
FEB 10 2000
DEC 0 1 1997
Book Due
CANCELLED